Zestaw 7

Statystyka i rachunek prawdopodobieństwa

1. Obliczyć wartość oczekiwaną i wariancję zmiennej losowej X takiej, że $P(X = c) = 1$, gdzie $\mathbb{R} \ni c \in$ const.

2. Udowodnić dla dyskretnych zmiennych losowych X i Y, że
   (a) $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$,
   (b) $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$.

3. Udowodnić dla niezależnych ciągłych zmiennych losowych X i Y, że
   (a) $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$,
   (b) $V(aX + b) = a^2V(X)$.

4. Obliczyć wariancję zmiennej losowej X o rozkładzie dwumianowym.

5. Udowodnić, że $V(X) = \mathbb{E}[(X - c)^2] - (c - \mathbb{E}(X))^2$, gdzie $\mathbb{R} \ni c \in$ const.

6. (a) Wykazać, że $\varphi(-t) = \varphi^*(t)$, gdzie $*$ oznacza sprzężenie zespolone.
   (b) Pokazać, że symetryczne (względem zera) rozkłady prawdopodobieństwa mają rzeczywiste funkcje charakterystyczne.

7. Wyprowadzić funkcję charakterystyczną $\varphi(t)$ zmiennej losowej $Z = \sum_{i=1}^{n} X_i^2$, gdzie X_i są iid o rozkładzie $\mathcal{N}(0, 1)$.

8. Wyprowadzić funkcję charakterystyczną $\varphi(t)$ rozkładu jednorodnego $\mathcal{U}(a, b)$. Wykorzystać ją do obliczenia wartości oczekiwanej i wariancji tego rozkładu.

   Wskazówka 1. Można skorzystać z rozwinięcia Taylora: $\mathrm{e}^{\mathrm{i}tx} = 1 + \mathrm{i}tx - t^2x^2/2 + \ldots$

   lub

   Wskazówka 2. z twierdzenia Leibniza o różniczkowaniu pod całką w zastosowaniu do wyrażenia $\varphi(t) = \mathbb{E}\left(\mathrm{e}^{itX}\right)$.

*9. Funkcja generująca momenty (MGF) rozkładu skośnie normalnego (*skew normal distribution*) o gęstości prawdopodobieństwa

$$f_{\mathcal{SN}}(x) = \frac{2}{\sigma}\phi\left(\frac{x-\mu}{\sigma}\right)\Phi\left(\lambda\frac{x-\mu}{\sigma}\right)$$

jest postaci

$$M_{\mathcal{SN}}(t) = 2\exp\left[\mu t + \frac{\sigma^2 t^2}{2}\right]\Phi(\delta\sigma t)\,,$$

gdzie $\delta = \dfrac{\lambda}{\sqrt{1+\lambda^2}}$.

Niech będą dane ciągłe zmienne losowe $X \sim \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_2)$ oraz $Y \sim \mathcal{SN}(\mu_2, \sigma_2, \lambda_2)$. Wykorzystać ich MGFy do określenia rozkładu zmiennej $X + Y$.

10. Niech zmienna losowa $X \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Obliczyć $\mathbb{E}(X \sin X)$. *Wskazówka.* Funkcja charakterystyczna.