

Zestaw 6

Statystyka i rachunek prawdopodobieństwa

©Mariusz Tarnopolski 2026

1. Dana jest tablica dwudzielna zmiennej losowej (X, Y) :

$Y \backslash X$	0	1	2
0	0.1	0.2	0.1
1	0.1	0.2	0.3

- (a) Sprawdzić, czy jest to poprawny rozkład prawdopodobieństwa.
 - (b) Wyznaczyć rozkłady brzegowe zmiennych X i Y .
 - (c) Wyznaczyć rozkłady warunkowe $P(X|Y = 1)$ oraz $P(Y|X = 2)$.
 - (d) Sprawdzić, czy zmienne X i Y są niezależne.
2. Dla zmiennej losowej (X, Y) z poprzedniego zadania:
- (a) Wyznaczyć dystrybuantę rozkładu brzegowego $F_X(x)$.
 - (b) Wyznaczyć dystrybuantę rozkładu brzegowego $F_Y(y)$.
 - (c) Obliczyć prawdopodobieństwo $P(X \leq 1, Y = 1)$.
3. Z urny zawierającej 3 kule białe i 2 czarne losujemy dwie kule bez zwracania. Niech
- X — liczba wylosowanych kul białych,
 - Y — liczba wylosowanych kul czarnych.
- (a) Wyznaczyć rozkład łączny (X, Y) .
 - (b) Wyznaczyć rozkłady brzegowe.
 - (c) Wyznaczyć rozkład warunkowy $P(X|Y = 1)$.
 - (d) Czy zmienne X i Y są niezależne?

4. Dana jest gęstość:

$$f(x, y) = 2 \cdot \mathbb{1}_{0 \leq x \leq y \leq 1}$$

- (a) Sprawdzić, czy jest to poprawna gęstość.
 - (b) Wyznaczyć gęstości brzegowe $f_X(x)$ i $f_Y(y)$.
 - (c) Wyznaczyć gęstość warunkową $f_{X|Y}(x|y)$.
 - (d) Czy zmienne X i Y są niezależne?
5. Dana jest gęstość:

$$f(x, y) = 6xy \cdot \mathbb{1}_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1}$$

- (a) Obliczyć $P(X < 0.5, Y < 0.5)$.
- (b) Obliczyć $P(X < Y)$.
- (c) Obliczyć $P(X + Y < 1)$.

6. Dana jest gęstość:

$$f(x, y) = 4xy \cdot \mathbb{1}_{0 < x < 1, 0 < y < 1}$$

- (a) Wyznaczyć gęstości brzegowe.
- (b) Sprawdzić, czy zmienne X i Y są niezależne.
- (c) Obliczyć $P(X < 0.5 | Y = 0.5)$.

7. (ĆW) Dobrać stałą c tak, by funkcja

$$f(x, y) = cxy(2 - x - y) \cdot \mathbb{1}_{0 \leq x \leq 1, 0 \leq y \leq 1}$$

była gęstością prawdopodobieństwa dwuwymiarowej ciągłej zmiennej losowej (X, Y) .

- (a) Wyznaczyć dystrybuantę.
- (b) Zbadać, czy zmienne X i Y są niezależne.
- (c) Wyznaczyć $f(y|x)$.

8. (ĆW) Niech dwuwymiarowa ciągła zmienna losowa (X, Y) ma rozkład o gęstości

$$f(x, y) = \frac{1}{2}(x + y)e^{-x-y} \cdot \mathbb{1}_{x \geq 0, y \geq 0}$$

Wyznaczyć:

- (a) dystrybuantę
- (b) $P(|X| < 1, |Y| > 1)$
- (c) rozkład brzegowy zmiennej losowej X

9. Niech $X, Y \sim \mathcal{U}(0, 1)$ będą niezależne. Wyznaczyć gęstość zmiennej $U = XY$.

10. Niech X, Y będą niezależne o gęstościach

$$f_X(x) = e^{-x}, x > 0, \quad f_Y(y) = e^{-y}, y > 0.$$

Wprowadź zmienne

$$U = X + Y, \quad V = Y.$$

- (a) Wyznaczyć jacobian transformacji (ew. transformacji odwrotnej).
- (b) Wyznaczyć gęstość $f_{U,V}(u, v)$.
- (c) Wyznaczyć gęstość zmiennej U .