

Zestaw 3

Statystyka i rachunek prawdopodobieństwa

©Mariusz Tarnopolski 2026

1. Rozważyć rzut dwiema sześciennymi kostkami. Podać funkcję prawdopodobieństwa zmiennej losowej X reprezentującej sumę wyrzuconych oczek.
2. Dana jest tablica dwudzielna dyskretnej zmiennej losowej X :

x_i	-5	-2	0	1	3	8
p_i	0.1	0.2	0.1	0.2	c	0.1

Wyznaczyć:

- (a) stałą c ,
 - (b) wykres funkcji prawdopodobieństwa f ,
 - (c) dystrybuantę F i jej wykres,
 - (d) prawdopodobieństwa:
 - i. $P(X = 1)$,
 - ii. $P(X = 2)$,
 - iii. $P(X < 2)$,
 - iv. $P(X < 3)$,
 - v. $P(X \geq 0)$,
 - vi. $P(-2 \leq X < 3)$ dwoma sposobami: z funkcji prawdopodobieństwa oraz z dystrybuanty.
3. Obsługa działu artyleryjskiego ma 3 pociski. Prawdopodobieństwo trafienia do celu jednym pociskiem wynosi 0.7. Strzelanie kończy się z chwilą trafienia celu lub wyczerpania pocisków. Wyznaczyć:
 - (a) funkcję prawdopodobieństwa liczby oddanych strzałów,
 - (b) przeciętną liczbę oddanych strzałów
 4. Pociąg na swojej trasie mija 4 semafony, z których każdy niezależnie od pozostałych zezwala na przejazd z prawdopodobieństwem równym 0.8. Niech zmienna losowa X określa liczbę semaforów, które zezwoliły na przejazd. Przyjąć, że pociąg jedzie siłą rozpędu i zatrzymanie przed którymkolwiek semaforem kończy jego bieg. Znaleźć:
 - (a) rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X ,
 - (b) dystrybuantę zmiennej X ,
 - (c) $P(X \geq 2)$.
 5. Dobrać stałe A i B tak, by funkcja określona na $-\infty < x < \infty$ wzorem

$$F(x) = A + B \arctan x$$

była dystrybuantą ciągłej zmiennej losowej X . Wyznaczyć gęstość prawdopodobieństwa.

6. Dobrać stałą c tak, by funkcja

$$f(x) = c \sin(x) \cdot \mathbb{1}_{x \in [0, \pi]}$$

była gęstością prawdopodobieństwa. Następnie:

- (a) wyznaczyć dystrybuantę,
- (b) obliczyć $P(|X| < \frac{\pi}{3})$,
- (c) narysować wykresy gęstości i dystrybuanty.

7. Niech zmienna losowa ciągła X , przyjmująca wartości nieujemne, ma dystrybuantę $F(x) = 1 - \exp(-\lambda x)$. Obliczyć:

- (a) gęstość prawdopodobieństwa (sprawdzić unormowanie),
- (b) prawdopodobieństwa $P(X > 2)$ oraz $P(1 < X < 3)$,
- (c) medianę zmiennej losowej X .

*8. Rozwiązać równanie różniczkowe $\phi'(x) + x\phi(x) = 0$, gdzie $\phi(x)$ jest funkcją gęstości prawdopodobieństwa ciągłej zmiennej losowej X na $\mathbb{R}$.

*9. Udowodnić, że dystrybuanta $F(x)$ jest funkcją monotonicznie niemalejącą.