

Zestaw 2

Statystyka i rachunek prawdopodobieństwa

©Mariusz Tarnopolski 2026

1. Wykorzystując przybliżenie $\ln(1 - x) \approx -x$ dla $x \ll 1$, oszacować minimalną liczbę osób N taką, by prawdopodobieństwo zbiegu urodzin przekroczyło 50%.
2. W kontekście paradoksu urodzin, obliczyć $P(A_N)$ dla
 - (a) $N = 30$
 - (b) $N = 40$
3. Kalendarz rzymski liczył 304 dni. Jak w takim kalendarzu wygląda paradoks urodzin?
 - (a) Obliczyć minimalne N takie, że $P(A_N) > 1/2$.
 - (b) Porównać ze zwykłym rokiem gdy $N = 23$.

4. Problem Monty Halla — rozszerzenie.

W programie są 4 bramki $\{A, B, C, D\}$. W jednej jest nagroda, zaś w pozostałych 3 znajdują się zonki. Uczestnik wybiera jedną bramkę. Prowadzący, znając rozmieszczenie nagród, otwiera dwie bramki bez nagrody.

- (a) Jakie jest prawdopodobieństwo wygranej dla strategii Trzymać?
- (b) Jakie jest prawdopodobieństwo wygranej przy strategii Zmienić?

Która strategia jest lepsza?

- *5. „Nieuczciwy” Monty Hall (z trzema bramkami).

Prowadzący nie zawsze otwiera bramkę, w której nie ma nagrody: z prawdopodobieństwem $p = 0.8$ pokazuje bramkę bez nagrody, ale z prawdopodobieństwem $1 - p = 0.2$ otwiera losową bramkę (tj. może pokazać nagrodę i przerwać tym samym grę). Obliczyć:

- (a) Prawdopodobieństwo, że po otwarciu bramki bez nagrody bardziej opłaca się Zmienić niż Trzymać.
- (b) Czy nieprzewidywalność zachowania prowadzącego zmienia (niszczy) klasyczne rozwiązanie?