

Zestaw 1

Statystyka i rachunek prawdopodobieństwa

©Mariusz Tarnopolski 2026

1. Niech będzie przestrzeń zdarzeń elementarnych $\Omega = \{\omega_i\}_{i=1}^5$, oraz $A = \{\omega_1, \omega_3, \omega_5\}$, $B = \{\omega_2, \omega_3, \omega_4\}$. Znaleźć zdarzenia:
 - (a) $A \cup B$
 - (b) $A \cap B$
 - (c) $A \setminus B$
 - (d) $B \setminus A$
 - (e) $\bar{A}$
 - (f) $\bar{B}$
2. Zdarzenie A pociąga za sobą zdarzenie B , tj. $A \subseteq B$. Uzupełnić równości:
 - (a) $A \cup B =$
 - (b) $A \cap B =$
 - (c) $A \setminus B =$
 - (d) $A \cup (B \setminus A) =$
 - (e) $A \cap B \cap C =$
 - (f) $A \cup (\bar{A} \cap B) =$
3. Wykazać, że:
 - (a) $A \setminus B = A \cap \bar{B}$
 - (b) $B = (A \cap B) \cup [B \setminus (A \cap B)]$
 - (c) $A \cup B = A \cup [B \setminus (A \cap B)]$
 - (d) Korzystając z (b) i (c): $P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$
4. Korzystając z wyniku zad. 3d, obliczyć $P(A \cup B \cup C)$.
5. Wykazać, że przy założeniu $A \subseteq B$ zachodzi $P(B \setminus A) = P(B) - P(A)$.
6. Na szczyt prowadzi 5 dróg; każda z nich nadaje się też do zejścia. Zakładamy, że trasy są równorzędne. Obliczyć prawdopodobieństwo spotkania się 2 wędrowców, z których jeden wchodzi na szczyt a drugi jest już w drodze powrotnej.
7. Z 10 pracowników należy utworzyć:
 - (a) dwa zespoły liczące 4 i 6 pracowników;
 - (b) trzy zespoły liczące 2, 3, 5 pracowników;
 - (c) pięć zespołów liczących po 2 pracowników.

Dla każdego z powyższych przypadków znaleźć prawdopodobieństwo, przy losowym przydziale pracowników do zespołów, że dwóch ustalonych pracowników znajdzie się w tym samym zespole.

-
8. Na 10 klockach wyrzeźbiono litery: a,a,k,s,s,t,t,t,y,y. Bawi się nimi dziecko, układając litery w rzędy. Obliczyć prawdopodobieństwo ułożenia słowa „statystyka”.
9. Ile jest podzbiorów n -elementowego zbioru Ω ?
10. Winda wyposażona jest w dwa osobne układy hamowania włączające się automatycznie w razie zerwania się liny. Prawdopodobieństwo zadziałania układu hamowania wynosi 0.99. Jakie jest prawdopodobieństwo wyhamowania windy w razie zerwania liny?
11. W szufladzie są czarne i czerwone skarpety. Wyciągamy losowo dwie. Prawdopodobieństwo, że obie są czerwone wynosi $1/2$.
- (a) Jaka jest najmniejsza możliwa liczba skarpet w szufladzie?
- (b) Co jeśli liczba skarper czarnych jest parzysta?
12. Rzucamy losowo monetą o średnicy $3/4$ cm na stół pokryty siatką o odstępach 1 cm. Jeśli moneta znajdzie się w całości w kwadracie, zawodnik wygrywa 10 zł. Jakie jest prawdopodobieństwo wygrania?
13. Jak gruba musi być moneta by padła na krawędź z prawdopodobieństwem wynoszącym $1/3$?
14. Igła Buffona. Płaszczyznę podzielono prostymi równoległymi odległymi o $2a$. Na tę płaszczyznę rzucamy (w sposób przypadkowy) igłę o długości $2l < 2a$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że igła przetnie jedną z prostych?
15. Egzamin składa się z 6 pytań jednokrotnego wyboru (3 opcje odpowiedzi).
- (a) Na ile sposobów można losowo wybrać odpowiedzi? Jakie jest prawdopodobieństwo uzyskania maksymalnego wyniku ($k = 6$)?
- (b) Obliczyć $P(k \text{ poprawnych odpowiedzi})$ dla $k = 3, 4, 5$.
- (c) Obliczyć $P(k \geq 3 \text{ poprawne odpowiedzi})$.