

Statystyka i rachunek prawdopodobieństwa

Wykład 7: Momenty statystyczne

Mariusz Tarnopolski

Instytut Astronomii UMK

Statystyka ©2026



Wartość przeciętna

Powtarzane n razy doświadczenie losowe dało $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ jako zbiór realizacji zmiennej losowej X —niekoniecznie wszystkie x_i muszą być różne. Wyrażenie na średnią arytmetyczną to

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Wartość przeciętna

Powtarzane n razy doświadczenie losowe dało $\{x_1, x_2, \dots, x_n\}$ jako zbiór realizacji zmiennej losowej X —niekoniecznie wszystkie x_i muszą być różne. Wyrażenie na średnią arytmetyczną to

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n x_i$$

Skoro nie wszystkie x_i muszą być różne, to przyjmijmy, że spośród n realizacji jest $k < n$ różnych wartości. Wtedy wyrażenie na średnią przyjmuje postać

$$\bar{x} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^k n_i x_i = \sum_{i=1}^k \frac{n_i}{n} x_i$$

gdzie n_i to krotność wartości x_i , zatem stosunek $\frac{n_i}{n} < 1$ to częstość występowania wartości x_i .

- **Wartość przeciętna (oczekiwana)** dyskretnego rozkładu prawdopodobieństwa z p_i (i —przeliczalne) to operator $\mathbb{E}$ działający na zmienną losową X będący jedną z miar tzw. tendencji centralnych:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i p_i x_i$$

pod warunkiem, że $\sum_i p_i |x_i| < \infty$

- Dla zmiennej losowej ciągłej mamy

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

gdzie $f(x)$ jest gęstością prawdopodobieństwa zmiennej losowej X .

- **Wartość przeciętna (oczekiwana)** dyskretnego rozkładu prawdopodobieństwa z p_i (i —przeliczalne) to operator $\mathbb{E}$ działający na zmienną losową X będący jedną z miar tzw. tendencji centralnych:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_i p_i x_i$$

pod warunkiem, że $\sum_i p_i |x_i| < \infty$

- Dla zmiennej losowej ciągłej mamy

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

gdzie $f(x)$ jest gęstością prawdopodobieństwa zmiennej losowej X .

Przykład. Rozpatrzmy rzut standardową kostką sześcienną. Tutaj $x_i \equiv i \in \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ oraz $P(X = x_i) = p_i = 1/6$. Zachodzi zatem

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{i=1}^6 \frac{i}{6} = 3.5$$

Przykład. Niech zmienna X ma rozkład normalny $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Wartość oczekiwana wynosi

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} x \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \left\{ \begin{array}{l} t = (x-\mu)/\sigma \\ x = \sigma t + \mu \\ dx = \sigma dt \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma t + \mu) \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \\ &= \frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \\ &= -\frac{\sigma}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) \Big|_{-\infty}^{+\infty} + \frac{\mu}{\sqrt{2\pi}} \sqrt{2\pi} = 0 + \mu = \mu\end{aligned}$$

Przykład. Niech zmienna X ma rozkład dwumianowy $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$. Wartość oczekiwana:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^n k C_n^k p^k q^{n-k}$$

Przykład. Niech zmienna X ma rozkład dwumianowy $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$. Wartość oczekiwana:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^n k C_n^k p^k q^{n-k}$$

Zróżniczkujemy obustronnie względem zmiennej p wyrażenie na dwumian Newtona:

$$\frac{d}{dp}(p+q)^n = \frac{d}{dp} \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} \Leftrightarrow n(p+q)^{n-1} = \sum_{k=0}^n k C_n^k p^{k-1} q^{n-k}$$

Przykład. Niech zmienna X ma rozkład dwumianowy $P(X = k) = C_n^k p^k q^{n-k}$. Wartość oczekiwana:

$$\mathbb{E}(X) = \sum_{k=0}^n k C_n^k p^k q^{n-k}$$

Zróżniczkujemy obustronnie względem zmiennej p wyrażenie na dwumian Newtona:

$$\frac{d}{dp}(p+q)^n = \frac{d}{dp} \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k} \Leftrightarrow n(p+q)^{n-1} = \sum_{k=0}^n k C_n^k p^{k-1} q^{n-k}$$

Przemnażając ostatnią równość obustronnie przez p oraz korzystając z faktu, że $p+q=1$, otrzymujemy

$$np = \sum_{k=0}^n k C_n^k p^k q^{n-k}$$

czyli

$$\mathbb{E}(X) = np$$

Wartość przeciętna dla $Y = g(X)$

Aby wyznaczyć $\mathbb{E}(Y)$ można:

- 1 najpierw wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa $f_Y(y)$ zmiennej Y ,
- 2 następnie wyznaczyć $\mathbb{E}(Y)$ zgodnie z definicją.

Wartość przeciętna dla $Y = g(X)$

Aby wyznaczyć $\mathbb{E}(Y)$ można:

- 1 najpierw wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa $f_Y(y)$ zmiennej Y ,
- 2 następnie wyznaczyć $\mathbb{E}(Y)$ zgodnie z definicją.

Ale byłby to nadmierny trud—nie potrzebujemy znać jawnie rozkładu $f_Y(y)$. Wystarczy znajomość g oraz własności (rozkład) zmiennej X .

Wartość przeciętna dla $Y = g(X)$

Aby wyznaczyć $\mathbb{E}(Y)$ można:

- 1 najpierw wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa $f_Y(y)$ zmiennej Y ,
- 2 następnie wyznaczyć $\mathbb{E}(Y)$ zgodnie z definicją.

Ale byłby to nadmierny trud—nie potrzebujemy znać jawnie rozkładu $f_Y(y)$. Wystarczy znajomość g oraz własności (rozkład) zmiennej X .

Twierdzenie 1.

- 1 Niech zmienna losowa X ma rozkład dyskretny p_i oraz $Y = g(X)$.
Wtedy

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_i g(x_i)p_i$$

- 2 Niech zmienna losowa X ma rozkład ciągły $f_X(x)$ oraz $Y = g(X)$.
Wtedy

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x)f_X(x)dx$$

Wartość przeciętna dla $Y = g(X)$

Dowód.

❶ Z definicji mamy

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_j y_j P(Y = y_j)$$

ale zachodzi $y_j = g(x_i)$. Zdarzenia $\{e : Y(e) = y_j\}$ można zapisać jako

$$\bigcup_{i: g(x_i)=y_j} \{e : X(e) = x_i\}$$

a zatem

$$P(Y = y_j) = \sum_{i: g(x_i)=y_j} P(X = x_i) = \sum_{i: g(x_i)=y_j} p_i$$

Podstawiając do definicji wartości oczekiwanej oraz przegrupowując sumy:

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_j y_j \sum_{i: g(x_i)=y_j} p_i = \sum_i p_i g(x_i)$$

Wartość przeciętna dla $Y = g(X)$

Dowód.

- 2 Mamy, że $Y = g(X)$ oraz zachodzi (por. wykład 5, slajd 5)

$$f_Y(y)dy = f_X(x)dx$$

Zatem

$$\mathbb{E}(Y) = \int_{-\infty}^{+\infty} y f_Y(y) dy = \mathbb{E}(g(X)) = \int_{-\infty}^{+\infty} g(x) f_X(x) dx$$



Wartość przeciętna

Twierdzenie 2. Dla zmiennej losowej $Y = aX + b$ zachodzi $\mathbb{E}(Y) = a\mathbb{E}(X) + b$.

Dowód. Dla dyskretnych zmiennych losowych:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(aX + b) &= \sum_i (ax_i + b)p_i = \sum_i ax_i p_i + \sum_i bp_i \\ &= a \sum_i x_i p_i + b \sum_i p_i = a\mathbb{E}(X) + b\end{aligned}$$

Dla ciągłych zmiennych losowych:

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(aX + b) &= \int_{-\infty}^{+\infty} (ax + b)f(x)dx \\ &= a \int_{-\infty}^{+\infty} xf(x)dx + b \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = a\mathbb{E}(X) + b\end{aligned}$$

Wariancja

Wariancja zmiennej losowej X :

$$V(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]$$

to miara rozproszenia, tj. rozrzutu, wartości zmiennej losowej względem wartości przeciętnej $\mathbb{E}(X)$. W analizie danych utożsamiana jest z błędem przypadkowym (niepewnością statystyczną) bo określa rozrzut wyników wokół (nieznanej) wartości prawdziwej estymowanej wartością oczekiwaną.

- dla dyskretnej zmiennej losowej: $V(X) = \sum_i (x_i - \mathbb{E}(X))^2 p_i$
- dla ciągłej zmiennej losowej: $V(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} (x - \mathbb{E}(X))^2 f(x) dx$

Odchylenie standardowe to pierwiastek kwadratowy z wariancji:

$$\sigma(X) = \sqrt{V(X)}$$

Twierdzenie 3. $V(aX + b) = a^2V(X)$.

Dowód. Dla zmiennej losowej dyskretnej:

$$\begin{aligned} V(aX + b) &= \sum_i [ax_i + b - \mathbb{E}(aX + b)]^2 p_i \\ &= \sum_i [ax_i + b - a\mathbb{E}(X) - b]^2 p_i \\ &= a^2 \sum_i [x_i - \mathbb{E}(X)]^2 p_i = a^2V(X) \end{aligned}$$

Dla zmiennej losowej ciągłej dowód przebiega analogicznie. ■

Twierdzenie 4. $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$.

Dowód. Dla zmiennej losowej ciągłej:

$$\begin{aligned} V(X) &= \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2] = \int_{-\infty}^{+\infty} (x^2 - 2\mathbb{E}(X)x + [\mathbb{E}(X)]^2)f(x)dx \\ &= \mathbb{E}(X^2) - 2\mathbb{E}(X)\mathbb{E}(X) + [\mathbb{E}(X)]^2 \\ &= \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 \end{aligned}$$

Dla zmiennej losowej dyskretnej dowód przebiega analogicznie. ■

Wariancja

Przykład. Niech zmienna losowa X ma rozkład normalny. Obliczymy jej wariancję wykorzystując ostatnie twierdzenie.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X^2) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \int_{-\infty}^{+\infty} x^2 \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right) dx = \left\{ \begin{array}{l} t = (x-\mu)/\sigma \\ x = \sigma t + \mu \\ dx = \sigma dt \end{array} \right\} \\ &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} (\sigma t + \mu)^2 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \\ &= \frac{\sigma^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t^2 \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt + \frac{2\sigma\mu}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} t \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt \\ &\quad + \frac{\mu^2}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} \exp\left(-\frac{t^2}{2}\right) dt = \frac{\sigma^2\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} + 0 + \frac{\mu^2\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} = \sigma^2 + \mu^2\end{aligned}$$

Zatem $V(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = \sigma^2 + \mu^2 - \mu^2 = \sigma^2$

Zadanie. Niech zmienna losowa X ma rozkład dwumianowy. Aby obliczyć jej wariancję zróżniczkujemy dwumian Newtona dwukrotnie względem zmiennej p .

Dostaniemy, że $\mathbb{E}(X^2) = n(n-1)p^2 + \mathbb{E}(X)$. Wykorzystując wcześniej wyznaczoną wartość $\mathbb{E}(X) = np$ oraz ostatnie twierdzenia, otrzymamy

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2 = npq$$

Standaryzacja zmiennej losowej

Od dowolnej zmiennej losowej X mającej wartość przeciętną $\mathbb{E}(X) = \mu$ oraz odchylenie standardowe $\sqrt{V(X)} = \sigma$ można przejść za pomocą poniższej transformacji liniowej do tzw. zmiennej standaryzowanej:

$$Y = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

Twierdzenie 5. Zmienna standaryzowana Y ma wartość przeciętną $\mathbb{E}(Y) = 0$ oraz wariancję $V(Y) = 1$

Dowód. Z twierdzeń o wartości przeciętnej i wariancji mamy:

$$\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}\left(\frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma}\mathbb{E}(X) - \frac{\mu}{\sigma} = 0$$

$$V(Y) = V\left(\frac{1}{\sigma}X - \frac{\mu}{\sigma}\right) = \frac{1}{\sigma^2}V(X) = \frac{\sigma^2}{\sigma^2} = 1$$

Ze zmiennej standaryzowanej Y można przejść z powrotem do zmiennej X za pomocą transformacji odwrotnej $X = Y\sigma + \mu$.

Standaryzacja zmiennej losowej

Przykład. Zmienna standaryzowana o rozkładzie normalnym ma gęstość prawdopodobieństwa postaci

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$$

Parametry tego rozkładu wynoszą $\mu = 0$, $\sigma = 1$.

Standaryzacja zmiennej losowej

Przykład. Zmienna standaryzowana o rozkładzie normalnym ma gęstość prawdopodobieństwa postaci

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$$

Parametry tego rozkładu wynoszą $\mu = 0$, $\sigma = 1$.

Powyższe $f_Y(y)$ zwyczajowo oznacza się przez $\phi(y)$ i nazywa standardowym rozkładem Gaussa/normalnym.

Standaryzacja zmiennej losowej

Przykład. Zmienna standaryzowana o rozkładzie normalnym ma gęstość prawdopodobieństwa postaci

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$$

Parametry tego rozkładu wynoszą $\mu = 0$, $\sigma = 1$.

Powyższe $f_Y(y)$ zwyczajowo oznacza się przez $\phi(y)$ i nazywa **standardowym rozkładem Gaussa/normalnym**.

Jego dystrybuanta

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^y \phi(t) dt = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) \right]$$

gdzie $\operatorname{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \exp(-t^2) dt$ to tzw. funkcja błędu, nie wyraża się przez funkcje elementarne.

Standaryzacja zmiennej losowej

Przykład. Zmienna standaryzowana o rozkładzie normalnym ma gęstość prawdopodobieństwa postaci

$$f_Y(y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{y^2}{2}\right)$$

Parametry tego rozkładu wynoszą $\mu = 0$, $\sigma = 1$.

Powyższe $f_Y(y)$ zwyczajowo oznacza się przez $\phi(y)$ i nazywa **standardowym rozkładem Gaussa/normalnym**.

Jego dystrybuanta

$$\Phi(y) = \int_{-\infty}^y \phi(t) dt = \frac{1}{2} \left[1 + \operatorname{erf}\left(\frac{y}{\sqrt{2}}\right) \right]$$

gdzie $\operatorname{erf}(y) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^y \exp(-t^2) dt$ to tzw. funkcja błędu, nie wyraża się przez funkcje elementarne.

To właśnie wartości $\Phi(y)$ są tablicowane:

Standaryzacja zmiennej losowej

<i>u</i>	0,00	0,01	0,02	0,03	0,04	0,05	0,06	0,07	0,08	0,09	<i>u</i>
0,0	0,500 000	0,503 989	0,507 978	0,511 966	0,515 953	0,519 939	0,523 922	0,527 903	0,531 881	0,535 856	0,0
0,1	,539 828	,543 795	,547 758	,551 717	,555 670	,559 618	,563 559	,567 495	,571 424	,575 345	0,1
0,2	,579 260	,583 166	,587 064	,590 954	,594 835	,598 706	,602 568	,606 420	,610 261	,614 092	0,2
0,3	,617 911	,621 720	,625 516	,629 300	,633 072	,636 831	,640 576	,644 309	,648 027	,651 732	0,3
0,4	,655 422	,659 097	,662 757	,666 402	,670 031	,673 645	,677 242	,680 822	,684 386	,687 933	0,4
0,5	0,691 462	0,694 974	0,698 468	0,701 944	0,705 401	0,708 840	0,712 260	0,715 661	0,719 043	0,722 405	0,5
0,6	,725 747	,729 069	,732 371	,735 653	,738 914	,742 154	,745 373	,748 571	,751 748	,754 903	0,6
0,7	,758 036	,761 148	,764 238	,767 305	,770 350	,773 373	,776 373	,779 350	,782 305	,785 236	0,7
0,8	,788 145	,791 030	,793 892	,796 731	,799 546	,802 337	,805 105	,807 850	,810 570	,813 267	0,8
0,9	,815 940	,818 589	,821 214	,823 814	,826 391	,828 944	,831 472	,833 977	,836 457	,838 913	0,9
1,0	0,841 345	0,843 752	0,846 136	0,848 495	0,850 830	0,853 141	0,855 428	0,857 690	0,859 929	0,862 143	1,0
1,1	,864 334	,866 500	,868 643	,870 762	,872 857	,874 928	,876 976	,879 000	,881 000	,882 977	1,1
1,2	,884 930	,886 861	,888 768	,890 651	,892 512	,894 350	,896 165	,897 958	,899 727	,901 475	1,2
1,3	,903 200	,904 902	,906 582	,908 241	,909 877	,911 492	,913 085	,914 657	,916 207	,917 736	1,3
1,4	,919 243	,920 730	,922 196	,923 641	,925 066	,926 471	,927 855	,929 219	,930 563	,931 888	1,4
1,5	0,933 193	0,934 478	0,935 745	0,936 992	0,938 220	0,939 429	0,940 620	0,941 792	0,942 947	0,944 083	1,5
1,6	,945 201	,946 301	,947 384	,948 449	,949 497	,950 529	,951 543	,952 540	,953 521	,954 486	1,6
1,7	,955 435	,956 367	,957 284	,958 185	,959 070	,959 941	,960 796	,961 630	,962 462	,963 273	1,7
1,8	,964 070	,964 852	,965 620	,966 375	,967 116	,967 843	,968 557	,969 258	,969 946	,970 621	1,8
1,9	,971 283	,971 933	,972 571	,973 197	,973 810	,974 412	,975 002	,975 581	,976 148	,976 705	1,9
2,0	0,977 250	0,977 784	0,978 308	0,978 822	0,979 325	0,979 818	0,980 301	0,980 774	0,981 237	0,981 691	2,0
2,1	,982 136	,982 571	,982 997	,983 414	,983 823	,984 222	,984 614	,984 997	,985 371	,985 738	2,1
2,2	,986 097	,986 447	,986 791	,987 126	,987 455	,987 776	,988 089	,988 396	,988 696	,988 989	2,2
2,3	,989 276	,989 556	,989 830	,990 097	,990 358	,990 613	,990 863	,991 106	,991 344	,991 576	2,3
2,4	,991 802	,992 024	,992 240	,992 451	,992 656	,992 857	,993 053	,993 244	,993 431	,993 613	2,4
2,5	0,993 790	0,993 963	0,994 132	0,994 297	0,994 457	0,994 614	0,994 766	0,994 915	0,995 060	0,995 201	2,5
2,6	,995 339	,995 473	,995 604	,995 731	,995 855	,995 975	,996 093	,996 207	,996 319	,996 427	2,6
2,7	,996 533	,996 636	,996 736	,996 833	,996 928	,997 020	,997 110	,997 197	,997 282	,997 365	2,7
2,8	,997 445	,997 523	,997 599	,997 673	,997 744	,997 814	,997 882	,997 948	,998 012	,998 074	2,8

Przykład. Niech wzrost mężczyzny¹ ma rozkład $\mathcal{N}(180, 8)$. Wtedy prawdopodobieństwo

$$P(X > 190) = P\left[\left(Y = \frac{X - 180}{8}\right) > \frac{190 - 180}{8} = 1.25\right]$$

Z tablic dystrybuanty standardowego rozkładu normalnego odczytujemy (historycznie) lub liczymy numerycznie na komputerze (obecnie), że

$$P(Y > 1.25) = 1 - \Phi(1.25) = 0.106$$

czyli jest 10.6% szans by spotkać mężczyznę o wzroście powyżej 190 cm.

¹Wzrost kobiet i mężczyzn osobno jest dobrze opisany rozkładami Gaussa o różnych parametrach. Wzrost człowieka będzie zatem tzw. rozkładem mieszanym (*mixture distribution*), tj. unormowaną sumą tych dwóch rozkładów normalnych.

Momenty statystyczne

Wartość oczekiwana i wariancja to szczególne przypadki **momentów statystycznych**, zdefiniowanych następująco:

- **Moment zwykły rzędu k** zmiennej losowej X to

$$m_k = \mathbb{E} \left(X^k \right)$$

- **Moment względny rzędu k** zmiennej losowej X względem wartości c to

$$\mathbb{E} \left[(X - c)^k \right]$$

- **Moment centralny rzędu k** zmiennej losowej X to

$$\mu_k = \mathbb{E} \left[(X - m_1)^k \right]$$

Momenty statystyczne

Wartość oczekiwana i wariancja to szczególne przypadki **momentów statystycznych**, zdefiniowanych następująco:

- **Moment zwykły rzędu k** zmiennej losowej X to

$$m_k = \mathbb{E} \left(X^k \right)$$

- **Moment względny rzędu k** zmiennej losowej X względem wartości c to

$$\mathbb{E} \left[(X - c)^k \right]$$

- **Moment centralny rzędu k** zmiennej losowej X to

$$\mu_k = \mathbb{E} \left[(X - m_1)^k \right]$$

Momenty centralne to zatem momenty względne obliczone względem wartości przeciętnej.

Moment zwykły rzędu pierwszego to wartość oczekiwana: $m_1 = \mathbb{E}(X)$.

Moment centralny drugiego rzędu to wariancja: $\mu_2 = V(X)$.

Twierdzenie 6. Wariancja minimalizuje moment względny drugiego rzędu (tzn. moment względny ma wartość najmniejszą gdy jest liczony względem wartości przeciętnej), co oznacza, że

$$V(X) < \mathbb{E}[(X - c)^2] \quad \text{dla} \quad c \neq m_1$$

Dowód.

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[(X - c)^2] &= \mathbb{E}[(X - m_1 + m_1 - c)^2] \\ &= \mathbb{E}[(X - m_1)^2 + 2(m_1 - c)(X - m_1) + (m_1 - c)^2] \\ &= \mathbb{E}[(X - m_1)^2] + 2(m_1 - c)\mathbb{E}(X - m_1) + (m_1 - c)^2 \\ &= V(X) + (m_1 - c)^2 \end{aligned}$$

Mamy do czynienia z sumą wyrazów nieujemnych, zatem minimum jest osiągnięte gdy $m_1 = c$. ■

Moda to taka wartość zmiennej losowej, dla której gęstość prawdopodobieństwa przyjmuje maksimum lokalne. Rozkłady mogą być jednomodalne (unimodalne) lub wielomodalne (multimodalne).

Moda to taka wartość zmiennej losowej, dla której gęstość prawdopodobieństwa przyjmuje maksimum lokalne.

Rozkłady mogą być jednomodalne (unimodalne) lub wielomodalne (multimodalne).

Dla rozkładów symetrycznych wszystkie momenty centralne rzędów nieparzystych są równe zero; trzeci moment centralny μ_3 powszechnie służy do określenia bezwymiarowego **parametru skrzywienia**, mierzącego asymetrię gęstości rozkładu prawdopodobieństwa, zwanego miarą skośności lub skośnością (*skewness*):

$$g = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

Moda to taka wartość zmiennej losowej, dla której gęstość prawdopodobieństwa przyjmuje maksimum lokalne.

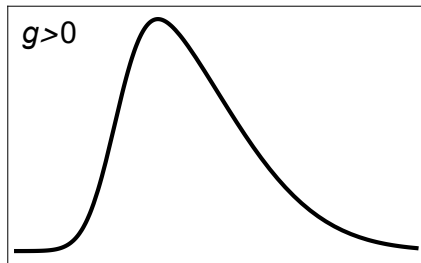
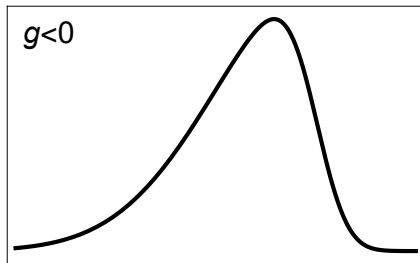
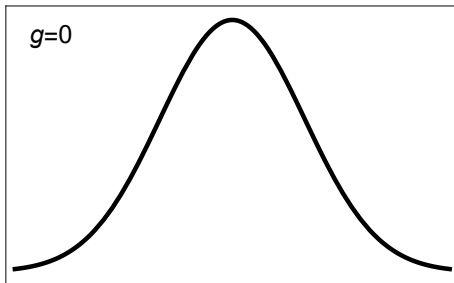
Rozkłady mogą być jednomodalne (unimodalne) lub wielomodalne (multimodalne).

Dla rozkładów symetrycznych wszystkie momenty centralne rzędów nieparzystych są równe zero; trzeci moment centralny μ_3 powszechnie służy do określenia bezwymiarowego **parametru skrzywienia**, mierzącego asymetrię gęstości rozkładu prawdopodobieństwa, zwanego miarą skośności lub skośnością (*skewness*):

$$g = \frac{\mu_3}{\sigma^3}$$

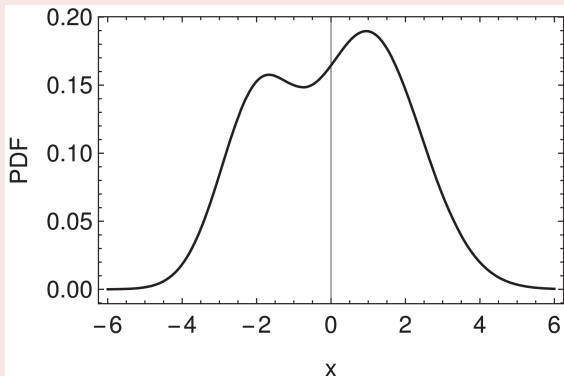
Współczynnik równy zero oznacza rozkład symetryczny. Wartość $g > 0$ oznacza asymetrię prawostronną (tj. „dłuższy ogon” z prawej strony), zaś $g < 0$ oznacza asymetrię lewostronną.

Wyższe momenty statystyczne



CAVEAT EMPTOR!

Dotyczy to rozkładów jednomodalnych, tj. takich z wyłącznie jednym maksimum lokalnym. Kontrprzykładem jest suma ważona rozkładów Gaussa, $\mathcal{N}(-2, 1)$ oraz $\mathcal{N}(1, \sqrt{2})$, z wagami odpowiednio $1/3$ i $2/3$, który jest asymetryczny jednak ma skośność $g = 0$:



Wyższe momenty statystyczne

Czwarty moment centralny służy do skonstruowania **kurtozy**, tj. bezwymiarowego współczynnika mierzącego koncentrację (skupienie, spłaszczenie) rozkładu prawdopodobieństwa:

$$K = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

Wyższe momenty statystyczne

Czwarty moment centralny służy do skonstruowania **kurtozy**, tj. bezwymiarowego współczynnika mierzącego koncentrację (skupienie, spłaszczenie) rozkładu prawdopodobieństwa:

$$K = \frac{\mu_4}{\sigma^4} - 3$$

Sam ułamek $\kappa = \frac{\mu_4}{\sigma^4}$ jest kurtozą, jednak przyjmuje wartość 3 dla rozkładu Gaussa, stąd w definicji K (nazywanej precyzyjniej kurtozą nadwyżkową, *excess kurtosis*; najpowszechniej używana jako miara kurtozy) odejmuje się tę wartość by odnieść wartość kurtozy do rozkładu normalnego: gdy $K > 0$ to rozkład jest bardziej „wysmukły” od normalnego (tzn. ma „lżejsze” ogony), zaś gdy $K < 0$ to rozkład jest bardziej „spłaszczony” (tzn. ma „cięższe” ogony):

- $K = 0$ — rozkład jest mezokurtyczny
- $K < 0$ — rozkład jest platykurtyczny
- $K > 0$ — rozkład jest leptokurtyczny

Kwantylem rzędu p nazywamy taką wartość x_p zmiennej losowej X , dla której dystrybuanta przyjmuje wartość p :

$$F(x_p) = p$$

tj. $100p\%$ realizacji zmiennej X przyjmuje wartości $\leq x_p$.

Kwantylem rzędu p nazywamy taką wartość x_p zmiennej losowej X , dla której dystrybuanta przyjmuje wartość p :

$$F(x_p) = p$$

tj. 100 p % realizacji zmiennej X przyjmuje wartości $\leq x_p$.

- Pierwszy (dolny) kwantyl to $x_{0.25}$, czyli kwantyl rzędu 1/4.
- Drugi kwantyl to $x_{0.5}$, czyli kwantyl rzędu 1/2 (mediana).
- Trzeci (górny) kwantyl to $x_{0.75}$, czyli kwantyl rzędu 3/4.

Różnica kwantyli górnego i dolnego, $x_{0.75} - x_{0.25}$, jest, obok wariancji, miarą rozproszenia wartości zmiennej (tzw. *interquantile range*, *IQR*).

Inne miary tendencji centralnych

Wartość oczekiwana, często utożsamiana ze średnią wartością zmiennej losowej X o rozkładzie gęstości $f(x)$, jest jedną z tzw. miar tendencji centralnych, czyli „reprezentacyjnych” wartości opisujących wielokrotnie powtarzane realizacje zmiennej X .

Inne miary tendencji centralnych

Wartość oczekiwana, często utożsamiana ze średnią wartością zmiennej losowej X o rozkładzie gęstości $f(x)$, jest jedną z tzw. miar tendencji centralnych, czyli „reprezentacyjnych” wartości opisujących wielokrotnie powtarzane realizacje zmiennej X .

Drugą miarą tendencji centralnych jest moda, rozumiana w tym sensie jako wartość najbardziej prawdopodobna.

Inne miary tendencji centralnych

Wartość oczekiwana, często utożsamiana ze średnią wartością zmiennej losowej X o rozkładzie gęstości $f(x)$, jest jedną z tzw. miar tendencji centralnych, czyli „reprezentacyjnych” wartości opisujących wielokrotnie powtarzane realizacje zmiennej X .

Drugą miarą tendencji centralnych jest moda, rozumiana w tym sensie jako wartość najbardziej prawdopodobna.

Wreszcie, powszechnie korzysta się też z mediany.

Inne miary tendencji centralnych

Wartość oczekiwana, często utożsamiana ze średnią wartością zmiennej losowej X o rozkładzie gęstości $f(x)$, jest jedną z tzw. miar tendencji centralnych, czyli „reprezentacyjnych” wartości opisujących wielokrotnie powtarzane realizacje zmiennej X .

Drugą miarą tendencji centralnych jest moda, rozumiana w tym sensie jako wartość najbardziej prawdopodobna.

Wreszcie, powszechnie korzysta się też z mediany.

Te trzy miary tendencji centralnych są sobie równe wyłącznie dla rozkładów symetrycznych! Dla rozkładów o dodatniej skośności ($g > 0$) zachodzi

$$\text{moda} < \text{mediana} < \text{wartość oczekiwana}$$

zaś dla rozkładów o ujemnej skośności ($g < 0$) zachodzi

$$\text{moda} > \text{mediana} > \text{wartość oczekiwana}$$

Inne miary tendencji centralnych

Wartość oczekiwana, często utożsamiana ze średnią wartością zmiennej losowej X o rozkładzie gęstości $f(x)$, jest jedną z tzw. miar tendencji centralnych, czyli „reprezentacyjnych” wartości opisujących wielokrotnie powtarzane realizacje zmiennej X .

Drugą miarą tendencji centralnych jest moda, rozumiana w tym sensie jako wartość najbardziej prawdopodobna.

Wreszcie, powszechnie korzysta się też z mediany.

Te trzy miary tendencji centralnych są sobie równe wyłącznie dla rozkładów symetrycznych! Dla rozkładów o dodatniej skośności ($g > 0$) zachodzi

$$\text{moda} < \text{mediana} < \text{wartość oczekiwana}$$

zaś dla rozkładów o ujemnej skośności ($g < 0$) zachodzi

$$\text{moda} > \text{mediana} > \text{wartość oczekiwana}$$

Średnia (wartość oczekiwana) jest wrażliwa na niewielką liczbę ekstremalnych wielkości; mediana zaś z definicji jest wielkością poniżej (i powyżej) której znajduje się dokładnie 50% realizacji zmiennej losowej X .

Jednowymiarowa zmienna losowa $Z = g(X, Y)$ będąca funkcją zmiennych losowych X i Y ma wartość oczekiwaną $\mathbb{E}(Z) = \mathbb{E}(g(X, Y))$ równą

- $\mathbb{E}(g(X, Y)) = \sum_{i,j} g(x_i, y_j) p_{ij}$

dla rozkładów dyskretnych

- $\mathbb{E}(g(X, Y)) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} g(x, y) f(x, y) dx dy$

dla rozkładu ciągłego.

Moment zwykły rzędu $k + l$ dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y) to

$$m_{kl} = \mathbb{E} \left(X^k Y^l \right)$$

Moment centralny rzędu $k + l$ dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y) to

$$\mu_{kl} = \mathbb{E} \left((X - m_{10})^k (Y - m_{01})^l \right)$$

Moment zwykły rzędu $k + l$ dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y) to

$$m_{kl} = \mathbb{E} \left(X^k Y^l \right)$$

Moment centralny rzędu $k + l$ dwuwymiarowej zmiennej losowej (X, Y) to

$$\mu_{kl} = \mathbb{E} \left((X - m_{10})^k (Y - m_{01})^l \right)$$

Z tych definicji wynika, że

$$m_{10} = \mathbb{E}(X), \quad m_{01} = \mathbb{E}(Y), \quad \mu_{20} = V(X), \quad \mu_{02} = V(Y)$$

Zmienne losowe wielowymiarowe

Momentem najniższego rzędu ($k + l = 1 + 1 = 2$) charakteryzującym łączny rozkład zmiennej (X, Y) jest

- moment zwykły m_{11}
- moment centralny μ_{11} zwany **kowariancją**:

$$\mu_{11} = Cov(X, Y) = \mathbb{E}[(X - m_{10})(Y - m_{01})]$$

Macierz momentów rzędu drugiego jest **macierzą kowariancji**:

$$C = \begin{pmatrix} \mu_{20} & \mu_{11} \\ \mu_{11} & \mu_{02} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} V(X) & Cov(X, Y) \\ Cov(X, Y) & V(Y) \end{pmatrix}$$

która jest macierzą symetryczną.

Zachodzi też

$$Cov(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y) \equiv m_{11} - m_{10}m_{01}$$

Twierdzenie 7. Jeśli zmienne losowe X i Y mają wartości oczekiwane, to zmienna losowa $Z = X + Y$ ma wartość oczekiwaną równą $\mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)$

Dowód. Dla zmiennej losowej ciągłej przyjmijmy $g(X, Y) = X + Y$. Wtedy

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(X + Y) &= \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} (x + y)g(x, y)dx dy \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x f_1(x)dx + \int_{-\infty}^{+\infty} y f_2(y)dy = \mathbb{E}(X) + \mathbb{E}(Y)\end{aligned}$$

Analogicznie można dowieść dla zmiennych losowych dyskretnych. ■

Twierdzenie 8. Jeśli zmienne losowe X i Y są niezależne i mają wartości oczekiwane, to wartość oczekiwana iloczynu wynosi $\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$

Dowód. Dla zmiennej losowej dyskretnej mamy

$$\mathbb{E}(XY) = \sum_{i,j} x_i y_j p_{ij} = \sum_i x_i P(X = x_i) \sum_j y_j P(Y = y_j) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Analogicznie można dowieść dla zmiennych ciągłych. ■

Zmienne losowe wielowymiarowe

Momenty centralne dowolnego rzędu zmiennych wielowymiarowych mogą być wyrażone przez momenty zwykłe. W szczególności dla momentów rzędu drugiego zachodzi:

$$\mu_{20} = m_{20} - m_{10}^2$$

$$\mu_{02} = m_{02} - m_{01}^2$$

$$\mu_{11} = m_{11} - m_{10}m_{01}$$

co można zapisać równoważnie jako

$$V(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2$$

$$V(Y) = \mathbb{E}(Y^2) - [\mathbb{E}(Y)]^2$$

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}(XY) - \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$$

Ostatnia zależność wynika wprost z definicji kowariancji i powyższych twierdzeń:

$$\text{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[(X - m_{10})(Y - m_{01})] = \mathbb{E}(XY - X m_{01} - Y m_{10} + m_{10} m_{01})$$

Zmienne losowe wielowymiarowe

Wniosek. Dla niezależnych zmiennych losowych kowariancja wynosi zero.

W istocie, dla niezależnych zmiennych X i Y zachodzi

$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, zatem z powyższej zależności dostajemy, że
 $\mu_{11} \equiv Cov(X, Y) = 0$.

Kowariancja jest zatem indykatorem niezależności zmiennych losowych.

Zmienne losowe wielowymiarowe

Wniosek. Dla niezależnych zmiennych losowych kowariancja wynosi zero.

W istocie, dla niezależnych zmiennych X i Y zachodzi

$\mathbb{E}(XY) = \mathbb{E}(X)\mathbb{E}(Y)$, zatem z powyższej zależności dostajemy, że
 $\mu_{11} \equiv Cov(X, Y) = 0$.

Kowariancja jest zatem indykatorem niezależności zmiennych losowych.

Wniosek. Dla niezależnych zmiennych losowych zachodzi

$$V(X \pm Y) = V(X) + V(Y)$$

Istotnie, mamy, że

$$\begin{aligned} V(X + Y) &= \mathbb{E} \left[((X + Y) - \mathbb{E}(X + Y))^2 \right] \\ &= \mathbb{E} \left[\left((X - \mathbb{E}(X)) + (Y - \mathbb{E}(Y)) \right)^2 \right] \\ &= V(X) + V(Y) + 2Cov(X, Y) \end{aligned}$$

Dla zmiennych niezależnych kowariancja się zeruje, skąd teza.

Podobnie dla $X - Y$.

Funkcje charakterystyczne

Funkcja charakterystyczna zmiennej losowej X to funkcja zmiennej $t \in \mathbb{R}$:

$$\varphi(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$$

- Dla zmiennej losowej dyskretnej:

$$\varphi(t) = \sum_k e^{itx_k} p_k$$

- Dla zmiennej losowej ciągłej:

$$\varphi(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} f(x) dx$$

Funkcja charakterystyczna zmiennej losowej ciągłej jest zatem transformatą Fouriera gęstości prawdopodobieństwa. Zachodzi $\varphi(0) = 1$.

Funkcje charakterystyczne

n -ta pochodna funkcji charakterystycznej:

$$\varphi^{(n)}(t) = i^n \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{itx} f(x) dx$$

Funkcje charakterystyczne

n -ta pochodna funkcji charakterystycznej:

$$\varphi^{(n)}(t) = i^n \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{itx} f(x) dx$$

podstawiając $t = 0$:

$$\varphi^{(n)}(0) = i^n \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) dx = i^n m_n$$

Funkcje charakterystyczne

n -ta pochodna funkcji charakterystycznej:

$$\varphi^{(n)}(t) = i^n \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{itx} f(x) dx$$

podstawiając $t = 0$:

$$\varphi^{(n)}(0) = i^n \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) dx = i^n m_n$$

skąd można uzyskać n -ty moment zwykły poprzez

$$m_n = \frac{1}{i^n} \varphi^{(n)}(0)$$

Funkcje charakterystyczne

n -ta pochodna funkcji charakterystycznej:

$$\varphi^{(n)}(t) = i^n \int_{-\infty}^{+\infty} x^n e^{itx} f(x) dx$$

podstawiając $t = 0$:

$$\varphi^{(n)}(0) = i^n \int_{-\infty}^{+\infty} x^n f(x) dx = i^n m_n$$

skąd można uzyskać n -ty moment zwykły poprzez

$$m_n = \frac{1}{i^n} \varphi^{(n)}(0)$$

W szczególności, wariancja to

$$V(X) = -\varphi''(0) + [\varphi'(0)]^2$$

Twierdzenie 9. Jeśli $\varphi(t)$ jest funkcją charakterystyczną zmiennej losowej X to funkcja charakterystyczna $\varphi_Y(t)$ zmiennej losowej $Y = aX + b$ wynosi

$$\varphi_Y(t) = e^{itb}\varphi(at)$$

Dowód. Ponieważ $\mathbb{E}(cX) = c\mathbb{E}(X)$, to

$$\varphi_Y(t) = \mathbb{E}\left(e^{it(aX+b)}\right) = e^{itb}\mathbb{E}\left(e^{itaX}\right) = e^{itb}\varphi(at)$$



Przykład. Weźmy rozkład dwupunktowy:

$P(X = 1) = p, P(X = 0) = q$. Wtedy wprost z definicji mamy

$$\varphi(t) = e^{it1}p + e^{it0}q = e^{it}p + q$$

Przykład. Weźmy rozkład dwumianowy, $P(X = k) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k}$.

Korzystając z definicji funkcji charakterystycznej oraz wzoru na dwumian Newtona otrzymujemy

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^n e^{itk} C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k (e^{it} p)^k q^{n-k} = (e^{it} p + q)^n$$

Przykład. Weźmy rozkład dwumianowy, $P(X = k) = \sum_{k=0}^n C_n^k p^k q^{n-k}$.

Korzystając z definicji funkcji charakterystycznej oraz wzoru na dwumian Newtona otrzymujemy

$$\varphi(t) = \sum_{k=0}^n e^{itk} C_n^k p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^n C_n^k (e^{it} p)^k q^{n-k} = (e^{it} p + q)^n$$

Teraz można łatwo policzyć wartość przeciętną rozkładu dwumianowego:

$$\varphi'(t) = n (e^{it} p + q)^{n-1} i p e^{it}$$

$$\mathbb{E}(X) = \frac{\varphi'(0)}{i} = n (p + q)^{n-1} p = np$$

Podobnie można uzyskać wyrażenie na wariancję.

Przykład. Wyznamy funkcję charakterystyczną rozkładu normalnego $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Zacniemy od standardowego rozkładu normalnego.

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}} e^{-\frac{t^2}{2}} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} x - it = u \\ dx = du \end{array} \right\} = e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = e^{-\frac{t^2}{2}}\end{aligned}$$

Funkcje charakterystyczne

Przykład. Wyznamy funkcję charakterystyczną rozkładu normalnego $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$.

Zacniemy od standardowego rozkładu normalnego.

$$\begin{aligned}\varphi_X(t) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{itx} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{(x-it)^2}{2}} e^{-\frac{t^2}{2}} \\ &= \left\{ \begin{array}{l} x - it = u \\ dx = du \end{array} \right\} = e^{-\frac{t^2}{2}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{u^2}{2}} du = e^{-\frac{t^2}{2}}\end{aligned}$$

Zmienna niestandardyzowana Y ze zmienną standaryzowaną X jest związana zależnością $Y = \sigma X + \mu$, otrzymujemy zatem

$$\varphi_Y(t) = e^{it\mu} \varphi_X(\sigma t) = e^{it\mu} e^{-\frac{\sigma^2 t^2}{2}} = e^{it\mu - \frac{\sigma^2 t^2}{2}}$$

Twierdzenie 10. Funkcja charakterystyczna sumy dwóch niezależnych zmiennych losowych $X = X_1 + X_2$ jest równa iloczynowi funkcji charakterystycznych tych zmiennych.

Dowód. Korzystając z twierdzenia o wartości oczekiwanej iloczynu zmiennych losowych dostajemy

$$\mathbb{E} \left(e^{itX} \right) = \mathbb{E} \left(e^{it(X_1+X_2)} \right) = \mathbb{E} \left(e^{itX_1} e^{itX_2} \right) = \mathbb{E} \left(e^{itX_1} \right) \mathbb{E} \left(e^{itX_2} \right)$$



Przykład. Znaleźć rozkład sumy dwóch zmiennych losowych o rozkładach normalnych $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i)$, $i = 1, 2$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{itX}) &= \mathbb{E}(e^{itX_1}) \mathbb{E}(e^{itX_2}) \\ &= e^{it\mu_1 - \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}} e^{it\mu_2 - \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}} \\ &= \exp \left[it(\mu_1 + \mu_2) - \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2}{2} \right]\end{aligned}$$

Przykład. Znaleźć rozkład sumy dwóch zmiennych losowych o rozkładach normalnych $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i)$, $i = 1, 2$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{itX}) &= \mathbb{E}(e^{itX_1}) \mathbb{E}(e^{itX_2}) \\ &= e^{it\mu_1 - \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}} e^{it\mu_2 - \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}} \\ &= \exp \left[it(\mu_1 + \mu_2) - \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2}{2} \right]\end{aligned}$$

Otrzymana funkcja charakterystyczna ma postać funkcji charakterystycznej rozkładu Gaussa $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, gdzie $\mu = \mu_1 + \mu_2$, $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.

Funkcje charakterystyczne

Przykład. Znaleźć rozkład sumy dwóch zmiennych losowych o rozkładach normalnych $X_i \sim \mathcal{N}(\mu_i, \sigma_i)$, $i = 1, 2$.

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(e^{itX}) &= \mathbb{E}(e^{itX_1}) \mathbb{E}(e^{itX_2}) \\ &= e^{it\mu_1 - \frac{\sigma_1^2 t^2}{2}} e^{it\mu_2 - \frac{\sigma_2^2 t^2}{2}} \\ &= \exp \left[it(\mu_1 + \mu_2) - \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2}{2} \right]\end{aligned}$$

Otrzymana funkcja charakterystyczna ma postać funkcji charakterystycznej rozkładu Gaussa $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$, gdzie $\mu = \mu_1 + \mu_2$, $\sigma = \sqrt{\sigma_1^2 + \sigma_2^2}$.

Czyli zmienna losowa będąca sumą zmiennych normalnych też jest zmienną normalną.

Wynik ten łatwo się uogólnia na przeliczalną sumę zmiennych normalnych.

Funkcja generująca momenty

Moment generating function, MGF

Bardzo podobnie do funkcji charakterystycznej $\varphi(t)$ formułuje się MGF zmiennej losowej X :

$$M_X(t) = \mathbb{E}(e^{tX})$$

Przypomnienie:

$$\varphi_X(t) = \mathbb{E}(e^{itX})$$

UWAGA!

- Funkcja charakterystyczna $\varphi_X(t)$ istnieje zawsze (ponieważ $|e^{itX}| = 1$);
- MGF $M_X(t)$ niekoniecznie — np. dla rozkładu Cauchy'ego zachodzi $\mathbb{E}(e^{tX}) = \infty$ dla $t \neq 0$.

MGF, jak nazwa wskazuje, pozwala uzyskać momenty wprost:

$$m_n = M_X^{(n)}(0)$$

Pewnego rodzaju zaletą MGF względem funkcji charakterystycznej jest brak operowania na liczbach zespolonych.

Funkcja generująca momenty

Moment generating function, MGF

Jeśli MGF istnieje, to jest związany z $\varphi(t)$ związkiem

$$M(t) = \varphi(-it)$$

ponieważ

$$\varphi(-it) = \mathbb{E} \left(e^{i(-it)X} \right) = \mathbb{E} \left(e^{tX} \right) = M(t)$$

Funkcja generująca momenty

Moment generating function, MGF

Jeśli MGF istnieje, to jest związany z $\varphi(t)$ związkiem

$$M(t) = \varphi(-it)$$

ponieważ

$$\varphi(-it) = \mathbb{E} \left(e^{i(-it)X} \right) = \mathbb{E} \left(e^{tX} \right) = M(t)$$

Przykład. Mamy dla rozkładu Gaussa $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$:

$$\varphi(t) = \exp \left[it(\mu_1 + \mu_2) - \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2}{2} \right]$$

Zamieniając zatem $t \rightarrow -it$:

$$M(t) = \exp \left[-t(\mu_1 + \mu_2) + \frac{(\sigma_1^2 + \sigma_2^2)t^2}{2} \right]$$