

Statystyka i rachunek prawdopodobieństwa

Wykład 6: Zmienne losowe wielowymiarowe

Mariusz Tarnopolski

Instytut Astronomii UMK

Statystyka ©2026



Dwuwymiarowe zmienne losowe

- Niech X i Y będą zmiennymi losowymi, niekoniecznie określonymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej. Parę (X, Y) nazywamy **dwuwymiarową (2D) zmienną losową** (lub 2D wektorem losowym), a X i Y jego współrzędnymi.
- Łączny rozkład prawdopodobieństwa 2D zmiennej losowej dany jest wzorem

$$P_{X,Y}(A) = P(e : (X(e), Y(e)) \in A)$$

- Dystrybuanta 2D zmiennej losowej to funkcja F zmiennych losowych (X, Y) , która dla każdej pary liczb rzeczywistych $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ przyjmuje wartości równe prawdopodobieństwu zdarzenia polegającego na tym, że zmienna losowa X przyjmie wartość nie większą niż x i zmienna losowa Y przyjmie wartość nie większą niż y :

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

Dwuwymiarowe zmienne losowe

- Niech X i Y będą zmiennymi losowymi, niekoniecznie określonymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej. Parę (X, Y) nazywamy **dwuwymiarową (2D) zmienną losową** (lub 2D wektorem losowym), a X i Y jego współrzędnymi.
- **Łączny rozkład prawdopodobieństwa 2D** zmiennej losowej dany jest wzorem

$$P_{X,Y}(A) = P(e : (X(e), Y(e)) \in A)$$

- **Dystrybuanta 2D** zmiennej losowej to funkcja F zmiennych losowych (X, Y) , która dla każdej pary liczb rzeczywistych $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ przyjmuje wartości równe prawdopodobieństwu zdarzenia polegającego na tym, że zmienna losowa X przyjmie wartość nie większą niż x i zmienna losowa Y przyjmie wartość nie większą niż y :

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

Dwuwymiarowe zmienne losowe

- Niech X i Y będą zmiennymi losowymi, niekoniecznie określonymi na tej samej przestrzeni probabilistycznej. Parę (X, Y) nazywamy **dwuwymiarową (2D) zmienną losową** (lub 2D wektorem losowym), a X i Y jego współrzędnymi.
- **Łączny rozkład prawdopodobieństwa 2D** zmiennej losowej dany jest wzorem

$$P_{X,Y}(A) = P(e : (X(e), Y(e)) \in A)$$

- **Dystrybuanta 2D zmiennej losowej** to funkcja F zmiennych losowych (X, Y) , która dla każdej pary liczb rzeczywistych $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ przyjmuje wartości równe prawdopodobieństwu zdarzenia polegającego na tym, że zmienna losowa X przyjmie wartość nie większą niż x i zmienna losowa Y przyjmie wartość nie większą niż y :

$$F_{X,Y}(x, y) = P(X \leq x, Y \leq y)$$

Dwuwymiarowe zmienne losowe (dyskretne)

- 2D zmienna losowa (X, Y) jest typu **dyskretnego** gdy przyjmuje co najwyżej przeliczalną liczbę wartości (x_i, y_j) dla $i, j \in \mathbb{N}$, każdą z prawdopodobieństwem

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$$

- Ciąg wartości p_{ij} stanowi funkcję prawdopodobieństwa 2D zmiennej losowej dyskretnej. Można go przedstawić w postaci tzw. tablicy dwudzielnej:

X \ Y	y_1	y_2	...	y_n	...	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1n}	...	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2n}	...	$p_{2\cdot}$
...	...	...	...	...	...	...
x_m	p_{m1}	p_{m2}	...	p_{mn}	...	$p_{m\cdot}$
...	...	...	...	...	...	...
$p_{\cdot k}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	...	$p_{\cdot n}$	...	1

Dwuwymiarowe zmienne losowe (dyskretne)

- 2D zmienna losowa (X, Y) jest typu **dyskretnego** gdy przyjmuje co najwyżej przeliczalną liczbę wartości (x_i, y_j) dla $i, j \in \mathbb{N}$, każdą z prawdopodobieństwem

$$P(X = x_i, Y = y_j) = p_{ij}$$

- Ciąg wartości p_{ij} stanowi funkcję prawdopodobieństwa 2D zmiennej losowej dyskretnej. Można go przedstawić w postaci tzw. tablicy dwudzielnej:

$X \backslash Y$	y_1	y_2	...	y_n	...	$p_{i\cdot}$
x_1	p_{11}	p_{12}	...	p_{1n}	...	$p_{1\cdot}$
x_2	p_{21}	p_{22}	...	p_{2n}	...	$p_{2\cdot}$
...	...	...	...	...	...	...
x_m	p_{m1}	p_{m2}	...	p_{mn}	...	$p_{m\cdot}$
...	...	...	...	...	...	...
$p_{\cdot k}$	$p_{\cdot 1}$	$p_{\cdot 2}$	...	$p_{\cdot n}$	...	1

Dwuwymiarowe zmienne losowe (dyskretne)

- Funkcja

$$P(X = x_i) = p_{i\bullet} = \sum_j p_{ij}$$

$$= P(X = x_i, Y = y_1) + P(X = x_i, Y = y_2) + \dots$$

gdzie $i \in \mathbb{N}$, wyznacza rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X , nazywany **rozkładem brzegowym** zmiennej losowej X w rozkładzie 2D zmiennej losowej (X, Y) .

- Podobnie, rozkład brzegowy zmiennej losowej Y określony jest jako

$$P(Y = y_j) = p_{\bullet j} = \sum_i p_{ij}$$

- Zachodzi też $p_{\bullet\bullet} \equiv \sum_i \sum_j p_{ij} = 1$.

Dwuwymiarowe zmienne losowe (dyskretne)

- Funkcja

$$P(X = x_i) = p_{i\bullet} = \sum_j p_{ij}$$

$$= P(X = x_i, Y = y_1) + P(X = x_i, Y = y_2) + \dots$$

gdzie $i \in \mathbb{N}$, wyznacza rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X , nazywany **rozkładem brzegowym** zmiennej losowej X w rozkładzie 2D zmiennej losowej (X, Y) .

- Podobnie, rozkład brzegowy zmiennej losowej Y określony jest jako

$$P(Y = y_j) = p_{\bullet j} = \sum_i p_{ij}$$

- Zachodzi też $p_{\bullet\bullet} \equiv \sum_i \sum_j p_{ij} = 1$.

Dwuwymiarowe zmienne losowe (dyskretne)

- Funkcja

$$P(X = x_i) = p_{i\bullet} = \sum_j p_{ij}$$

$$= P(X = x_i, Y = y_1) + P(X = x_i, Y = y_2) + \dots$$

gdzie $i \in \mathbb{N}$, wyznacza rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X , nazywany **rozkładem brzegowym** zmiennej losowej X w rozkładzie 2D zmiennej losowej (X, Y) .

- Podobnie, rozkład brzegowy zmiennej losowej Y określony jest jako

$$P(Y = y_j) = p_{\bullet j} = \sum_i p_{ij}$$

- Zachodzi też $p_{\bullet\bullet} \equiv \sum_i \sum_j p_{ij} = 1$.

Dwuwymiarowe zmienne losowe (dyskretne)

- **Dystrybuanty rozkładów brzegowych** zmiennych losowych, odpowiednio X i Y , to

$$F_1(x) = \sum_{x_i \leq x} p_{i\bullet}$$

$$F_2(y) = \sum_{y_j \leq y} p_{\bullet j}$$

- Niech $\forall j : p_{\bullet j} > 0$. Wtedy

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}$$

określa rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X przy ustalonej wartości zmiennej losowej Y . Nazywany jest **rozkładem warunkowym zmiennej losowej X** pod warunkiem, że Y przyjmie ustaloną wartość y_j .

Dwuwymiarowe zmienne losowe (dyskretne)

- **Dystrybuanty rozkładów brzegowych** zmiennych losowych, odpowiednio X i Y , to

$$F_1(x) = \sum_{x_i \leq x} p_{i\bullet}$$

$$F_2(y) = \sum_{y_j \leq y} p_{\bullet j}$$

- Niech $\forall j : p_{\bullet j} > 0$. Wtedy

$$P(X = x_i | Y = y_j) = \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}$$

określa rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej X przy ustalonej wartości zmiennej losowej Y . Nazywany jest **rozkładem warunkowym zmiennej losowej X** pod warunkiem, że Y przyjmie ustaloną wartość y_j .

Dwuwymiarowe zmienne losowe (dyskretne)

- Podobnie, jeśli $\forall i : p_{i\bullet} > 0$ to

$$P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}$$

określa rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej Y przy warunku, że X przyjmie ustaloną wartość x_i .

- **Dystrybuanty rozkładów warunkowych:**

$$F(x|y_j) = P(X \leq x | Y = y_j) = \sum_{x_i \leq x} \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}$$

$$F(y|x_i) = P(Y \leq y | X = x_i) = \sum_{y_j \leq y} \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}$$

Dwuwymiarowe zmienne losowe (dyskretne)

- Podobnie, jeśli $\forall i : p_{i\bullet} > 0$ to

$$P(Y = y_j | X = x_i) = \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}$$

określa rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej Y przy warunku, że X przyjmie ustaloną wartość x_i .

- **Dystrybuanty rozkładów warunkowych:**

$$F(x|y_j) = P(X \leq x | Y = y_j) = \sum_{x_i \leq x} \frac{p_{ij}}{p_{\bullet j}}$$

$$F(y|x_i) = P(Y \leq y | X = x_i) = \sum_{y_j \leq y} \frac{p_{ij}}{p_{i\bullet}}$$

Dwuwymiarowe zmienne losowe (ciągłe)

- 2D zmienna losowa (X, Y) jest **typu ciągłego** gdy istnieje taka funkcja $f(x, y) \geq 0$, że dla każdego $A \in \mathbb{R}^2$ łączny rozkład prawdopodobieństwa jest dany wyrażeniem

$$P((X, Y) \in A) = P_{X,Y}(A) = \iint_A f(x, y) dx dy$$

- Funkcja $f(x, y)$ jest gęstością prawdopodobieństwa zmiennej losowej (X, Y) .
- W szczególności, jeśli A jest prostokątem, tj.

$$A = \{(x, y) : x_1 \leq x \leq x_2 \wedge y_1 \leq y \leq y_2\}$$

to

$$P(x_1 \leq X \leq x_2, y_1 \leq Y \leq y_2) = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx dy$$

Dwuwymiarowe zmienne losowe (ciągłe)

- 2D zmienna losowa (X, Y) jest **typu ciągłego** gdy istnieje taka funkcja $f(x, y) \geq 0$, że dla każdego $A \in \mathbb{R}^2$ łączny rozkład prawdopodobieństwa jest dany wyrażeniem

$$P((X, Y) \in A) = P_{X,Y}(A) = \iint_A f(x, y) dx dy$$

- Funkcja $f(x, y)$ jest gęstością prawdopodobieństwa zmiennej losowej (X, Y) .
- W szczególności, jeśli A jest prostokątem, tj.

$$A = \{(x, y) : x_1 \leq x \leq x_2 \wedge y_1 \leq y \leq y_2\}$$

to

$$P(x_1 \leq X \leq x_2, y_1 \leq Y \leq y_2) = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx dy$$

Dwuwymiarowe zmienne losowe (ciągłe)

- 2D zmienna losowa (X, Y) jest **typu ciągłego** gdy istnieje taka funkcja $f(x, y) \geq 0$, że dla każdego $A \in \mathbb{R}^2$ łączny rozkład prawdopodobieństwa jest dany wyrażeniem

$$P((X, Y) \in A) = P_{X,Y}(A) = \iint_A f(x, y) dx dy$$

- Funkcja $f(x, y)$ jest gęstością prawdopodobieństwa zmiennej losowej (X, Y) .
- W szczególności, jeśli A jest prostokątem, tj.

$$A = \{(x, y) : x_1 \leq x \leq x_2 \wedge y_1 \leq y \leq y_2\}$$

to

$$P(x_1 \leq X \leq x_2, y_1 \leq Y \leq y_2) = \int_{y_1}^{y_2} \int_{x_1}^{x_2} f(x, y) dx dy$$

Dwuwymiarowe zmienne losowe (ciągłe)

- Dystrybuanta 2D zmiennej losowej ciągłej wyraża się wzorem:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(u, v) du dv$$

Wynika z tego, że

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

- Gęstości brzegowe zmiennych losowych X, Y to, odpowiednio:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

Dwuwymiarowe zmienne losowe (ciągłe)

- **Dystrybuanta 2D zmiennej losowej ciągłej** wyraża się wzorem:

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^x f(u, v) du dv$$

Wynika z tego, że

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F(x, y)}{\partial x \partial y}$$

- **Gęstości brzegowe zmiennych losowych X, Y** to, odpowiednio:

$$f_1(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dy$$

$$f_2(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x, y) dx$$

- **Dystrybuanty brzegowe:**

$$F_1(x) = F(x, +\infty) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^x f(u, v) du dv = \int_{-\infty}^x f_1(u) du$$

$$F_2(y) = F(+\infty, y) = \int_{-\infty}^y \int_{-\infty}^{+\infty} f(u, v) du dv = \int_{-\infty}^y f_2(v) dv$$

Dwuwymiarowe zmienne losowe (ciągłe)

- **Gęstość rozkładu warunkowego** zmiennej losowej X pod warunkiem Y określona jest następująco:

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}$$

- Dystybuanta tego rozkładu warunkowego wynosi

$$F(x|y) = \int_{-\infty}^x f(u|y)du = \frac{1}{f_2(y)} \int_{-\infty}^x f(u, y)du$$

- Podobnie dla zmiennej losowej Y pod warunkiem X :

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}$$

$$F(y|x) = \int_{-\infty}^y f(v|x)dv = \frac{1}{f_1(x)} \int_{-\infty}^y f(x, v)dv$$

Dwuwymiarowe zmienne losowe (ciągłe)

- **Gęstość rozkładu warunkowego** zmiennej losowej X pod warunkiem Y określona jest następująco:

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}$$

- **Dystrybuenta tego rozkładu warunkowego** wynosi

$$F(x|y) = \int_{-\infty}^x f(u|y)du = \frac{1}{f_2(y)} \int_{-\infty}^x f(u, y)du$$

- Podobnie dla zmiennej losowej Y pod warunkiem X :

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}$$

$$F(y|x) = \int_{-\infty}^y f(v|x)dv = \frac{1}{f_1(x)} \int_{-\infty}^y f(x, v)dv$$

Dwuwymiarowe zmienne losowe (ciągłe)

- **Gęstość rozkładu warunkowego** zmiennej losowej X pod warunkiem Y określona jest następująco:

$$f(x|y) = \frac{f(x, y)}{f_2(y)}$$

- **Dystrybuanta tego rozkładu warunkowego** wynosi

$$F(x|y) = \int_{-\infty}^x f(u|y)du = \frac{1}{f_2(y)} \int_{-\infty}^x f(u, y)du$$

- Podobnie dla zmiennej losowej Y pod warunkiem X :

$$f(y|x) = \frac{f(x, y)}{f_1(x)}$$

$$F(y|x) = \int_{-\infty}^y f(v|x)dv = \frac{1}{f_1(x)} \int_{-\infty}^y f(x, v)dv$$

Niezależność zmiennych losowych

- **Zmienne losowe X i Y są niezależne** jeśli dla dowolnych zbiorów A_X i A_Y określonych na $\mathbb{R}$, niezależne są zdarzenia losowe $\{e : X(e) \in A_X\}$ i $\{e : Y(e) \in A_Y\}$:

$$P(e : X(e) \in A_X, Y(e) \in A_Y) = P(e : X(e) \in A_X) P(e : Y(e) \in A_Y)$$

- Zmienne losowe typu dyskretnego są zatem niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j) \Leftrightarrow p_{ij} = p_{i\bullet}p_{\bullet j}, i, j \in \mathbb{N}$$

- Zmienne losowe typu ciągłego są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$$

- Warunkiem koniecznym i wystarczającym niezależności jest również

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y)$$

Niezależność zmiennych losowych

- **Zmienne losowe X i Y są niezależne** jeśli dla dowolnych zbiorów A_X i A_Y określonych na $\mathbb{R}$, niezależne są zdarzenia losowe $\{e : X(e) \in A_X\}$ i $\{e : Y(e) \in A_Y\}$:

$$P(e : X(e) \in A_X, Y(e) \in A_Y) = P(e : X(e) \in A_X) P(e : Y(e) \in A_Y)$$

- Zmienne losowe typu dyskretnego są zatem niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j) \Leftrightarrow p_{ij} = p_{i\bullet}p_{\bullet j}, i, j \in \mathbb{N}$$

- Zmienne losowe typu ciągłego są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$$

- Warunkiem koniecznym i wystarczającym niezależności jest również

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y)$$

Niezależność zmiennych losowych

- **Zmienne losowe X i Y są niezależne** jeśli dla dowolnych zbiorów A_X i A_Y określonych na $\mathbb{R}$, niezależne są zdarzenia losowe $\{e : X(e) \in A_X\}$ i $\{e : Y(e) \in A_Y\}$:

$$P(e : X(e) \in A_X, Y(e) \in A_Y) = P(e : X(e) \in A_X) P(e : Y(e) \in A_Y)$$

- Zmienne losowe typu dyskretnego są zatem niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j) \Leftrightarrow p_{ij} = p_{i\bullet}p_{\bullet j}, i, j \in \mathbb{N}$$

- Zmienne losowe typu ciągłego są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$$

- Warunkiem koniecznym i wystarczającym niezależności jest również

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y)$$

Niezależność zmiennych losowych

- **Zmienne losowe X i Y są niezależne** jeśli dla dowolnych zbiorów A_X i A_Y określonych na $\mathbb{R}$, niezależne są zdarzenia losowe $\{e : X(e) \in A_X\}$ i $\{e : Y(e) \in A_Y\}$:

$$P(e : X(e) \in A_X, Y(e) \in A_Y) = P(e : X(e) \in A_X) P(e : Y(e) \in A_Y)$$

- Zmienne losowe typu dyskretnego są zatem niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$P(X = x_i, Y = y_j) = P(X = x_i)P(Y = y_j) \Leftrightarrow p_{ij} = p_{i\bullet}p_{\bullet j}, i, j \in \mathbb{N}$$

- Zmienne losowe typu ciągłego są niezależne wtedy i tylko wtedy, gdy

$$f(x, y) = f_1(x)f_2(y)$$

- Warunkiem koniecznym i wystarczającym niezależności jest również

$$F(x, y) = F_1(x)F_2(y)$$

Niezależność zmiennych losowych

- Równoważnie, niezależność zmiennych dyskretnych X i Y można zadać przez warunek

$$P(X = x_i | Y = y_j) = p_{i\bullet} \quad \text{lub} \quad P(Y = y_j | X = x_i) = p_{\bullet j}$$

- zaś niezależność zmiennych ciągłych przez

$$f(x|y) = f_1(x) \quad \text{lub} \quad f(y|x) = f_2(y)$$

co z kolei można wyrazić równoważnie jako

$$F(x|y) = F_1(x) \quad \text{lub} \quad F(y|x) = F_2(y)$$

Niezależność zmiennych losowych

- Równoważnie, niezależność zmiennych dyskretnych X i Y można zadać przez warunek

$$P(X = x_i | Y = y_j) = p_{i\bullet} \quad \text{lub} \quad P(Y = y_j | X = x_i) = p_{\bullet j}$$

- zaś niezależność zmiennych ciągłych przez

$$f(x|y) = f_1(x) \quad \text{lub} \quad f(y|x) = f_2(y)$$

co z kolei można wyrazić równoważnie jako

$$F(x|y) = F_1(x) \quad \text{lub} \quad F(y|x) = F_2(y)$$

Niezależność zmiennych losowych

Twierdzenie 1. Jeśli zmienne losowe X i Y są niezależne, to ich funkcje $U = g(X)$ i $V = h(Y)$ również są niezależnymi zmiennymi losowymi.

Niezależność zmiennych losowych

Twierdzenie 1. Jeśli zmienne losowe X i Y są niezależne, to ich funkcje $U = g(X)$ i $V = h(Y)$ również są niezależnymi zmiennymi losowymi.

Dowód.

Przyjmijmy $A, B \subset \mathbb{R}$.

Mamy, że

$$\{e : U(e) \in A\} = \{e : g(X(e)) \in A\} = \{e : X(e) \in g^{-1}(A)\}$$

$$\{e : V(e) \in B\} = \{e : h(Y(e)) \in B\} = \{e : Y(e) \in h^{-1}(B)\}$$

Niezależność zmiennych losowych

Twierdzenie 1. Jeśli zmienne losowe X i Y są niezależne, to ich funkcje $U = g(X)$ i $V = h(Y)$ również są niezależnymi zmiennymi losowymi.

Dowód.

Przyjmijmy $A, B \subset \mathbb{R}$.

Mamy, że

$$\{e : U(e) \in A\} = \{e : g(X(e)) \in A\} = \{e : X(e) \in g^{-1}(A)\}$$

$$\{e : V(e) \in B\} = \{e : h(Y(e)) \in B\} = \{e : Y(e) \in h^{-1}(B)\}$$

Korzystając z niezależności X i Y :

$$\begin{aligned} P(U \in A, V \in B) &= P(X \in g^{-1}(A), Y \in h^{-1}(B)) \\ &= P(X \in g^{-1}(A))P(Y \in h^{-1}(B)) \\ &= P(U \in A)P(V \in B) \end{aligned}$$



Przykład. Z talii 52 kart wyciągamy 1 kartę. Niech X przyjmuje wartości równe liczbie wylosowanych asów, zaś Y przyjmuje wartości równe liczbie wylosowanych pików.

- 1 Wyznaczyć rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej (X, Y) .
- 2 Czy zmienne X i Y są niezależne?
- 3 Wyznaczyć dystrybuantę rozkładu brzegowego zmiennej Y .

Rozwiązanie.

- ① Ponieważ losujemy tylko 1 kartę, zmienne X i Y mogą przyjmować tylko 2 wartości; przyjmijmy, że 0 lub 1. Tablica dwudzielna ma postać:

$X(as) \backslash Y(pik)$	$y_1=0$	$y_2=1$	$p_{i\bullet}$
$x_1=0$	$36/52$	$12/52$	$p_{0\bullet}=48/52$
$x_2=1$	$3/52$	$1/52$	$p_{1\bullet}=4/52$
$p_{\bullet k}$	$p_{\bullet 0}=39/52$	$p_{\bullet 1}=13/52$	1

Rozwiązanie.

- ❶ Ponieważ losujemy tylko 1 kartę, zmienne X i Y mogą przyjmować tylko 2 wartości; przyjmijmy, że 0 lub 1. Tablica dwudzielna ma postać:

$X(as) \backslash Y(pik)$	$y_1=0$	$y_2=1$	$p_{i\bullet}$
$x_1=0$	$36/52$	$12/52$	$p_{0\bullet}=48/52$
$x_2=1$	$3/52$	$1/52$	$p_{1\bullet}=4/52$
$p_{\bullet k}$	$p_{\bullet 0}=39/52$	$p_{\bullet 1}=13/52$	1

- ❷ Z powyższego mamy, że

$$p_{00} = \frac{36}{52} = \frac{48}{52} \frac{39}{52} = p_{0\bullet} p_{\bullet 0}$$

$$p_{01} = \frac{12}{52} = \frac{48}{52} \frac{13}{52} = p_{0\bullet} p_{\bullet 1}$$

$$p_{10} = \frac{3}{52} = \frac{4}{52} \frac{39}{52} = p_{1\bullet} p_{\bullet 0}$$

$$p_{11} = \frac{1}{52} = \frac{4}{52} \frac{13}{52} = p_{1\bullet} p_{\bullet 1}$$

więc zmienne X i Y są niezależne.

- 3 Rozkład brzegowy zmiennej Y jest dwupunktowy o wartościach $\frac{39}{52}$ i $\frac{13}{52}$.

Jego dystrybuanta to

$$F_2(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \frac{39}{52} & 0 < y \leq 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

Funkcje 2D zmiennych losowych

Niech dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) będzie przekształcona w dwuwymiarową zmienną (U_1, U_2) za pomocą wzajemnie jednoznacznych przekształceń ciągłych:

$$U_1 = g_1(X, Y), \quad U_2 = g_2(X, Y)$$

o ciągłych pochodnych cząstkowych względem x i y . Niech jacobian powyższego przekształcenia będzie różny od zera w prostokącie $a \leq X \leq b$, $c \leq Y \leq d$.

Funkcje 2D zmiennych losowych

Niech dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) będzie przekształcona w dwuwymiarową zmienną (U_1, U_2) za pomocą wzajemnie jednoznacznych przekształceń ciągłych:

$$U_1 = g_1(X, Y), \quad U_2 = g_2(X, Y)$$

o ciągłych pochodnych cząstkowych względem x i y . Niech jacobian powyższego przekształcenia będzie różny od zera w prostokącie $a \leq X \leq b$, $c \leq Y \leq d$.

Oznaczmy przez $h_1 = g_1^{-1}$ i $h_2 = g_2^{-1}$ przekształcenia odwrotne, tj.

$$X = h_1(U_1, U_2), \quad Y = h_2(U_1, U_2)$$

Funkcje 2D zmiennych losowych

Niech dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) będzie przekształcona w dwuwymiarową zmienną (U_1, U_2) za pomocą wzajemnie jednoznacznych przekształceń ciągłych:

$$U_1 = g_1(X, Y), \quad U_2 = g_2(X, Y)$$

o ciągłych pochodnych cząstkowych względem x i y . Niech jacobian powyższego przekształcenia będzie różny od zera w prostokącie $a \leq X \leq b$, $c \leq Y \leq d$.

Oznaczmy przez $h_1 = g_1^{-1}$ i $h_2 = g_2^{-1}$ przekształcenia odwrotne, tj.

$$X = h_1(U_1, U_2), \quad Y = h_2(U_1, U_2)$$

Jacobian przekształcenia odwrotnego:

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

Funkcje 2D zmiennych losowych

Niech dwuwymiarowa zmienna losowa (X, Y) będzie przekształcona w dwuwymiarową zmienną (U_1, U_2) za pomocą wzajemnie jednoznacznych przekształceń ciągłych:

$$U_1 = g_1(X, Y), \quad U_2 = g_2(X, Y)$$

o ciągłych pochodnych cząstkowych względem x i y . Niech jacobian powyższego przekształcenia będzie różny od zera w prostokącie $a \leq X \leq b$, $c \leq Y \leq d$.

Oznaczmy przez $h_1 = g_1^{-1}$ i $h_2 = g_2^{-1}$ przekształcenia odwrotne, tj.

$$X = h_1(U_1, U_2), \quad Y = h_2(U_1, U_2)$$

Jacobian przekształcenia odwrotnego:

$$J = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x}{\partial u_1} & \frac{\partial x}{\partial u_2} \\ \frac{\partial y}{\partial u_1} & \frac{\partial y}{\partial u_2} \end{pmatrix}$$

Jacobian J jest skończony i ciągły w obszarze S płaszczyzny (u_1, u_2) , w który przekształcony jest prostokąt $a \leq X \leq b$, $c \leq Y \leq d$.

Funkcje 2D zmiennych losowych

Poprzez zmianę zmiennych w całce mamy:

$$\begin{aligned}P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) &= \int_a^b \left(\int_c^d f_{X,Y}(x, y) dy \right) dx \\&= \iint_S f_{X,Y} [h_1(u_1, u_2), h_2(u_1, u_2)] |J| du_1 du_2 \\&= \iint_S f_{U_1, U_2}(u_1, u_2) du_1 du_2 \\&= P((U_1, U_2) \in S)\end{aligned}$$

Funkcje 2D zmiennych losowych

Poprzez zmianę zmiennych w całce mamy:

$$\begin{aligned}P(a \leq X \leq b, c \leq Y \leq d) &= \int_a^b \left(\int_c^d f_{X,Y}(x,y) dy \right) dx \\&= \iint_S f_{X,Y}[h_1(u_1, u_2), h_2(u_1, u_2)] |J| du_1 du_2 \\&= \iint_S f_{U_1, U_2}(u_1, u_2) du_1 du_2 \\&= P((U_1, U_2) \in S)\end{aligned}$$

Zatem dwuwymiarowy rozkład zmiennych U_1 i U_2 przyjmuje postać:

$$f_{U_1, U_2}(u_1, u_2) = f_{X,Y}[h_1(u_1, u_2), h_2(u_1, u_2)] |J|$$

Funkcje 2D zmiennych losowych

Zadanie: Rozważmy dwie niezależne zmienne losowe X, Y o rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}(0, 1)$. Jaki rozkład ma ich suma $X + Y$?

Funkcje 2D zmiennych losowych

Zadanie: Rozważmy dwie niezależne zmienne losowe X, Y o rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}(0, 1)$. Jaki rozkład ma ich suma $X + Y$?

Rozwiązanie: Niech $U_1 = X + Y$, $U_2 = Y$. Wtedy $X = U_1 - U_2$, $Y = U_2$. Dla takiej transformacji moduł jacobianu wynosi $|J| = 1$.

Funkcje 2D zmiennych losowych

Zadanie: Rozważmy dwie niezależne zmienne losowe X, Y o rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}(0, 1)$. Jaki rozkład ma ich suma $X + Y$?

Rozwiązanie: Niech $U_1 = X + Y$, $U_2 = Y$. Wtedy $X = U_1 - U_2$, $Y = U_2$. Dla takiej transformacji moduł jacobianu wynosi $|J| = 1$. Rozkład wspólny zmiennych (U_1, U_2) wynosi

$$f_{U_1, U_2}(u_1, u_2) = f_{X, Y}[x(u_1, u_2), y(u_1, u_2)] |J| = f_X(u_1 - u_2) f_Y(u_2)$$

Funkcje 2D zmiennych losowych

Zadanie: Rozważmy dwie niezależne zmienne losowe X, Y o rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}(0, 1)$. Jaki rozkład ma ich suma $X + Y$?

Rozwiązanie: Niech $U_1 = X + Y$, $U_2 = Y$. Wtedy $X = U_1 - U_2$, $Y = U_2$. Dla takiej transformacji moduł jacobianu wynosi $|J| = 1$. Rozkład wspólny zmiennych (U_1, U_2) wynosi

$$f_{U_1, U_2}(u_1, u_2) = f_{X, Y}[x(u_1, u_2), y(u_1, u_2)] |J| = f_X(u_1 - u_2) f_Y(u_2)$$

Rozkład zmiennej U_1 jest rozkładem brzegowym rozkładu wspólnego (U_1, U_2) :

$$f_{U_1=X+Y}(u_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u_1 - u_2) f_Y(u_2) du_2 = \int_0^1 f_X(u_1 - u_2) du_2$$

gdzie skorzystaliśmy z faktu, że $f_Y \neq 0$ dla $0 \leq u_2 \leq 1$.

Funkcje 2D zmiennych losowych

Zadanie: Rozważmy dwie niezależne zmienne losowe X, Y o rozkładzie jednostajnym $\mathcal{U}(0, 1)$. Jaki rozkład ma ich suma $X + Y$?

Rozwiązanie: Niech $U_1 = X + Y$, $U_2 = Y$. Wtedy $X = U_1 - U_2$, $Y = U_2$. Dla takiej transformacji moduł jacobianu wynosi $|J| = 1$. Rozkład wspólny zmiennych (U_1, U_2) wynosi

$$f_{U_1, U_2}(u_1, u_2) = f_{X, Y}[x(u_1, u_2), y(u_1, u_2)] |J| = f_X(u_1 - u_2) f_Y(u_2)$$

Rozkład zmiennej U_1 jest rozkładem brzegowym rozkładu wspólnego (U_1, U_2) :

$$f_{U_1=X+Y}(u_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u_1 - u_2) f_Y(u_2) du_2 = \int_0^1 f_X(u_1 - u_2) du_2$$

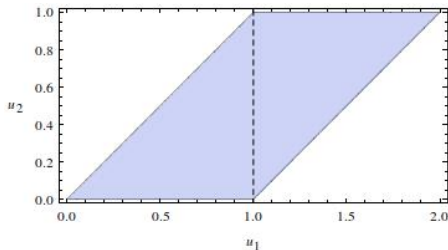
gdzie skorzystaliśmy z faktu, że $f_Y \neq 0$ dla $0 \leq u_2 \leq 1$. Funkcja podcałkowa jest niezerowa dla $0 \leq u_1 - u_2 \leq 1$, czyli wewnątrz równoległoboku $u_2 \leq u_1$, $u_2 \geq u_1 - 1$, w którym $f_X(u_1 - u_2) = 1$.

Funkcje 2D zmiennych losowych

Rozbija nam to całkę na dwie:

$$\int_0^{u_1} du_2 = u_1 \text{ dla } u_1 \in [0, 1]$$

$$\int_{u_1-1}^1 du_2 = 2 - u_1 \text{ dla } u_1 \in (1, 2]$$



Funkcje 2D zmiennych losowych

Rozbija nam to całkę na dwie:

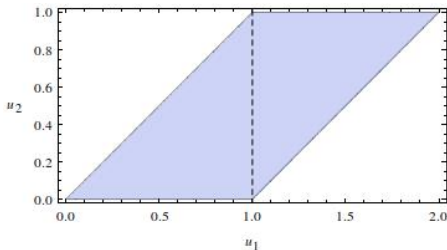
$$\int_0^{u_1} du_2 = u_1 \text{ dla } u_1 \in [0, 1]$$

$$\int_{u_1-1}^1 du_2 = 2 - u_1 \text{ dla } u_1 \in (1, 2]$$

Poszukiwany rozkład prawdopodobieństwa:

$$f_{U_1=X+Y}(u_1) = \begin{cases} u_1 & \text{dla } u_1 \in [0, 1] \\ 2 - u_1 & \text{dla } u_1 \in (1, 2] \end{cases}$$

jest zatem rozkładem trójkątnym:

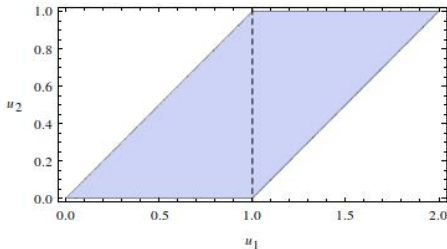


Funkcje 2D zmiennych losowych

Rozbija nam to całkę na dwie:

$$\int_0^{u_1} du_2 = u_1 \text{ dla } u_1 \in [0, 1]$$

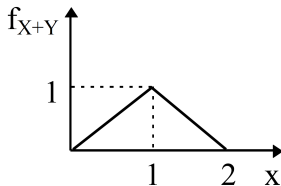
$$\int_{u_1-1}^1 du_2 = 2 - u_1 \text{ dla } u_1 \in (1, 2]$$



Poszukiwany rozkład prawdopodobieństwa:

$$f_{U_1=X+Y}(u_1) = \begin{cases} u_1 & \text{dla } u_1 \in [0, 1] \\ 2 - u_1 & \text{dla } u_1 \in (1, 2] \end{cases}$$

jest zatem rozkładem trójkątnym:



Funkcje 2D zmiennych losowych

Podobnie można obliczyć rozkłady różnicy $X - Y$, iloczynu XY , ilorazu X/Y , pierwiastka $\sqrt{X}$, kwadratu X^2 , różnicy kwadratów $(X - Y)^2$ itd.

Funkcje 2D zmiennych losowych

Podobnie można obliczyć rozkłady różnicy $X - Y$, iloczynu XY , ilorazu X/Y , pierwiastka $\sqrt{X}$, kwadratu X^2 , różnicy kwadratów $(X - Y)^2$ itd.

$$f_{X-Y}(u_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u_1 + u_2) f_Y(u_2) du_2$$

$$f_{XY}(u_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X\left(\frac{u_1}{u_2}\right) f_Y(u_2) \frac{1}{|u_2|} du_2$$

$$f_{X/Y}(u_1) = \int_{-\infty}^{\infty} f_X(u_1 u_2) f_Y(u_2) |u_2| du_2$$

⋮

Funkcje wielowymiarowych zmiennych losowych

- Niech $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ będzie n -wymiarową zmienną losową.
- Rozkład wspólny $\mathbf{X}$ określa funkcja:

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) \geq 0 : \int_{\mathbb{R}^n} f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = 1$$

- Transformacje wielowymiarowe:

$$\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_n) = g(\mathbf{X}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{X} = h(\mathbf{U}) = g^{-1}(\mathbf{U})$$

- Rozkład wspólny nowych zmiennych:

$$f_{\mathbf{U}}(u_1, \dots, u_n) = f_{\mathbf{X}}(h_1(\mathbf{U}), \dots, h_n(\mathbf{U})) \cdot |J|$$

gdzie $J = \det \left(\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} \right)$ jest jacobianem transformacji odwrotnej.

Funkcje wielowymiarowych zmiennych losowych

- Niech $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ będzie n -wymiarową zmienną losową.
- Rozkład wspólny $\mathbf{X}$ określa funkcja:

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) \geq 0 : \int_{\mathbb{R}^n} f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = 1$$

- Transformacje wielowymiarowe:

$$\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_n) = g(\mathbf{X}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{X} = h(\mathbf{U}) = g^{-1}(\mathbf{U})$$

- Rozkład wspólny nowych zmiennych:

$$f_{\mathbf{U}}(u_1, \dots, u_n) = f_{\mathbf{X}}(h_1(\mathbf{U}), \dots, h_n(\mathbf{U})) \cdot |J|$$

gdzie $J = \det \left(\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} \right)$ jest jacobianem transformacji odwrotnej.

Funkcje wielowymiarowych zmiennych losowych

- Niech $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ będzie n -wymiarową zmienną losową.
- Rozkład wspólny $\mathbf{X}$ określa funkcja:

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) \geq 0 : \int_{\mathbb{R}^n} f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = 1$$

- Transformacje wielowymiarowe:

$$\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_n) = g(\mathbf{X}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{X} = h(\mathbf{U}) = g^{-1}(\mathbf{U})$$

- Rozkład wspólny nowych zmiennych:

$$f_{\mathbf{U}}(u_1, \dots, u_n) = f_{\mathbf{X}}(h_1(\mathbf{U}), \dots, h_n(\mathbf{U})) \cdot |J|$$

gdzie $J = \det \left(\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} \right)$ jest jacobianem transformacji odwrotnej.

Funkcje wielowymiarowych zmiennych losowych

- Niech $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ będzie n -wymiarową zmienną losową.
- Rozkład wspólny $\mathbf{X}$ określa funkcja:

$$f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) \geq 0 : \int_{\mathbb{R}^n} f_{\mathbf{X}}(x_1, \dots, x_n) dx_1 \cdots dx_n = 1$$

- Transformacje wielowymiarowe:

$$\mathbf{U} = (U_1, \dots, U_n) = g(\mathbf{X}) \quad \Leftrightarrow \quad \mathbf{X} = h(\mathbf{U}) = g^{-1}(\mathbf{U})$$

- Rozkład wspólny nowych zmiennych:

$$f_{\mathbf{U}}(u_1, \dots, u_n) = f_{\mathbf{X}}(h_1(\mathbf{U}), \dots, h_n(\mathbf{U})) \cdot |J|$$

gdzie $J = \det \left(\frac{\partial(x_1, \dots, x_n)}{\partial(u_1, \dots, u_n)} \right)$ jest jacobianem transformacji odwrotnej.

Funkcje wielowymiarowych zmiennych losowych

- Rozkład brzegowy zmiennej losowej U_i uzyskujemy przez całkowanie po pozostałych zmiennych:

$$f_{U_i}(u_i) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{\mathbf{U}}(u_1, \dots, u_n) du_1 \cdots du_{i-1} du_{i+1} \cdots du_n$$

- Rozkłady warunkowe dla podzbioru zmiennych $\mathbf{U}_A$ przy ustalonych $\mathbf{U}_B$:

$$f_{\mathbf{U}_A|\mathbf{U}_B}(\mathbf{u}_A | \mathbf{u}_B) = \frac{f_{\mathbf{U}}(\mathbf{u}_A, \mathbf{u}_B)}{\int f_{\mathbf{U}}(\mathbf{v}_A, \mathbf{u}_B) d\mathbf{v}_A}$$

- Jeśli zmienne $X_1, \dots, X_n$ są niezależne, to dowolne funkcje $U_i = g_i(X_i)$ pozostają niezależne.

Funkcje wielowymiarowych zmiennych losowych

- Rozkład brzegowy zmiennej losowej U_i uzyskujemy przez całkowanie po pozostałych zmiennych:

$$f_{U_i}(u_i) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{\mathbf{U}}(u_1, \dots, u_n) du_1 \cdots du_{i-1} du_{i+1} \cdots du_n$$

- Rozkłady warunkowe dla podzbioru zmiennych $\mathbf{U}_A$ przy ustalonych $\mathbf{U}_B$:

$$f_{\mathbf{U}_A|\mathbf{U}_B}(\mathbf{u}_A \mid \mathbf{u}_B) = \frac{f_{\mathbf{U}}(\mathbf{u}_A, \mathbf{u}_B)}{\int f_{\mathbf{U}}(\mathbf{v}_A, \mathbf{u}_B) d\mathbf{v}_A}$$

- Jeśli zmienne $X_1, \dots, X_n$ są niezależne, to dowolne funkcje $U_i = g_i(X_i)$ pozostają niezależne.

Funkcje wielowymiarowych zmiennych losowych

- Rozkład brzegowy zmiennej losowej U_i uzyskujemy przez całkowanie po pozostałych zmiennych:

$$f_{U_i}(u_i) = \int_{\mathbb{R}^{n-1}} f_{\mathbf{U}}(u_1, \dots, u_n) du_1 \cdots du_{i-1} du_{i+1} \cdots du_n$$

- Rozkłady warunkowe dla podzbioru zmiennych $\mathbf{U}_A$ przy ustalonych $\mathbf{U}_B$:

$$f_{\mathbf{U}_A|\mathbf{U}_B}(\mathbf{u}_A \mid \mathbf{u}_B) = \frac{f_{\mathbf{U}}(\mathbf{u}_A, \mathbf{u}_B)}{\int f_{\mathbf{U}}(\mathbf{v}_A, \mathbf{u}_B) d\mathbf{v}_A}$$

- Jeśli zmienne $X_1, \dots, X_n$ są niezależne, to dowolne funkcje $U_i = g_i(X_i)$ pozostają niezależne.