

Statystyka i rachunek prawdopodobieństwa

Wykład 5: Funkcje zmiennych losowych

Mariusz Tarnopolski

Instytut Astronomii UMK

Statystyka ©2026



Funkcje zmiennych losowych ciągłych

Motywacja

Wyobraźmy sobie, że V to zmienna losowa reprezentująca prędkość v cząsteczek gazu. Te prędkości mają jakiś (np. Maxwella-Boltzmannna) rozkład prawdopodobieństwa $f_V(v)$.

Funkcje zmiennych losowych ciągłych

Motywacja

Wyobraźmy sobie, że V to zmienna losowa reprezentująca prędkość v cząsteczek gazu. Te prędkości mają jakiś (np. Maxwella-Boltzmann) rozkład prawdopodobieństwa $f_V(v)$.

Jeśli chcemy poznać rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej będącej energią kinetyczną cząsteczek $K = \frac{1}{2}mV^2$, to musimy się dowiedzieć jaki jest rozkład kwadratu prędkości.

Funkcje zmiennych losowych ciągłych

Motywacja

Wyobraźmy sobie, że V to zmienna losowa reprezentująca prędkość v cząsteczek gazu. Te prędkości mają jakiś (np. Maxwella-Boltzmann) rozkład prawdopodobieństwa $f_V(v)$.

Jeśli chcemy poznać rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej będącej energią kinetyczną cząsteczek $K = \frac{1}{2}mV^2$, to musimy się dowiedzieć jaki jest rozkład kwadratu prędkości.

Przykłady gdy jest to użyteczne:

- energia kinetyczna jako miara temperatury: $\langle K \rangle = \frac{3}{2}k_B T$
- tempo reakcji chemicznych k (Aarhenius) zależy od frakcji cząsteczek o energii przekraczających energię aktywacji E_0 : $k \propto \int_{E_0}^{\infty} f_K(K) dK$,
skąd dla rozkładu Maxwella-Boltzmann $k \propto \exp\left(-\frac{E_0}{k_B T}\right)$

Funkcje zmiennych losowych ciągłych

Motywacja

Wyobraźmy sobie, że V to zmienna losowa reprezentująca prędkość v cząsteczek gazu. Te prędkości mają jakiś (np. Maxwella-Boltzmann) rozkład prawdopodobieństwa $f_V(v)$.

Jeśli chcemy poznać rozkład prawdopodobieństwa zmiennej losowej będącej energią kinetyczną cząsteczek $K = \frac{1}{2}mV^2$, to musimy się dowiedzieć jaki jest rozkład kwadratu prędkości.

Przykłady gdy jest to użyteczne:

- energia kinetyczna jako miara temperatury: $\langle K \rangle = \frac{3}{2}k_B T$
- tempo reakcji chemicznych k (Aarhenius) zależy od frakcji cząsteczek o energii przekraczających energię aktywacji E_0 : $k \propto \int_{E_0}^{\infty} f_K(K) dK$,
skąd dla rozkładu Maxwella-Boltzmann $k \propto \exp\left(-\frac{E_0}{k_B T}\right)$

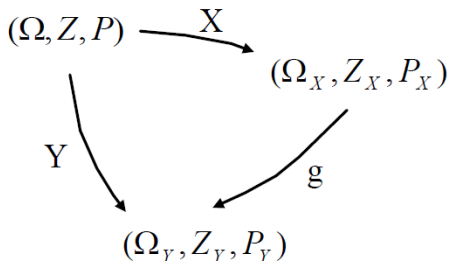
Funkcje zmiennych losowych ciągłych

Rozważmy zmienną losową X typu ciągłego wraz z jej rozkładem prawdopodobieństwa $f_X(x)$. Niech nośnikiem X będzie przedział $[x_1, x_2]$ (dopuszczamy, by $x_i = \pm\infty$).

Funkcje zmiennych losowych ciągłych

Rozważmy zmienną losową X typu ciągłego wraz z jej rozkładem prawdopodobieństwa $f_X(x)$. Niech nośnikiem X będzie przedział $[x_1, x_2]$ (dopuszczamy, by $x_i = \pm\infty$).

Niech g będzie funkcją klasy $\mathcal{C}^1$ przekształcającą zmienną X w zmienną Y .



Rozważymy dwa przypadki.

(a) Niech $Y = g(X) : g \nearrow$. Wtedy też $g^{-1} \nearrow$. Mamy zatem dystrybuantę

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y))$$

(a) Niech $Y = g(X) : g \nearrow$. Wtedy też $g^{-1} \nearrow$. Mamy zatem dystrybuantę

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \leq g^{-1}(y)) = F_X(g^{-1}(y))$$

skąd obliczymy

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = \frac{d}{dy} F_X(g^{-1}(y)) = f_X(g^{-1}(y)) \frac{d}{dy} g^{-1}(y)$$

Funkcje zmiennych losowych ciągłych

(b) Jeśli $g \searrow$ to $g^{-1} \searrow$. Mamy zatem dystrybuantę

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \geq g^{-1}(y)) = 1 - F_X(g^{-1}(y))$$

Funkcje zmiennych losowych ciągłych

(b) Jeśli $g \searrow$ to $g^{-1} \searrow$. Mamy zatem dystrybuantę

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \geq g^{-1}(y)) = 1 - F_X(g^{-1}(y))$$

skąd obliczymy

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = -\frac{d}{dy} F_X(g^{-1}(y)) = -f_X(g^{-1}(y)) \frac{d}{dy} g^{-1}(y)$$

Funkcje zmiennych losowych ciągłych

(b) Jeśli $g \searrow$ to $g^{-1} \searrow$. Mamy zatem dystrybuantę

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \geq g^{-1}(y)) = 1 - F_X(g^{-1}(y))$$

skąd obliczymy

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = -\frac{d}{dy} F_X(g^{-1}(y)) = -f_X(g^{-1}(y)) \frac{d}{dy} g^{-1}(y)$$

Łącząc przypadki **(a)** i **(b)** dostajemy

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|$$

Funkcje zmiennych losowych ciągłych

(b) Jeśli $g \searrow$ to $g^{-1} \searrow$. Mamy zatem dystrybuantę

$$F_Y(y) = P(Y \leq y) = P(g(X) \leq y) = P(X \geq g^{-1}(y)) = 1 - F_X(g^{-1}(y))$$

skąd obliczymy

$$f_Y(y) = F'_Y(y) = -\frac{d}{dy} F_X(g^{-1}(y)) = -f_X(g^{-1}(y)) \frac{d}{dy} g^{-1}(y)$$

Łącząc przypadki (a) i (b) dostajemy

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|$$

Jeśli g nie jest ściśle monotoniczna w całym przedziale $[x_1, x_2]$, to można ją rozważać osobno w podprzedziałach, w których jest monotoniczna.

Wtedy funkcję zmiennej losowej można obliczyć wg powyższego wzoru w każdym z tych podprzedziałów z osobna.

Przykład. Niech X ma rozkład $\mathcal{U}\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Rozważmy $Y = \tan X$.
Mamy $y = \tan x \in (-\infty, \infty)$, zatem $x = \arctan y$, czyli

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1 + y^2}$$

Funkcje zmiennych losowych ciągłych

Przykład. Niech X ma rozkład $\mathcal{U}\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Rozważmy $Y = \tan X$.
Mamy $y = \tan x \in (-\infty, \infty)$, zatem $x = \arctan y$, czyli

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1 + y^2}$$

skąd

$$f_Y(y) = f_X(x) \left| \frac{dx}{dy} \right| = \frac{1}{\pi(1 + y^2)}$$

co jest nazywane rozkładem Cauchy'ego.

Funkcje zmiennych losowych ciągłych

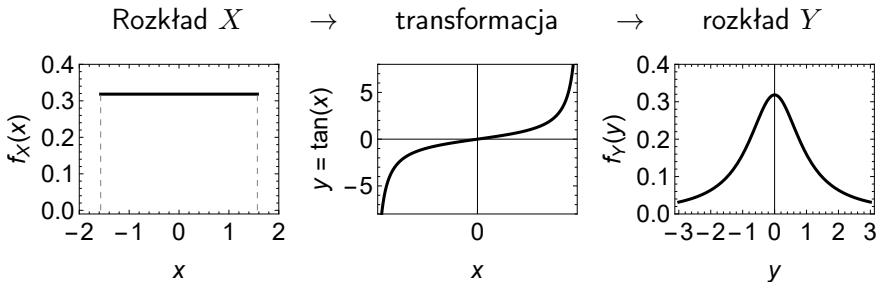
Przykład. Niech X ma rozkład $\mathcal{U}\left(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right)$. Rozważmy $Y = \tan X$.
Mamy $y = \tan x \in (-\infty, \infty)$, zatem $x = \arctan y$, czyli

$$\frac{dx}{dy} = \frac{1}{1+y^2}$$

skąd

$$f_Y(y) = f_X(x) \left| \frac{dx}{dy} \right| = \frac{1}{\pi(1+y^2)}$$

co jest nazywane rozkładem Cauchy'ego.



Przykład. Niech zmienna losowa X ma rozkład $f_X(x) = 1 - |x|$, gdzie $|x| < 1$. Znaleźć rozkład zmiennej $Y = X^2$.

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= P(Y \leq y) = P(X^2 \leq y) = P(-\sqrt{y} \leq X \leq \sqrt{y}) \\ &= F_X(\sqrt{y}) - F_X(-\sqrt{y}) \end{aligned}$$

Różniczkując dostaniemy

$$f_Y(y) = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \dots = \frac{1 - \sqrt{y}}{\sqrt{y}}$$

gdzie $0 < y < 1$.

Funkcje zmiennych losowych dyskretnych

Niech $Y = g(X)$ oraz $y_i = g(x_i)$. Wtedy

$$P(Y = y_j) = \sum_{\{x_i: g(x_i)=y_j\}} P(X = x_i)$$

Funkcje zmiennych losowych dyskretnych

Niech $Y = g(X)$ oraz $y_i = g(x_i)$. Wtedy

$$P(Y = y_j) = \sum_{\{x_i: g(x_i)=y_j\}} P(X = x_i)$$

Przykład. Zmienna losowa X ma rozkład:

x_i	-1	0	1	2
p_i	1/3	1/3	1/6	1/6

Wyznamy rozkład zmiennej losowej $Y = X^2$.

Funkcje zmiennych losowych dyskretnych

Niech $Y = g(X)$ oraz $y_j = g(x_i)$. Wtedy

$$P(Y = y_j) = \sum_{\{x_i: g(x_i)=y_j\}} P(X = x_i)$$

Przykład. Zmienna losowa X ma rozkład:

x_i	-1	0	1	2
p_i	1/3	1/3	1/6	1/6

Wyznamy rozkład zmiennej losowej $Y = X^2$. Punkty skokowe zmiennej Y to 0, 1, 4. Mamy

$$P(Y = 0) = \sum_{\{x_i: x_i^2=0\}} P(X = x_i) = P(X = 0) = \frac{1}{3}$$

$$P(Y = 1) = \sum_{\{x_i: x_i^2=1\}} P(X = x_i) = P(X = -1) + P(X = 1) = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

$$P(Y = 4) = \sum_{\{x_i: x_i^2=4\}} P(X = x_i) = P(X = 2) = \frac{1}{6}$$