

Statystyka i rachunek prawdopodobieństwa

Wykład 4: Zdarzenia niezależne

Mariusz Tarnopolski

Instytut Astronomii UMK

Statystyka ©2026



Zdarzenia niezależne

(Przypomnienie)

- 1 Zdarzenia A i B są **niezależne**, jeśli zachodzi $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- 2 Uogólnienie niezależności: zdarzenia $A_1, A_2, \dots, A_n$ nazywamy **wzajemnie (zespołowo) niezależnymi** jeśli

$\forall s, k_1, k_2, \dots, k_s \in \mathbb{N} : 2 \leq s \leq n, 1 \leq k_i \leq n, k_i \neq k_j \text{ dla } i \neq j$
zachodzi

$$P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \dots \cap A_{k_s}) = P(A_{k_1}) P(A_{k_2}) \cdots P(A_{k_s})$$

Zdarzenia niezależne

(Przypomnienie)

- 1 Zdarzenia A i B są **niezależne**, jeśli zachodzi $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- 2 Uogólnienie niezależności: zdarzenia $A_1, A_2, \dots, A_n$ nazywamy **wzajemnie (zespołowo) niezależnymi** jeśli

$\forall s, k_1, k_2, \dots, k_s \in \mathbb{N} : 2 \leq s \leq n, 1 \leq k_i \leq n, k_i \neq k_j \text{ dla } i \neq j$
zachodzi

$$P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \dots \cap A_{k_s}) = P(A_{k_1}) P(A_{k_2}) \cdots P(A_{k_s})$$

Niezależność można też ująć następująco:

Jeśli dla zdarzeń A i B o niezerowych prawdopodobieństwach zachodzi

$$P(A|B) = P(A)$$

lub

$$P(B|A) = P(B)$$

to zdarzenia A i B są niezależne.

Zdarzenia niezależne

(Przypomnienie)

- 1 Zdarzenia A i B są **niezależne**, jeśli zachodzi $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- 2 Uogólnienie niezależności: zdarzenia $A_1, A_2, \dots, A_n$ nazywamy **wzajemnie (zespołowo) niezależnymi** jeśli

$\forall s, k_1, k_2, \dots, k_s \in \mathbb{N} : 2 \leq s \leq n, 1 \leq k_i \leq n, k_i \neq k_j \text{ dla } i \neq j$
zachodzi

$$P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \dots \cap A_{k_s}) = P(A_{k_1}) P(A_{k_2}) \cdots P(A_{k_s})$$

Niezależność można też ująć następująco:

Jeśli dla zdarzeń A i B o niezerowych prawdopodobieństwach zachodzi

$$P(A|B) = P(A)$$

lub

$$P(B|A) = P(B)$$

to zdarzenia A i B są niezależne.

Praktyczną interpretacją niezależności jest więc brak wpływu zdarzenia B na prawdopodobieństwo zdarzenia A i vice versa.

Przykład Bernsteina. Trzy ściany czworościanu foremnego zostały pomalowane na **biało**, **czzerwono** i **zielono**, zaś czwarta ściana w paski **biało-czerwono-zielono**. Doświadczenie losowe: rzucamy czworościanem i obserwujemy na którą ścianę upadł. Zdefiniujmy następujące zdarzenia:

- B —czworościan upadł na ścianę zawierającą kolor **biały**;
- C —zawierającą kolor **czzerwony**;
- Z —zawierającą kolor **zielony**.

Przykład Bernsteina. Trzy ściany czworościanu foremnego zostały pomalowane na **biało**, **czzerwono** i **zielono**, zaś czwarta ściana w paski **biało-czerwono-zielono**. Doświadczenie losowe: rzucamy czworościanem i obserwujemy na którą ścianę upadł. Zdefiniujemy następujące zdarzenia:

- B —czworościan upadł na ścianę zawierającą kolor **biały**;
- C —zawierającą kolor **czzerwony**;
- Z —zawierającą kolor **zielony**.

Zadajmy dwa pytania: czy zdarzenia B, C, Z są

- 1 niezależne parami,
- 2 niezależne zespołowo?

Odpowiedzi.

1

$$P(B \cap C) = P(B \cap Z) = P(C \cap Z) = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = P(C) = P(Z) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(B)P(C) = P(B)P(Z) = P(C)P(Z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

zatem B, C, Z są parami niezależne.

2

$$P(B \cap C \cap Z) = \frac{1}{4}$$

$$P(B)P(C)P(Z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{4}$$

zatem B, C, Z nie są zespołowo niezależne (tj. są zależne).

Odpowiedzi.

1

$$P(B \cap C) = P(B \cap Z) = P(C \cap Z) = \frac{1}{4}$$

$$P(B) = P(C) = P(Z) = \frac{2}{4} = \frac{1}{2}$$

$$P(B)P(C) = P(B)P(Z) = P(C)P(Z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$$

zatem B, C, Z są parami niezależne.

2

$$P(B \cap C \cap Z) = \frac{1}{4}$$

$$P(B)P(C)P(Z) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{8} \neq \frac{1}{4}$$

zatem B, C, Z nie są zespołowo niezależne (tj. są zależne).

UWAGA!

Niezależność parami $\nRightarrow$ niezależności zespołowej
(jak pokazuje przykład Bernsteina).

Natomiast
niezależność zespołowa $\Rightarrow$ niezależność parami.

Niezależność a wykluczanie się zdarzeń losowych

Wykluczające się zdarzenia A i B są:

- zależne, gdy $P(A) > 0$ oraz $P(B) > 0$
- niezależne, gdy $P(A) = 0$ lub $P(B) = 0$

Niezależność a wykluczanie się zdarzeń losowych

Wykluczające się zdarzenia A i B są:

- zależne, gdy $P(A) > 0$ oraz $P(B) > 0$
- niezależne, gdy $P(A) = 0$ lub $P(B) = 0$

Zdarzenia **niezależne** A i B mogą być:

- wykluczające się, gdy A —dowolne, zaś $B = \emptyset$ lub na odwrót;
- niewykluczające się, np. zdarzenia C i Z z przykładu Bernsteina.

Niezależność a wykluczanie się zdarzeń losowych

Wykluczające się zdarzenia A i B są:

- zależne, gdy $P(A) > 0$ oraz $P(B) > 0$
- niezależne, gdy $P(A) = 0$ lub $P(B) = 0$

Zdarzenia **niezależne** A i B mogą być:

- wykluczające się, gdy A —dowolne, zaś $B = \emptyset$ lub na odwrót;
- niewykluczające się, np. zdarzenia C i Z z przykładu Bernsteina.

UWAGA!

Mowa jest tu o niezależności statystycznej (stochastycznej), nie przyczynowej—nie ma sensu w tym kontekście (tj. statystycznym) rozważać, które zdarzenie zależy od którego. Oczywiście, związek przyczynowo-skutkowy może istnieć, ale jego rozważanie wykracza poza powyższe pojęcie niezależności stochastycznej.

Niezależność a wykluczanie się zdarzeń losowych

Wykluczające się zdarzenia A i B są:

- zależne, gdy $P(A) > 0$ oraz $P(B) > 0$
- niezależne, gdy $P(A) = 0$ lub $P(B) = 0$

Zdarzenia **niezależne** A i B mogą być:

- wykluczające się, gdy A —dowolne, zaś $B = \emptyset$ lub na odwrót;
- niewykluczające się, np. zdarzenia C i Z z przykładu Bernsteina.

UWAGA!

Mowa jest tu o niezależności statystycznej (stochastycznej), nie przyczynowej—nie ma sensu w tym kontekście (tj. statystycznym) rozważać, które zdarzenie zależy od którego. Oczywiście, związek przyczynowo-skutkowy może istnieć, ale jego rozważanie wykracza poza powyższe pojęcie niezależności stochastycznej. Np.

- sprzedaż lodów a liczba utonięć w jeziorach
- odległość Merkury–Neptun a zużycie paliwa w Azerbejdżanie

Niezależność a wykluczanie się zdarzeń losowych

Wykluczające się zdarzenia A i B są:

- zależne, gdy $P(A) > 0$ oraz $P(B) > 0$
- niezależne, gdy $P(A) = 0$ lub $P(B) = 0$

Zdarzenia **niezależne** A i B mogą być:

- wykluczające się, gdy A —dowolne, zaś $B = \emptyset$ lub na odwrót;
- niewykluczające się, np. zdarzenia C i Z z przykładu Bernsteina.

UWAGA!

Mowa jest tu o niezależności statystycznej (stochastycznej), nie przyczynowej—nie ma sensu w tym kontekście (tj. statystycznym) rozważać, które zdarzenie zależy od którego. Oczywiście, związek przyczynowo-skutkowy może istnieć, ale jego rozważanie wykracza poza powyższe pojęcie niezależności stochastycznej. Np.

- sprzedaż lodów a liczba utonięć w jeziorach
- odległość Merkury–Neptun a zużycie paliwa w Azerbejdżanie

Zdarzenia niezależne

Przykład minimalny

Rzucamy dwiema monetami:

- A —na jednej wypada reszka
- B —na drugiej wypada reszka

Wtedy

$$P(A \cap B) = P(A)P(B) = \frac{1}{4}$$

Zadanie. Czy trzy rzuty monetą mogą prowadzić do zdarzeń niezależnych parami, ale nie zespołowo?

Jeśli tak, to jak je skonstruować?

Zdarzenia niezależne

Przykład minimalny

Rozwiązanie. Rzucamy trzema monetami:

- A —1. i 2. kostka dają taki sam wynik; $P(A) = \frac{1}{2}$
- B —2. i 3. kostka dają taki sam wynik; $P(B) = \frac{1}{2}$
- C —1. i 3. kostka dają taki sam wynik; $P(C) = \frac{1}{2}$

bo $\Omega = \{RRR, RRO, ROR, ORR, ROO, ORO, OOR, OOO\}$

Zdarzenia niezależne

Przykład minimalny

Rozwiązanie. Rzucamy trzema monetami:

- A —1. i 2. kostka dają taki sam wynik; $P(A) = \frac{1}{2}$
- B —2. i 3. kostka dają taki sam wynik; $P(B) = \frac{1}{2}$
- C —1. i 3. kostka dają taki sam wynik; $P(C) = \frac{1}{2}$

bo $\Omega = \{RRR, RRO, ROR, ORR, ROO, ORO, OOR, OOO\}$

Wtedy

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{4} = P(A)P(C)$$

$$P(B \cap C) = \frac{1}{4} = P(B)P(C)$$

Zdarzenia niezależne

Przykład minimalny

Rozwiązanie. Rzucamy trzema monetami:

- A —1. i 2. kostka dają taki sam wynik; $P(A) = \frac{1}{2}$
- B —2. i 3. kostka dają taki sam wynik; $P(B) = \frac{1}{2}$
- C —1. i 3. kostka dają taki sam wynik; $P(C) = \frac{1}{2}$

bo $\Omega = \{RRR, RRO, ROR, ORR, ROO, ORO, OOR, OOO\}$

Wtedy

$$P(A \cap B) = \frac{1}{4} = P(A)P(B)$$

$$P(A \cap C) = \frac{1}{4} = P(A)P(C)$$

$$P(B \cap C) = \frac{1}{4} = P(B)P(C)$$

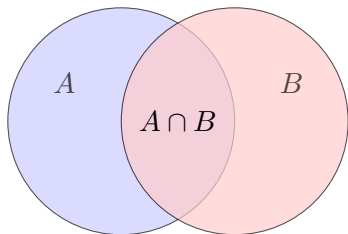
Ale

$$P(A \cap B \cap C) = \frac{1}{4} \neq \frac{1}{8} = P(A)P(B)P(C)$$

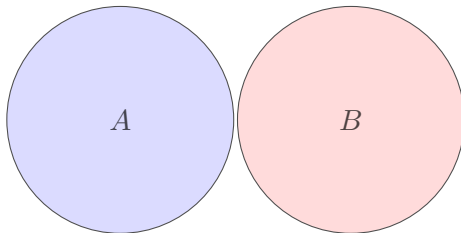
Niezależność statystyczna jest kluczowa w:

- analizie błędów pomiarowych;
- analizie szumów (przetwarzanie sygnałów, analiza szeregów czasowych);
- fizyce statystycznej (układy bez oddziaływań);
- metodach Monte Carlo;
- wielu innych.

Diagramy Venna



Jeśli $P(A \cap B) = P(A)P(B)$, to A i B są niezależne



$A \cap B = \emptyset \Rightarrow P(A \cap B) = 0$; jeśli $P(A), P(B) > 0$, to A i B są zależne

Twierdzenia dot. niezależności zmiennych normalnych

*Twierdzenie Craméra

Jeśli $X + Y$ ma rozkład normalny oraz X, Y są niezależne, to X, Y też mają rozkład normalny.

Twierdzenia dot. niezależności zmiennych normalnych

*Twierdzenie Craméra

Jeśli $X + Y$ ma rozkład normalny oraz X, Y są niezależne, to X, Y też mają rozkład normalny.

*Twierdzenie Kaca-Bernsteina

Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Jeśli $X + Y$ oraz $X - Y$ są niezależne, to X, Y mają rozkład normalny.

Twierdzenia dot. niezależności zmiennych normalnych

*Twierdzenie Craméra

Jeśli $X + Y$ ma rozkład normalny oraz X, Y są niezależne, to X, Y też mają rozkład normalny.

*Twierdzenie Kaca-Bernsteina

Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Jeśli $X + Y$ oraz $X - Y$ są niezależne, to X, Y mają rozkład normalny. Uogólnieniem jest

Twierdzenia dot. niezależności zmiennych normalnych

*Twierdzenie Craméra

Jeśli $X + Y$ ma rozkład normalny oraz X, Y są niezależne, to X, Y też mają rozkład normalny.

*Twierdzenie Kaca-Bernsteina

Niech X, Y będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Jeśli $X + Y$ oraz $X - Y$ są niezależne, to X, Y mają rozkład normalny. Uogólnieniem jest

*Twierdzenie Darmois-Skitowicza

Niech X_i będą niezależnymi zmiennymi losowymi. Weźmy kombinacje liniowe:

$$L_1 = \sum_i \alpha_i X_i, \quad L_2 = \sum_i \beta_i X_i$$

gdzie $\forall i : \alpha_i \neq 0 \vee \beta_i \neq 0$.

Jeśli L_1 i L_2 są niezależne, to $\forall i : X_i$ mają rozkład normalny.