

Statystyka i rachunek prawdopodobieństwa

Wykład 2: Paradoksy statystyczne

Mariusz Tarnopolski

Instytut Astronomii UMK

Statystyka ©2026



Paradoks hazardzisty

Rzucamy symetryczną monetą—prawdopodobieństwa wynoszą

$$P(O) = P(R) = 1/2$$

Paradoks hazardzisty

Rzucamy symetryczną monetą—prawdopodobieństwa wynoszą

$$P(O) = P(R) = 1/2$$

Rzucamy symetryczną monetą 10 razy; okazuje się, że orzeł wypadł 10 razy:

OOOOOOOOOO

Jakie jest prawdopodobieństwo, że **następnie** wypadnie R ?

Paradoks hazardzisty

Rzucamy symetryczną monetą—prawdopodobieństwa wynoszą

$$P(O) = P(R) = 1/2$$

Rzucamy symetryczną monetą 10 razy; okazuje się, że orzeł wypadł 10 razy:

OOOOOOOOOO

Jakie jest prawdopodobieństwo, że **następnie** wypadnie R ?

W pierwszym odruchu wydaje się, że $P(R) > 1/2$ ponieważ trzeba jakoś *zbalansować* nierównowagę spowodowaną wystąpieniem 10 orłów z rzędu (spodziewamy się, że około połowa rzutów powinna dać orła, zatem 4–6 spośród 10 nie wzbudziłyby zdziwienia).

Paradoks hazardzisty

Rzucamy symetryczną monetą—prawdopodobieństwa wynoszą

$$P(O) = P(R) = 1/2$$

Rzucamy symetryczną monetą 10 razy; okazuje się, że orzeł wypadł 10 razy:

OOOOOOOOOO

Jakie jest prawdopodobieństwo, że **następnie** wypadnie R ?

W pierwszym odruchu wydaje się, że $P(R) > 1/2$ ponieważ trzeba jakoś *zbalansować* nierównowagę spowodowaną wystąpieniem 10 orłów z rzędu (spodziewamy się, że około połowa rzutów powinna dać orła, zatem 4–6 spośród 10 nie wzbudziłyby zdziwienia).

Ale przecież w każdym rzucie $P(O) = P(R) = 1/2$ —przeszłość monety nie wpływa na prawdopodobieństwo!

Paradoks hazardzisty

Wyobraźmy sobie, że wydaję monetę z kieszeni—jakie jest $P(R)$?
Oczywiście $1/2$.

Paradoks hazardzisty

Wyobraźmy sobie, że wydaję monetę z kieszeni—jakie jest $P(R)$?

Oczywiście $1/2$.

Jeśli teraz powiem, że przed wykładem rzuciłem tą samą monetą 100 razy i za każdym razem wypadł orzeł:

OOOOOOOOOOO...OOOOOOOOOOO

to ten fakt przecież nie zmienia tego, że moneta jest symetryczna więc $P(R) = 1/2$.

Paradoks hazardzisty

Wyobraźmy sobie, że wydaję monetę z kieszeni—jakie jest $P(R)$?

Oczywiście $1/2$.

Jeśli teraz powiem, że przed wykładem rzuciłem tą samą monetą 100 razy i za każdym razem wypadł orzeł:

OOOOOOOOOOO...OOOOOOOOOOO

to ten fakt przecież nie zmienia tego, że moneta jest symetryczna więc $P(R) = 1/2$.

A jeśli ktoś przede mną rzucał tą monetą? Jak mamy ocenić $P(R)$ skoro nie znamy całej historii monety od chwili wybicia?

Oczywiście ta historia nie ma znaczenia—zawsze $P(O) = P(R) = 1/2$.

Paradoks hazardzisty

Wyobraźmy sobie, że wydaję monetę z kieszeni—jakie jest $P(R)$?

Oczywiście $1/2$.

Jeśli teraz powiem, że przed wykładem rzuciłem tą samą monetą 100 razy i za każdym razem wypadł orzeł:

OOOOOOOOOOO...OOOOOOOOOOO

to ten fakt przecież nie zmienia tego, że moneta jest symetryczna więc $P(R) = 1/2$.

A jeśli ktoś przede mną rzucał tą monetą? Jak mamy ocenić $P(R)$ skoro nie znamy całej historii monety od chwili wybicia?

Oczywiście ta historia nie ma znaczenia—zawsze $P(O) = P(R) = 1/2$.

Inna nazwa—paradoks Monte Carlo—pochodzi z faktu, że w 1913 r. w kasynie w Monte Carlo podczas gry w ruletką czarne pole wypadło 26 razy z rzędu. Gracze masowo zaczęli obstawiać czerwone pola, uważając, że im dłużej trwa ta „czarna seria”, tym szybciej musi się skończyć.

Paradoks urodzin

Jakie jest prawdopodobieństwo, że w grupie 23 osób co najmniej dwie z nich obchodzą urodziny tego samego dnia (nazwijmy to zdarzeniem A)?

Paradoks urodzin

Jakie jest prawdopodobieństwo, że w grupie 23 osób co najmniej dwie z nich obchodzą urodziny tego samego dnia (nazwijmy to zdarzeniem A)?

Rozwiązanie. Rozważymy zdarzenie przeciwne do A —jakie jest prawdopodobieństwo, że żadna para spośród 23 osób nie obchodzi urodzin tego samego dnia, czyli obliczymy $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

Paradoks urodzin

Jakie jest prawdopodobieństwo, że w grupie 23 osób co najmniej dwie z nich obchodzą urodziny tego samego dnia (nazwijmy to zdarzeniem A)?

Rozwiązanie. Rozważymy zdarzenie przeciwne do A —jakie jest prawdopodobieństwo, że żadna para spośród 23 osób nie obchodzi urodzin tego samego dnia, czyli obliczymy $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

- Załóżmy, że pierwsza osoba się urodziła, zatem prawdopodobieństwo, że ma urodziny któregoś dnia roku wynosi $\frac{365}{365}$.
- Prawdopodobieństwo, że druga osoba nie ma urodzin tego samego dnia wynosi $\frac{364}{365} \left(\equiv 1 - \frac{1}{365} \right)$.
- Prawdopodobieństwo, że trzecia osoba nie dzieli urodzin z dwoma poprzednimi wynosi zatem $\frac{363}{365} \left(\equiv 1 - \frac{2}{365} \right)$.
- Podobnie dla pozostałych 20 osób.

Paradoks urodzin

Jakie jest prawdopodobieństwo, że w grupie 23 osób co najmniej dwie z nich obchodzą urodziny tego samego dnia (nazwijmy to zdarzeniem A)?

Rozwiązanie. Rozważymy zdarzenie przeciwne do A —jakie jest prawdopodobieństwo, że żadna para spośród 23 osób nie obchodzi urodzin tego samego dnia, czyli obliczmy $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

- Załóżmy, że pierwsza osoba się urodziła, zatem prawdopodobieństwo, że ma urodziny któregoś dnia roku wynosi $\frac{365}{365}$.
- Prawdopodobieństwo, że druga osoba nie ma urodzin tego samego dnia wynosi $\frac{364}{365} \left(\equiv 1 - \frac{1}{365} \right)$.
- Prawdopodobieństwo, że trzecia osoba nie dzieli urodzin z dwoma poprzednimi wynosi zatem $\frac{363}{365} \left(\equiv 1 - \frac{2}{365} \right)$.
- Podobnie dla pozostałych 20 osób.

Paradoks urodzin

Jakie jest prawdopodobieństwo, że w grupie 23 osób co najmniej dwie z nich obchodzą urodziny tego samego dnia (nazwijmy to zdarzeniem A)?

Rozwiązanie. Rozważymy zdarzenie przeciwne do A —jakie jest prawdopodobieństwo, że żadna para spośród 23 osób nie obchodzi urodzin tego samego dnia, czyli obliczmy $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

- Załóżmy, że pierwsza osoba się urodziła, zatem prawdopodobieństwo, że ma urodziny któregoś dnia roku wynosi $\frac{365}{365}$.
- Prawdopodobieństwo, że druga osoba nie ma urodzin tego samego dnia wynosi $\frac{364}{365} \left(\equiv 1 - \frac{1}{365} \right)$.
- Prawdopodobieństwo, że trzecia osoba nie dzieli urodzin z dwoma poprzednimi wynosi zatem $\frac{363}{365} \left(\equiv 1 - \frac{2}{365} \right)$.
- Podobnie dla pozostałych 20 osób.

Paradoks urodzin

Jakie jest prawdopodobieństwo, że w grupie 23 osób co najmniej dwie z nich obchodzą urodziny tego samego dnia (nazwijmy to zdarzeniem A)?

Rozwiązanie. Rozważymy zdarzenie przeciwne do A —jakie jest prawdopodobieństwo, że żadna para spośród 23 osób nie obchodzi urodzin tego samego dnia, czyli obliczymy $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$.

- Załóżmy, że pierwsza osoba się urodziła, zatem prawdopodobieństwo, że ma urodziny któregoś dnia roku wynosi $\frac{365}{365}$.
- Prawdopodobieństwo, że druga osoba nie ma urodzin tego samego dnia wynosi $\frac{364}{365} \left(\equiv 1 - \frac{1}{365} \right)$.
- Prawdopodobieństwo, że trzecia osoba nie dzieli urodzin z dwoma poprzednimi wynosi zatem $\frac{363}{365} \left(\equiv 1 - \frac{2}{365} \right)$.
- Podobnie dla pozostałych 20 osób.

Paradoks urodzin

Urodziny każdej z nich są zdarzeniem niezależnym, zatem możemy przemnożyć prawdopodobieństwa:

$$P(\bar{A}) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \dots \cdot \frac{343}{365} = \frac{365!}{342! \cdot 365^{23}} \approx 0.492703$$

Paradoks urodzin

Urodziny każdej z nich są zdarzeniem niezależnym, zatem możemy przemnożyć prawdopodobieństwa:

$$P(\bar{A}) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \dots \cdot \frac{343}{365} = \frac{365!}{342! \cdot 365^{23}} \approx 0.492703$$

skąd dostaniemy, że

$$P(A) \approx 1 - P(\bar{A}) = 0.507297$$

Paradoks urodzin

Urodziny każdej z nich są zdarzeniem niezależnym, zatem możemy przemnożyć prawdopodobieństwa:

$$P(\bar{A}) = \frac{365}{365} \cdot \frac{364}{365} \cdot \frac{363}{365} \cdot \dots \cdot \frac{343}{365} = \frac{365!}{342! \cdot 365^{23}} \approx 0.492703$$

skąd dostaniemy, że

$$P(A) \approx 1 - P(\bar{A}) = 0.507297$$

Uogólniając na N osób:

$$P(A_N) = 1 - P(\bar{A}_N) = 1 - \frac{365!}{(365 - N)! \cdot 365^N}$$

Inne sformułowanie zadania: jaka jest najmniejsza liczba osób N , by prawdopodobieństwo, że dwie z nich mają urodziny tego samego dnia wyniosło $>50\%$?

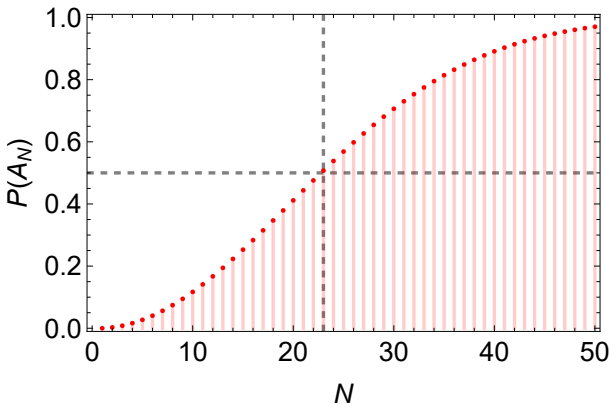
Paradoks urodzin

Odpowiedzią jest takie N , że $P(A_N) = 1 - \frac{365!}{(365 - N)!} \cdot \frac{1}{365^N} > 0.5$

Paradoks urodzin

Odpowiedzią jest takie N , że $P(A_N) = 1 - \frac{365!}{(365 - N)!} \cdot \frac{1}{365^N} > 0.5$

Sprawdzamy, że dla $N = 22$, $P(A_{22}) \approx 0.475695$, oraz że $P(A_N)$ w funkcji N jest monotonicznie rosnąca:



Z wykresu widzimy, że dla stosunkowo małego N prawdopodobieństwo $P(A_N)$ zbliża się do 1:

$$P(A_{50}) \approx 97\%$$

$$P(A_{75}) \approx 99.97\%$$

$$P(A_{100}) \approx 99.99997\%$$

Z wykresu widzimy, że dla stosunkowo małego N prawdopodobieństwo $P(A_N)$ zbliża się do 1:

$$P(A_{50}) \approx 97\%$$

$$P(A_{75}) \approx 99.97\%$$

$$P(A_{100}) \approx 99.99997\%$$

$P(A_N)$ jest szybko rosnąca początkowo, ale żeby uzyskać prawdopodobieństwo wynoszące dokładnie 100% potrzeba $N = 366$ osób, ponieważ nawet jeśli jest $N = 365$ osób to jest niezerowe prawdopodobieństwo, że każda z nich ma urodziny innego dnia roku.

Dlaczego paradoks?

Wydawałoby się, że grupa 23 osób to bardzo mało w stosunku do liczby dni w roku: $\frac{23}{365} \approx 6.3\%$, tzn. w tak małej grupie jest tak dużo „niewykorzystanych” dni, że prawdopodobieństwo tego, że żadna para osób nie ma urodzin tego samego dnia powinno być duże. Z rachunków widzieliśmy, że jest wręcz przeciwnie.

Dlaczego paradoks?

Wydawałoby się, że grupa 23 osób to bardzo mało w stosunku do liczby dni w roku: $\frac{23}{365} \approx 6.3\%$, tzn. w tak małej grupie jest tak dużo „niewykorzystanych” dni, że prawdopodobieństwo tego, że żadna para osób nie ma urodzin tego samego dnia powinno być duże. Z rachunków widzieliśmy, że jest wręcz przeciwnie.

Kluczowym w paradoksach jest wyjaśnienie, dlaczego poprawne rozwiązanie ma miejsce, a nie tylko ile wynosi odpowiedź.

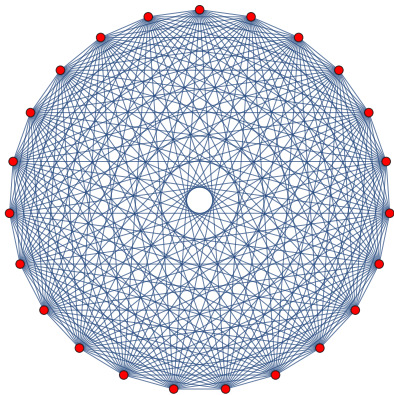
Paradoks urodzin

Tutaj nie należy rozpatrywać całkowitej liczby osób N , ale liczbę par, których jest $\binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$, co dla $N = 23$ daje 253 pary.

Paradoks urodzin

Tutaj nie należy rozpatrywać całkowitej liczby osób N , ale liczbę par, których jest $\binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$, co dla $N = 23$ daje 253 pary.

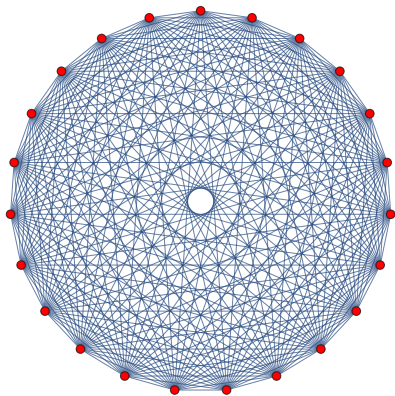
Powiązania między każdą z $N = 23$ osób można zilustrować przy pomocy tzw. grafu pełnego K_{23} :



Paradoks urodzin

Tutaj nie należy rozpatrywać całkowitej liczby osób N , ale liczbę par, których jest $\binom{N}{2} = \frac{N(N-1)}{2}$, co dla $N = 23$ daje 253 pary.

Powiązania między każdą z $N = 23$ osób można zilustrować przy pomocy tzw. grafu pełnego K_{23} :



Innymi słowy: nie chodzi tu o to czy osoby 2.–23. dzielą urodziny z osobą 1., ale jakie jest prawdopodobieństwo, że w grafie K_{23} o losowo pokolorowanych wierzchołkach (spośród 365 kolorów), znajdzie się monochromatyczna krawędź, tj. taka, która łączy wierzchołki o tym samym kolorze. Mając 365 kolorów i 253 krawędzie, to prawdopodobieństwo już nie wydaje się takie małe.

Paradoks „małego prawdopodobieństwa zdarzeń pewnych”

Wyobraźmy sobie pokój o wymiarach 100 m x 100 m, pokryty kwadratową siatką o boku 1 mm. Rzucamy bardzo małym ziarenkiem tak, że ląduje ono w jednym z kwadratów.

Paradoks „małego prawdopodobieństwa zdarzeń pewnych”

Wyobraźmy sobie pokój o wymiarach 100 m x 100 m, pokryty kwadratową siatką o boku 1 mm. Rzucamy bardzo małym ziarenkiem tak, że ląduje ono w jednym z kwadratów.

Kwadratów jest $(10 \cdot 100 \cdot 100)^2 = 10^{10}$, zatem prawdopodobieństwo wylądowania w jednym z nich wynosi $p = 10^{-10}$, co jest wielkością raczej bardzo małą.

Paradoks „małego prawdopodobieństwa zdarzeń pewnych”

Wyobraźmy sobie pokój o wymiarach 100 m x 100 m, pokryty kwadratową siatką o boku 1 mm. Rzucamy bardzo małym ziarenkiem tak, że ląduje ono w jednym z kwadratów.

Kwadratów jest $(10 \cdot 100 \cdot 100)^2 = 10^{10}$, zatem prawdopodobieństwo wylądowania w jednym z nich wynosi $p = 10^{-10}$, co jest wielkością raczej bardzo małą.

Rozróżnić należy prawdopodobieństwa **a priori** od prawdopodobieństw **a posteriori**: gdybyśmy przed rzuceniem wybrali jeden konkretny kwadrat, to istotnie prawdopodobieństwo wynosiłoby p i uprawnionym byłoby zdziwienie gdyby ziarenko wylądowało w tym kwadracie.

Paradoks „małego prawdopodobieństwa zdarzeń pewnych”

Wyobraźmy sobie pokój o wymiarach 100 m x 100 m, pokryty kwadratową siatką o boku 1 mm. Rzucamy bardzo małym ziarenkiem tak, że ląduje ono w jednym z kwadratów.

Kwadratów jest $(10 \cdot 100 \cdot 100)^2 = 10^{10}$, zatem prawdopodobieństwo wylądowania w jednym z nich wynosi $p = 10^{-10}$, co jest wielkością raczej bardzo małą.

Rozróżnić należy prawdopodobieństwa **a priori** od prawdopodobieństw **a posteriori**: gdybyśmy przed rzuceniem wybrali jeden konkretny kwadrat, to istotnie prawdopodobieństwo wynosiłoby p i uprawnionym byłoby zdziwienie gdyby ziarenko wylądowało w tym kwadracie.

Ale przypisywanie prawdopodobieństwa zajścia zdarzeniu, które już zaszło jest błędne—ziarenko *musiało* wylądować w *którymś* kwadracie, zaś prawdopodobieństwo, że wylądowało w tym, w którym wylądowało wynosi 1 a nie 10^{-10} .

Paradoks „małego prawdopodobieństwa zdarzeń pewnych”

Wyobraźmy sobie pokój o wymiarach 100 m x 100 m, pokryty kwadratową siatką o boku 1 mm. Rzucamy bardzo małym ziarenkiem tak, że ląduje ono w jednym z kwadratów.

Kwadratów jest $(10 \cdot 100 \cdot 100)^2 = 10^{10}$, zatem prawdopodobieństwo wylądowania w jednym z nich wynosi $p = 10^{-10}$, co jest wielkością raczej bardzo małą.

Rozróżnić należy prawdopodobieństwa **a priori** od prawdopodobieństw **a posteriori**: gdybyśmy przed rzuceniem wybrali jeden konkretny kwadrat, to istotnie prawdopodobieństwo wynosiłoby p i uprawnionym byłoby zdziwienie gdyby ziarenko wylądowało w tym kwadracie.

Ale przypisywanie prawdopodobieństwa zajścia zdarzeniu, które już zaszło jest błędne—ziarenko *musiało* wylądować w *którymś* kwadracie, zaś prawdopodobieństwo, że wylądowało w tym, w którym wylądowało wynosi 1 a nie 10^{-10} .

Przy użyciu prawdopodobieństwa warunkowego, gdzie E —ziarenko wylądowało w danym kwadracie: $P(E \mid \text{zaszło } E) = 1$.

Paradoks Monty Halla

- Od nazwiska prowadzącego amerykański pierwowzór programu „Idź na całość” pt. „Let's make a deal”.
- Uczestnik ma do wyboru trzy bramki A, B, C . W jednej z nich znajduje się nagroda (np. samochód), w dwóch pozostałych nie ma nic (zunk).



- Po wyborze bramki, prowadzący otwiera jedną z dwóch pozostałych—zawsze tę, za którą nie ma nagrody.
- Uczestnik dostaje wybór: albo trzymać się początkowego wyboru, albo zmienić na pozostałą bramkę.
- Przykładowo: uczestnik wybiera A , prowadzący odsłania C , uczestnik może trzymać się A lub zmienić swój wybór na B .

Paradoks Monty Halla

- Od nazwiska prowadzącego amerykański pierwowzór programu „Idź na całość” pt. „Let's make a deal”.
- Uczestnik ma do wyboru trzy bramki A, B, C . W jednej z nich znajduje się nagroda (np. samochód), w dwóch pozostałych nie ma nic (*zonk*).



- Po wyborze bramki, prowadzący otwiera jedną z dwóch pozostałych—**zawsze** tę, za którą nie ma nagrody.
- Uczestnik dostaje wybór: albo trzymać się początkowego wyboru, albo zmienić na pozostałą bramkę.
- Przykładowo: uczestnik wybiera A , prowadzący odsłania C , uczestnik może trzymać się A lub zmienić swój wybór na B .

Paradoks Monty Halla

- Od nazwiska prowadzącego amerykański pierwowzór programu „Idź na całość” pt. „Let's make a deal”.
- Uczestnik ma do wyboru trzy bramki A, B, C . W jednej z nich znajduje się nagroda (np. samochód), w dwóch pozostałych nie ma nic (*zonk*).



- Po wyborze bramki, prowadzący otwiera jedną z dwóch pozostałych—zawsze tę, za którą nie ma nagrody.
- Uczestnik dostaje wybór: albo trzymać się początkowego wyboru, albo zmienić na pozostałą bramkę.
- Przykładowo: uczestnik wybiera A , prowadzący odsłania C , uczestnik może trzymać się A lub zmienić swój wybór na B .

Paradoks Monty Halla

- Od nazwiska prowadzącego amerykański pierwowzór programu „Idź na całość” pt. „Let's make a deal”.
- Uczestnik ma do wyboru trzy bramki A, B, C . W jednej z nich znajduje się nagroda (np. samochód), w dwóch pozostałych nie ma nic (*zonk*).



- Po wyborze bramki, prowadzący otwiera jedną z dwóch pozostałych—**zawsze** tę, za którą nie ma nagrody.
- Uczestnik dostaje wybór: albo trzymać się początkowego wyboru, albo zmienić na pozostałą bramkę.
- Przykładowo: uczestnik wybiera A , prowadzący odśłania C , uczestnik może trzymać się A lub zmienić swój wybór na B .

Paradoks Monty Halla

Czy uczestnikowi bardziej opłaca się trzymać początkowego wyboru, czy zmienić?

Tj. czy strategią dającą większe prawdopodobieństwo wygranej jest Trzymać czy Zmienić?



Paradoks Monty Halla

W poniższych diagramach rozważamy sytuację następującą:

Jeśli nagroda jest w $I \in \{A, B, C\}$, wybrano $J \in \{A, B, C\}$ (dopuszczamy zarówno $I \neq J$ jak i $I = J$), to jaką strategię (**Trzymać** czy **Zmienić**) należy przyjąć po otwarciu $K \in \{A, B, C\}$ (tutaj $K \neq I$ oraz $K \neq J$):

początkowy wybór

nagrada		A	B	C
	A	Trzymać		
	B		Trzymać	
	C			Trzymać

Paradoks Monty Halla

początkowy wybór

nagroda		A	B	C
	A	Trzymać		
	B	Zmienić	Trzymać	
	C			Trzymać

Wybrano A, nagroda jest w B, zatem jedyną bramką do ujawnienia jest C; wtedy, jeśli zmienimy wybór ($A \rightarrow B$) to wygramy.

Paradoks Monty Halla

początkowy wybór

nagroda		<i>A</i>	<i>B</i>	<i>C</i>
	<i>A</i>	Trzymać	Zmienić	Zmienić
	<i>B</i>	Zmienić	Trzymać	Zmienić
	<i>C</i>	Zmienić	Zmienić	Trzymać

Podobnie uzupełniamy pozostałe komórki.

Paradoks Monty Halla

początkowy wybór

nagroda		A	B	C
	A	Trzymać	Zmienić	Zmienić
	B	Zmienić	Trzymać	Zmienić
	C	Zmienić	Zmienić	Trzymać

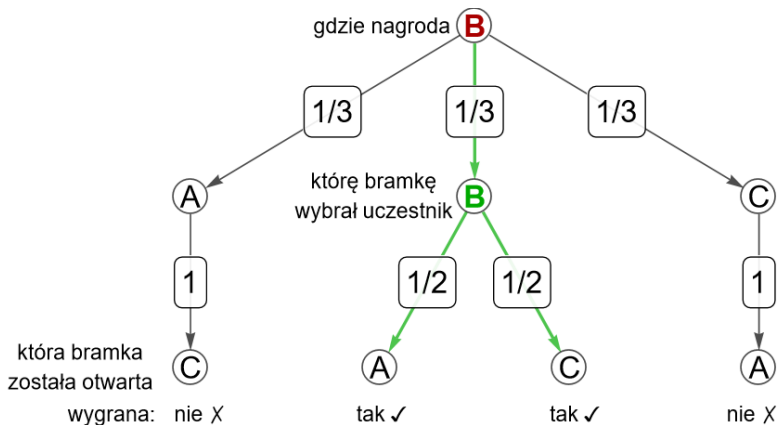
Podobnie uzupełniamy pozostałe komórki.

Okazuje się, że strategia **Trzymać** prowadzi do wygranej w 3 przypadkach na 9, zatem prawd. wygranej, korzystając z tej strategii, to $1/3$.

Z kolei strategia **Zmienić** sprawdza się w 6 przypadkach na 9, zatem prawd. wygranej, korzystając z tej strategii, wynosi $2/3$.

Paradoks Monty Halla

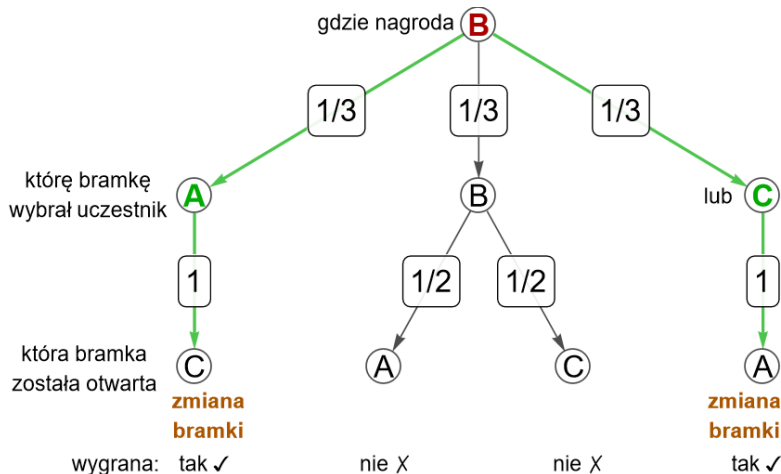
Rozwiązanie metodą drzewa prawdopodobieństw, strategia **Trzymać**:



$$\text{Prawdopodobieństwo wygranej} = \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} + \frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{3}$$

Paradoks Monty Halla

Rozwiązanie metodą drzewa prawdopodobieństw, strategia **Zmienić**:



$$\text{Prawdopodobieństwo wygranej} = \frac{1}{3} \cdot 1 + \frac{1}{3} \cdot 1 = \frac{2}{3}$$

Paradoks Simpsona

Skuteczność eksperymentalnych leków A i B w dwóch próbach:

	lek A	lek B
próba 1	$\frac{63}{90} = 70\%$	$\frac{8}{10} = 80\%$
próba 2	$\frac{4}{10} = 40\%$	$\frac{45}{90} = 50\%$

Paradoks Simpsona

Skuteczność eksperymentalnych leków A i B w dwóch próbach:

	lek A	lek B
próba 1	$\frac{63}{90} = 70\%$	$\frac{8}{10} = 80\%$
próba 2	$\frac{4}{10} = 40\%$	$\frac{45}{90} = 50\%$
sumarycznie	$\frac{67}{100} = 67\%$	$\frac{53}{100} = 53\%$

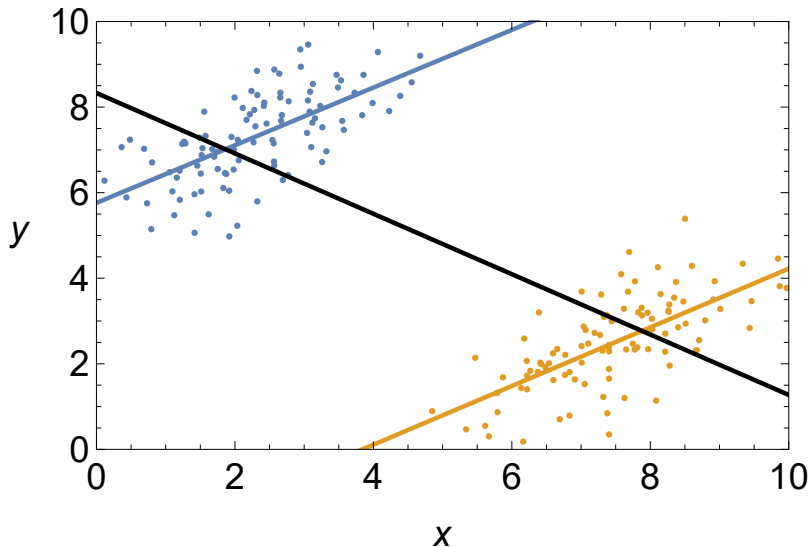
Paradoks Simpsona

Skuteczność eksperymentalnych leków A i B w dwóch próbach:

	lek A	lek B
próba 1	$\frac{63}{90} = 70\%$	$\frac{8}{10} = 80\%$
próba 2	$\frac{4}{10} = 40\%$	$\frac{45}{90} = 50\%$
sumarycznie	$\frac{67}{100} = 67\%$	$\frac{53}{100} = 53\%$

W obu próbach lek B miał wyższą skuteczność, jednak sumarycznie to lek A jest znacząco skuteczniejszy.

Paradoks Simpsona



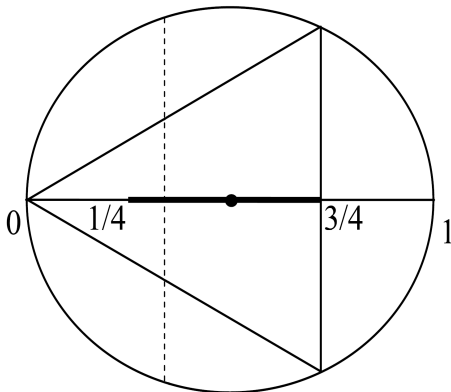
Paradoks Bertranda

W kole prowadzimy w sposób losowy cięciwę. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia A , że będzie ona dłuższa od boku trójkąta równobocznego wpisanego w to koło?

Paradoks Bertranda

W kole prowadzimy w sposób losowy cięciwę. Jakie jest prawdopodobieństwo zdarzenia A , że będzie ona dłuższa od boku trójkąta równobocznego wpisanego w to koło?

Rozwiązanie 1.

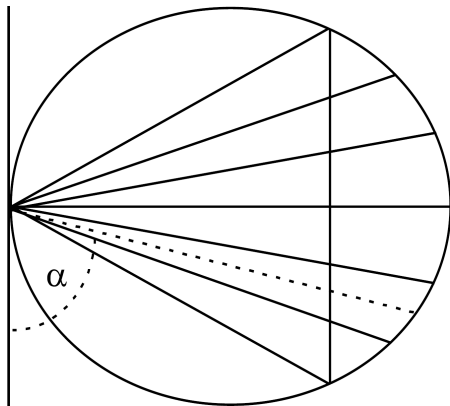


Nie jest istotny kierunek cięciwy a tylko jej długość. Ustalmy zatem kierunek prowadzonych cięciw (przerywana linia) i narysujmy średnicę koła prostopadłą do tego kierunku. Poprowadzona cięciwa będzie dłuższa od boku trójkąta równobocznego wpisanego w koło gdy (zdarzenie sprzyjające)

$$\frac{1}{4} < x < \frac{3}{4},$$

$$\text{zatem } P(A) = \frac{1}{2}.$$

Rozwiązanie 2.



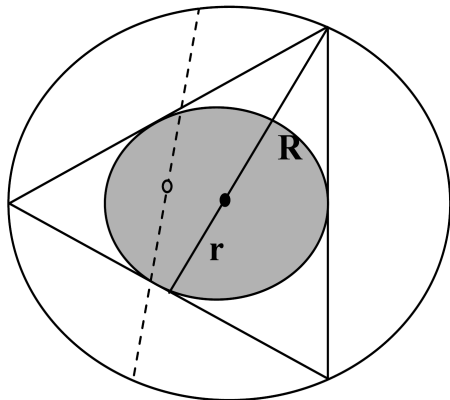
Nie jest istotne gdzie znajdzie się jeden z końców cięciwy. Ustalamy go więc, a drugi wybieramy losowo. Cięciwa będzie dłuższa od boku trójkąta równobocznego wpisanego w koło gdy kąt α jaki cięciwa tworzy ze styczną będzie spełniał (zdarzenie sprzyjające)

$$\frac{\pi}{3} < \alpha < \frac{2\pi}{3}.$$

Przestrzeń zdarzeń elementarnych tworzy zbiór kątów $\alpha \in [0, \pi]$, zatem $P(A) = \frac{1}{3}$.

Paradoks Bertranda

Rozwiązanie 3.



Położenie cięciwy wyznaczone jest jednoznacznie przez jej środek. Cięciwa będzie dłuższa od boku trójkąta równobocznego wpisanego w koło gdy znajdzie się wewnątrz koła wpisanego w ten trójkąt (zdarzenie sprzyjające). Przestrzenią zdarzeń elementarnych niech będzie koło o promieniu R (jego miara wynosi πR^2). Interesujące nas zdarzenie ma postać koła o promieniu $r = R/2$. Zatem

$$P(A) = \frac{\pi \left(\frac{R}{2}\right)^2}{\pi R^2} = \frac{1}{4}$$

Paradoks Bertranda

Otrzymaliśmy, że $P(A) = \frac{1}{2}$ lub $\frac{1}{3}$ lub $\frac{1}{4}$.

Które rozwiązanie jest zatem poprawne?

Paradoks Bertranda

Otrzymaliśmy, że $P(A) = \frac{1}{2}$ lub $\frac{1}{3}$ lub $\frac{1}{4}$.

Które rozwiązanie jest zatem poprawne?

Każde 😊

Paradoks Bertranda

Otrzymałiśmy, że $P(A) = \frac{1}{2}$ lub $\frac{1}{3}$ lub $\frac{1}{4}$.

Które rozwiązanie jest zatem poprawne?

Każde 😊

W wyjściowym postawieniu problemu **nie sprecyzowano** co należy rozumieć przez „losowe poprowadzenie cięciwy”. W każdym rozwiązaniu nadano tej procedurze inny sens—rozwiązaliśmy zatem nie jedno zadanie trzema sposobami, ale trzy różne zadania.

Paradoks Bertranda

Otrzymaliśmy, że $P(A) = \frac{1}{2}$ lub $\frac{1}{3}$ lub $\frac{1}{4}$.

Które rozwiązanie jest zatem poprawne?

Każde 😊

W wyjściowym postawieniu problemu **nie sprecyzowano** co należy rozumieć przez „losowe poprowadzenie cięciwy”. W każdym rozwiązaniu nadano tej procedurze inny sens—rozwiązaliśmy zatem nie jedno zadanie trzema sposobami, ale trzy różne zadania.

Każde rozwiązanie jest poprawne w ramach swojego sformułowania. Te sformułowania z kolei odnoszą się do różnych doświadczeń losowych:

1. losowy wybór punktu z przedziału $[0, 1]$;
2. losowy wybór kąta nieprzekraczającego kąta półpełnego;
3. losowy wybór punktu wewnątrz koła.

Paradoks Bertranda

Otrzymaliśmy, że $P(A) = \frac{1}{2}$ lub $\frac{1}{3}$ lub $\frac{1}{4}$.

Które rozwiązanie jest zatem poprawne?

Każde 😊

W wyjściowym postawieniu problemu **nie sprecyzowano** co należy rozumieć przez „losowe poprowadzenie cięciwy”. W każdym rozwiązaniu nadano tej procedurze inny sens—rozwiązaliśmy zatem nie jedno zadanie trzema sposobami, ale trzy różne zadania.

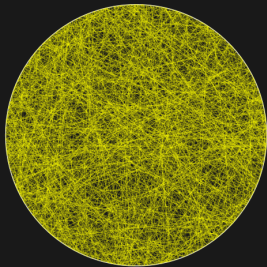
Każde rozwiązanie jest poprawne w ramach swojego sformułowania. Te sformułowania z kolei odnoszą się do różnych doświadczeń losowych:

1. losowy wybór punktu z przedziału $[0, 1]$;
2. losowy wybór kąta nieprzekraczającego kąta półpełnego;
3. losowy wybór punktu wewnątrz koła.

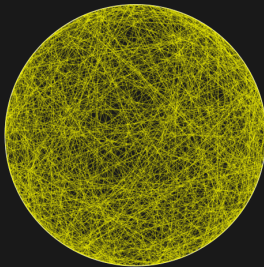
Konstrukcja **adekwatnego modelu probabilistycznego** opisującego dane doświadczenie losowe (zwłaszcza gdy odnosi się do fizycznie realizowanego eksperymentu!) jest odpowiedzialnością badacza—niepoprawnie skonstruowany może prowadzić do fałszywych wniosków.

Paradoks Bertranda

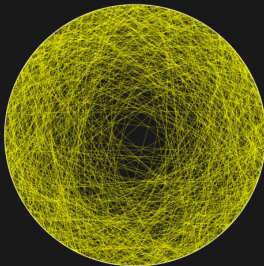
Rozwiązanie 1.



Rozwiązanie 2.



Rozwiązanie 3.



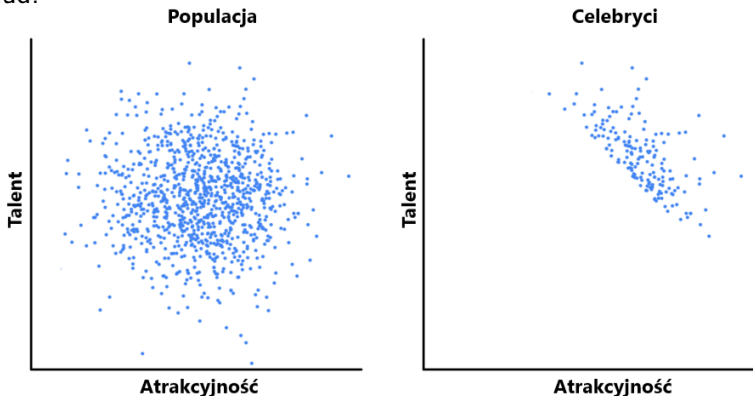
Paradoks Berksona

Efekty selekcji: dwie cechy wydają się ujemnie skorelowane, podczas gdy w rzeczywistości nie ma między nimi korelacji (lub jest wręcz dodatnia). Pojawia się, gdy przypadki, w których obie cechy mają niskie wartości nie są obserwowane—z powodu nałożenia pewnych kryteriów obserwacyjnych lub trudności z rejestrowaniem takich przypadków.

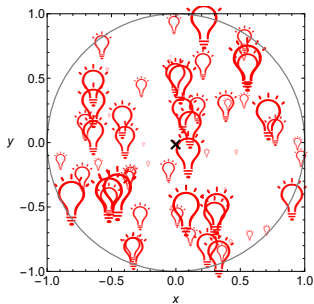
Paradoks Berksona

Efekty selekcji: dwie cechy wydają się ujemnie skorelowane, podczas gdy w rzeczywistości nie ma między nimi korelacji (lub jest wręcz dodatnia). Pojawia się, gdy przypadki, w których obie cechy mają niskie wartości nie są obserwowane—z powodu nałożenia pewnych kryteriów obserwacyjnych lub trudności z rejestrowaniem takich przypadków.

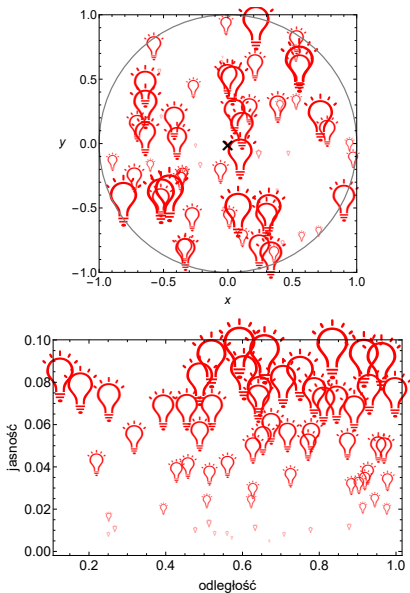
Przykład:



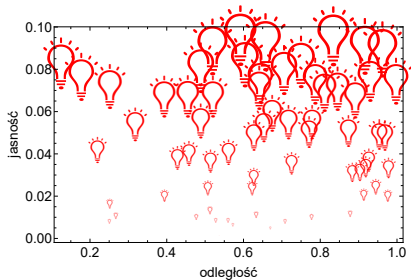
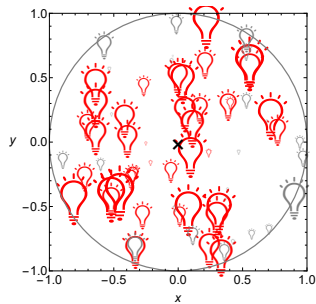
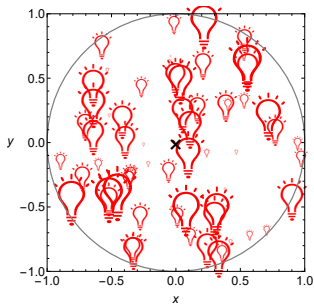
Paradoks Berksona



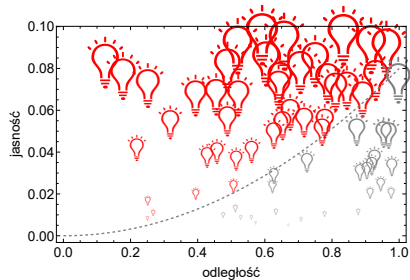
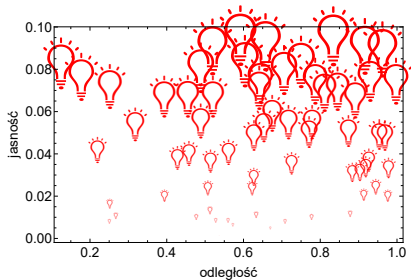
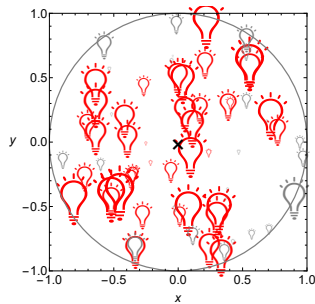
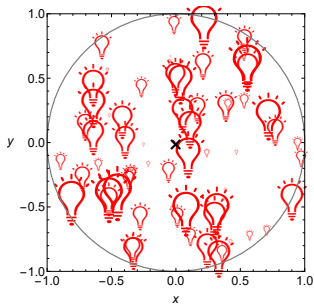
Paradoks Berksona



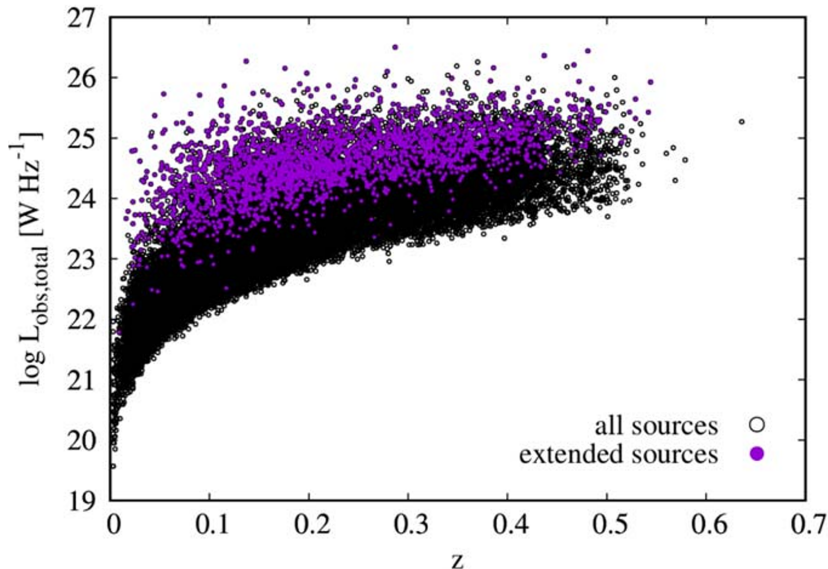
Paradoks Berksona



Paradoks Berksona



Paradoks Berksona



kosmologiczne przesunięcie ku czerwieni ($\equiv$ miara odległości)