

Statystyka i rachunek prawdopodobieństwa

Wykład 1: Podstawy prawdopodobieństwa

Mariusz Tarnopolski

Instytut Astronomii UMK

Statystyka ©2026



Sprawy organizacyjne

- 30 godz. wykładu (10^{15} – 12^{00}) + 30 godz. ćwiczeń
- <http://www.home.umk.pl/~mariusz.tarnopolski/home/students/strap/>
- Konsultacje — w czwartki 13^{00} – 14^{00} , sala C.1.12 (S1 COK), WFAIS
Inne terminy/miejsca (w tym Instytut Astronomii w Piwnicach, pok. AA 15) możliwe — proszę się umawiać przez maila:
mariusz.tarnopolski [at] umk.pl

Sprawy organizacyjne

- 30 godz. wykładu (10^{15} – 12^{00}) + 30 godz. ćwiczeń
- <http://www.home.umk.pl/~mariusz.tarnopolski/home/students/strap/>
- Konsultacje — w czwartki 13^{00} – 14^{00} , sala C.1.12 (S1 COK), WFAIS
Inne terminy/miejsca (w tym Instytut Astronomii w Piwnicach, pok. AA 15) możliwe — proszę się umawiać przez maila:
mariusz.tarnopolski [at] umk.pl

Zaliczenie

- uczestnictwo w ćwiczeniach (maks. 2 nieuspr. nieob.)
- zaliczenie wszystkich kolokwiów $\Leftrightarrow$ zaliczenie ćwiczeń $\Leftrightarrow$ zaliczenie kursu
- ocena końcowa G = średnia arytmetyczna ocen g_i z n kolokwiów ($\mathbb{E}n = 2$) oraz spełniony powyższy warunek:

$$G = \max \left\{ 2, \left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n g_i \right) \cdot \mathbb{1}_{\min\{g_1, \dots, g_n\} > 2} \right\}$$

- ❶ Jakubowski J. & Sztencel R. „Rachunek prawdopodobieństwa dla (prawie) każdego”
- ❷ W. Kryszicki i in., „Rachunek prawdopodobieństwa i statystyka matematyczna w zadaniach”, cz. 1 i 2
- ❸ Z. Hellwig, „Elementy rachunku prawdopodobieństwa i statystyki matematycznej”
- ❹ M. G. Kendall & A. Stuart „The Advanced Theory of Statistics”, wiele tomów (w zal. od wydania)
- ❺ Gopal K. Kanji, „100 Statistical Tests”
- ❻ M. Krzysztofiak & D. Urbanek, „Metody statystyczne”
- ❼ J. Churgin, „Jak policzyć niepoliczalne”
- ❽ pakiety pythona: [astropy](#), [scipy.stats](#), [scikit-learn \(sklearn\)](#)
- ❾ środowisko R ([RStudio](#))
- ❿ <https://stats.stackexchange.com/>
- ⓫ [the distribution zoo](#)
- ⓬ wiele doskonałych kanałów na yt—linki:      

Rys historyczny rachunku prawdopodobieństwa

- XVI w. — pierwsze zagadnienia dotyczyły gier hazardowych (Pascal, de Méré)
- 1812 r. — Laplace formułuje **klasyczną definicję prawdopodobieństwa**
- XIX w. — rozwój **teorii błędów** i statystyki matematycznej (Gauss, Legendre)
- XVIII-XX w. — **Twierdzenie centralne** — tłumaczy powszechność występowania w przyrodzie rozkładu Gaussa, zwanego przez to normalnym (de Moivre, Laplace, Lindeberg, Lévy, Feller)
- 1933 r. — Kołmogorow formułuje **aksjomatyczną definicję prawdopodobieństwa**
- Lata 40.–60. XX w. — rozwój teorii **procesów stochastycznych** i zastosowań w fizyce, inżynierii, ekonomii
- Współcześnie — rachunek prawdopodobieństwa i statystyka są podstawą **uczenia maszynowego**, kryptografii i analizy danych

Rys historyczny rachunku prawdopodobieństwa

- XVI w. — pierwsze zagadnienia dotyczyły gier hazardowych (Pascal, de Méré)
- 1812 r. — Laplace formułuje **klasyczną definicję prawdopodobieństwa**
- XIX w. — rozwój **teorii błędów** i statystyki matematycznej (Gauss, Legendre)
- XVIII-XX w. — **Twierdzenie centralne** — tłumaczy powszechność występowania w przyrodzie rozkładu Gaussa, zwanego przez to normalnym (de Moivre, Laplace, Lindeberg, Lévy, Feller)
- 1933 r. — Kołmogorow formułuje **aksjomatyczną definicję prawdopodobieństwa**
- Lata 40.–60. XX w. — rozwój teorii **procesów stochastycznych** i zastosowań w fizyce, inżynierii, ekonomii
- Współcześnie — rachunek prawdopodobieństwa i statystyka są podstawą **uczenia maszynowego**, kryptografii i analizy danych

Rys historyczny rachunku prawdopodobieństwa

- XVI w. — pierwsze zagadnienia dotyczyły gier hazardowych (Pascal, de Méré)
- 1812 r. — Laplace formułuje **klasyczną definicję prawdopodobieństwa**
- XIX w. — rozwój **teorii błędów** i statystyki matematycznej (Gauss, Legendre)
- XVIII-XX w. — **Twierdzenie centralne** — tłumaczy powszechność występowania w przyrodzie rozkładu Gaussa, zwanego przez to normalnym (de Moivre, Laplace, Lindeberg, Lévy, Feller)
- 1933 r. — Kołmogorow formułuje **aksjomatyczną definicję prawdopodobieństwa**
- Lata 40.–60. XX w. — rozwój teorii **procesów stochastycznych** i zastosowań w fizyce, inżynierii, ekonomii
- Współcześnie — rachunek prawdopodobieństwa i statystyka są podstawą **uczenia maszynowego**, kryptografii i analizy danych

Rys historyczny rachunku prawdopodobieństwa

- XVI w. — pierwsze zagadnienia dotyczyły gier hazardowych (Pascal, de Méré)
- 1812 r. — Laplace formułuje **klasyczną definicję prawdopodobieństwa**
- XIX w. — rozwój **teorii błędów** i statystyki matematycznej (Gauss, Legendre)
- XVIII-XX w. — **Twierdzenie centralne** — tłumaczy powszechność występowania w przyrodzie rozkładu Gaussa, zwanego przez to normalnym (de Moivre, Laplace, Lindeberg, Lévy, Feller)
- 1933 r. — Kołmogorow formułuje **aksjomatyczną definicję prawdopodobieństwa**
- Lata 40.–60. XX w. — rozwój teorii **procesów stochastycznych** i zastosowań w fizyce, inżynierii, ekonomii
- Współcześnie — rachunek prawdopodobieństwa i statystyka są podstawą **uczenia maszynowego**, kryptografii i analizy danych

Rys historyczny rachunku prawdopodobieństwa

- XVI w. — pierwsze zagadnienia dotyczyły gier hazardowych (Pascal, de Méré)
- 1812 r. — Laplace formułuje **klasyczną definicję prawdopodobieństwa**
- XIX w. — rozwój **teorii błędów** i statystyki matematycznej (Gauss, Legendre)
- XVIII-XX w. — **Twierdzenie centralne** — tłumaczy powszechność występowania w przyrodzie rozkładu Gaussa, zwanego przez to normalnym (de Moivre, Laplace, Lindeberg, Lévy, Feller)
- 1933 r. — Kołmogorow formułuje **aksjomatyczną definicję prawdopodobieństwa**
- Lata 40.–60. XX w. — rozwój teorii **procesów stochastycznych** i zastosowań w fizyce, inżynierii, ekonomii
- Współcześnie — rachunek prawdopodobieństwa i statystyka są podstawą **uczenia maszynowego**, kryptografii i analizy danych

Rys historyczny rachunku prawdopodobieństwa

- XVI w. — pierwsze zagadnienia dotyczyły gier hazardowych (Pascal, de Méré)
- 1812 r. — Laplace formułuje **klasyczną definicję prawdopodobieństwa**
- XIX w. — rozwój **teorii błędów** i statystyki matematycznej (Gauss, Legendre)
- XVIII-XX w. — **Twierdzenie centralne** — tłumaczy powszechność występowania w przyrodzie rozkładu Gaussa, zwanego przez to normalnym (de Moivre, Laplace, Lindeberg, Lévy, Feller)
- 1933 r. — Kołmogorow formułuje **aksjomatyczną definicję prawdopodobieństwa**
- Lata 40.–60. XX w. — rozwój teorii **procesów stochastycznych** i zastosowań w fizyce, inżynierii, ekonomii
- Współcześnie — rachunek prawdopodobieństwa i statystyka są podstawą **uczenia maszynowego**, kryptografii i analizy danych

Rys historyczny rachunku prawdopodobieństwa

- XVI w. — pierwsze zagadnienia dotyczyły gier hazardowych (Pascal, de Méré)
- 1812 r. — Laplace formułuje **klasyczną definicję prawdopodobieństwa**
- XIX w. — rozwój **teorii błędów** i statystyki matematycznej (Gauss, Legendre)
- XVIII-XX w. — **Twierdzenie centralne** — tłumaczy powszechność występowania w przyrodzie rozkładu Gaussa, zwanego przez to normalnym (de Moivre, Laplace, Lindeberg, Lévy, Feller)
- 1933 r. — Kołmogorow formułuje **aksjomatyczną definicję prawdopodobieństwa**
- Lata 40.–60. XX w. — rozwój teorii **procesów stochastycznych** i zastosowań w fizyce, inżynierii, ekonomii
- Współcześnie — rachunek prawdopodobieństwa i statystyka są podstawą **uczenia maszynowego**, kryptografii i analizy danych

Dział matematyki zajmujący się aspektami rachunku prawdopodobieństwa. Metody wnioskowania statystycznego polegają na tym, że na podstawie próby o liczności n formułujemy wnioski dotyczące całej populacji o liczności N ($n < N$ lub często $n \ll N$; w modelach teoretycznych przyjmujemy często $N = \infty$, ale na to przyjdzie czas). Obejmuje estymację, teorię błędów, weryfikację hipotez statystycznych i in.

Podstawy prawdopodobieństwa

Podstawowe pojęcia:

- ➊ **zdarzenie losowe** — podlega logice binarnej, tj. zachodzi albo nie; *kombinacje* zdarzeń losowych (mnogościowe suma, różnica itp.) również są zdarzeniami losowymi
- ➋ **doświadczenie losowe (losowanie)** — spełnienie warunków prowadzących do zdarzenia losowego (eksperyment lub obserwacja)
- ➌ **zdarzenie elementarne** — najprostszy, elementarny wynik doświadczenia losowego; najprostsze możliwe dośw. losowe; rozumieć należy, podobnie jak pierwotne pojęcia atomu, jako nierozkładalne na części składowe; wzajemnie się wykluczają oraz wyczerpują wszystkie możliwości
- ➍ **przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω** — niepusty zbiór wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych; może być skończona lub nieskończona (przeliczalna lub nieprzeliczalna)
- ➎ zdarzenie losowe A jest zatem podzbiorem przestrzeni Ω , tj. $A \subseteq \Omega$; w ogólności: zdarzenie A zawiera się w zdarzeniu B jeśli $\forall a \in A \Rightarrow a \in B$; wtedy $A \subseteq B$

Podstawy prawdopodobieństwa

Podstawowe pojęcia:

- ➊ **zdarzenie losowe** — podlega logice binarnej, tj. zachodzi albo nie; *kombinacje* zdarzeń losowych (mnogościowe suma, różnica itp.) również są zdarzeniami losowymi
- ➋ **doświadczenie losowe (losowanie)** — spełnienie warunków prowadzących do zdarzenia losowego (eksperyment lub obserwacja)
- ➌ **zdarzenie elementarne** — najprostszy, elementarny wynik doświadczenia losowego; najprostsze możliwe dośw. losowe; rozumieć należy, podobnie jak pierwotne pojęcia atomu, jako nierozkładalne na części składowe; wzajemnie się wykluczają oraz wyczerpują wszystkie możliwości
- ➍ **przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω** — niepusty zbiór wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych; może być skończona lub nieskończona (przeliczalna lub nieprzeliczalna)
- ➎ zdarzenie losowe A jest zatem podzbiorem przestrzeni Ω , tj. $A \subseteq \Omega$; w ogólności: zdarzenie A zawiera się w zdarzeniu B jeśli $\forall a \in A \Rightarrow a \in B$; wtedy $A \subseteq B$

Podstawy prawdopodobieństwa

Podstawowe pojęcia:

- ➊ **zdarzenie losowe** — podlega logice binarnej, tj. zachodzi albo nie; *kombinacje* zdarzeń losowych (mnogościowe suma, różnica itp.) również są zdarzeniami losowymi
- ➋ **doświadczenie losowe (losowanie)** — spełnienie warunków prowadzących do zdarzenia losowego (eksperyment lub obserwacja)
- ➌ **zdarzenie elementarne** — najprostszy, elementarny wynik doświadczenia losowego; najprostsze możliwe dośw. losowe; rozumieć należy, podobnie jak pierwotne pojęcia atomu, jako nierozkładalne na części składowe; wzajemnie się wykluczają oraz wyczerpują wszystkie możliwości
- ➍ **przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω** — niepusty zbiór wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych; może być skończona lub nieskończona (przeliczalna lub nieprzeliczalna)
- ➎ **zdarzenie losowe A jest zatem podzbiorem przestrzeni Ω , tj. $A \subseteq \Omega$;** w ogólności: zdarzenie A zawiera się w zdarzeniu B jeśli $\forall a \in A \Rightarrow a \in B$; wtedy $A \subseteq B$

Podstawy prawdopodobieństwa

Podstawowe pojęcia:

- ➊ **zdarzenie losowe** — podlega logice binarnej, tj. zachodzi albo nie; *kombinacje* zdarzeń losowych (mnogościowe suma, różnica itp.) również są zdarzeniami losowymi
- ➋ **doświadczenie losowe (losowanie)** — spełnienie warunków prowadzących do zdarzenia losowego (eksperyment lub obserwacja)
- ➌ **zdarzenie elementarne** — najprostszy, elementarny wynik doświadczenia losowego; najprostsze możliwe dośw. losowe; rozumieć należy, podobnie jak pierwotne pojęcia atomu, jako nierozkładalne na na części składowe; wzajemnie się wykluczają oraz wyczerpują wszystkie możliwości
- ➍ **przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω** — niepusty zbiór wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych; może być skończona lub nieskończona (przeliczalna lub nieprzeliczalna)
- ➎ zdarzenie losowe A jest zatem podzbiorem przestrzeni Ω , tj. $A \subseteq \Omega$; w ogólności: zdarzenie A zawiera się w zdarzeniu B jeśli $\forall a \in A \Rightarrow a \in B$; wtedy $A \subseteq B$

Podstawy prawdopodobieństwa

Podstawowe pojęcia:

- ➊ **zdarzenie losowe** — podlega logice binarnej, tj. zachodzi albo nie; *kombinacje* zdarzeń losowych (mnogościowe suma, różnica itp.) również są zdarzeniami losowymi
- ➋ **doświadczenie losowe (losowanie)** — spełnienie warunków prowadzących do zdarzenia losowego (eksperyment lub obserwacja)
- ➌ **zdarzenie elementarne** — najprostszy, elementarny wynik doświadczenia losowego; najprostsze możliwe dośw. losowe; rozumieć należy, podobnie jak pierwotne pojęcia atomu, jako nierozkładalne na na części składowe; wzajemnie się wykluczają oraz wyczerpują wszystkie możliwości
- ➍ **przestrzeń zdarzeń elementarnych Ω** — niepusty zbiór wszystkich możliwych zdarzeń elementarnych; może być skończona lub nieskończona (przeliczalna lub nieprzeliczalna)
- ➎ zdarzenie losowe A jest zatem podzbiorem przestrzeni Ω , tj. $A \subseteq \Omega$; w ogólności: zdarzenie A zawiera się w zdarzeniu B jeśli $\forall a \in A \Rightarrow a \in B$; wtedy $A \subseteq B$

Np. jeśli Ω = możliwe wyniki rzutu sześcienną kostką:

$$\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\},$$

to zdarzenia elementarne to wyrzucenie jedynki, wyrzucenie dwójki itd. Zdarzeniem losowym może być też np. wyrzucenie wyniku parzystego: 2 lub 4 lub 6 (składa się z sumy mnogościowej zdarzeń elementarnych).

Podstawy prawdopodobieństwa

Podstawowe pojęcia:

- ❶ **zdarzenie pewne** to takie zdarzenie A , dla którego $P(A) = 1$;

mamy zatem, że

$$P(\Omega) = 1$$

- ❷ **zdarzenie przeciwne do A** to takie zdarzenie $\bar{A}$, które zachodzi, jeśli nie zachodzi zdarzenie A . Zdarzenia A i $\bar{A}$ się wzajemnie wykluczają ($A \cap \bar{A} = \emptyset$), tj. zachodzi albo A , albo $\bar{A}$. Zdarzenia A i $\bar{A}$ wyczerpują zatem przestrzeń zdarzeń, czyli $A \cup \bar{A} = \Omega$. Zatem

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}),$$

skąd

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

(skorzystaliśmy z addytywności

prawdopodobieństw zdarzeń wykluczających się — zob. slajd 24).

Często łatwiej jest policzyć prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia przeciwnego do zdarzenia nas interesującego.

- ❸ **zdarzenie niemożliwe** to takie zdarzenie A , dla którego $P(A) = 0$.

Mamy, że $P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset)$ oraz $P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) = 1$,

skąd

$$P(\emptyset) = 0$$

Podstawy prawdopodobieństwa

Podstawowe pojęcia:

- ⑥ **zdarzenie pewne** to takie zdarzenie A , dla którego $P(A) = 1$;

mamy zatem, że $P(\Omega) = 1$

- ⑦ **zdarzenie przeciwne do A** to takie zdarzenie $\bar{A}$, które zachodzi, jeśli nie zachodzi zdarzenie A . Zdarzenia A i $\bar{A}$ się wzajemnie wykluczają ($A \cap \bar{A} = \emptyset$), tj. zachodzi albo A , albo $\bar{A}$. Zdarzenia A i $\bar{A}$ wyczerpują zatem przestrzeń zdarzeń, czyli $A \cup \bar{A} = \Omega$. Zatem

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}),$$

skąd $P(\bar{A}) = 1 - P(A)$ (skorzystaliśmy z addytywności prawdopodobieństw zdarzeń wykluczających się — zob. slajd 24). Często łatwiej jest policzyć prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia przeciwnego do zdarzenia nas interesującego.

- ⑧ **zdarzenie niemożliwe** to takie zdarzenie A , dla którego $P(A) = 0$.

Mamy, że $P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset)$ oraz $P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) = 1$,

skąd $P(\emptyset) = 0$

Podstawy prawdopodobieństwa

Podstawowe pojęcia:

- 6 **zdarzenie pewne** to takie zdarzenie A , dla którego $P(A) = 1$;

mamy zatem, że

$$P(\Omega) = 1$$

- 7 **zdarzenie przeciwne do A** to takie zdarzenie $\bar{A}$, które zachodzi, jeśli nie zachodzi zdarzenie A . Zdarzenia A i $\bar{A}$ się wzajemnie wykluczają ($A \cap \bar{A} = \emptyset$), tj. zachodzi albo A , albo $\bar{A}$. Zdarzenia A i $\bar{A}$ wyczerpują zatem przestrzeń zdarzeń, czyli $A \cup \bar{A} = \Omega$. Zatem

$$1 = P(\Omega) = P(A \cup \bar{A}) = P(A) + P(\bar{A}),$$

skąd

$$P(\bar{A}) = 1 - P(A)$$

(skorzystaliśmy z addytywności

prawdopodobieństw zdarzeń wykluczających się — zob. slajd 24).

Często łatwiej jest policzyć prawdopodobieństwo zajścia zdarzenia przeciwnego do zdarzenia nas interesującego.

- 8 **zdarzenie niemożliwe** to takie zdarzenie A , dla którego $P(A) = 0$.

Mamy, że $P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) + P(\emptyset)$ oraz $P(\Omega \cup \emptyset) = P(\Omega) = 1$,

skąd

$$P(\emptyset) = 0$$

Podstawy prawdopodobieństwa

- 9 Zachodzi też, że $\bar{\bar{A}} = A$.
- 10 Jeśli zdarzenie A zawiera się w zdarzeniu B , tj. $A \subseteq B$, to

$$P(A) \leq P(B)$$

ponieważ $P(B) = P[A \cup (\bar{A} \cap B)] = P(A) + P(\bar{A} \cap B) \geq P(A)$

- 11 Wynika z tego, że $0 \leq P(A) \leq 1$.
- 12 Ponadto zachodzi

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

Przykład. Prawdopodobieństwo rozpalenia ogniska zapałką wynosi 0.7. Jakie jest prawdopodobieństwo rozpalenia ogniska 2 zapałkami?

Odpowiedź. $0.7 + 0.7 - 0.49 = 0.91$

- 13 Zdarzenia A i B są **niezależne**, jeśli zachodzi $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- 14 Liczba wszystkich podzbiorów n -elementowego zbioru Ω wynosi 2^n .

Podstawy prawdopodobieństwa

- 9 Zachodzi też, że $\bar{\bar{A}} = A$.
- 10 Jeśli zdarzenie A zawiera się w zdarzeniu B , tj. $A \subseteq B$, to

$$P(A) \leq P(B)$$

ponieważ $P(B) = P[A \cup (\bar{A} \cap B)] = P(A) + P(\bar{A} \cap B) \geq P(A)$

- 11 Wynika z tego, że $0 \leq P(A) \leq 1$.
- 12 Ponadto zachodzi

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

Przykład. Prawdopodobieństwo rozpalenia ogniska zapałką wynosi 0.7. Jakie jest prawdopodobieństwo rozpalenia ogniska 2 zapałkami?

Odpowiedź. $0.7 + 0.7 - 0.49 = 0.91$

- 13 Zdarzenia A i B są **niezależne**, jeśli zachodzi $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- 14 Liczba wszystkich podzbiorów n -elementowego zbioru Ω wynosi 2^n .

Podstawy prawdopodobieństwa

- 9 Zachodzi też, że $\bar{\bar{A}} = A$.
- 10 Jeśli zdarzenie A zawiera się w zdarzeniu B , tj. $A \subseteq B$, to

$$P(A) \leq P(B)$$

ponieważ $P(B) = P[A \cup (\bar{A} \cap B)] = P(A) + P(\bar{A} \cap B) \geq P(A)$

- 11 Wynika z tego, że $0 \leq P(A) \leq 1$.
- 12 Ponadto zachodzi

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

Przykład. Prawdopodobieństwo rozpalenia ogniska zapałką wynosi 0.7. Jakie jest prawdopodobieństwo rozpalenia ogniska 2 zapałkami?

Odpowiedź. $0.7 + 0.7 - 0.49 = 0.91$

- 13 Zdarzenia A i B są **niezależne**, jeśli zachodzi $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- 14 Liczba wszystkich podzbiorów n -elementowego zbioru Ω wynosi 2^n .

Podstawy prawdopodobieństwa

- 9 Zachodzi też, że $\bar{\bar{A}} = A$.
- 10 Jeśli zdarzenie A zawiera się w zdarzeniu B , tj. $A \subseteq B$, to

$$P(A) \leq P(B)$$

ponieważ $P(B) = P[A \cup (\bar{A} \cap B)] = P(A) + P(\bar{A} \cap B) \geq P(A)$

- 11 Wynika z tego, że $0 \leq P(A) \leq 1$.
- 12 Ponadto zachodzi

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

Przykład. Prawdopodobieństwo rozpalenia ogniska zapałką wynosi 0.7. Jakie jest prawdopodobieństwo rozpalenia ogniska 2 zapałkami?

Odpowiedź. $0.7 + 0.7 - 0.49 = 0.91$

- 13 Zdarzenia A i B są **niezależne**, jeśli zachodzi $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- 14 Liczba wszystkich podzbiorów n -elementowego zbioru Ω wynosi 2^n .

Podstawy prawdopodobieństwa

- 9 Zachodzi też, że $\bar{\bar{A}} = A$.
- 10 Jeśli zdarzenie A zawiera się w zdarzeniu B , tj. $A \subseteq B$, to

$$P(A) \leq P(B)$$

ponieważ $P(B) = P[A \cup (\bar{A} \cap B)] = P(A) + P(\bar{A} \cap B) \geq P(A)$

- 11 Wynika z tego, że $0 \leq P(A) \leq 1$.
- 12 Ponadto zachodzi

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

Przykład. Prawdopodobieństwo rozpalenia ogniska zapałką wynosi 0.7. Jakie jest prawdopodobieństwo rozpalenia ogniska 2 zapałkami?

Odpowiedź. $0.7 + 0.7 - 0.49 = 0.91$

- 13 Zdarzenia A i B są **niezależne**, jeśli zachodzi $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- 14 Liczba wszystkich podzbiorów n -elementowego zbioru Ω wynosi 2^n .

Podstawy prawdopodobieństwa

- 9 Zachodzi też, że $\bar{\bar{A}} = A$.
- 10 Jeśli zdarzenie A zawiera się w zdarzeniu B , tj. $A \subseteq B$, to

$$P(A) \leq P(B)$$

ponieważ $P(B) = P[A \cup (\bar{A} \cap B)] = P(A) + P(\bar{A} \cap B) \geq P(A)$

- 11 Wynika z tego, że $0 \leq P(A) \leq 1$.
- 12 Ponadto zachodzi

$$P(A \cap B) = P(A) + P(B) - P(A \cup B)$$

Przykład. Prawdopodobieństwo rozpalenia ogniska zapałką wynosi 0.7. Jakie jest prawdopodobieństwo rozpalenia ogniska 2 zapałkami?

Odpowiedź. $0.7 + 0.7 - 0.49 = 0.91$

- 13 Zdarzenia A i B są **niezależne**, jeśli zachodzi $P(A \cap B) = P(A)P(B)$
- 14 Liczba wszystkich podzbiorów n -elementowego zbioru Ω wynosi 2^n .

Podstawy prawdopodobieństwa

- 15 Prawidła algebry zbiorów pozostają w mocy w algebrze zdarzeń, np. prawa łączności (pozwalające na opuszczanie nawiasów):

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

rozdzielności:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

czy prawa De Morgana:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

- 16 Zapis: $A \cap B \Leftrightarrow \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$ itp.

- 17 Uogólnienie niezależności: zdarzenia $A_1, A_2, \dots, A_n$ nazywamy **wzajemnie (zespołowo) niezależnymi** jeśli zachodzi

$\forall s, k_1, k_2, \dots, k_s \in \mathbb{N} : 2 \leq s \leq n, 1 \leq k_i \leq n, k_i \neq k_j \text{ dla } i \neq j :$

$$P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \dots \cap A_{k_s}) = P(A_{k_1}) P(A_{k_2}) \cdots P(A_{k_s})$$

Podstawy prawdopodobieństwa

- 15 Prawidła algebry zbiorów pozostają w mocy w algebrze zdarzeń, np. prawa łączności (pozwalające na opuszczanie nawiasów):

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

rozdzielności:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

czy prawa De Morgana:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

- 16 Zapis: $A \cap B \Leftrightarrow \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$ itp.

- 17 Uogólnienie niezależności: zdarzenia $A_1, A_2, \dots, A_n$ nazywamy **wzajemnie (zespołowo) niezależnymi** jeśli zachodzi

$\forall s, k_1, k_2, \dots, k_s \in \mathbb{N} : 2 \leq s \leq n, 1 \leq k_i \leq n, k_i \neq k_j \text{ dla } i \neq j :$

$$P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \dots \cap A_{k_s}) = P(A_{k_1}) P(A_{k_2}) \cdots P(A_{k_s})$$

Podstawy prawdopodobieństwa

- 15 Prawidła algebry zbiorów pozostają w mocy w algebrze zdarzeń, np. prawa łączności (pozwalające na opuszczanie nawiasów):

$$A \cap (B \cap C) = (A \cap B) \cap C$$

$$A \cup (B \cup C) = (A \cup B) \cup C$$

rozdzielności:

$$A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$$

$$A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$$

czy prawa De Morgana:

$$\overline{A \cup B} = \bar{A} \cap \bar{B}, \quad \overline{A \cap B} = \bar{A} \cup \bar{B}$$

- 16 Zapis: $A \cap B \Leftrightarrow \{x : (x \in A) \wedge (x \in B)\}$ itp.

- 17 Uogólnienie niezależności: zdarzenia $A_1, A_2, \dots, A_n$ nazywamy **wzajemnie (zespołowo) niezależnymi** jeśli zachodzi

$$\forall s, k_1, k_2, \dots, k_s \in \mathbb{N} : 2 \leq s \leq n, 1 \leq k_i \leq n, k_i \neq k_j \text{ dla } i \neq j:$$

$$P(A_{k_1} \cap A_{k_2} \cap \dots \cap A_{k_s}) = P(A_{k_1}) P(A_{k_2}) \cdots P(A_{k_s})$$

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Laplace 1812 r.

Jeśli przestrzeń Ω rozkłada się na **skończoną** liczbę n wykluczających się wzajemnie i **jednakowo możliwych** zdarzeń elementarnych, spośród których k sprzyja zajściu zdarzenia A , to prawdopodobieństwem P tego zdarzenia nazywa się stosunek liczby zdarzeń sprzyjających zdarzeniu A do liczby wszystkich zdarzeń składających się na Ω :

$$P(A) = \frac{k}{n} = \frac{\text{liczba zdarzeń elementarnych sprzyjających } A}{\text{liczność zbioru } \Omega}$$

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Laplace 1812 r.

Interpretacja P :

- ocena (miara) **szansy** zajścia zdarzenia A przy **jednokrotnym wykonaniu** doświadczenia losowego
- częstościowa interpretacja: przy wielokrotnym (N) powtarzaniu losowania i uzyskaniu w $M \leq N$ przypadkach spełniających kryteria zdarzenia A , prawdopodobieństwo $P(A) \approx \frac{M}{N}$

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Laplace 1812 r.

Wady:

- ❶ definicja ta jest tautologią — występuje w niej słowo definiowane, tj. prawdopodobieństwo jest oparte na zdarzeniach **jednakowo możliwych** $\equiv$ **jednakowo prawdopodobnych**; musimy wiedzieć czym jest prawdopodobieństwo, by zdefiniować prawdopodobieństwo (coś w stylu „pies to zwierzę posiadające wszystkie cechy psa”)
- ❷ przestrzeń Ω musi być skończona — musimy umieć policzyć jej licznosc
- ❸ musimy znać wszystkie możliwe zdarzenia — musimy określić licznosc zbioru zdarzeń sprzyjających interesującemu nas zdarzeniu A
- ❹ zdarzenia elementarne muszą być jednakowo prawdopodobne:
 - ❶ ponownie tautologia
 - ❷ jest to duże ograniczenie — łatwo sobie wyobrazić zdarzenia elementarne zachodzące z różnym prawdopodobieństwem (np. dla rzutu monetą $\Omega = \{\text{orzeł, reszka, stanie na sztorc}\}$)

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Laplace 1812 r.

Wady:

- ❶ definicja ta jest tautologią — występuje w niej słowo definiowane, tj. prawdopodobieństwo jest oparte na zdarzeniach **jednakowo możliwych** $\equiv$ **jednakowo prawdopodobnych**; musimy wiedzieć czym jest prawdopodobieństwo, by zdefiniować prawdopodobieństwo (coś w stylu „pies to zwierzę posiadające wszystkie cechy psa”)
- ❷ przestrzeń Ω musi być skończona — musimy umieć policzyć jej licznosc
- ❸ musimy znać wszystkie możliwe zdarzenia — musimy określić licznosc zbioru zdarzeń sprzyjających interesującemu nas zdarzeniu A
- ❹ zdarzenia elementarne muszą być jednakowo prawdopodobne:
 - ❶ ponownie tautologia
 - ❷ jest to duże ograniczenie — łatwo sobie wyobrazić zdarzenia elementarne zachodzące z różnym prawdopodobieństwem (np. dla rzutu monetą $\Omega = \{\text{orzeł, reszka, stanie na sztorc}\}$)

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Laplace 1812 r.

Wady:

- ❶ definicja ta jest tautologią — występuje w niej słowo definiowane, tj. prawdopodobieństwo jest oparte na zdarzeniach **jednakowo możliwych** $\equiv$ **jednakowo prawdopodobnych**; musimy wiedzieć czym jest prawdopodobieństwo, by zdefiniować prawdopodobieństwo (coś w stylu „pies to zwierzę posiadające wszystkie cechy psa”)
- ❷ przestrzeń Ω musi być skończona — musimy umieć policzyć jej licznosc
- ❸ musimy znać wszystkie możliwe zdarzenia — musimy określić licznosc zbioru zdarzeń sprzyjających interesującemu nas zdarzeniu A
- ❹ zdarzenia elementarne muszą być jednakowo prawdopodobne:
 - ❶ ponownie tautologia
 - ❷ jest to duże ograniczenie — łatwo sobie wyobrazić zdarzenia elementarne zachodzące z różnym prawdopodobieństwem (np. dla rzutu monetą $\Omega = \{\text{orzeł, reszka, stanie na sztorc}\}$)

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Laplace 1812 r.

Wady:

- ❶ definicja ta jest tautologią — występuje w niej słowo definiowane, tj. prawdopodobieństwo jest oparte na zdarzeniach **jednakowo możliwych** $\equiv$ **jednakowo prawdopodobnych**; musimy wiedzieć czym jest prawdopodobieństwo, by zdefiniować prawdopodobieństwo (coś w stylu „pies to zwierzę posiadające wszystkie cechy psa”)
- ❷ przestrzeń Ω musi być skończona — musimy umieć policzyć jej licznosc
- ❸ musimy znać wszystkie możliwe zdarzenia — musimy określić licznosc zbioru zdarzeń sprzyjających interesującemu nas zdarzeniu A
- ❹ zdarzenia elementarne muszą być jednakowo prawdopodobne:
 - ❶ ponownie tautologia
 - ❷ jest to duże ograniczenie — łatwo sobie wyobrazić zdarzenia elementarne zachodzące z różnym prawdopodobieństwem (np. dla rzutu monetą $\Omega = \{\text{orzeł, reszka, stanie na sztorc}\}$)

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Laplace 1812 r.

Wady:

- ❶ definicja ta jest tautologią — występuje w niej słowo definiowane, tj. prawdopodobieństwo jest oparte na zdarzeniach **jednakowo możliwych** $\equiv$ **jednakowo prawdopodobnych**; musimy wiedzieć czym jest prawdopodobieństwo, by zdefiniować prawdopodobieństwo (coś w stylu „pies to zwierzę posiadające wszystkie cechy psa”)
- ❷ przestrzeń Ω musi być skończona — musimy umieć policzyć jej licznosc
- ❸ musimy znać wszystkie możliwe zdarzenia — musimy określić licznosc zbioru zdarzeń sprzyjających interesującemu nas zdarzeniu A
- ❹ zdarzenia elementarne muszą być jednakowo prawdopodobne:
 - ❶ ponownie tautologia
 - ❷ jest to duże ograniczenie — łatwo sobie wyobrazić zdarzenia elementarne zachodzące z różnym prawdopodobieństwem (np. dla rzutu monetą $\Omega = \{\text{orzeł, reszka, stanie na sztorc}\}$)

Klasyczna definicja prawdopodobieństwa

Laplace 1812 r.

Wady:

- ❶ definicja ta jest tautologią — występuje w niej słowo definiowane, tj. prawdopodobieństwo jest oparte na zdarzeniach **jednakowo możliwych** $\equiv$ **jednakowo prawdopodobnych**; musimy wiedzieć czym jest prawdopodobieństwo, by zdefiniować prawdopodobieństwo (coś w stylu „pies to zwierzę posiadające wszystkie cechy psa”)
- ❷ przestrzeń Ω musi być skończona — musimy umieć policzyć jej licznosc
- ❸ musimy znać wszystkie możliwe zdarzenia — musimy określić licznosc zbioru zdarzeń sprzyjających interesującemu nas zdarzeniu A
- ❹ zdarzenia elementarne muszą być jednakowo prawdopodobne:
 - ❶ ponownie tautologia
 - ❷ jest to duże ograniczenie — łatwo sobie wyobrazić zdarzenia elementarne zachodzące z różnym prawdopodobieństwem (np. dla rzutu monetą $\Omega = \{\text{orzeł, reszka, stanie na sztorc}\}$)

Częstościowa definicja prawdopodobieństwa

von Mises 1919 r.

Rozszerzeniem definicji klasycznej jest definicja von Misesa, wg której prawdopodobieństwem zdarzenia A jest **granica** częstotliwości występowania tego zdarzenia przy liczbie powtórzeń doświadczenia losowego zmierzającej do nieskończoności:

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M}{N}$$

Częstościowa definicja prawdopodobieństwa

von Mises 1919 r.

Rozszerzeniem definicji klasycznej jest definicja von Misesa, wg której prawdopodobieństwem zdarzenia A jest **granica** częstotliwości występowania tego zdarzenia przy liczbie powtórzeń doświadczenia losowego zmierzającej do nieskończoności:

$$P(A) = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{M}{N}$$

Jej problemami są jednak:

- konieczność rozważenia **faktycznie** nieskończonego ciągu zdarzeń, co we wszelkich realistycznych sytuacjach jest niemożliwe;
- wynik każdego doświadczenia losowego jest zdarzeniem losowym, zatem zdążanie ilorazu M/N do jakiejś (o ile w ogóle istniejącej) granicy jest również zdarzeniem losowym, zatem ww. $P(A)$ nie jest ustalone, tylko ma też swoje (jakieś?) prawdopodobieństwo;
- konieczność zapewnienia stabilności granicy bez względu na kolejność rozważanych powtórzeń (por. szereg warunkowo zbieżny).

Wróćmy do klasycznej definicji prawdopodobieństwa — aby móc z niej korzystać, potrzeba narzędzi do liczenia liczby możliwych wyników. Tym zajmuje się **kombinatoryka** — dział matematyki zajmujący się badaniem sposobów wyboru, rozmieszczania, podziału i liczenia elementów zbiorów skończonych zgodnie z określonymi regułami (tzn. czy kolejność ma znaczenie, czy elementy mogą się powtarzać itp.). Jest to dział teorii mnogości (teorii zbiorów) badający różne zestawienia i zgrupowania (kombinacje), jakie można utworzyć z elementów **zbiorów skończonych**.

Twierdzenie 1. Niech $A = \{a_1, a_2, \dots, a_n\}$ i $B = \{b_1, b_2, \dots, b_m\}$ oznaczają dwa zbiory o licznosciach odpowiednio n i m . Liczba możliwych do utworzenia uporządkowanych par (a_i, b_j) wynosi nm . (Tzn. liczność iloczynu kartezjańskiego $A \times B$ wynosi nm .)

Dowód.

	b_1	b_2	$\dots$	b_m
a_1	(a_1, b_1)	(a_1, b_2)	$\dots$	(a_1, b_m)
a_2	(a_2, b_1)	(a_2, b_2)	$\dots$	(a_2, b_m)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_j	(a_j, b_1)	(a_j, b_2)	$\dots$	(a_j, b_m)
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$	$\ddots$	$\vdots$
a_n	(a_n, b_1)	(a_n, b_2)	$\dots$	(a_n, b_m)

Wszystkie unikalne kombinacje wypełniają prostokątną tabelę o n wierszach i m kolumnach, zatem zawiera ona nm elementów. ■

Twierdzenie 2. Niech będzie dany ciąg k zbiorów $A_j = \{a_{j,1}, a_{j,2}, \dots, a_{j,n_j}\}$, $j \in \{1, 2, \dots, k\}$. Całkowita liczba uporządkowanych k -elementowych ciągów $(a_{1,i_1}, a_{2,i_2}, \dots, a_{k,i_k})$, utworzonych przez wzięcie po jednym elemencie ze zbiorów A_j (w kolejności $A_1, A_2, \dots, A_k$) wynosi $\prod_{j=1}^k n_j$.

Dowód. Dla $k = 2$ mamy **Twierdzenie 1**. Dalej stosujemy indukcję. ■

Wniosek. Reguła iloczynu. Jeśli losowanie można przeprowadzić w k etapach, przy czym w j -tym etapie można uzyskać n_j rozłącznych rezultatów, to całkowita liczba rezultatów jakie można uzyskać w tym losowaniu wynosi $\prod_{j=1}^k n_j$.

Przykład. Na ile sposobów można się ubrać mając 2 pary butów, 3 garnitury, 1 koszulę i 5 krawatów?

Odpowiedź. $2 \cdot 3 \cdot 1 \cdot 5 = 30$ sposobów.

k -wyrazowa **wariacja z powtórzeniami** zbioru n różnych elementów (mówimy: wariacja z powtórzeniami z n po k) to każdy ciąg złożony z k wyrazów tego zbioru, które mogą się powtarzać. Oznaczamy $\overline{V}_n^k$.

Twierdzenie 3. Liczba k wyrazowych wariacji z powtórzeniami ze zbioru n -elementowego wynosi

$$\overline{V}_n^k = n^k$$

Dowód. W Twierdzeniu 2 wystarczy podstawić $\forall j : A_j = A$. ■

Przykład. Ile jest różnych 9-cyfrowych numerów telefonów?

Odpowiedź. 10^9 .

k -wyrazowa **wariacja bez powtórzeń** zbioru n różnych elementów (mówimy: wariacja bez powtórzeń z n po k) to każdy ciąg złożony z k różnych wyrazów tego zbioru. Oznaczamy V_n^k .

Twierdzenie 4. Liczba k -wyrazowych wariacji bez powtórzeń zbioru n elementów wynosi

$$N_n^k = n(n-1)(n-2)\dots(n-k+1) = \frac{n!}{(n-k)!}$$

Dowód. Ponieważ zwracanie elementu już wylosowanego do zbioru wyjściowego jest zabronione, każde losowanie zmniejsza licznosc zbioru o jeden. Stosując **Twierdzenie 2** z $n_1 = n$, $n_2 = n - 1$, $n_3 = n - 2$, ..., $n_k = n - k + 1$, dostajemy tezę. ■

Przykład. Na ile sposobów można wybrać dyrektora i wicedyrektora ze zbioru 15 pracowników?

Odpowiedź. $V_{15}^2 = \frac{15!}{(15-2)!} = \frac{13! \cdot 14 \cdot 15}{13!} = 14 \cdot 15 = 210$.

Permutacja bez zwracania zbioru n różnych elementów (mówimy; permutacja z n) to każdy ciąg złożony ze wszystkich elementów tego zbioru.

Twierdzenie 5. Liczba permutacji n -elementowego zbioru wynosi
 $P_n = n!$

Dowód. W **Twierdzeniu 4** wystarczy przyjąć $k = n$. Permutacja jest zatem szczególnym przypadkiem wariacji bez powtórzeń gdy wyczerpujemy cały zbiór. ■

Przykład. Na ile sposobów można posadzić przy stole 7 osób?
Odpowiedź. $7! = 5040$.

Twierdzenie 6. (i definicja). Liczba k -elementowych kombinacji bez powtórzeń ze zbioru n -elementowego (czyli losowanie bez zwracania z nieważną kolejnością) wynosi

$$C_n^k = \binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$$

Dowód. Szukana liczba kombinacji to liczba wariacji bez powtórzeń podzielona przez liczbę permutacji zbioru k -elementowego (bo kolejność nie ma znaczenia, zatem każda permutacja jest w tym wypadku równoważna). ■

Przykład. Prawdopodobieństwo wygranej głównej wygranej w lotto, tj. skreślenia „szóstki”, jest równe stosunkowi liczby zdarzeń sprzyjających (w każdym losowaniu lotto tylko jedna „szóstka” jest wygrywająca) do liczby wszystkich możliwych kombinacji 6 elementów spośród 49:

$$P(\text{„szóstka”}) = \frac{1}{C_{49}^6} = \frac{6!(49-6)!}{49!} \approx \frac{1}{14 \cdot 10^6}$$

Geometryczna definicja prawdopodobieństwa

Jeśli przestrzeni zdarzeń elementarnych Ω odpowiada zbiór (obszar) S o znanej *mierze* (długość, pole, objętość, ...), a zdarzeniu A odpowiada zbiór $S_A \subset S$, to prawdopodobieństwo zdarzenia A wynosi

$$P(A) = \frac{\text{miara}(S_A)}{\text{miara}(S)}$$

Ta definicja nie jest pozbawiona wad 3. i 4. (zob. slajd 13), jednak rozszerza definicję prawdopodobieństwa na nieskończone (w tym nieprzeliczalne) zbiory zdarzeń elementarnych, pozbywając się wady 2.

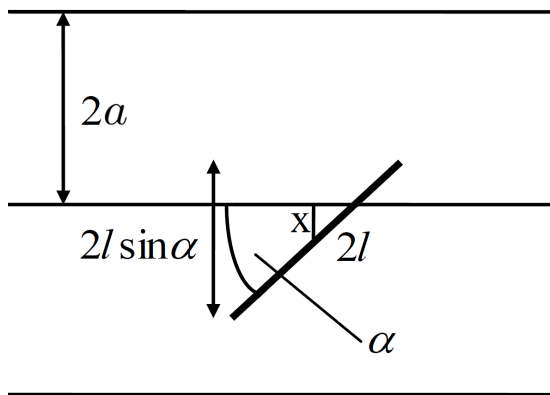
Przykład. Jakie jest prawdopodobieństwo trafienia w koło wpisane w kwadrat jednostkowy, przy założeniu, że każdorazowo trafiamy w rzeczony kwadrat? (*Jest to „prawdopodobieństwo warunkowe” — por. dalej w toku wykładu.*)

Odpowiedź. $P(\bullet) = \frac{\text{pole}(\bullet)}{\text{pole}(\blacksquare)} = \frac{\pi \left(\frac{1}{2}\right)^2}{1^2} \approx 0.785$

Geometryczna definicja prawdopodobieństwa

Zadanie. Igła Buffona.

Płaszczyznę podzielono prostymi równoległymi odległymi o $2a$. Na tę płaszczyznę rzucamy (w sposób przypadkowy) igłę o długości $2l < 2a$. Jakie jest prawdopodobieństwo, że igła przetnie jedną z prostych?



Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa

Kołmogorow 1931 r.

U podstaw nowoczesnego rachunku prawdopodobieństwa leżą twierdzenia teorii mnogości i teorii miary. Definicja prawdopodobieństwa opiera się na systemie trzech aksjomatów (pewników), z których wyprowadza się wszelkie własności i twierdzenia:

- 1 prawdopodobieństwem zdarzenia $A \in \Omega$ jest pewna liczba nieujemna $P(A)$;
- 2 prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego Ω wynosi $P(\Omega) = 1$;
- 3 prawdopodobieństwo sumy (mnogościowej) skończonej lub przeliczalnej liczby parami wykluczających się zdarzeń $A_1, A_2, \dots$ (tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$) równe jest sumie prawdopodobieństw poszczególnych zdarzeń:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa

Kołmogorow 1931 r.

U podstaw nowoczesnego rachunku prawdopodobieństwa leżą twierdzenia teorii mnogości i teorii miary. Definicja prawdopodobieństwa opiera się na systemie trzech aksjomatów (pewników), z których wyprowadza się wszelkie własności i twierdzenia:

- 1 prawdopodobieństwem zdarzenia $A \in \Omega$ jest pewna liczba nieujemna $P(A)$;
- 2 prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego Ω wynosi $P(\Omega) = 1$;
- 3 prawdopodobieństwo sumy (mnogościowej) skończonej lub przeliczalnej liczby parami wykluczających się zdarzeń $A_1, A_2, \dots$ (tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$) równe jest sumie prawdopodobieństw poszczególnych zdarzeń:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

(Powyższe aksjomaty w teorii miary stanowią definicję miary unormowanej.)

Aksjomatyczna definicja prawdopodobieństwa

Kołmogorow 1931 r.

U podstaw nowoczesnego rachunku prawdopodobieństwa leżą twierdzenia teorii mnogości i teorii miary. Definicja prawdopodobieństwa opiera się na systemie trzech aksjomatów (pewników), z których wyprowadza się wszelkie własności i twierdzenia:

- 1 prawdopodobieństwem zdarzenia $A \in \Omega$ jest pewna liczba nieujemna $P(A)$;
- 2 prawdopodobieństwo zdarzenia pewnego Ω wynosi $P(\Omega) = 1$;
- 3 prawdopodobieństwo sumy (mnogościowej) skończonej lub przeliczalnej liczby parami wykluczających się zdarzeń $A_1, A_2, \dots$ (tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$) równe jest sumie prawdopodobieństw poszczególnych zdarzeń:

$$P(A_1 \cup A_2 \cup \dots) = P(A_1) + P(A_2) + \dots$$

(Powyższe aksjomaty w teorii miary stanowią definicję miary unormowanej.)

Przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — gdzie $\Omega \neq \emptyset$ jest przestrzenią zdarzeń elementarnych; $\mathcal{F}$ to przestrzeń wszystkich możliwych zdarzeń losowych ($\Omega \in \mathcal{F}$); P to unormowana miara nazywana probabilistyczną.

Prawdopodobieństwem warunkowym zdarzenia A pod warunkiem zajścia zdarzenia B nazywamy liczbę

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)}$$

Interpretacja powyższego wzoru: wyrażenie prawdopodobieństwa $P(A \cap B)$ w stosunku do prawdopodobieństwa $P(B)$, czyli wyrażenie $P(A \cap B)$ w jednostkach $P(B)$.

Prawdopodobieństwo warunkowe i całkowite

Twierdzenie 7. Niech zdarzenia $A_1, A_2, \dots$ wykluczają się parami (tj. $A_i \cap A_j = \emptyset$ dla $i \neq j$) oraz ich alternatywa jest zdarzeniem pewnym: $\bigcup_i A_i = \Omega$. Wtedy

$$P(B) = \sum_i P(A_i)P(B|A_i)$$

Dowód. B można wyrazić jako

$$B = B \cap \Omega = B \cap \left(\bigcup_i A_i \right) = \bigcup_i (B \cap A_i)$$

Ponieważ $(B \cap A_i) \cap (B \cap A_j) = \emptyset$ (dla $i \neq j$), to z addytywności prawdopodobieństwa:

$$P(B) = P\left(\bigcup_i (B \cap A_i)\right) = \sum_i P(B \cap A_i)$$

Wstawiając definicję prawdopodobieństwa warunkowego:

$P(B \cap A_i) = P(A_i)P(B|A_i)$, otrzymujemy tezę. ■

Twierdzenie 8. (Bayesa) Założenia jak w poprzednim twierdzeniu. Wtedy, jeśli $P(B) > 0$, zachodzi

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{\sum_i P(A_i)P(B|A_i)}$$

Dowód. Z definicji prawdopodobieństwa warunkowego mamy

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A_i)P(B|A_i)}{P(B)}$$

Zapisując mianownik zgodnie z poprzednim twierdzeniem otrzymujemy tezę. ■

Wniosek. Jeśli zdarzenia A i B są niezależne, tj.

$P(A \cap B) = P(A)P(B)$, to zachodzi

$$P(A|B) = P(A) \text{ oraz } P(B|A) = P(B)$$

ponieważ (przy założeniu, że $P(B) > 0$)

$$P(A|B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)P(B)}{P(B)} = P(A)$$

i podobnie dla $P(B|A)$.

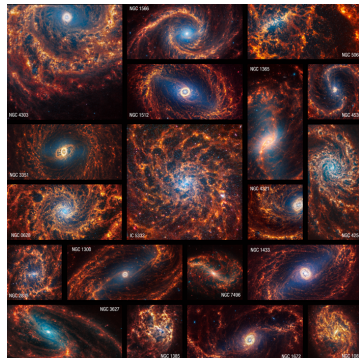
Prawdopodobieństwo warunkowe i całkowite

Przykład. Galaktyki spiralne dzielą się na podtypy o względnym udziale w populacji:

- Sa—23%,
- Sb—31%,
- Sc—46%.

Prawdopodobieństwo wybuchu supernowej w ciągu roku w galaktyce typu

- Sa wynosi 0.0020,
- Sb—0.0035,
- Sc—0.0055.



Prawdopodobieństwo warunkowe i całkowite

Przykład. Galaktyki spiralne dzielą się na podtypy o względnym udziale w populacji:

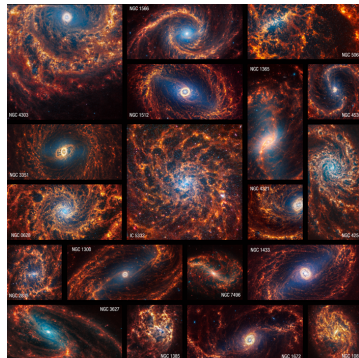
- Sa—23%,
- Sb—31%,
- Sc—46%.

Prawdopodobieństwo wybuchu supernowej w ciągu roku w galaktyce typu

- Sa wynosi 0.0020,
- Sb—0.0035,
- Sc—0.0055.

Pytamy:

- 1 Ile wynosi prawdopodobieństwo wybuchu supernowej w ciągu roku, $P(W)$, w zaobserwowanej galaktyce spiralnej o nieustalonym typie?
- 2 Jeśli w ciągu roku zaobserwowano w tej galaktyce wybuch supernowej, to jakie są prawdopodobieństwa, że ta galaktyka należy do typów Sa, Sb, Sc?



Prawdopodobieństwo warunkowe i całkowite

Odpowiedź. $P(S_a) = 0.23$, $P(S_b) = 0.31$, $P(S_c) = 0.46$.

(a) Z tw. o prawdopodobieństwie całkowitym mamy

$$P(W) = 0.23 \cdot 0.0020 + 0.31 \cdot 0.0035 + 0.46 \cdot 0.0055 \approx 0.0041.$$

Prawdopodobieństwo warunkowe i całkowite

Odpowiedź. $P(S_a) = 0.23$, $P(S_b) = 0.31$, $P(S_c) = 0.46$.

(a) Z tw. o prawdopodobieństwie całkowitym mamy

$$P(W) = 0.23 \cdot 0.0020 + 0.31 \cdot 0.0035 + 0.46 \cdot 0.0055 \approx 0.0041.$$

(b) Z tw. Bayesa mamy

$$P(S_a|W) = \frac{0.23 \cdot 0.0020}{0.0041} \approx 0.11$$

$$P(S_b|W) = \frac{0.31 \cdot 0.0035}{0.0041} \approx 0.27$$

$$P(S_c|W) = \frac{0.46 \cdot 0.0055}{0.0041} \approx 0.62$$

Prawdopodobieństwo warunkowe i całkowite

Odpowiedź. $P(Sa) = 0.23$, $P(Sb) = 0.31$, $P(Sc) = 0.46$.

(a) Z tw. o prawdopodobieństwie całkowitym mamy

$$P(W) = 0.23 \cdot 0.0020 + 0.31 \cdot 0.0035 + 0.46 \cdot 0.0055 \approx 0.0041.$$

(b) Z tw. Bayesa mamy

$$P(Sa|W) = \frac{0.23 \cdot 0.0020}{0.0041} \approx 0.11$$

$$P(Sb|W) = \frac{0.31 \cdot 0.0035}{0.0041} \approx 0.27$$

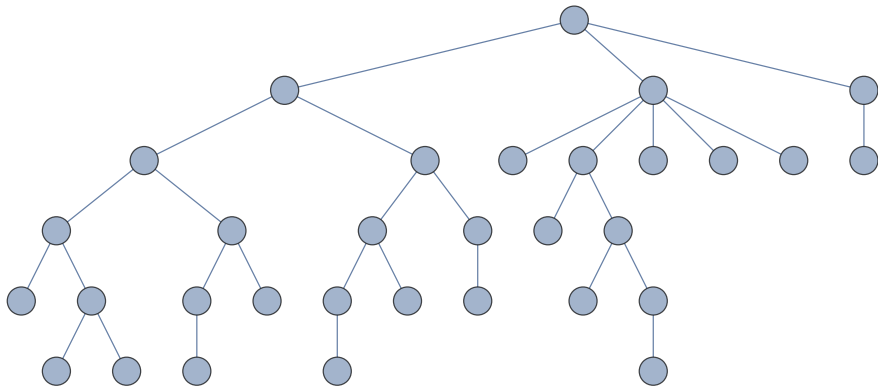
$$P(Sc|W) = \frac{0.46 \cdot 0.0055}{0.0041} \approx 0.62$$

Prawdopodobieństwo, że Sa się zmniejszyło, a prawdopodobieństwo Sc zwiększyło gdy dodana została informacja o zdarzeniu W .

Prawd. postaci $P(Sa)$ nazywa się prawdopodobieństwem **a priori** (tzn. obliczamy je nie mając żadnej wiedzy o przebiegu dośw. losowego), zaś prawd. postaci $P(Sa|W)$ nazywa się prawdopodobieństwem **a posteriori** (tzn. przy jego obliczaniu korzystamy z dodatkowej wiedzy nt. przebiegu zdarzenia losowego).

Metoda drzewa (stochastycznego; probabilistycznego; prawdopodobieństwa)

Drzewo jest użyteczną techniką wizualizacyjną ułatwiającą obliczanie prawdopodobieństw zdarzeń wieloetapowych (w niezbyt skomplikowanych przypadkach). W języku teorii grafów drzewo to graf prosty o n wierzchołkach połączonych $n - 1$ krawędziami $\Rightarrow$ każda para wierzchołków jest połączona dokładnie jedną krawędzią. Na przykład:

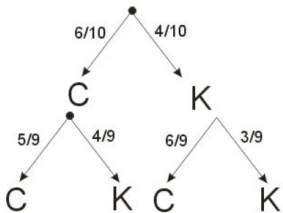


Metoda drzewa (stochastycznego; probabilistycznego; prawdopodobieństwa)

Przykład. W pudełku znajduje się 6 cukierków czekoladowych (C) i 4 krówki (K). Losujemy kolejno dwa cukierki bez zwracania. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania

- 1 dwóch krówek;
- 2 dwóch cukierków o różnych smakach?

Odpowiedź. Drzewo wygląda następująco:

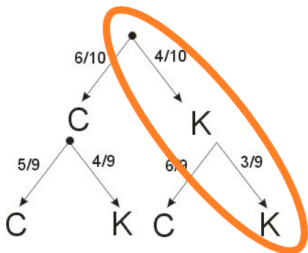


Metoda drzewa (stochastycznego; probabilistycznego; prawdopodobieństwa)

Przykład. W pudełku znajduje się 6 cukierków czekoladowych (C) i 4 krówki (K). Losujemy kolejno dwa cukierki bez zwracania. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania

- 1 dwóch krówek;
- 2 dwóch cukierków o różnych smakach?

Odpowiedź.



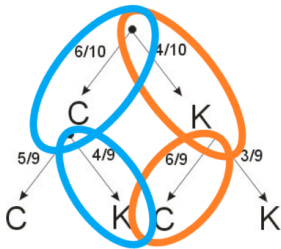
Szukamy w drzewie sekwencji KK . Mamy

$$P(KK) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$$

Przykład. W pudełku znajduje się 6 cukierków czekoladowych (C) i 4 krówki (K). Losujemy kolejno dwa cukierki bez zwracania. Jakie jest prawdopodobieństwo wylosowania

- 1 dwóch krówek;
- 2 dwóch cukierków o różnych smakach?

Odpowiedź.



Szukamy w drzewie sekwencji KK . Mamy

$$P(KK) = \frac{4}{10} \cdot \frac{3}{9} = \frac{2}{15}$$

Sekwencje CK i KC są równouprawnionymi rezultatami. Zatem

$$P(CK) + P(KC) = \frac{6}{10} \cdot \frac{4}{9} + \frac{4}{10} \cdot \frac{6}{9} = \frac{8}{15}$$

Metoda drzewa (stochastycznego; probabilistycznego; prawdopodobieństwa)

