

Pracownia astrofizyki teoretycznej 1

Wykład 4

Mariusz Tarnopolski

Instytut Astronomii UMK

PATEO 1 ©2025



Zagadnienie 3 ciał

Najbardziej ogólny układ równań:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = -Gm_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} - Gm_3 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^3}$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -Gm_3 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} - Gm_1 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

$$\ddot{\vec{r}}_3 = -Gm_1 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} - Gm_2 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3}$$

18-wymiarowa przestrzeń fazowa $\rightarrow$ skomplikowane i kosztowne numerycznie.

Zagadnienie 3 ciał

Najbardziej ogólny układ równań:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = -Gm_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} - Gm_3 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^3}$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -Gm_3 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} - Gm_1 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

$$\ddot{\vec{r}}_3 = -Gm_1 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} - Gm_2 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3}$$

18-wymiarowa przestrzeń fazowa $\rightarrow$ skomplikowane i kosztowne numerycznie.

Formalnie istnieje rozwiązanie analityczne (Sundman 1912): dane jest szeregiem potęgowym w potęgach $t^{1/3}$, zbieżnym $\forall t$.

Zagadnienie 3 ciał

Najbardziej ogólny układ równań:

$$\ddot{\vec{r}}_1 = -Gm_2 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_2|^3} - Gm_3 \frac{\vec{r}_1 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_1 - \vec{r}_3|^3}$$

$$\ddot{\vec{r}}_2 = -Gm_3 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_3}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_3|^3} - Gm_1 \frac{\vec{r}_2 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_2 - \vec{r}_1|^3}$$

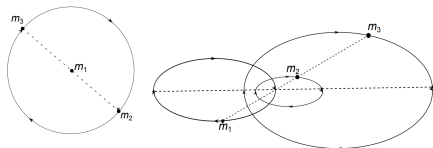
$$\ddot{\vec{r}}_3 = -Gm_1 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_1}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_1|^3} - Gm_2 \frac{\vec{r}_3 - \vec{r}_2}{|\vec{r}_3 - \vec{r}_2|^3}$$

18-wymiarowa przestrzeń fazowa $\rightarrow$ skomplikowane i kosztowne numerycznie.

Formalnie istnieje rozwiązanie analityczne (Sundman 1912): dane jest szeregiem potęgowym w potęgach $t^{1/3}$, zbieżnym $\forall t$. Jednak dla zastosowań astronomicznych wymaga wzięcia $\gtrsim 10^{8\,000\,000}$ wyrazów, co czyni je praktycznie bezużytecznym.

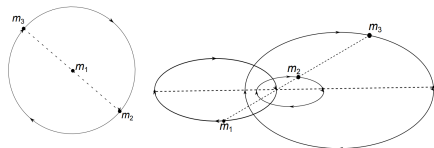
Niektóre regularne rozwiązania

Euler (1765):

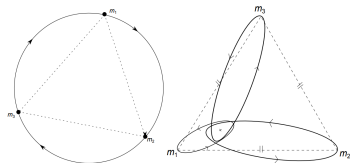


Niektóre regularne rozwiązania

Euler (1765):

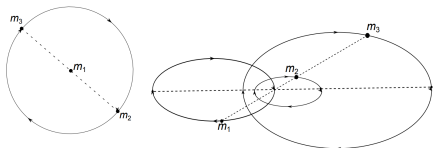


Lagrange (1772):

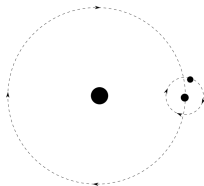


Niektóre regularne rozwiązania

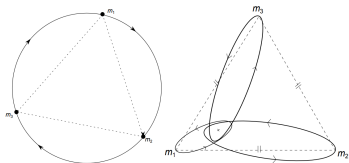
Euler (1765):



Hill (1878):

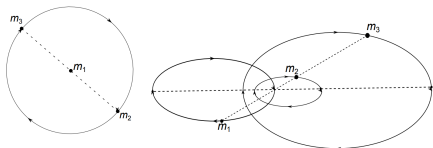


Lagrange (1772):

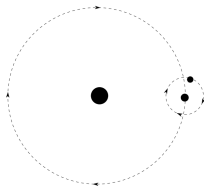


Niektóre regularne rozwiązania

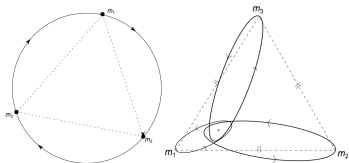
Euler (1765):



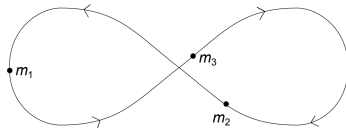
Hill (1878):



Lagrange (1772):

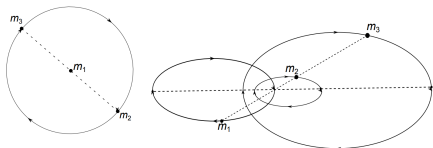


Moore (1993); Chenciner & Montgomery (2000):

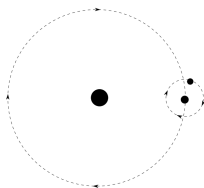


Niektóre regularne rozwiązania

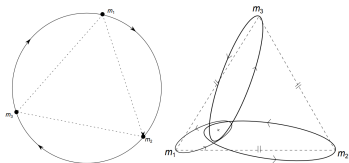
Euler (1765):



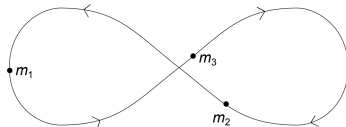
Hill (1878):



Lagrange (1772):



Moore (1993); Chenciner & Montgomery (2000):



Uproszczony model chaotyczny: płaskie ograniczone kołowe zagadnienie 3 ciał.
Np. Słońce $\odot$ –Jowisz ♃ –kometa, Ziemia $\oplus$ –Księżyc ☾ –sztuczne satelity itp.

Niektóre regularne rozwiązania

Zad. 4a (raport)

- ❶ Używając 2 integratorów numerycznych (wykład 2), zasymulować trajektorię Chencinera & Montgomery'ego dla $m_i = 1$. Użyć następujących warunków początkowych ($z_i(0) = 0$):

$$(x_1(0), y_1(0)) = (0.97000436, -0.24308753)$$

$$(x_2(0), y_2(0)) = (-0.97000436, 0.24308753)$$

$$(x_3(0), y_3(0)) = (0, 0)$$

oraz ($v_{z,i} = 0$)

$$(v_{x,1}(0), v_{y,1}(0)) = (0.466203685, 0.43236573)$$

$$(v_{x,2}(0), v_{y,2}(0)) = (0.466203685, 0.43236573)$$

$$(v_{x,3}(0), v_{y,3}(0)) = (-0.93240737, -0.86473146)$$

Obliczyć trajektorie dla całkowitego czasu $T \in \{10, 100, 300\}$ (j.a.).

- ❷ Zaburzyć war. pocz. ($\neq 0$) w następujący sposób: zmienić losowo ostatnie cyfry, następnie dwie ostatnie cyfry itd. Jaki kształt jest uzyskiwany (por. ze stanem wyjściowym)? Jak bardzo można zmienić war. pocz. zanim rozw. się „oddali” (kształt, dryft itp.) od wyjściowego (dla $T \in \{100, 300\}$)?

Płaskie ograniczone kołowe zagadnienie 3 ciał

Masy względne $\mu = \frac{m_1}{m_1+m_2}$, $1 - \mu = \frac{m_2}{m_1+m_2}$ (gdzie $\mu \leq 1/2$) oraz infinitezymalna masa testowa.

$$\mu_{\text{Pluto}\oplus\text{-Charon}\oplus} \simeq 10^{-1}$$

$$\mu_{\text{Earth}\oplus\text{-Moon}\oplus} \simeq 10^{-2}$$

$$\mu_{\text{Sun}\odot\text{-Jupiter}\oplus} \simeq 10^{-3}$$

*Oznaczana również jako C , J lub C_J ; często też przemnażana przez -2 .

Płaskie ograniczone kołowe zagadnienie 3 ciał

Masy względne $\mu = \frac{m_1}{m_1+m_2}$, $1 - \mu = \frac{m_2}{m_1+m_2}$ (gdzie $\mu \leq 1/2$) oraz ininitezymalna masa testowa.

$$\begin{array}{l|l} \mu_{\text{Pluto} \oplus - \text{Charon} \oplus} \simeq 10^{-1} & \ddot{x} - 2\dot{y} = -\frac{\partial U(x, y)}{\partial x} \\ \mu_{\text{Earth} \oplus - \text{Moon} \oplus} \simeq 10^{-2} & \ddot{y} + 2\dot{x} = -\frac{\partial U(x, y)}{\partial y} \\ \mu_{\text{Sun} \odot - \text{Jupiter} \text{♃}} \simeq 10^{-3} & \end{array}$$

Potencjał efektywny (w obracającym się układzie współrzędnych!):

$$U(x, y) = -\frac{1}{2} (x^2 + y^2) - \frac{1 - \mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2},$$

gdzie $r_1 = \sqrt{(x + \mu)^2 + y^2}$ oraz $r_2 = \sqrt{(x - 1 + \mu)^2 + y^2}$.

*Oznaczana również jako C , J lub C_J ; często też przemnażana przez -2 .

Płaskie ograniczone kołowe zagadnienie 3 ciał

Masy względne $\mu = \frac{m_1}{m_1+m_2}$, $1 - \mu = \frac{m_2}{m_1+m_2}$ (gdzie $\mu \leq 1/2$) oraz ininitezymalna masa testowa.

$$\begin{array}{l|l} \mu_{\text{Pluto-Charon}} \simeq 10^{-1} & \ddot{x} - 2\dot{y} = -\frac{\partial U(x,y)}{\partial x} \\ \mu_{\text{Earth-Moon}} \simeq 10^{-2} & \ddot{y} + 2\dot{x} = -\frac{\partial U(x,y)}{\partial y} \\ \mu_{\text{Sun-Jupiter}} \simeq 10^{-3} & \end{array}$$

Potencjał efektywny (w obracającym się układzie współrzędnych!):

$$U(x, y) = -\frac{1}{2} (x^2 + y^2) - \frac{1-\mu}{r_1} - \frac{\mu}{r_2},$$

gdzie $r_1 = \sqrt{(x+\mu)^2 + y^2}$ oraz $r_2 = \sqrt{(x-1+\mu)^2 + y^2}$. Stała Jacobiego* (całkowita energia masy testowej) jest jedyną całką ruchu:

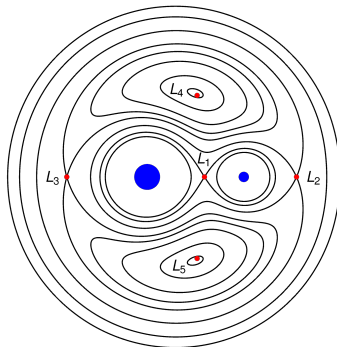
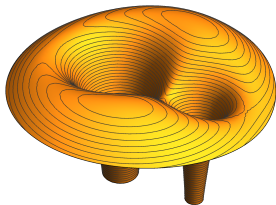
$$H(x, y, \dot{x}, \dot{y}) = \frac{1}{2} (\dot{x}^2 + \dot{y}^2) + U(x, y) \equiv E \in \text{const.}$$

co pozwala zredukować 4D przestrzeń fazową do 3D.

*Oznaczana również jako C , J lub C_J ; często też przemnażana przez -2 .

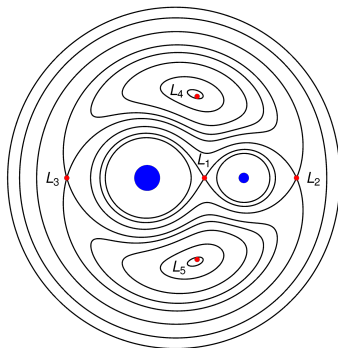
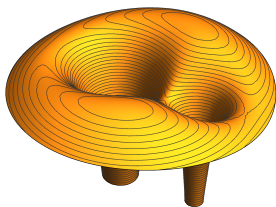
Płaskie ograniczone kołowe zagadnienie 3 ciał

Układ ma 5 punktów stałych — punkty Lagrange'a: L_1, L_2, L_3 (współliniowe; siodła $\rightarrow$ niestabilne) oraz L_4, L_5 (trójkątne; dla $\mu(1 - \mu) < 1/27$ stabilne z powodu siły odśrodkowej $\rightarrow$ stabilizacyjne działanie siły Coriolisa).



Płaskie ograniczone kołowe zagadnienie 3 ciał

Układ ma 5 punktów stałych — punkty Lagrange'a: L_1, L_2, L_3 (współliniowe; siodła → niestabilne) oraz L_4, L_5 (trójkątne; dla $\mu(1 - \mu) < 1/27$ stabilne z powodu siły odśrodkowej → stabilizacyjne działanie siły Coriolisa).



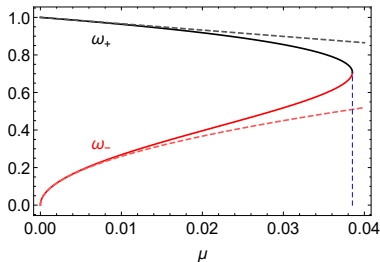
Przykłady: trojańczycy w L_4 & L_5 (Słońce $\odot$ –Jowisz ♃); satelita SOHO w L_1 (Słońce $\odot$ –Ziemia $\oplus$), WMAP & JWST w L_2 .

Płaskie ograniczone kołowe zagadnienie 3 ciał

Linearyzacja wokół punktów L_4, L_5 prowadzi do stabilnych orbit* z częstotliwościami modów normalnych:

$$\omega_- = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}}{2}}; \quad \omega_- \approx \sqrt{\frac{27\mu}{4}} \quad \text{gdy } \mu \approx 0$$

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}}{2}}; \quad \omega_+ \approx 1 - \frac{27\mu}{8} \quad \text{gdy } \mu \approx 0$$



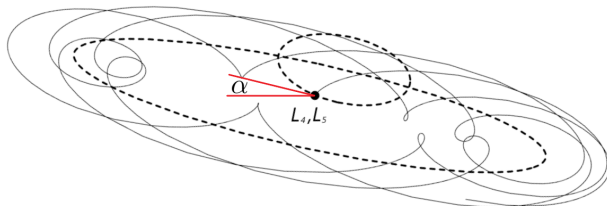
*Wokół L_1, L_2, L_3 też istnieją stabilne orbity.

Płaskie ograniczone kołowe zagadnienie 3 ciał

Linearyzacja wokół punktów L_4, L_5 prowadzi do stabilnych orbit* z częstotliwościami modów normalnych:

$$\omega_- = \sqrt{\frac{1 - \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}}{2}}; \quad \omega_- \approx \sqrt{\frac{27\mu}{4}} \quad \text{gdy } \mu \approx 0$$

$$\omega_+ = \sqrt{\frac{1 + \sqrt{1 - 27\mu(1 - \mu)}}{2}}; \quad \omega_+ \approx 1 - \frac{27\mu}{8} \quad \text{gdy } \mu \approx 0$$



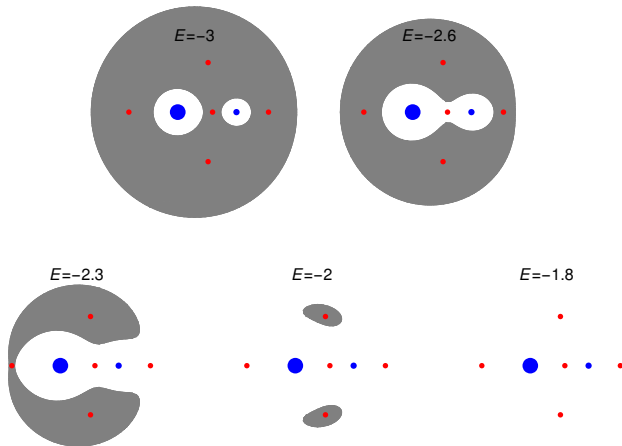
----- składowe epicykliczne
———— trajektoria masy testowej

$$\tan 2\alpha = \sqrt{3}(1 - 2\mu)$$

*Wokół L_1, L_2, L_3 też istnieją stabilne orbity.

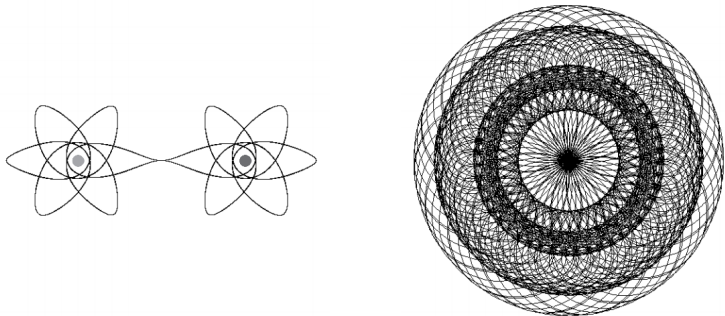
Płaskie ograniczone kołowe zagadnienie 3 ciał

Rzut 4D przestrzeni fazowej na 2D przestrzeń konfiguracyjną (położeń) (x, y) to tzw. strefa Hilla:



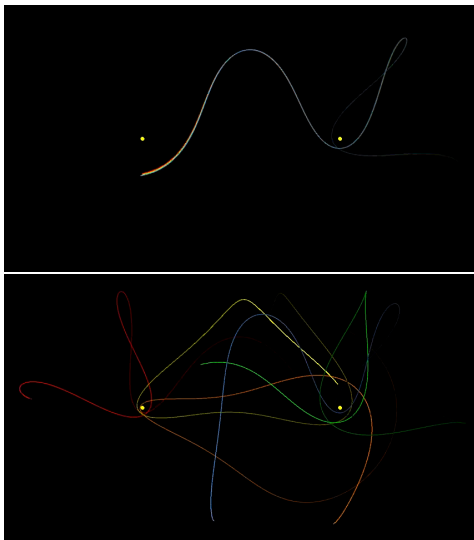
Na szaro — obszary niedostępne dla danej E .

Płaskie ograniczone kołowe zagadnienie 3 ciał



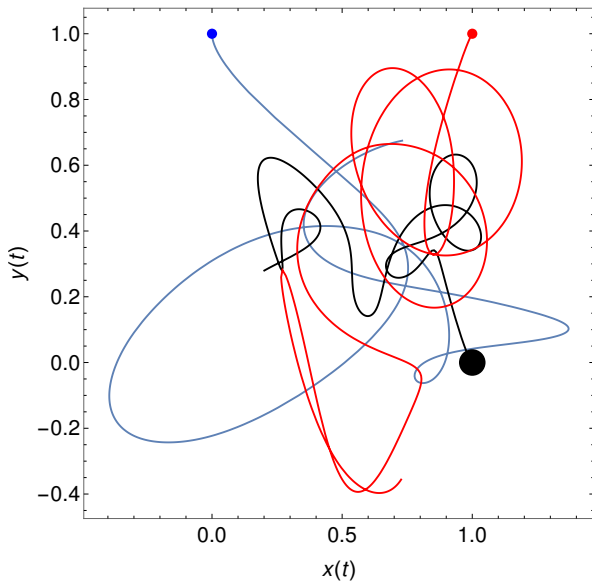
Left – periodic orbit in the co-rotating frame; right – periodic orbit in the inertial frame.

Chaotyczne płaskie ograniczone zagadnienie 3 ciał



¹<https://youtu.be/jarcgP1rRWs?t=105>

Chaotyczne płaskie zagadnienie 3 ciał



Zad. 4b (raport)

- ① (*Tablica.*) Rozważyć trzy masy punktowe $m_1 \neq m_2 \neq m_3$, umieszczone w wierzchołkach trójkąta równobocznego z zerowymi prędkościami początkowymi (przyspieszenie każdej m_i będzie skierowane do środka ciężkości układu mas).
 - ① Obliczyć czas do zderzenia.
 - ② Rozważyć przypadek $m_1 = m_2 = m_3 \equiv m$.

Zad. 4b (raport)

- ❶ (*Tablica.*) Rozważyć trzy masy punktowe $m_1 \neq m_2 \neq m_3$, umieszczone w wierzchołkach trójkąta równobocznego z zerowymi prędkościami początkowymi (przyspieszenie każdej m_i będzie skierowane do środka ciężkości układu mas).
 - ❶ Obliczyć czas do zderzenia.
 - ❷ Rozważyć przypadek $m_1 = m_2 = m_3 \equiv m$.
- ❷ (*Raport.*) Przyjąć masy punktowe $m_1 \neq m_2 \neq m_3$.
 - ❶ Skorzystać z 2 integratorów numerycznych (wykład 2) do uzyskania czasu zderzenia. Porównać z wynikiem analitycznym.
 - ❷ Umieścić masy w wierzchołkach trójkąta nierównobocznego; przyjąć zerowe prędkości początkowe. Czy dochodzi do zderzenia? Jeśli tak, to w jakim czasie? Rozważyć 2–3 konfiguracje.
 - ❸ Do konfiguracji z poprzedniego punktu dodać (rozsądne) niezerowe prędkości początkowe. Narysować uzyskane trajektorie. Podać przyjęte masy m_i , współrzędne wierzchołków trójkąta oraz prędkości początkowe dla każdej konfiguracji.

Zad. 4b (raport)

- ❶ (*Tablica.*) Rozważyć trzy masy punktowe $m_1 \neq m_2 \neq m_3$, umieszczone w wierzchołkach trójkąta równobocznego z zerowymi prędkościami początkowymi (przyspieszenie każdej m_i będzie skierowane do środka ciężkości układu mas).
 - ❶ Obliczyć czas do zderzenia.
 - ❷ Rozważyć przypadek $m_1 = m_2 = m_3 \equiv m$.
- ❷ (*Raport.*) Przyjąć masy punktowe $m_1 \neq m_2 \neq m_3$.
 - ❶ Skorzystać z 2 integratorów numerycznych (wykład 2) do uzyskania czasu zderzenia. Porównać z wynikiem analitycznym.
 - ❷ Umieścić masy w wierzchołkach trójkąta nierównobocznego; przyjąć zerowe prędkości początkowe. Czy dochodzi do zderzenia? Jeśli tak, to w jakim czasie? Rozważyć 2–3 konfiguracje.
 - ❸ Do konfiguracji z poprzedniego punktu dodać (rozsądne) niezerowe prędkości początkowe. Narysować uzyskane trajektorie. Podać przyjęte masy m_i , współrzędne wierzchołków trójkąta oraz prędkości początkowe dla każdej konfiguracji.

Zad. 4b (raport)

- ❶ (*Tablica.*) Rozważyć trzy masy punktowe $m_1 \neq m_2 \neq m_3$, umieszczone w wierzchołkach trójkąta równobocznego z zerowymi prędkościami początkowymi (przyspieszenie każdej m_i będzie skierowane do środka ciężkości układu mas).
 - ❶ Obliczyć czas do zderzenia.
 - ❷ Rozważyć przypadek $m_1 = m_2 = m_3 \equiv m$.
- ❷ (*Raport.*) Przyjąć masy punktowe $m_1 \neq m_2 \neq m_3$.
 - ❶ Skorzystać z 2 integratorów numerycznych (wykład 2) do uzyskania czasu zderzenia. Porównać z wynikiem analitycznym.
 - ❷ Umieścić masy w wierzchołkach trójkąta nierównobocznego; przyjąć zerowe prędkości początkowe. Czy dochodzi do zderzenia? Jeśli tak, to w jakim czasie? Rozważyć 2–3 konfiguracje.
 - ❸ Do konfiguracji z poprzedniego punktu dodać (rozsądne) niezerowe prędkości początkowe. Narysować uzyskane trajektorie. Podać przyjęte masy m_i , współrzędne wierzchołków trójkąta oraz prędkości początkowe dla każdej konfiguracji.

Zad. 4c (raport)

- 3 Rozważyć dostatecznie duży zbiór sensownych i nietrywialnych losowych warunków początkowych zagadnienia 3 ciał. Wykorzystać jeden najlepszy integrator numeryczny (uzasadnić wybór) do przecałkowania każdego zagadnienia. Jaki procent układów jest niestabilnych, tj. co najmniej jedno ciało ucieka z układu (do nieskończoności)? Przyjąć stosowne, praktyczne kryteria.

Zagadnienie N -ciał

- Np. samo $E > 0$ nie wystarcza— E jest całką ruchu (zależną od warunków pocz.) ale energia w układach N ciał może być redystrybuowana pomiędzy ciałami.
- Należy rozważać energie par ciał w kontekście energii i -tego ciała, E_i , w układzie środka masy pozostałych ciał ($j \neq i$) układu.¹
- W przypadku bardzo bliskich przejść E_i może **chwilowo** być dodatnia—trzeba też wziąć pod uwagę jak długo $E_i > 0$, jaka jest geometria układu (chwilowy promień układu odpowiednio większy niż rozmiar początkowy), dynamikę (chwilowa odległość ciała potencjalnie uciekającego rosnąca, $dr_i/dt > 0$) itp.
- Oczywiście można jedynie powiedzieć, że dany układ będzie związany w czasie całkowania $T_{\max}$ —nie można ocenić, czy całkując dłużej jego status się nie zmieni.

¹<https://academic.oup.com/mnras/article/487/4/4615/5509598>, Sect. 2.2.

Zagadnienie N -ciał

- Np. samo $E > 0$ nie wystarcza— E jest całką ruchu (zależną od warunków pocz.) ale energia w układach N ciał może być redystrybuowana pomiędzy ciałami.
- Należy rozważać energie par ciał w kontekście energii i -tego ciała, E_i , w układzie środka masy pozostałych ciał ($j \neq i$) układu.¹
- W przypadku bardzo bliskich przejść E_i może **chwilowo** być dodatnia—trzeba też wziąć pod uwagę jak długo $E_i > 0$, jaka jest geometria układu (chwilowy promień układu odpowiednio większy niż rozmiar początkowy), dynamikę (chwilowa odległość ciała potencjalnie uciekającego rosnąca, $dr_i/dt > 0$) itp.
- Oczywiście można jedynie powiedzieć, że dany układ będzie związany w czasie całkowania $T_{\max}$ —nie można ocenić, czy całkując dłużej jego status się nie zmieni.

¹<https://academic.oup.com/mnras/article/487/4/4615/5509598>, Sect. 2.2.

Zagadnienie N -ciał

- Np. samo $E > 0$ nie wystarcza— E jest całką ruchu (zależną od warunków pocz.) ale energia w układach N ciał może być redystrybuowana pomiędzy ciałami.
- Należy rozważać energie par ciał w kontekście energii i -tego ciała, E_i , w układzie środka masy pozostałych ciał ($j \neq i$) układu.¹
- W przypadku bardzo bliskich przejść E_i może **chwilowo** być dodatnia—trzeba też wziąć pod uwagę jak długo $E_i > 0$, jaka jest geometria układu (chwilowy promień układu odpowiednio większy niż rozmiar początkowy), dynamikę (chwilowa odległość ciała potencjalnie uciekającego rosnąca, $dr_i/dt > 0$) itp.
- Oczywiście można jedynie powiedzieć, że dany układ będzie związany w czasie całkowania $T_{\max}$ —nie można ocenić, czy całkując dłużej jego status się nie zmieni.

¹<https://academic.oup.com/mnras/article/487/4/4615/5509598>, Sect. 2.2.

Zagadnienie N -ciał

- Np. samo $E > 0$ nie wystarcza— E jest całką ruchu (zależną od warunków pocz.) ale energia w układach N ciał może być redystrybuowana pomiędzy ciałami.
- Należy rozważać energie par ciał w kontekście energii i -tego ciała, E_i , w układzie środka masy pozostałych ciał ($j \neq i$) układu.¹
- W przypadku bardzo bliskich przejść E_i może **chwilowo** być dodatnia—trzeba też wziąć pod uwagę jak długo $E_i > 0$, jaka jest geometria układu (chwilowy promień układu odpowiednio większy niż rozmiar początkowy), dynamikę (chwilowa odległość ciała potencjalnie uciekającego rosnąca, $dr_i/dt > 0$) itp.
- Oczywiście można jedynie powiedzieć, że dany układ będzie związany w czasie całkowania $T_{\max}$ —nie można ocenić, czy całkując dłużej jego status się nie zmieni.

¹<https://academic.oup.com/mnras/article/487/4/4615/5509598>, Sect. 2.2.