

Pracownia astrofizyki teoretycznej 1

Wykład 3

Mariusz Tarnopolski

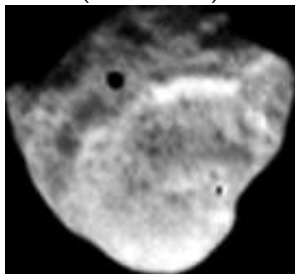
Instytut Astronomii UMK

PATEO 1 ©2025

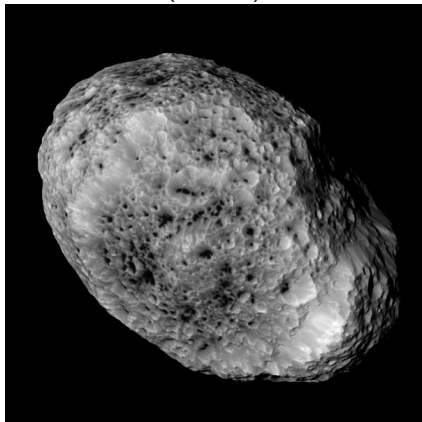


Hyperion $\mathfrak{H}$ — księżyc Saturna $\mathfrak{h}$

Voyager 2 (1981)
(431,370 km)

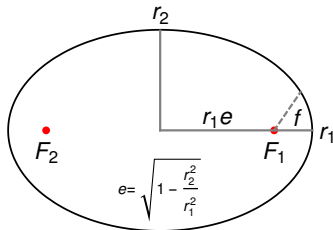
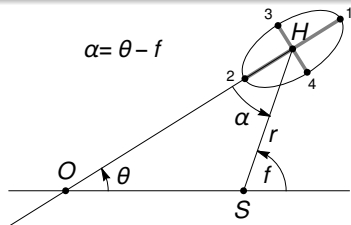


Cassini (2015)
(505 km)

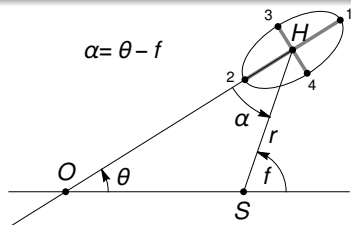


- Odkrycie w 1848 r. (Bond, Lassell)
- $r_1 = 1.4296 \cdot 10^6$ km
- $\bar{e} = 0.1$
- $T = 21.28$ d
- rezonans orb. 4:3 z Tytanem
- $360 \times 266 \times 205$ km
- $\rho = 0.54 \text{ g cm}^{-3}$
- albedo = 0.3

Hyperion $\mathcal{H}$



¹www.home.umk.pl/~mariusz.tarnopolski/home/students/chaos/Greiner_Hyperion.pdf

Hyperion $\mathfrak{Z}$ 

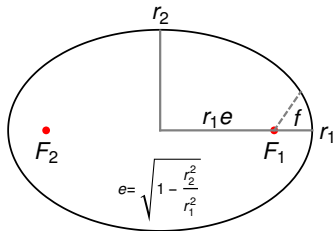
Równanie ruchu¹ (jednostki
bezwymiarowe: $T \equiv 2\pi$, $r_1 \equiv 1$):

$$\ddot{\theta} + \frac{\omega^2}{2} \frac{\sin 2(\theta - f)}{r^3} = 0$$

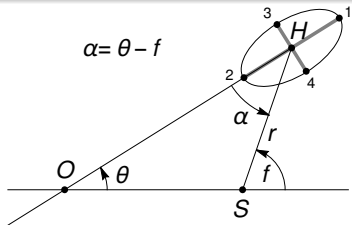
Spłaszczenie (*oblateness*):

$$\omega^2 = \frac{3(B - A)}{C},$$

$A < B < C$ – główne momenty bezwładności; osie elipsoidy $a > b > c$



¹www.home.umk.pl/~mariusz.tarnopolski/home/students/chaos/Greiner_Hyperion.pdf

Hyperion 2

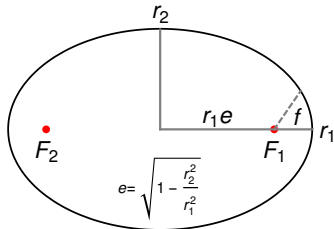
Równanie ruchu¹ (jednostki
bezwymiarowe: $T \equiv 2\pi$, $r_1 \equiv 1$):

$$\ddot{\theta} + \frac{\omega^2}{2} \frac{\sin 2(\theta - f)}{r^3} = 0$$

Spłaszczenie (*oblateness*):

$$\omega^2 = \frac{3(B - A)}{C},$$

$A < B < C$ – główne momenty bezwładności; osie elipsoidy $a > b > c$



Orbita keplerowska o mimośrodku
 $0 \leq e < 1$:

$$r = \frac{1 - e^2}{1 + e \cos f}$$

Anomalia prawdziwa f :

$$\dot{f} = \frac{(1 + e \cos f)^2}{(1 - e^2)^{3/2}}$$

¹www.home.umk.pl/~mariusz.tarnopolski/home/students/chaos/Greiner_Hyperion.pdf

Trójwymiarowa rotacja musi być modelowana pełnym zestawem równań Eulera²:

$$\begin{cases} A\dot{\omega}_a - \omega_b\omega_c(B - C) &= -\frac{3}{r^3}\beta\gamma(B - C) \\ B\dot{\omega}_b - \omega_c\omega_a(C - A) &= -\frac{3}{r^3}\gamma\zeta(C - A) \\ C\dot{\omega}_c - \omega_a\omega_b(A - B) &= -\frac{3}{r^3}\zeta\beta(A - B) \end{cases}$$

$\omega_{a,b,c}$ — składowe prędkości kątowej; β, γ, ζ — cosinusy kierunkowe.

Po nałożeniu warunku prostopadłości osi obrotu do płaszczyzny orbity dostajemy równanie ruchu z poprzedniego slajdu.

²Danby, *Fundamentals of Celestial Mechanics*

Zakładamy, że oś obrotu jest prostopadła do płaszczyzny orbity!³

- Przestrzeń fazowa jest 3D, o topologii $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$:

$$\Omega = \left\{ (\theta, \dot{\theta}, f) \mid \theta \in \mathbb{R} \bmod 2\pi, \dot{\theta} \in \mathbb{R}, f \in \mathbb{R} \bmod 2\pi \right\}.$$

- f jest regularną funkcją 2π -okresową, która nie niesie wprost żadnej informacji nt. dynamiki rotacyjnej.
- Rotacja satelity o 180° (tj. $\theta \rightarrow \theta + \pi$) daje równoważną konfigurację, czyli θ może zostać ograniczona do przedziału $[0, \pi)$.
- W jednostkach bezwymiarowych okres orbitalny również wynosi $T = 2\pi$. A zatem **przekrój Poincarégo**, utworzony przez próbkowanie wartości $(\theta, \dot{\theta})$ w czasie z krokiem 2π (tzw. zmienne stroboskopowe) zapewnia wystarczający wgląd w dynamikę rotacyjną.

³Chaotyczne koziołkowanie: Wisdom, Peale, Mignard, *The chaotic rotation of Hyperion*, Icarus, 58, 137 (1984)

Zakładamy, że oś obrotu jest prostopadła do płaszczyzny orbity!³

- Przestrzeń fazowa jest 3D, o topologii $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$:

$$\Omega = \left\{ (\theta, \dot{\theta}, f) \mid \theta \in \mathbb{R} \bmod 2\pi, \dot{\theta} \in \mathbb{R}, f \in \mathbb{R} \bmod 2\pi \right\}.$$

- f jest regularną funkcją 2π -okresową, która nie niesie wprost żadnej informacji nt. dynamiki rotacyjnej.
- Rotacja satelity o 180° (tj. $\theta \rightarrow \theta + \pi$) daje równoważną konfigurację, czyli θ może zostać ograniczona do przedziału $[0, \pi)$.
- W jednostkach bezwymiarowych okres orbitalny również wynosi $T = 2\pi$. A zatem **przekrój Poincarégo**, utworzony przez próbkowanie wartości $(\theta, \dot{\theta})$ w czasie z krokiem 2π (tzw. zmienne stroboskopowe) zapewnia wystarczający wgląd w dynamikę rotacyjną.

³Chaotyczne koziołkowanie: Wisdom, Peale, Mignard, *The chaotic rotation of Hyperion*, Icarus, 58, 137 (1984)

Zakładamy, że oś obrotu jest prostopadła do płaszczyzny orbity!³

- Przestrzeń fazowa jest 3D, o topologii $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$:

$$\Omega = \left\{ (\theta, \dot{\theta}, f) \mid \theta \in \mathbb{R} \bmod 2\pi, \dot{\theta} \in \mathbb{R}, f \in \mathbb{R} \bmod 2\pi \right\}.$$

- f jest regularną funkcją 2π -okresową, która nie niesie wprost żadnej informacji nt. dynamiki rotacyjnej.
- Rotacja satelity o 180° (tj. $\theta \rightarrow \theta + \pi$) daje równoważną konfigurację, czyli θ może zostać ograniczona do przedziału $[0, \pi)$.
- W jednostkach bezwymiarowych okres orbitalny również wynosi $T = 2\pi$. A zatem **przekrój Poincarégo**, utworzony przez próbkowanie wartości $(\theta, \dot{\theta})$ w czasie z krokiem 2π (tzw. zmienne stroboskopowe) zapewnia wystarczający wgląd w dynamikę rotacyjną.

³Chaotyczne koziołkowanie: [Wisdom, Peale, Mignard, *The chaotic rotation of Hyperion*, Icarus, 58, 137 \(1984\)](#)

Zakładamy, że oś obrotu jest prostopadła do płaszczyzny orbity!³

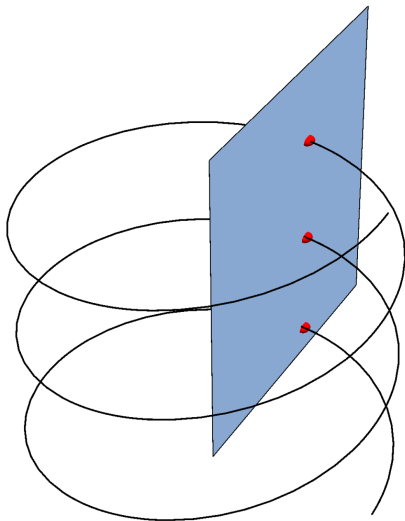
- Przestrzeń fazowa jest 3D, o topologii $\mathbb{S}^2 \times \mathbb{R}$:

$$\Omega = \left\{ (\theta, \dot{\theta}, f) \mid \theta \in \mathbb{R} \bmod 2\pi, \dot{\theta} \in \mathbb{R}, f \in \mathbb{R} \bmod 2\pi \right\}.$$

- f jest regularną funkcją 2π -okresową, która nie niesie wprost żadnej informacji nt. dynamiki rotacyjnej.
- Rotacja satelity o 180° (tj. $\theta \rightarrow \theta + \pi$) daje równoważną konfigurację, czyli θ może zostać ograniczona do przedziału $[0, \pi)$.
- W jednostkach bezwymiarowych okres orbitalny również wynosi $T = 2\pi$. A zatem **przekrój Poincarégo**, utworzony przez próbkowanie wartości $(\theta, \dot{\theta})$ w czasie z krokiem 2π (tzw. zmienne stroboskopowe) zapewnia wystarczający wgląd w dynamikę rotacyjną.

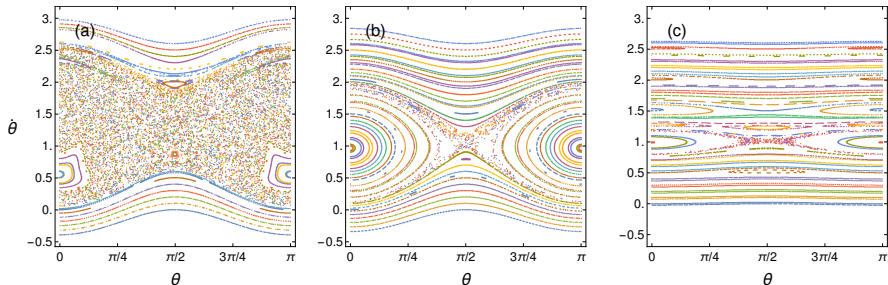
³Chaotyczne koziołkowanie: Wisdom, Peale, Mignard, *The chaotic rotation of Hyperion*, Icarus, 58, 137 (1984)

Przekrój Poincarégo



Zmienne stroboskopowe w ogólności powstają przez przecięcie trajektorii w przestrzeni fazowej płaszczyzną. Dla układów z wyróżnioną skalą czasu jest to równoważne próbkowaniu ze stałym krokiem równym tej skali czasu. Dla Hyperiona — f jest 2π -okresowa, orbita keplerowska jest regularna, więc naturalnym jest rejestrowanie stanu układu w tym samym punkcie orbity.

Przekrój Poincarého

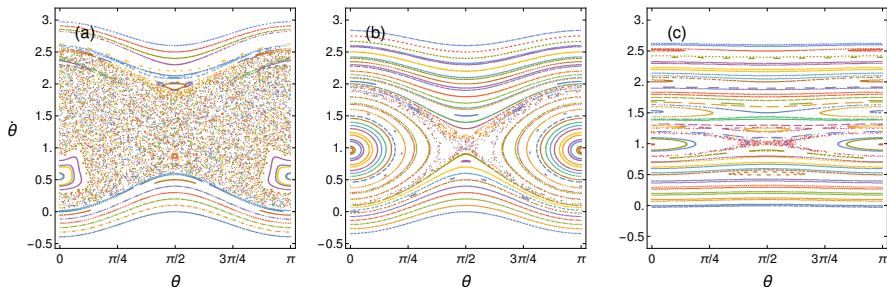


- ⓐ $e = 0.1, \omega^2 = 0.79$ — wartości dla Hyperiona ♃
- ⓑ $e = 0.005, \omega^2 = 0.79$ — średni mimośród wszystkich satelitów w układzie słonecznym
- ⓒ $e = 0.1, \omega^2 = 0.04$

Każdy satelita ma za sobą chaotyczną przeszłość, zanim wpadł w stabilny rezonans spinowo-orbitalny (najczęściej 1:1); ale warto wspomnieć Merkurego ☿ w rezonansie 3:2.

⁴MT, CeMDA 127, 121 (2017)

Przekrój Poincarého

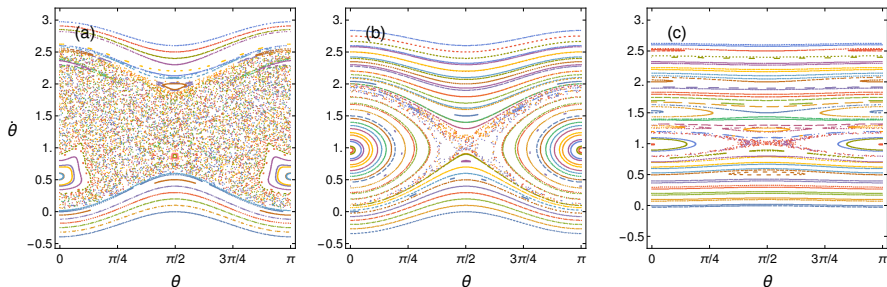


Najszerszą strefą chaotyczną jest ta wokół rezonansu 1:1. Jej szerokość połówkową można oszacować jako³

$$w = \frac{14\pi e}{\omega^3} \exp \left[-\frac{\pi}{2\omega} \right]$$

³Wisdom, Peale, Mignard, *The chaotic rotation of Hyperion*, Icarus, 58, 137 (1984)

Przekrój Poincarého



Najszerszą strefą chaotyczną jest ta wokół rezonansu 1:1. Jej szerokość połówkową można oszacować jako³

$$w = \frac{14\pi e}{\omega^3} \exp \left[-\frac{\pi}{2\omega} \right]$$

co dla Merkurego $\propto$
 $(\omega = 0.017, e = 0.206)$ daje
 $w = 1.37 \cdot 10^{-34}$, zaś dla
 (a) $w = 1.07$,
 (b) $w = 0.05$,
 (c) $w = 0.21$.

³Wisdom, Peale, Mignard, *The chaotic rotation of Hyperion*, Icarus, 58, 137 (1984)

Kryterium przekrywania rezonansów: jeśli odległość między środkami rezonansów jest mniejsza niż suma ich szerokości połówkowych to rezonanse się przekrywają, zatem otaczające je strefy chaotyczne się zlewają co prowadzi do powstania chaosu z powodu „rywalizacji” między tymi dwoma rezonansami.

*Por. Księżyc ♄ i Merkury ☿.

Kryterium przekrywania rezonansów: jeśli odległość między środkami rezonansów jest mniejsza niż suma ich szerokości połówkowych to rezonanse się przekrywają, zatem otaczające je strefy chaotyczne się zlewają co prowadzi do powstania chaosu z powodu „rywalizacji” między tymi dwoma rezonansami.

Rezonanse o największych szerokościach to 1:1 oraz 3:2*, dla których wartość krytyczna wynosi

$$\omega_R \approx \frac{1}{2 + \sqrt{14}e}$$

*Por. Księżyc ☾ i Merkury ☿.

Kryterium przekrywania rezonansów: jeśli odległość między środkami rezonansów jest mniejsza niż suma ich szerokości połówkowych to rezonanse się przekrywają, zatem otaczające je strefy chaotyczne się zlewają co prowadzi do powstania chaosu z powodu „rywalizacji” między tymi dwoma rezonansami.

Rezonanse o największych szerokościach to 1:1 oraz 3:2*, dla których wartość krytyczna wynosi

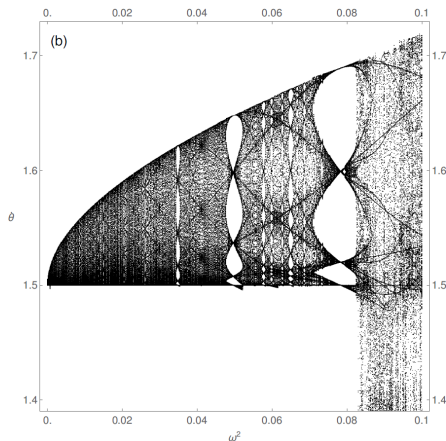
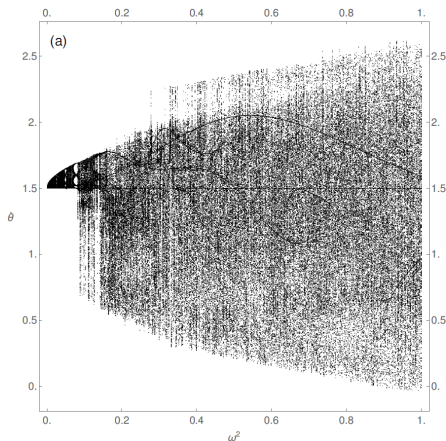
$$\omega_R \approx \frac{1}{2 + \sqrt{14}e} \Big|_{e=0.1} \approx 0.31 < \omega_{\text{Hyperion}} \approx 0.89$$

co zgadza się z wartością uzyskaną numerycznie:

*Por. Księżyc ☾ i Merkury ☿.

Diagramy bifurkacyjne⁴

$$e = 0.1$$



$\omega^2 \approx 0.083 \Leftrightarrow \omega \approx 0.29$ — bardzo dobra zgodność z $\omega_R \approx 0.31$.

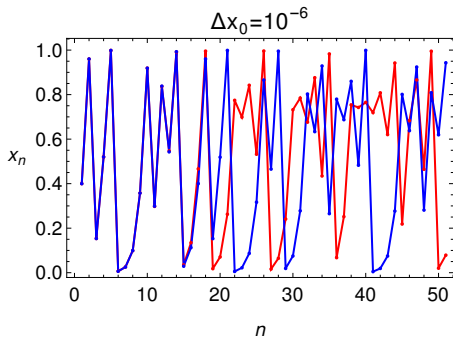
⁴MT, CeMDA 127, 121 (2017)

Zad. 3a (raport) — rozw. równania ruchu

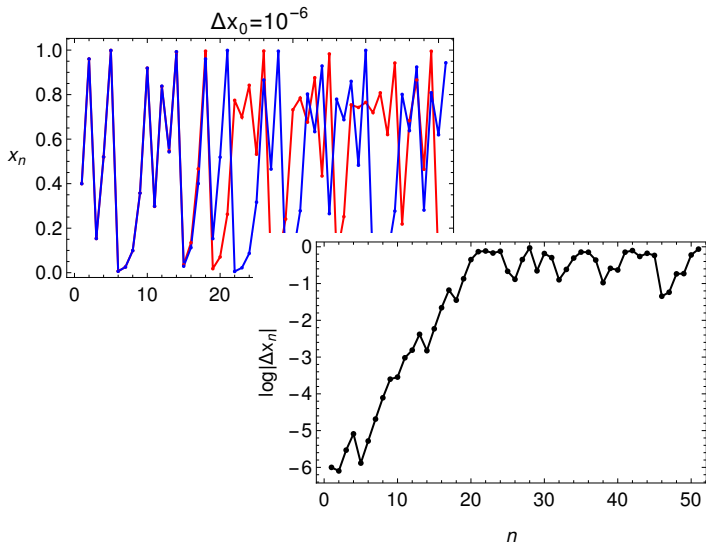
Wykorzystać zaimplementowane integratory numeryczne (co najmniej 3; wykład 2) do rozwiązywania równania ruchu rotacyjnego Hyperiona (slajd 3).

- 1 Porównać uzyskane zależności $\dot{\theta}(t)$ od czasu; jak długo są one wzajemnie zbieżne?
- 2 Wykonać przekroje Poincarégo (zob. slajd 7) dla rozwiązania chaotycznego. Czy uzyskujemy jakościowo równoważne obrazy używając różnych integratorów?
- 3 Odtworzyć diagramy bifurkacyjne ($\dot{\theta}$ vs. ω^2) ze slajdu 10.

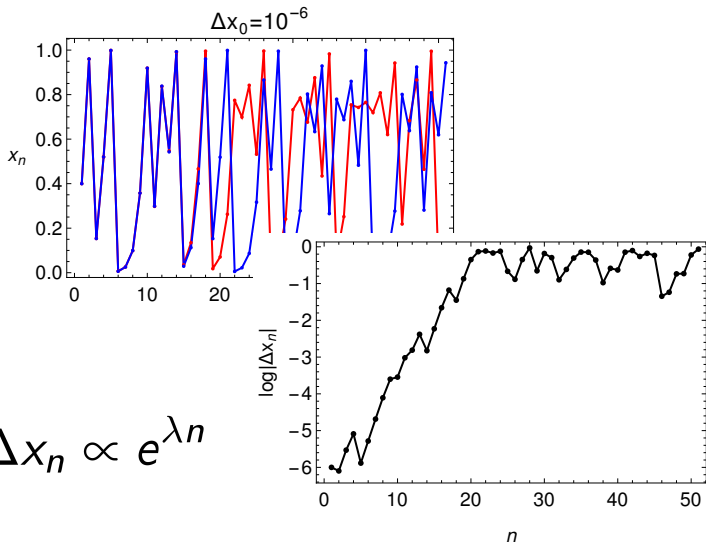
Wykładnik Lapunowa



Wykładnik Lapunowa



Wykładnik Lapunowa



Wykładnik Lapunowa

$\Delta x_n \propto e^{\lambda n} \rightarrow \lambda$ — wykładnik Lapunowa:

- $\lambda > 0$ — układ jest chaotyczny
- $\lambda \leq 0$ — dynamika regularna (periodyczna, quasiperiodyczna, ...)

Wykładnik Lapunowa

$\Delta x_n \propto e^{\lambda n} \rightarrow \lambda$ — wykładnik Lapunowa:

- $\lambda > 0$ — układ jest chaotyczny
- $\lambda \leq 0$ — dynamika regularna (periodyczna, quasiperiodyczna, ...)

Indykator chaosu. Historycznie pierwszy; istnieją różne bardziej efektywne warianty: SALI, GALI, REM, MEGNO, ...

Interpretacja: średnia eksponencjalna rozbieżność (lub zbieżność) początkowo bliskich sobie orbit.

Wykładnik Lapunowa

$\Delta x_n \propto e^{\lambda n} \rightarrow \lambda$ — wykładnik Lapunowa:

- $\lambda > 0$ — układ jest chaotyczny
- $\lambda \leq 0$ — dynamika regularna (periodyczna, quasiperiodyczna, ...)

Indykator chaosu. Historycznie pierwszy; istnieją różne bardziej efektywne warianty: SALI, GALI, REM, MEGNO, ...

Interpretacja: średnia eksponencjalna rozbieżność (lub zbieżność) początkowo bliskich sobie orbit.

Zad. 3b (raport) — wykładniki Lapunowa

Rozważyć dwie początkowo bliskie trajektorie w przestrzeni fazowej (tj. bliskie warunki początkowe). Rozważyć dwie sytuacje (zob. slajd 7):

- 1 warunki początkowe głęboko wewnątrz strefy chaotycznej;
- 2 warunki początkowe głęboko wewnątrz strefy regularnej.

Obliczyć wykładnik Lapunowa (zob. slajd 12). Użyć co najmniej 3 integratorów i porównać wyniki.