

Pracownia astrofizyki teoretycznej 1

Wykład 1

Mariusz Tarnopolski

Instytut Astronomii UMK

PATEO 1 ©2025



- <http://www.home.umk.pl/~mariusz.tarnopolski/home/students/pateo1/>
- 45 godz. pracowni = prezentacja materiału + zadania rachunkowe + praca własna
- Konsultacje — wtorki 12⁰⁰–13⁰⁰, po umówieniu się przez maila:

mariusz.tarnopolski@umk.pl

Inne terminy i miejsca (np. Wydział Fizyki) — po umówieniu się przez maila.

- Zaliczenie:
 - uczestnictwo w zajęciach (maks. 2 nieuspr. nieobecności)
 - wykonanie raportów zadań numerycznych na ocenę
 - ocena końcowa = średnia arytmetyczna ocen cząstkowych

- <http://www.home.umk.pl/~mariusz.tarnopolski/home/students/pateo1/>
- 45 godz. pracowni = prezentacja materiału + zadania rachunkowe + **praca własna**

- Konsultacje — wtorki 12⁰⁰–13⁰⁰, po umówieniu się przez maila:

mariusz.tarnopolski@umk.pl

Inne terminy i miejsca (np. Wydział Fizyki) — po umówieniu się przez maila.

- Zaliczenie:
 - uczestnictwo w zajęciach (maks. 2 nieuspr. nieobecności)
 - wykonanie raportów zadań numerycznych na ocenę
 - ocena końcowa = średnia arytmetyczna ocen cząstkowych

- <http://www.home.umk.pl/~mariusz.tarnopolski/home/students/pateo1/>
- 45 godz. pracowni = prezentacja materiału + zadania rachunkowe + **praca własna**
- Konsultacje — wtorki 12⁰⁰–13⁰⁰, po umówieniu się przez maila:

mariusz.tarnopolski@umk.pl

Inne terminy i miejsca (np. Wydział Fizyki) — po umówieniu się przez maila.

- Zaliczenie:
 - uczestnictwo w zajęciach (maks. 2 nieuspr. nieobecności)
 - wykonanie raportów zadań numerycznych na ocenę
 - ocena końcowa = średnia arytmetyczna ocen cząstkowych

- <http://www.home.umk.pl/~mariusz.tarnopolski/home/students/pateo1/>
- 45 godz. pracowni = prezentacja materiału + zadania rachunkowe + **praca własna**
- Konsultacje — wtorki 12⁰⁰–13⁰⁰, po umówieniu się przez maila:

mariusz.tarnopolski@umk.pl

Inne terminy i miejsca (np. Wydział Fizyki) — po umówieniu się przez maila.

- Zaliczenie:
 - uczestnictwo w zajęciach (maks. 2 nieuspr. nieobecności)
 - wykonanie raportów zadań numerycznych na ocenę
 - ocena końcowa = średnia arytmetyczna ocen cząstkowych

Rozwiązywanie układów równań różniczkowych zwyczajnych za pomocą programów samodzielnie opracowanych oraz oprogramowania dostępnego w domenie publicznej (python). W szczególności:

- Analiza numeryczna planetarnego zagadnienia dwóch ciał oraz jego wariantów
- Analiza numeryczna rotacji asferycznego ciała niebieskiego (satelity planetarnego)
- Analiza numeryczna aspektów zagadnienia N-ciał

- H. Goldstein, P. Poole & J. L. Safko, *Classical Mechanics: third edition*, Addison Wesley 2001
- J. M. A. Danby, *Fundamentals of Celestial Mechanics*, The Macmillan Company, New York 1962 (1st Ed.), 1992 (2nd Ed.)
- A. Morbidelli, *Modern Celestial Mechanics: Aspects of Solar System Dynamics*, CRC Press 2002
- W. Greiner, *Classical Mechanics. Systems of Particles and Hamiltonian Dynamics*, Springer Berlin Heidelberg 2010
- W. H. Press, S. A. Teukolsky, W. T. Vetterling & B. P. Flannery, *Numerical recipes. The Art of Scientific Computing*, Cambridge University Press 2007 (3rd Ed.)

- P. G. L. Leach & G. P. Flessas, *Generalisation of the Laplace-Runge-Lenz Vector*, Journal of Nonlinear Mathematical Physics 10, 340–423 (2003)
- V. M. Gorringer & P. G. L. Leach, *Conserved Vectors and Orbit Equations for Motions in Two and Three Dimensions*, [w:] *Finite Dimensional Integrable Nonlinear Dynamical Systems*, Eds.: P. G. L. Leach, W. H. Steeb, World Scientific Publ., Singapore, 190–204 (1988)
- J. Wisdom, S. J. Peale & S. Mignard, *The Chaotic Rotation of Hyperion*, Icarus 58, 137–152 (1984)
- M. Tarnopolski, *Rotation of an oblate satellite: Chaos control*, Astronomy and Astrophysics 606, A43 (2017)
- M. Tarnopolski, *Influence of a second satellite on the rotational dynamics of an oblate moon*, Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy 127, 121–138 (2017)

Zagadnienie 2 ciał

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \equiv -\frac{Gm_1m_2}{\mu} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \equiv -\frac{k}{\mu} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \equiv -\frac{k}{\mu} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

gdzie $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ jest masą zredukowaną układu. Niech $\mu = k = 1$.

Zagadnienie 2 ciał

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^2}\hat{\mathbf{r}} \equiv -\frac{Gm_1m_2}{\mu}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \equiv -\frac{k}{\mu}\frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \equiv -\frac{k}{\mu}\frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

gdzie $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ jest masą zredukowaną układu. Niech $\mu = k = 1$.

W polu zachowawczej siły centralnej zachowywany jest moment pędu:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$$

w szczególności też jego długość, $L = r^2\dot{\varphi} \in \text{const}$ (φ — kąt w układzie biegunowym). Ponadto, skoro $\dot{\mathbf{L}} \times \mathbf{L} = 0$ to ruch odbywa się w płaszczyźnie.

Zagadnienie 2 ciał

$$\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(m_1 + m_2)}{r^2} \hat{\mathbf{r}} \equiv -\frac{Gm_1m_2}{\mu} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \equiv -\frac{k}{\mu} \frac{\hat{\mathbf{r}}}{r^2} \equiv -\frac{k}{\mu} \frac{\mathbf{r}}{r^3}$$

gdzie $\frac{1}{\mu} = \frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}$ jest masą zredukowaną układu. Niech $\mu = k = 1$.

W polu zachowawczej siły centralnej zachowywany jest moment pędu:

$$\mathbf{L} = \mathbf{r} \times \dot{\mathbf{r}}$$

w szczególności też jego długość, $L = r^2 \dot{\varphi} \in \text{const}$ (φ — kąt w układzie biegunowym). Ponadto, skoro $\dot{\mathbf{L}} \times \mathbf{L} = 0$ to ruch odbywa się w płaszczyźnie.

Zachowywany jest też wektor Laplace'a-Rungego-Lenza (LRL; skierowany od ogniska ku apocentrum):

$$\mathbf{A} = \mathbf{L} \times \dot{\mathbf{r}} + \hat{\mathbf{r}} \quad (*)$$

który nie daje 3 a tylko 2 stałe całkowania ponieważ zachodzi $\mathbf{A} \cdot \mathbf{L} = 0$.

Zagadnienie 2 ciał

Energia jest zachowywana: $E = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{1}{r}$, ale nie jest niezależną całką ruchu ponieważ zachodzi

$$A^2 = 1 + 2EL^2$$

Zagadnienie 2 ciał

Energia jest zachowywana: $E = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{1}{r}$, ale nie jest niezależną całką ruchu ponieważ zachodzi

$$A^2 = 1 + 2EL^2$$

Stałą całkowania, niebędą niezależną całką ruchu, jest czas τ przejścia przez perycentrum mas m_1 i m_2 w równaniu Keplera:

$$\frac{2\pi}{T} (t - \tau) = E - e \sin E$$

która określa położenie ciała wzdłuż orbity w chwili $t = 0$ (położenie początkowe). Określona jednoznacznie (modulo okres T).

Zagadnienie 2 ciał

Energia jest zachowywana: $E = \frac{1}{2}\dot{\mathbf{r}}^2 - \frac{1}{r}$, ale nie jest niezależną całką ruchu ponieważ zachodzi

$$A^2 = 1 + 2EL^2$$

Stałą całkowania, niebędą niezależną całką ruchu, jest czas τ przejścia przez perycentrum mas m_1 i m_2 w równaniu Keplera:

$$\frac{2\pi}{T} (t - \tau) = E - e \sin E$$

która określa położenie ciała wzdłuż orbity w chwili $t = 0$ (położenie początkowe). Określona jednoznacznie (modulo okres T).

Związek między anomalią mimośrodową E a anomalią prawdziwą φ :

$$\tan \frac{\varphi}{2} = \sqrt{\frac{1+e}{1-e}} \tan \frac{E}{2}$$

Wektor Hamiltona $\mathbf{K}$

Zachowywany wektor można zdefiniować na różne sposoby, LRL jest tylko jedną z opcji.

Np. z równania ruchu mamy $\frac{d\mathbf{v}}{dt} = -\frac{1}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$, co w połączeniu z $L = r^2\dot{\varphi}$ daje $\frac{d\mathbf{v}}{d\varphi} = -\frac{1}{L}\hat{\mathbf{r}}$. Całkując dostaniemy

$$\mathbf{K} = \mathbf{v} - \frac{1}{L}\hat{\boldsymbol{\varphi}},$$

który jednak nie wnosi nic nowego ponieważ $\mathbf{L} \times \mathbf{K} = \mathbf{A}$. Zachodzi też $K^2 = 2E + \frac{1}{L^2}$.

Zagadnienie 2 ciał

Mnożąc wektor LRL (*) skalarnie przez $\mathbf{r}$ oraz oznaczając $\varphi = \angle(\mathbf{A}, \mathbf{r})$ dostaniemy równanie orbity:

$$r(\varphi) = \frac{L^2}{1 + A \cos \varphi}$$

Z wektora $\mathbf{K}$ też można uzyskać równanie orbity.

Jest to równanie rodziny krzywych stożkowych o $e = A$ oraz parametrze $p = L^2$. Zachodzi oczywiście $e = \sqrt{1 + 2EL^2}$.

Zagadnienie 2 ciał

Mnożąc wektor LRL (*) skalarnie przez $\mathbf{r}$ oraz oznaczając $\varphi = \angle(\mathbf{A}, \mathbf{r})$ dostaniemy równanie orbity:

$$r(\varphi) = \frac{L^2}{1 + A \cos \varphi}$$

Z wektora $\mathbf{K}$ też można uzyskać równanie orbity.

Jest to równanie rodziny krzywych stożkowych o $e = A$ oraz parametrze $p = L^2$. Zachodzi oczywiście $e = \sqrt{1 + 2EL^2}$. Łącząc $L = r^2 \dot{\varphi}$ z wyrażeniem na $r(\varphi)$ dostaniemy równanie różniczkowe na anomalię prawdziwą:

$$\dot{\varphi} = \frac{1}{L^3} (1 + e \cos \varphi)^2$$

Zagadnienie 2 ciał — nisko latające satelity

Ruch satelitów w górnych warstwach atmosfery (200 km do 600 km) wymaga uwzględnienia sił oporu aerodynamicznego proporcjonalnego do prędkości:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{a}{r^2}\dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{r^3}\mathbf{r} = 0$$

Ruch taki również odbywa się w płaszczyźnie (ponieważ też $\dot{\mathbf{L}} \times \mathbf{L} = 0$).

Zagadnienie 2 ciał — nisko latające satelity

Ruch satelitów w górnych warstwach atmosfery (200 km do 600 km) wymaga uwzględnienia sił oporu aerodynamicznego proporcjonalnego do prędkości:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{a}{r^2}\dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{r^3}\mathbf{r} = 0$$

Ruch taki również odbywa się w płaszczyźnie (ponieważ też $\dot{\mathbf{L}} \times \mathbf{L} = 0$). Analogiem wektora LRL jest:

$$\mathbf{J} = \frac{\hat{\mathbf{L}} \times \dot{\mathbf{r}}}{L} + \hat{\mathbf{L}} \times \mathbf{u}$$

przy czym $\mathbf{J} = \mathbf{A}/L^2$, oraz zdefiniujemy

$$\mathbf{u} = \int \frac{\hat{\mathbf{r}} d\varphi}{(h - a\varphi)^2}$$

gdzie z kolei $h = L + a\varphi$ jest zachowywane (L ani $\mathbf{L}$ nie jest; $\hat{\mathbf{L}}$ jest).

Zagadnienie 2 ciał — nisko latające satelity

Ruch satelitów w górnych warstwach atmosfery (200 km do 600 km) wymaga uwzględnienia sił oporu aerodynamicznego proporcjonalnego do prędkości:

$$\ddot{\mathbf{r}} + \frac{a}{r^2}\dot{\mathbf{r}} + \frac{1}{r^3}\mathbf{r} = 0$$

Ruch taki również odbywa się w płaszczyźnie (ponieważ też $\dot{\mathbf{L}} \times \mathbf{L} = 0$). Analogiem wektora LRL jest:

$$\mathbf{J} = \frac{\hat{\mathbf{L}} \times \dot{\mathbf{r}}}{L} + \hat{\mathbf{L}} \times \mathbf{u}$$

przy czym $\mathbf{J} = \mathbf{A}/L^2$, oraz zdefiniujemy

$$\mathbf{u} = \int \frac{\hat{\mathbf{r}} d\varphi}{(h - a\varphi)^2}$$

gdzie z kolei $h = L + a\varphi$ jest zachowywane (L ani $\mathbf{L}$ nie jest; $\hat{\mathbf{L}}$ jest).

Przypomnienie: $\hat{\mathbf{r}} = (\cos \varphi, \sin \varphi)$, $\hat{\boldsymbol{\varphi}} = (-\sin \varphi, \cos \varphi)$
(tj. $d\hat{\mathbf{r}}/d\varphi = \hat{\boldsymbol{\varphi}}$, $d\hat{\boldsymbol{\varphi}}/d\varphi = -\hat{\mathbf{r}}$).

Zad. 0 (rozgrzewka) — zagadnienie 2 ciał

- 1 Wyprowadzić związek $A^2 = 1 + 2EL^2$.
- 2 Pokazać jawnym rachunkiem, że wektor LRL jest w istocie wielkością zachowywaną.

Zad. 1 (raport) — zagadnienie 2 ciał dla nisko latających satelitów

- 1 Wyprowadzić równanie orbity, tj. zależność $r(\varphi)$. Co gdy $a = 0$?
- 2 Zapisać równanie orbity w jawnej postaci analitycznej — użycie funkcji Si i Ci. Można się wspomóc np. sympy lub [WolframAlpha](#). Co gdy $a = 0$?
- 3 Określić maks. wartość φ , tj. kiedy nastąpi kolizja z planetą (na podstawie postaci otrzymanych wyrażeń analitycznych z Si i Ci).
- 4 Narysować orbitę (wykres biegunowy, tj. *polar plot*) — całkowanie można wykonać numerycznie. Przyjąć $0 < A < 1$, $0 < a \ll 1$, $0 < h < 1$.
Uważać na początkową osobliwość (gdy $\varphi \gtrsim 0$).