

Metody matematyczne astronomii 2

Wykład 4

Mariusz Tarnopolski

Instytut Astronomii UMK

MMA 2 ©2023



Przedziały ufności

- Teoria estymacji — metody szacowania parametrów charakteryzujących populację na podstawie próbk.
- Estymatorem parametru Q nazywamy każdą statystykę $\hat{Q}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ zależną od tego parametru, którą przyjmujemy za oszacowanie parametru Q .
- Odchylenie standardowe rozkładu parametru $\hat{Q}$ stanowi błąd estymatora.
- Np. średnia z próbki $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ (która jest zmienną losową) jest estymatorem średniej populacji (która nie jest zmienną losową tylko nieznanym parametrem rozkładu). Przypuśćmy, że $f(x; Q)$ jest rozkładem gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej $\bar{X}$ w populacji. Niech będzie to rozkład normalny $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Wariancja średniej to zatem

$$\text{Var}(\bar{X}) = \text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

czyli odchylenie standardowe (tj. błąd/niepewność średniej) wynosi

$$\Delta \bar{X} = \sqrt{\text{Var}(\bar{X})} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Przedziały ufności

- Teoria estymacji — metody szacowania parametrów charakteryzujących populację na podstawie próbk.
- Estymatorem parametru Q nazywamy każdą statystykę $\hat{Q}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ zależną od tego parametru, którą przyjmujemy za oszacowanie parametru Q .
- Odchylenie standardowe rozkładu parametru $\hat{Q}$ stanowi błąd estymatora.
- Np. średnia z próbki $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ (która jest zmienną losową) jest estymatorem średniej populacji (która nie jest zmienną losową tylko nieznanym parametrem rozkładu). Przypuśćmy, że $f(x; Q)$ jest rozkładem gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej $\bar{X}$ w populacji. Niech będzie to rozkład normalny $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Wariancja średniej to zatem

$$\text{Var}(\bar{X}) = \text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

czyli odchylenie standardowe (tj. błąd/niepewność średniej) wynosi

$$\Delta \bar{X} = \sqrt{\text{Var}(\bar{X})} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Przedziały ufności

- Teoria estymacji — metody szacowania parametrów charakteryzujących populację na podstawie próbk.
- Estymatorem parametru Q nazywamy każdą statystykę $\hat{Q}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ zależną od tego parametru, którą przyjmujemy za oszacowanie parametru Q .
- Odchylenie standardowe rozkładu parametru $\hat{Q}$ stanowi błąd estymatora.
- Np. średnia z próbki $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ (która jest zmienną losową) jest estymatorem średniej populacji (która nie jest zmienną losową tylko nieznanym parametrem rozkładu). Przypuśćmy, że $f(x; Q)$ jest rozkładem gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej $\bar{X}$ w populacji. Niech będzie to rozkład normalny $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Wariancja średniej to zatem

$$\text{Var}(\bar{X}) = \text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

czyli odchylenie standardowe (tj. błąd/niepewność średniej) wynosi

$$\Delta \bar{X} = \sqrt{\text{Var}(\bar{X})} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Przedziały ufności

- Teoria estymacji — metody szacowania parametrów charakteryzujących populację na podstawie próbki.
- Estymatorem parametru Q nazywamy każdą statystykę $\hat{Q}(X_1, X_2, \dots, X_n)$ zależną od tego parametru, którą przyjmujemy za oszacowanie parametru Q .
- Odchylenie standardowe rozkładu parametru $\hat{Q}$ stanowi błąd estymatora.
- Np. średnia z próbki $\bar{X} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i$ (która jest zmienną losową) jest estymatorem średniej populacji (która nie jest zmienną losową tylko nieznanym parametrem rozkładu). Przypuśćmy, że $f(x; Q)$ jest rozkładem gęstości prawdopodobieństwa zmiennej losowej $\bar{X}$ w populacji. Niech będzie to rozkład normalny $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$. Wariancja średniej to zatem

$$\text{Var}(\bar{X}) = \text{Var}\left(\frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i\right) = \frac{1}{n^2} \sum_{i=1}^n \text{Var}(X_i) = \frac{1}{n^2} \cdot n\sigma^2 = \frac{\sigma^2}{n}$$

czyli odchylenie standardowe (tj. błąd/niepewność średniej) wynosi

$$\Delta \bar{X} = \sqrt{\text{Var}(\bar{X})} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

Przedziały ufności

- Zatem przedział $[\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$ jest 68.27% przedziałem ufności dla średniej. Oznacza to, że w przypadku wielokrotnego powtarzania danego eksperymentu/obserwacji, ok. 68.27% estymatorów średniej $\bar{X}$ znajdzie się wewnątrz tego przedziału.
- Zaznaczyć należy, że posługujemy się tu rozkładem Gaussa, zatem jest też niezerowe prawdopodobieństwo (aż 31.73%) zaobserwowania pomiarów odległych od wyznaczonego estymatora o więcej niż 1sigma (por. zad. 5). Dobrą praktyką jest podawanie 95% przedziałów ufności.
- **Odchylenie standardowe próbki $\{X_i\}_{i=1}^n$ nie jest niepewnością średniej!** Gros publikacji naukowych popełnia ten błąd...
- Można pokazać, że odchylenie standardowe σ_S estymatora odchylenia

standardowego $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$ (czyli niepewność/błąd

odchylenia standardowego, ΔS) wynosi $\sigma_S \equiv \Delta S = S/\sqrt{2(n-1)}$.

Przedziały ufności

- Zatem przedział $[\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$ jest 68.27% przedziałem ufności dla średniej. Oznacza to, że w przypadku wielokrotnego powtarzania danego eksperymentu/obserwacji, ok. 68.27% estymatorów średniej $\bar{X}$ znajdzie się wewnątrz tego przedziału.
- Zaznaczyć należy, że posługujemy się tu rozkładem Gaussa, zatem jest też niezerowe prawdopodobieństwo (aż 31.73%) zaobserwowania pomiarów odległych od wyznaczonego estymatora o więcej niż 1sigma (por. zad. 5). Dobrą praktyką jest podawanie 95% przedziałów ufności.
- Odchylenie standardowe próbki $\{X_i\}_{i=1}^n$ nie jest niepewnością średniej! Gros publikacji naukowych popełnia ten błąd...
- Można pokazać, że odchylenie standardowe σ_S estymatora odchylenia

standardowego $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$ (czyli niepewność/błąd

odchylenia standardowego, ΔS) wynosi $\sigma_S \equiv \Delta S = S/\sqrt{2(n-1)}$.

Przedziały ufności

- Zatem przedział $[\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$ jest 68.27% przedziałem ufności dla średniej. Oznacza to, że w przypadku wielokrotnego powtarzania danego eksperymentu/obserwacji, ok. 68.27% estymatorów średniej $\bar{X}$ znajdzie się wewnątrz tego przedziału.
- Zaznaczyć należy, że posługujemy się tu rozkładem Gaussa, zatem jest też niezerowe prawdopodobieństwo (aż 31.73%) zaobserwowania pomiarów odległych od wyznaczonego estymatora o więcej niż 1sigma (por. zad. 5). Dobrą praktyką jest podawanie 95% przedziałów ufności.
- **Odchylenie standardowe próbki $\{X_i\}_{i=1}^n$ nie jest niepewnością średniej!** Gros publikacji naukowych popełnia ten błąd...
- Można pokazać, że odchylenie standardowe σ_S estymatora odchylenia

standardowego $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$ (czyli niepewność/błąd

odchylenia standardowego, ΔS) wynosi $\sigma_S \equiv \Delta S = S/\sqrt{2(n-1)}$.

Przedziały ufności

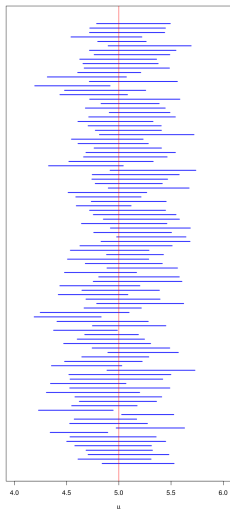
- Zatem przedział $[\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$ jest 68.27% przedziałem ufności dla średniej. Oznacza to, że w przypadku wielokrotnego powtarzania danego eksperymentu/obserwacji, ok. 68.27% estymatorów średniej $\bar{X}$ znajdzie się wewnątrz tego przedziału.
- Zaznaczyć należy, że posługujemy się tu rozkładem Gaussa, zatem jest też niezerowe prawdopodobieństwo (aż 31.73%) zaobserwowania pomiarów odległych od wyznaczonego estymatora o więcej niż 1sigma (por. zad. 5). Dobrą praktyką jest podawanie 95% przedziałów ufności.
- **Odchylenie standardowe próbki $\{X_i\}_{i=1}^n$ nie jest niepewnością średniej!** Gros publikacji naukowych popełnia ten błąd...
- Można pokazać, że odchylenie standardowe σ_S estymatora odchylenia

standardowego $S = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2}$ (czyli niepewność/błąd

odchylenia standardowego, ΔS) wynosi $\sigma_S \equiv \Delta S = S/\sqrt{2(n-1)}$.

Przedziały ufności

- Zatem przedział $[\bar{X} - \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$ jest 68.27% przedziałem ufności a to, że w przypadku wielokrotnego powtarzania u/obserwacji, ok. 68.27% estymatorów średniej $\bar{X}$ rz tego przedziału.



ę posługujemy się tu rozkładem Gaussa, zatem jest opodobieństwo (aż 31.73%) zaobserwowania od wyznaczonego estymatora o więcej niż 1sigma praktyką jest podawanie 95% przedziałów ufności.

rdowe próbki $\{X_i\}_{i=1}^n$ nie jest niepewnością
kacji naukowych popełnia ten błąd...

odchylenie standardowe σ_S estymatora odchylenia

$$\sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^n (X_i - \bar{X})^2} \text{ (czyli niepewność/błąd}$$

owego, ΔS) wynosi $\sigma_S \equiv \Delta S = S/\sqrt{2(n-1)}$.

Przedziały ufności

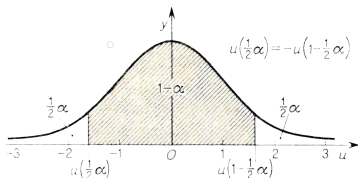
Ogólnie, jeśli mamy statystykę $\hat{Q}$, która pochodzi z rozkładu f , to $100(1 - \alpha)\%$ przedział ufności konstruujemy z warunku

$$P(u_{\alpha/2} < U < u_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

zatem

$$\hat{Q} - u_{\alpha/2}\sigma_{\hat{Q}} < Q < \hat{Q} + u_{1-\alpha/2}\sigma_{\hat{Q}}$$

gdzie $\sigma_{\hat{Q}}$ jest odchyleniem standardowym statystyki $\hat{Q}$ w rozkładzie f , zaś $u_{1-\alpha/2}$ (tzw. *inverse CDF*) to taka wartość standaryzowanej zmiennej $U = \frac{\hat{Q} - Q}{\sigma_{\hat{Q}}}$, dla której $P(U > u_{1-\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$ (z tablic lub komputerowo), tj. taka, że $F(u_{1-\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow u_{1-\alpha/2} = F^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$.



Rys. poglądowy.

Przedziały ufności

Ogólnie, jeśli mamy statystykę $\hat{Q}$, która pochodzi z rozkładu f , to $100(1 - \alpha)\%$ przedział ufności konstruujemy z warunku

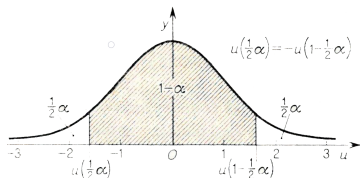
$$P(u_{\alpha/2} < U < u_{1-\alpha/2}) = 1 - \alpha$$

zatem

$$\hat{Q} - u_{\alpha/2}\sigma_{\hat{Q}} < Q < \hat{Q} + u_{1-\alpha/2}\sigma_{\hat{Q}}$$

gdzie $\sigma_{\hat{Q}}$ jest odchyleniem standardowym statystyki $\hat{Q}$ w rozkładzie f , zaś $u_{1-\alpha/2}$ (tzw. *inverse CDF*) to taka wartość standaryzowanej zmiennej $U = \frac{\hat{Q}-Q}{\sigma_{\hat{Q}}}$, dla której $P(U > u_{1-\alpha/2}) = \frac{\alpha}{2}$ (z tablic lub komputerowo), tj. taka, że $F(u_{1-\alpha/2}) = 1 - \frac{\alpha}{2} \Leftrightarrow u_{1-\alpha/2} = F^{-1}(1 - \frac{\alpha}{2})$.

Np. dla średniej $\bar{X}$ mamy $\sigma_{\bar{X}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$, $\alpha = 0.05 \Rightarrow z_{0.975} = \Phi^{-1}(0.975) = 1.96$, zatem 95% przedział ufności to $[\bar{X} - 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \bar{X} + 1.96 \frac{\sigma}{\sqrt{n}}]$.
(W przypadku rozkładu Gaussa mówimy o tzw. *z-score*.)



Rys. poglądowy.

Przedziały ufności

- W powyższych rozważaniach dot. $\bar{X}$ przyjmowaliśmy, że rozkład badanej cechy jest normalny o znanej wariancji σ^2 . Jeśli wariancja nie jest znana i musi być wyznaczona z próbki (jako S^2), to wtedy przedziały ufności konstruuje się formalnie w oparciu o rozkład t Studenta (tj. zamiast $z_{1-\alpha/2}$ bierzemy $t_{1-\alpha/2}$). Jeśli jednak próbka jest stosunkowo duża (w praktyce przyjmuje się, że $n > 30$ wystarcza), to rozkład t Studenta jest wystarczająco dobrze przybliżony rozkładem normalnym.
- Z kolei przedziały ufności dla odchylenia standardowego buduje się w oparciu o rozkład χ^2 . Podobnie, dla dużych próbek ($n > 50$) można dokonać zadowalającego przybliżenia rozkładem Gaussa.
- Rozumowanie powyższe można również odwrócić i zapytać jak duża musi być próbka, by uzyskać przedział ufności o zadanej długości. Np. w badaniach sondażowych wyniki są zazwyczaj podawane z błędem 3 punktów procentowych na poziomie istotności 2sigma. Żeby uzyskać taki przedział, $n \geq 1068$. Zatem badania opinii publicznej wykonuje się na reprezentatywnej próbie ok. 1100 osób.

Przedziały ufności

- W powyższych rozważaniach dot. $\bar{X}$ przyjmowaliśmy, że rozkład badanej cechy jest normalny o znanej wariancji σ^2 . Jeśli wariancja nie jest znana i musi być wyznaczona z próbki (jako S^2), to wtedy przedziały ufności konstruuje się formalnie w oparciu o rozkład t Studenta (tj. zamiast $z_{1-\alpha/2}$ bierzemy $t_{1-\alpha/2}$). Jeśli jednak próbka jest stosunkowo duża (w praktyce przyjmuje się, że $n > 30$ wystarcza), to rozkład t Studenta jest wystarczająco dobrze przybliżony rozkładem normalnym.
- Z kolei przedziały ufności dla odchylenia standardowego buduje się w oparciu o rozkład χ^2 . Podobnie, dla dużych próbek ($n > 50$) można dokonać zadowalającego przybliżenia rozkładem Gaussa.
- Rozumowanie powyższe można również odwrócić i zapytać jak duża musi być próbka, by uzyskać przedział ufności o zadanej długości. Np. w badaniach sondażowych wyniki są zazwyczaj podawane z błędem 3 punktów procentowych na poziomie istotności 2sigma. Żeby uzyskać taki przedział, $n \geq 1068$. Zatem badania opinii publicznej wykonuje się na reprezentatywnej próbie ok. 1100 osób.

Przedziały ufności

- W powyższych rozważaniach dot. $\bar{X}$ przyjmowaliśmy, że rozkład badanej cechy jest normalny o znanej wariancji σ^2 . Jeśli wariancja nie jest znana i musi być wyznaczona z próbki (jako S^2), to wtedy przedziały ufności konstruuje się formalnie w oparciu o rozkład t Studenta (tj. zamiast $z_{1-\alpha/2}$ bierzemy $t_{1-\alpha/2}$). Jeśli jednak próbka jest stosunkowo duża (w praktyce przyjmuje się, że $n > 30$ wystarcza), to rozkład t Studenta jest wystarczająco dobrze przybliżony rozkładem normalnym.
- Z kolei przedziały ufności dla odchylenia standardowego buduje się w oparciu o rozkład χ^2 . Podobnie, dla dużych próbek ($n > 50$) można dokonać zadowalającego przybliżenia rozkładem Gaussa.
- Rozumowanie powyższe można również odwrócić i zapytać jak duża musi być próbka, by uzyskać przedział ufności o zadanej długości. Np. w badaniach sondażowych wyniki są zazwyczaj podawane z błędem 3 punktów procentowych na poziomie istotności 2sigma. Żeby uzyskać taki przedział, $n \geq 1068$. Zatem badania opinii publicznej wykonuje się na reprezentatywnej próbie ok. 1100 osób.

Korelacja

Współczynnik korelacji liniowej Pearsona:

$$r = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)}} = \frac{\mu_{11}}{\sqrt{\mu_{20}\mu_{02}}} = \frac{\mathbb{E}[(X - m_1)(Y - m_2)]}{\sigma_1\sigma_2} \in [-1, 1]$$

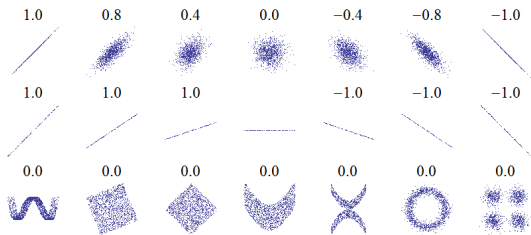
jest miarą **współzależności liniowej** zmiennych losowych X i Y .

Korelacja

Współczynnik korelacji liniowej Pearsona:

$$r = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)}} = \frac{\mu_{11}}{\sqrt{\mu_{20}\mu_{02}}} = \frac{\mathbb{E}[(X - m_1)(Y - m_2)]}{\sigma_1\sigma_2} \in [-1, 1]$$

jest miarą **współzależności liniowej** zmiennych losowych X i Y .

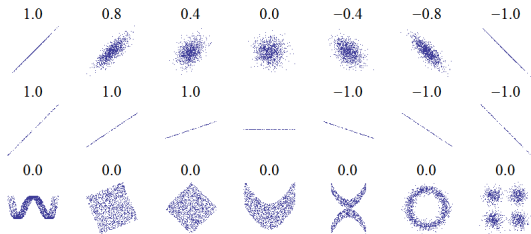


Korelacja

Współczynnik korelacji liniowej Pearsona:

$$r = \frac{\text{Cov}(X, Y)}{\sqrt{\text{Var}(X) \text{Var}(Y)}} = \frac{\mu_{11}}{\sqrt{\mu_{20}\mu_{02}}} = \frac{\mathbb{E}[(X - m_1)(Y - m_2)]}{\sigma_1\sigma_2} \in [-1, 1]$$

jest miarą **współzależności liniowej** zmiennych losowych X i Y .



Współczynnik determinacji r^2 — określa jaka część wariancji jednej zmiennej jest określona przez wariancję drugiej zmiennej.

Np. $r = 0.5$ przekłada się na 25%.

Inne współczynniki korelacji

- 1 Współczynnik Spearmana ρ — określa monotoniczną, nieliniową korelację między zmiennymi losowymi. Jego interpretacja również odbywa się na gruncie procentu wariancji.
Np. dla $(X, Y = X^{10})$ mamy $r = \sqrt{7}/4 \approx 0.66$, ale $\rho = 1$.
- 2 Współczynnik Kendalla τ — także określa nieliniową, monotoniczną korelację. Stanowi różnicę między prawdopodobieństwem, że porównywane zmienne będą układały się w tym samym porządku dla dwóch obserwacji, a prawdopodobieństwem, że ułożą się w przeciwnym porządku.

Inne współczynniki korelacji

- 1 Współczynnik Spearmana ρ — określa monotoniczną, nieliniową korelację między zmiennymi losowymi. Jego interpretacja również odbywa się na gruncie procentu wariancji.
Np. dla $(X, Y = X^{10})$ mamy $r = \sqrt{7}/4 \approx 0.66$, ale $\rho = 1$.
- 2 Współczynnik Kendalla τ — także określa nieliniową, monotoniczną korelację. Stanowi różnicę między prawdopodobieństwem, że porównywane zmienne będą układały się w tym samym porządku dla dwóch obserwacji, a prawdopodobieństwem, że ułożą się w przeciwnym porządku.

Przedział ufności współczynnika Pearsona

Niech będą dane: współczynnik Pearsona r , wielkość próbki n , poziom istotności¹ α (zatem poziom ufności to $1 - \alpha$).

¹Najczęściej się przyjmuje $\alpha = 0.05$ celem konstrukcji 95% przedziału ufności.

Przedział ufności współczynnika Pearsona

Niech będą dane: współczynnik Pearsona r , wielkość próbki n , poziom istotności¹ α (zatem poziom ufności to $1 - \alpha$).

Rozkład współczynnika r jako zmiennej losowej jest niegaussowski, zwłaszcza gdy $r \approx \pm 1$. Należy zatem dokonać transformacji (tzw. transformacji z Fishera), która da rozkład bliski normalnemu, zbudować przedział ufności i przetransformować z powrotem do oryginalnej zmiennej r .

¹Najczęściej się przyjmuje $\alpha = 0.05$ celem konstrukcji 95% przedziału ufności.

Przedział ufności współczynnika Pearsona

Niech będą dane: współczynnik Pearsona r , wielkość próbki n , poziom istotności¹ α (zatem poziom ufności to $1 - \alpha$).

Rozkład współczynnika r jako zmiennej losowej jest niegaussowski, zwłaszcza gdy $r \approx \pm 1$. Należy zatem dokonać transformacji (tzw. transformacji z Fishera), która da rozkład bliski normalnemu, zbudować przedział ufności i przetransformować z powrotem do oryginalnej zmiennej r . Taka transformacja to

$$z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} \equiv \operatorname{artanh}(r)$$

¹Najczęściej się przyjmuje $\alpha = 0.05$ celem konstrukcji 95% przedziału ufności.

Przedział ufności współczynnika Pearsona

Niech będą dane: współczynnik Pearsona r , wielkość próbki n , poziom istotności¹ α (zatem poziom ufności to $1 - \alpha$).

Rozkład współczynnika r jako zmiennej losowej jest niegaussowski, zwłaszcza gdy $r \approx \pm 1$. Należy zatem dokonać transformacji (tzw. transformacji z Fishera), która da rozkład bliski normalnemu, zbudować przedział ufności i przetransformować z powrotem do oryginalnej zmiennej r . Taka transformacja to

$$z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} \equiv \operatorname{artanh}(r)$$

Wtedy z ma rozkład normalny o średniej równej $\frac{1}{2} \ln \frac{1+R}{1-R} \equiv \operatorname{artanh}(R)$, gdzie R jest prawdziwym (nieznanym) współczynnikiem Pearsona populacji, oraz odchyleniu standardowym równym $1/\sqrt{n-3}$.

¹Najczęściej się przyjmuje $\alpha = 0.05$ celem konstrukcji 95% przedziału ufności.

Przedział ufności współczynnika Pearsona

Niech będą dane: współczynnik Pearsona r , wielkość próbki n , poziom istotności¹ α (zatem poziom ufności to $1 - \alpha$).

Rozkład współczynnika r jako zmiennej losowej jest niegaussowski, zwłaszcza gdy $r \approx \pm 1$. Należy zatem dokonać transformacji (tzw. transformacji z Fishera), która da rozkład bliski normalnemu, zbudować przedział ufności i przetransformować z powrotem do oryginalnej zmiennej r . Taka transformacja to

$$z = \frac{1}{2} \ln \frac{1+r}{1-r} \equiv \operatorname{artanh}(r)$$

Wtedy z ma rozkład normalny o średniej równej $\frac{1}{2} \ln \frac{1+R}{1-R} \equiv \operatorname{artanh}(R)$, gdzie R jest prawdziwym (nieznanym) współczynnikiem Pearsona populacji, oraz odchyleniu standardowym równym $1/\sqrt{n-3}$.

Transformacja odwrotna:

$$r = \frac{\exp(2z) - 1}{\exp(2z) + 1} \equiv \tanh(z)$$

¹Najczęściej się przyjmuje $\alpha = 0.05$ celem konstrukcji 95% przedziału ufności.

Przedział ufności współczynnika Pearsona

pozwała skonstruować przedział ufności jako

$$\left[\tanh \left(\operatorname{artanh}(r) - \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n-3}} \right), \tanh \left(\operatorname{artanh}(r) + \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n-3}} \right) \right]$$

gdzie $z_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right)$ to inaczej kwantyl rzędu $1 - \frac{\alpha}{2}$ funkcji odwrotnej do dystrybuanty (funkcji kwantylowej; por. slajd 4) rozkładu $\mathcal{N}(0, 1)$.

Przedział ufności współczynnika Pearsona

pozwała skonstruować przedział ufności jako

$$\left[\tanh \left(\operatorname{artanh}(r) - \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n-3}} \right), \tanh \left(\operatorname{artanh}(r) + \frac{z_{1-\alpha/2}}{\sqrt{n-3}} \right) \right]$$

gdzie $z_{1-\alpha/2} = \Phi^{-1} \left(1 - \frac{\alpha}{2} \right)$ to inaczej kwantyl rzędu $1 - \frac{\alpha}{2}$ funkcji odwrotnej do dystrybuanty (funkcji kwantylowej; por. slajd 4) rozkładu $\mathcal{N}(0, 1)$.

Zadanie 10

- 1 Napisać program, który pobiera na wejściu wartości r, n, α oraz zwraca przedział ufności z zadaną liczbą miejsc po przecinku. (Wskazówka: [scipy.stats.norm.ppf.](#))
- 2 Dla próbki $n = 123$ rozbłysków gamma wyznaczono $r = -0.54$ pomiędzy logarytmem energii $\log E_{\text{peak}}$, na której występuje maksimum widma energetycznego oraz indeksem potęgowym β widma mocy krzywej zmian blasku. Jaki jest 95% przedział ufności dla r ? Czy ta korelacja jest istotna statystycznie? Na jakim poziomie istotności?
[Tu można zweryfikować obliczenia.](#)

Testy statystyczne

Testy stat. decydują czy słuszna jest hipoteza zerowa H_0 , czy hipoteza alternatywna H_1 . Np. H_0 = kot jest czarny, H_1 = kot nie jest czarny.

Uwaga! Odrzucenie H_0 i co za tym idzie przyjęcie H_1 oznacza wyłącznie, że kot nie jest czarny (na zadanym poziomie istotności) — nie mówi nic o jego faktycznym kolorze (biały, szary, tricolor, fioletowy...) ani jego prawdopodobieństwie.

Testy stat. decydują czy słuszna jest hipoteza zerowa H_0 , czy hipoteza alternatywna H_1 . Np. H_0 = kot jest czarny, H_1 = kot nie jest czarny.

Uwaga! Odrzucenie H_0 i co za tym idzie przyjęcie H_1 oznacza wyłącznie, że kot nie jest czarny (na zadanym poziomie istotności) — nie mówi nic o jego faktycznym kolorze (biały, szary, tricolor, fioletowy...) ani jego prawdopodobieństwie.

- Test Kołmogorowa-Smirnowa — czy próbka pochodzi z zadanego rozkładu, albo czy dwie próbki pochodzą z tego samego rozkładu. Jest wrażliwy na różnice w okolicach mody.
- Test Andersona-Darlinga — jw., ale jest wrażliwszy na różnice w ogonach rozkładów.
- Test t Studenta istotności korelacji Pearsona (ale i tak lepiej jest podać przedział ufności).

Testy statystyczne

Testy stat. decydują czy słuszna jest hipoteza zerowa H_0 , czy hipoteza alternatywna H_1 . Np. H_0 = kot jest czarny, H_1 = kot nie jest czarny.

Uwaga! Odrzucenie H_0 i co za tym idzie przyjęcie H_1 oznacza wyłącznie, że kot nie jest czarny (na zadanym poziomie istotności) — nie mówi nic o jego faktycznym kolorze (biały, szary, tricolor, fioletowy...) ani jego prawdopodobieństwie.

- Test Kołmogorowa-Smirnowa — czy próbka pochodzi z zadanego rozkładu, albo czy dwie próbki pochodzą z tego samego rozkładu. Jest wrażliwy na różnice w okolicach mody.
- Test Andersona-Darlinga — jw., ale jest wrażliwszy na różnice w ogonach rozkładów.
- Test t Studenta istotności korelacji Pearsona (ale i tak lepiej jest podać przedział ufności).

