

Metody matematyczne astronomii 2

Wykład 2

Mariusz Tarnopolski

Instytut Astronomii UMK

MMA 2 ©2023



- Przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — gdzie $\Omega \neq \emptyset$ jest przestrzenią zdarzeń elementarnych; $\mathcal{F}$ to przestrzeń zdarzeń losowych ($\Omega \in \mathcal{F}$); P to unormowana miara probabilistyczna (*prawdopodobieństwo*).
- Doświadczenie losowe — procedura dająca wyniki z określonej przestrzeni probabilistycznej. Doświadczenie jest losowe jeśli może przyjąć więcej niż jeden wynik, np. rzut kostką: $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$; $\mathcal{F}$ zawiera w sobie wszystkie możliwości, np. $2 \vee 4 \vee 6 \in \mathcal{F}$; w tym przypadku $P(A \in \Omega) = 1/6$, zaś $P(2 \vee 4 \vee 6) = 1/2$.
- Zmienna losowa — **funkcja** $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ przypisująca zdarzeniom losowym wartości liczbowe. Np. $X =$ wzrost człowieka $\in [55, 272]$ cm.
- Realizacja zmiennej losowej — wartość zmiennej losowej faktycznie zaobserwowana. Np. zmienna losowa X przyjęła dla konkretnego człowieka wartość $x = 155$ cm. Możemy mówić o prawdopodobieństwie przyjęcia przez zmienną losową konkretnej wartości: $P(X = x)$, lub wartości z przedziału, np. $P(X > 155 \text{ cm})$.

- Przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — gdzie $\Omega \neq \emptyset$ jest przestrzenią zdarzeń elementarnych; $\mathcal{F}$ to przestrzeń zdarzeń losowych ($\Omega \in \mathcal{F}$); P to unormowana miara probabilistyczna (*prawdopodobieństwo*).
- Doświadczenie losowe — procedura dająca wyniki z określonej przestrzeni probabilistycznej. Doświadczenie jest losowe jeśli może przyjąć więcej niż jeden wynik, np. rzut kostką: $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$; $\mathcal{F}$ zawiera w sobie wszystkie możliwości, np. $2 \vee 4 \vee 6 \in \mathcal{F}$; w tym przypadku $P(A \in \Omega) = 1/6$, zaś $P(2 \vee 4 \vee 6) = 1/2$.
- Zmienna losowa — **funkcja** $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ przypisująca zdarzeniom losowym wartości liczbowe. Np. $X =$ wzrost człowieka $\in [55, 272]$ cm.
- Realizacja zmiennej losowej — wartość zmiennej losowej faktycznie zaobserwowana. Np. zmienna losowa X przyjęła dla konkretnego człowieka wartość $x = 155$ cm. Możemy mówić o prawdopodobieństwie przyjęcia przez zmienną losową konkretnej wartości: $P(X = x)$, lub wartości z przedziału, np. $P(X > 155 \text{ cm})$.

- Przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — gdzie $\Omega \neq \emptyset$ jest przestrzenią zdarzeń elementarnych; $\mathcal{F}$ to przestrzeń zdarzeń losowych ($\Omega \in \mathcal{F}$); P to unormowana miara probabilistyczna (*prawdopodobieństwo*).
- Doświadczenie losowe — procedura dająca wyniki z określonej przestrzeni probabilistycznej. Doświadczenie jest losowe jeśli może przyjąć więcej niż jeden wynik, np. rzut kostką: $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$; $\mathcal{F}$ zawiera w sobie wszystkie możliwości, np. $2 \vee 4 \vee 6 \in \mathcal{F}$; w tym przypadku $P(A \in \Omega) = 1/6$, zaś $P(2 \vee 4 \vee 6) = 1/2$.
- Zmienna losowa — **funkcja** $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ przypisująca zdarzeniom losowym wartości liczbowe. Np. $X = \text{wzrost człowieka} \in [55, 272]$ cm.
- Realizacja zmiennej losowej — wartość zmiennej losowej faktycznie zaobserwowana. Np. zmienna losowa X przyjęła dla konkretnego człowieka wartość $x = 155$ cm. Możemy mówić o prawdopodobieństwie przyjęcia przez zmienną losową konkretnej wartości: $P(X = x)$, lub wartości z przedziału, np. $P(X > 155 \text{ cm})$.

- Przestrzeń probabilistyczna $(\Omega, \mathcal{F}, P)$ — gdzie $\Omega \neq \emptyset$ jest przestrzenią zdarzeń elementarnych; $\mathcal{F}$ to przestrzeń zdarzeń losowych ($\Omega \in \mathcal{F}$); P to unormowana miara probabilistyczna (*prawdopodobieństwo*).
- Doświadczenie losowe — procedura dająca wyniki z określonej przestrzeni probabilistycznej. Doświadczenie jest losowe jeśli może przyjąć więcej niż jeden wynik, np. rzut kostką: $\Omega = \{1, 2, \dots, 6\}$; $\mathcal{F}$ zawiera w sobie wszystkie możliwości, np. $2 \vee 4 \vee 6 \in \mathcal{F}$; w tym przypadku $P(A \in \Omega) = 1/6$, zaś $P(2 \vee 4 \vee 6) = 1/2$.
- Zmienna losowa — **funkcja** $X : \Omega \rightarrow \mathbb{R}$ przypisująca zdarzeniom losowym wartości liczbowe. Np. $X = \text{wzrost człowieka} \in [55, 272]$ cm.
- Realizacja zmiennej losowej — wartość zmiennej losowej faktycznie zaobserwowana. Np. zmienna losowa X przyjęła dla konkretnego człowieka wartość $x = 155$ cm. Możemy mówić o prawdopodobieństwie przyjęcia przez zmienną losową konkretnej wartości: $P(X = x)$, lub wartości z przedziału, np. $P(X > 155 \text{ cm})$.

Rozkłady prawdopodobieństwa

- Funkcja masy prawdopodobieństwa (*probability mass function*, PMF) — dla rozkładów dyskretnych, np. rzut kostką.
- Funkcja gęstości prawdopodobieństwa (*probability density function*, PDF) — dla rozkładów ciągłych, np. wzrost.
Alternatywna nazwa:
rozkład gęstości prawdopodobieństwa (*probability distribution function* — nadal PDF); rozkład prawdopodobieństwa, gęstość prawdopodobieństwa, rozkład, gęstość.

- Funkcja masy prawdopodobieństwa (*probability mass function*, PMF) — dla rozkładów dyskretnych, np. rzut kostką.
- Funkcja gęstości prawdopodobieństwa (*probability density function*, PDF) — dla rozkładów ciągłych, np. wzrost.

Alternatywna nazwa:

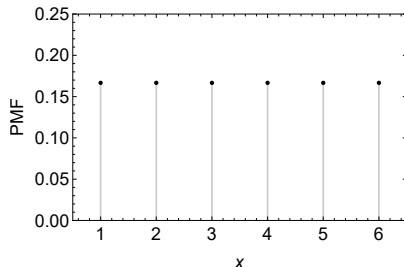
rozkład gęstości prawdopodobieństwa (*probability distribution function* — nadal PDF); rozkład prawdopodobieństwa, gęstość prawdopodobieństwa, rozkład, gęstość.

Zmienna losowa dyskretna

- Rzut jedną kostką:

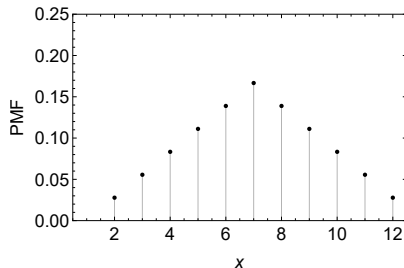
$$P_1(X = x) = \frac{1}{6}$$

dla $x \in \{1, \dots, 6\}$



- Rzut dwiema kostkami:

$$P_2(X = x) \text{ dla } x \in \{2, \dots, 12\}$$



- $0 \leq P(x) \leq 1$ oraz $\sum_x P(x) = 1$

Zmienna losowa ciągła

Zmienna losowa X określona na $\mathbb{R}$ jest typu ciągłego gdy istnieje funkcja $f(x) \geq 0$ (gęstość prawdopodobieństwa) taka, że dla $A \subset \mathbb{R}$ zachodzi

$$P(X \in A) \equiv P(A) = \int_A f(x) dx$$

czyli np.

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

Zmienna losowa ciągła

Zmienna losowa X określona na $\mathbb{R}$ jest typu ciągłego gdy istnieje funkcja $f(x) \geq 0$ (gęstość prawdopodobieństwa) taka, że dla $A \subset \mathbb{R}$ zachodzi

$$P(X \in A) \equiv P(A) = \int_A f(x) dx$$

czyli np.

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

Powiemy też, że rozkład zmiennej ciągłej jest ciągły (zaś rozkład zmiennej dyskretnej jest dyskretny).

Zmienna losowa ciągła

Zmienna losowa X określona na $\mathbb{R}$ jest typu ciągłego gdy istnieje funkcja $f(x) \geq 0$ (gęstość prawdopodobieństwa) taka, że dla $A \subset \mathbb{R}$ zachodzi

$$P(X \in A) \equiv P(A) = \int_A f(x) dx$$

czyli np.

$$P(a < X < b) = \int_a^b f(x) dx$$

Powiemy też, że rozkład zmiennej ciągłej jest ciągły (zaś rozkład zmiennej dyskretnej jest dyskretny).

Musi zachodzić (unormowanie)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x) dx = 1$$

Momenty statystyczne

- Wartość oczekiwana (średnia):

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Zachodzi $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$.

- Wariancja:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]$$

Zachodzi: $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$,

$\text{Var}(X \pm Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$ oraz

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2.$$

- Odchylenie standardowe to $\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$.
- Ogólnie: moment zwykły rzędu k to $m_k = \mathbb{E}(X^k)$, zaś moment centralny rzędu k to $\mu_k = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^k]$.
Wariancja minimalizuje moment względny drugiego rzędu.

Momenty statystyczne

- Wartość oczekiwana (średnia):

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Zachodzi $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$.

- Wariancja:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]$$

Zachodzi: $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$,

$\text{Var}(X \pm Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$ oraz

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2.$$

- Odchylenie standardowe to $\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$.
- Ogólnie: moment zwykły rzędu k to $m_k = \mathbb{E}(X^k)$, zaś moment centralny rzędu k to $\mu_k = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^k]$.
Wariancja minimalizuje moment względny drugiego rzędu.

Momenty statystyczne

- Wartość oczekiwana (średnia):

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Zachodzi $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$.

- Wariancja:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]$$

Zachodzi: $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$,

$\text{Var}(X \pm Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$ oraz

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2.$$

- Odchylenie standardowe to $\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$.
- Ogólnie: moment zwykły rzędu k to $m_k = \mathbb{E}(X^k)$, zaś moment centralny rzędu k to $\mu_k = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^k]$.
Wariancja minimalizuje moment względny drugiego rzędu.

Momenty statystyczne

- Wartość oczekiwana (średnia):

$$\mathbb{E}(X) = \int_{-\infty}^{+\infty} x f(x) dx$$

Zachodzi $\mathbb{E}(aX + b) = a\mathbb{E}(X) + b$.

- Wariancja:

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^2]$$

Zachodzi: $\text{Var}(aX + b) = a^2 \text{Var}(X)$,

$\text{Var}(X \pm Y) = \text{Var}(X) + \text{Var}(Y)$ oraz

$$\text{Var}(X) = \mathbb{E}(X^2) - [\mathbb{E}(X)]^2.$$

- Odchylenie standardowe to $\sigma(X) = \sqrt{\text{Var}(X)}$.
- Ogólnie: moment zwykły rzędu k to $m_k = \mathbb{E}(X^k)$, zaś moment centralny rzędu k to $\mu_k = \mathbb{E}[(X - \mathbb{E}(X))^k]$.
Wariancja minimalizuje moment względny drugiego rzędu.

Gęstość i dystrybuanta

(PDF i CDF)

Dystrybuanta $F(x)$ (*cumulative distribution function*, CDF) zmiennej losowej X to funkcja na $\mathbb{R}$, która każdemu $x \in \mathbb{R}$ przypisuje prawdopodobieństwo, że X przyjmie wartość mniejszą niż x :

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

Gęstość i dystrybuanta

(PDF i CDF)

Dystrybuanta $F(x)$ (*cumulative distribution function*, CDF) zmiennej losowej X to funkcja na $\mathbb{R}$, która każdemu $x \in \mathbb{R}$ przypisuje prawdopodobieństwo, że X przyjmie wartość mniejszą niż x :

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

Mamy zatem

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

Gęstość i dystrybuanta

(PDF i CDF)

Dystrybuanta $F(x)$ (*cumulative distribution function*, CDF) zmiennej losowej X to funkcja na $\mathbb{R}$, która każdemu $x \in \mathbb{R}$ przypisuje prawdopodobieństwo, że X przyjmie wartość mniejszą niż x :

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

Mamy zatem

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

Własności:

- $F(x)$ jest niemalejąca
- $0 \leq F(x) \leq 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$ oraz $P(X > x) = 1 - F(x)$

Gęstość i dystrybuanta

(PDF i CDF)

Dystrybuanta $F(x)$ (*cumulative distribution function*, CDF) zmiennej losowej X to funkcja na $\mathbb{R}$, która każdemu $x \in \mathbb{R}$ przypisuje prawdopodobieństwo, że X przyjmie wartość mniejszą niż x :

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

Mamy zatem

$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

Własności:

- $F(x)$ jest niemalejąca
- $0 \leq F(x) \leq 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$ oraz $P(X > x) = 1 - F(x)$

Gęstość i dystrybuanta

(PDF i CDF)

Dystrybuanta $F(x)$ (*cumulative distribution function*, CDF) zmiennej losowej X to funkcja na $\mathbb{R}$, która każdemu $x \in \mathbb{R}$ przypisuje prawdopodobieństwo, że X przyjmie wartość mniejszą niż x :

$$F(x) = P(X < x) = \int_{-\infty}^x f(t)dt$$

Mamy zatem

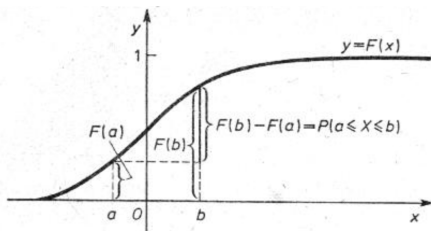
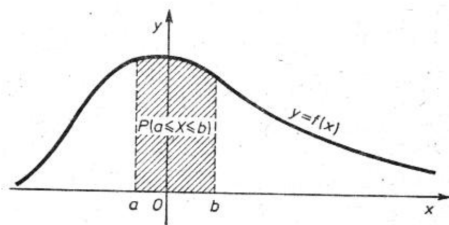
$$\frac{dF(x)}{dx} = f(x)$$

Własności:

- $F(x)$ jest niemalejąca
- $0 \leq F(x) \leq 1$; $\lim_{x \rightarrow -\infty} F(x) = 0$; $\lim_{x \rightarrow +\infty} F(x) = 1$
- $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a)$ oraz $P(X > x) = 1 - F(x)$

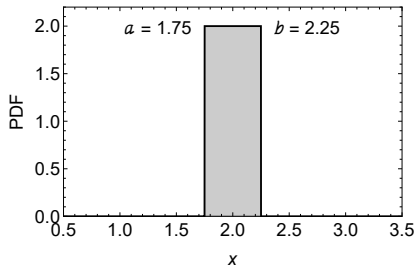
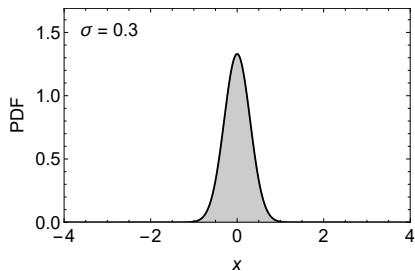
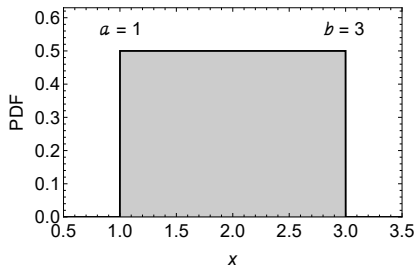
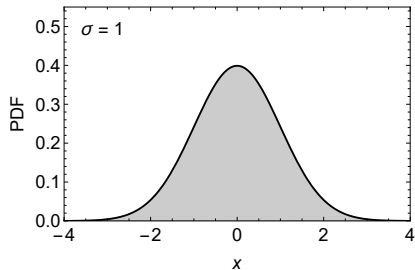
Gęstość i dystrybuanta

(PDF i CDF)



Gęstość prawdopodobieństwa i dystrybuanta zmiennej losowej

Rozkłady ciągłe



Rozkład jednostajny

Uniform distribution, $\mathcal{U}(a, b)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{dla } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{dla } x < a \wedge x > b \end{cases}$$

Rozkład jednostajny

Uniform distribution, $\mathcal{U}(a, b)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{dla } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{dla } x < a \wedge x > b \end{cases}$$

Ponieważ

$$dP(x) = P(x \leq X \leq x + dx) = \int_x^{x+dx} f(t)dt = f(x)dx + \mathcal{O}(dx)$$

oraz $f(x) \in \text{const.}$, rozkład jednostajny oznacza proporcjonalność prawdopodobieństwa znalezienia zmiennej w przedziale $[x, x + dx]$ do długości dx tego przedziału.

Rozkład jednostajny

Uniform distribution, $\mathcal{U}(a, b)$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{b-a} & \text{dla } a \leq x \leq b \\ 0 & \text{dla } x < a \wedge x > b \end{cases}$$

Ponieważ

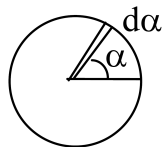
$$dP(x) = P(x \leq X \leq x + dx) = \int_x^{x+dx} f(t)dt = f(x)dx + \mathcal{O}(dx)$$

oraz $f(x) \in \text{const.}$, rozkład jednostajny oznacza proporcjonalność prawdopodobieństwa znalezienia zmiennej w przedziale $[x, x + dx]$ do długości dx tego przedziału.

Prawdopodobieństwo przyjęcia przez zmienną X wartości z przedziału $[x, x + dx]$ jest takie samo dla wszystkich x .

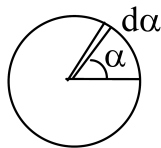
Przykład

Z: Jaki jest rozkład zmiennej losowej opisującej kąt α na płaszczyźnie pomiędzy jedną półprostą o ustalonej orientacji i drugą półprostą o dowolnej orientacji?



Przykład

Z: Jaki jest rozkład zmiennej losowej opisującej kąt α na płaszczyźnie pomiędzy jedną półprostą o ustalonej orientacji i drugą półprostą o dowolnej orientacji?



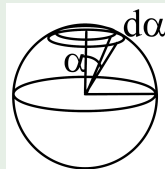
R: Wszystkie orientacje drugiej półprostej są równoprawdopodobne jeśli prawdopodobieństwo przejścia półprostej przez dowolny odcinek $[\alpha, \alpha + d\alpha]$ okręgu o środku w początku półprostej jest proporcjonalny do długości tego odcinka $d\alpha$ i jest niezależny od jego położenia. Ponieważ kąt α może przyjmować równoprawdopodobne wartości w zakresie $[0, 2\pi]$, to szukany rozkład ma postać rozkładu jednostajnego:

$$f(\alpha) = \frac{1}{2\pi} \quad \text{dla} \quad 0 \leq \alpha \leq 2\pi$$

Zadania

Zadanie 1

Jaki jest rozkład zmiennej losowej opisującej kąt α pomiędzy półprostą o ustalonej orientacji i drugą półprostą o dowolnej orientacji przestrzennej?

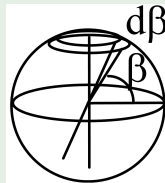


Zadanie 2

Jaki jest rozkład zmiennej losowej opisującej kąt α pomiędzy prostą o ustalonej orientacji i drugą prostą, o dowolnej orientacji przestrzennej?

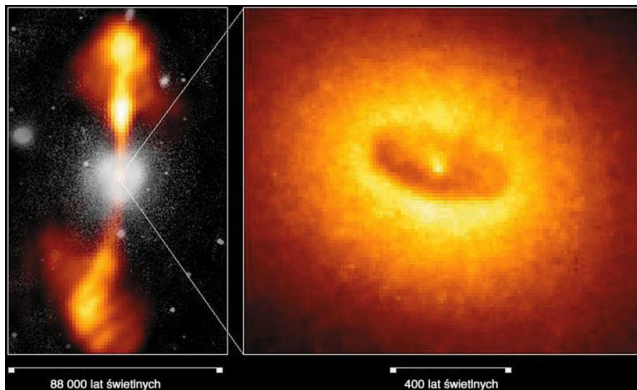
Zadanie 3

Jaki jest rozkład zmiennej losowej opisującej kąt β pomiędzy ustaloną płaszczyzną a prostą o dowolnej orientacji przestrzennej?



Aktywne jądra galaktyk

(*Active galactic nuclei*, AGN)



Obserwacje galaktyki NGC 4261. Obraz po lewej jest złożeniem obserwacji optycznych (jasne jądro) i radiowych (dżety). Po prawej — obraz otoczenia jądra otrzymany przez Kosmiczny Teleskop Hubble'a. Widoczny dysk najprawdopodobniej jest postulowanym przez teorię torusem pyłowym.

Aktywne jądra galaktyk

(Active galactic nuclei, AGN)

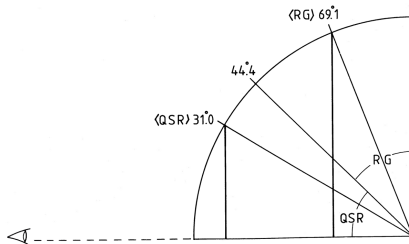
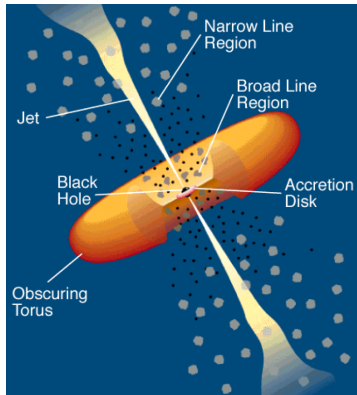


FIG. 2.—The QSR-RG unification model: RGs oriented within $44^\circ 4'$ from the line of sight will be observed as QSRs. The relative foreshortening follows from the average QSR and RG orientations.

Barthel, ApJ 336:606-611 (1989)

Aktywne jądra galaktyk

(Active galactic nuclei, AGN)

Zadanie 4

- 1 Kwazary (szerokie linie absorpcyjne) widzimy gdy patrzymy w pobliżu osi dżetu i torusa pyłowego, zaś radiogalaktyki (brak szerokich linii emisyjnych) gdy patrzymy bardziej z boku.

Jeśli oś dżetu jest ułożona w przestrzeni losowo względem kierunku do obserwatora to zmienna opisująca kąt między tymi prostymi ma rozkład sinusowy. Obliczyć stosunek liczby radiogalaktyk N_{RG} do kwazarów N_{QSO} .

Przyjąć kąt rozwarcia stożka w torusie pyłowym jako 44.4° .

- 2 Jak zmieniłby się wynik, gdyby zmienna opisująca kąt między prostymi miała rozkład jednostajny?