

Wprowadzenie do teorii chaosu

Wykład 5: wahadła

Mariusz Tarnopolski

Instytut Astronomii UMK

Chaos ©2022



Oscylator harmoniczny

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0$$

Oscylator harmoniczny

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad / \quad y := \dot{x}$$

Oscylator harmoniczny

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad / \quad y := \dot{x} \Rightarrow \dot{y} = \ddot{x} = -\omega^2 x \Rightarrow$$

Oscylator harmoniczny

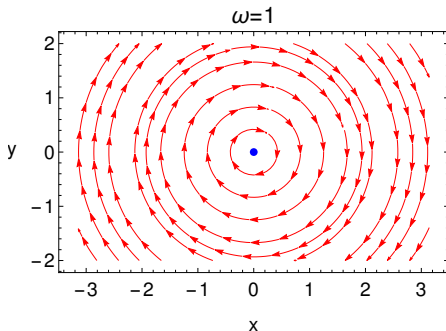
$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 / y := \dot{x} \Rightarrow \dot{y} = \ddot{x} = -\omega^2 x \Rightarrow$$
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x \end{cases}$$

Oscylator harmoniczny

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad / \quad y := \dot{x} \Rightarrow \dot{y} = \ddot{x} = -\omega^2 x \Rightarrow$$
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{punkty stałe: } (x^*, y^*) = (0, 0) \\ \nabla \cdot \mathbf{f} = 0 \end{array}$$

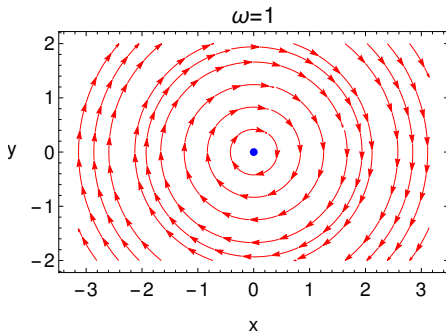
Oscylator harmoniczny

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 / y := \dot{x} \Rightarrow \dot{y} = \ddot{x} = -\omega^2 x \Rightarrow$$
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{punkty stałe: } (x^*, y^*) = (0, 0) \\ \nabla \cdot \mathbf{f} = 0 \end{array}$$



Oscylator harmoniczny

$$\ddot{x} + \omega^2 x = 0 \quad / \quad y := \dot{x} \Rightarrow \dot{y} = \ddot{x} = -\omega^2 x \Rightarrow$$
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 x \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{punkty stałe: } (x^*, y^*) = (0, 0) \\ \nabla \cdot \mathbf{f} = 0 \end{array}$$



$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 & 0 \end{pmatrix}, \quad \text{Tr} \mathbf{J} = 0, \quad \det \mathbf{J} = \omega^2 > 0$$

Wahadło proste

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0 :$$

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\omega^2 \sin x \end{cases}$$

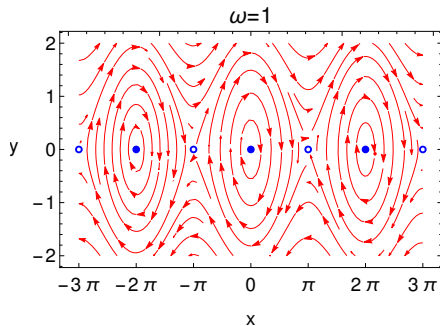
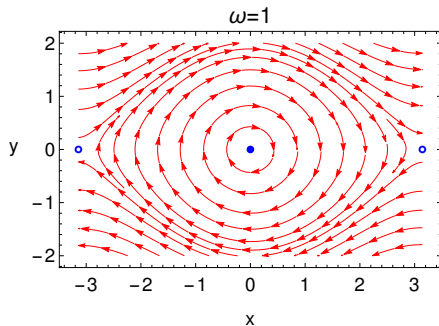
punkty stałe: $(x^*, y^*) = (k\pi, 0), k \in \mathbb{Z}$
 $\nabla \cdot \mathbf{f} = 0$

Wahadło proste

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0 :$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 \sin x \end{cases}$$

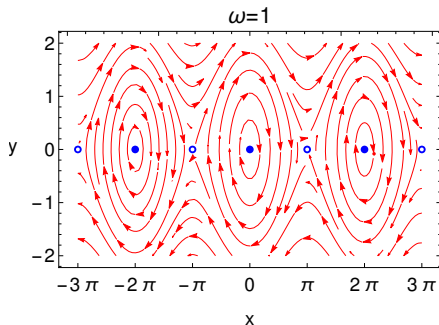
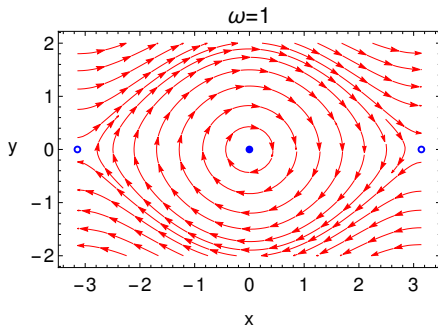
$$\begin{aligned} \text{punkty stałe: } (x^*, y^*) &= (k\pi, 0), k \in \mathbb{Z} \\ \nabla \cdot \mathbf{f} &= 0 \end{aligned}$$



Wahadło proste

$$\ddot{x} + \omega^2 \sin x = 0 :$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\omega^2 \sin x \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{punkty stałe: } (x^*, y^*) = (k\pi, 0), k \in \mathbb{Z} \\ \nabla \cdot \mathbf{f} = 0 \end{array}$$

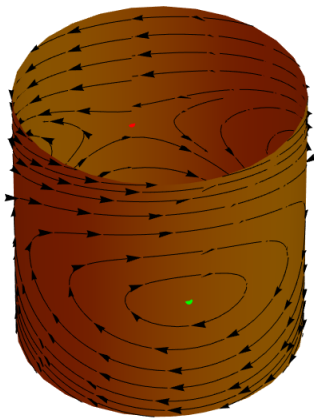


$$\mathbf{J} = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos x & 0 \end{array} \right) \bigg|_{x=k\pi} = \left(\begin{array}{cc} 0 & 1 \\ \omega^2 (-1)^{k+1} & 0 \end{array} \right)$$

$$\text{Tr} \mathbf{J} = 0, \det \mathbf{J} = \omega^2 (-1)^k \leq 0$$

Wahadło proste

Ponieważ x jest efektywnie kątem, to przestrzeń fazowa ma topologię cylindra, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$:



Wahadło proste — separatorysa

Orbita homokliniczna oddzielająca libracje od rotacji.

Wahadło proste — separatorysa

Orbita homokliniczna oddzielająca libracje od rotacji.

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \dot{x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\dot{x})^2$$

Wahadło proste — separatorysa

Orbita homokliniczna oddzielająca libracje od rotacji.

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \dot{x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\dot{x})^2 \equiv -\omega^2 \sin x \quad \bigg/ \times 2dx$$

Wahadło proste — separatorysa

Orbita homokliniczna oddzielająca libracje od rotacji.

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \dot{x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\dot{x})^2 \equiv -\omega^2 \sin x \quad \times 2dx$$

$$d(\dot{x})^2 = -2\omega^2 \sin x dx \quad \int$$

$$(\dot{x})^2 = 2\omega^2 \cos x + 2E \quad (*)$$

E — stała całkowania (energia całkowita wahadła);

Wahadło proste — separatorysa

Orbita homokliniczna oddzielająca libracje od rotacji.

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \dot{x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\dot{x})^2 \equiv -\omega^2 \sin x \quad \times 2dx$$

$$d(\dot{x})^2 = -2\omega^2 \sin x dx \quad \int$$

$$(\dot{x})^2 = 2\omega^2 \cos x + 2E \quad (*)$$

E — stała całkowania (energia całkowita wahadła); (*) musi być spełniona dla warunków początkowych:

$$(\dot{x}_0)^2 = 2\omega^2 \cos x_0 + 2E$$

Wahadło proste — separatorysa

Orbita homokliniczna oddzielająca libracje od rotacji.

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \dot{x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\dot{x})^2 \equiv -\omega^2 \sin x \quad \bigg/ \times 2dx$$

$$d(\dot{x})^2 = -2\omega^2 \sin x dx \quad \bigg/ \int$$

$$(\dot{x})^2 = 2\omega^2 \cos x + 2E \quad (*)$$

E — stała całkowania (energia całkowita wahadła); (*) musi być spełniona dla warunków początkowych:

$$(\dot{x}_0)^2 = 2\omega^2 \cos x_0 + 2E$$

W szczególności dla siodła: $x_0 = \pm\pi, \dot{x}_0 = 0 \Rightarrow E = \omega^2$,

Wahadło proste — separatorysa

Orbita homokliniczna oddzielająca libracje od rotacji.

$$\ddot{x} = \frac{d\dot{x}}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \frac{dx}{dt} = \frac{d\dot{x}}{dx} \dot{x} = \frac{1}{2} \frac{d}{dx} (\dot{x})^2 \equiv -\omega^2 \sin x \quad \bigg/ \times 2dx$$

$$d(\dot{x})^2 = -2\omega^2 \sin x dx \quad \bigg/ \int$$

$$(\dot{x})^2 = 2\omega^2 \cos x + 2E \quad (*)$$

E — stała całkowania (energia całkowita wahadła); (*) musi być spełniona dla warunków początkowych:

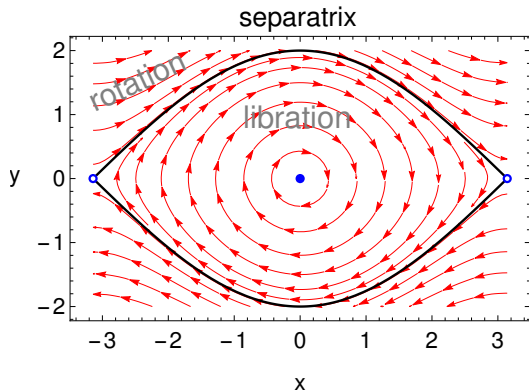
$$(\dot{x}_0)^2 = 2\omega^2 \cos x_0 + 2E$$

W szczególności dla siodła: $x_0 = \pm\pi, \dot{x}_0 = 0 \Rightarrow E = \omega^2$, więc z (*):

$$y \equiv \dot{x} = \pm \sqrt{2\omega^2 (1 + \cos x)} = \pm 2\omega \sqrt{\frac{1 + \cos x}{2}} = \pm 2\omega \cos \frac{x}{2}$$

Wahadło proste — separatrysa

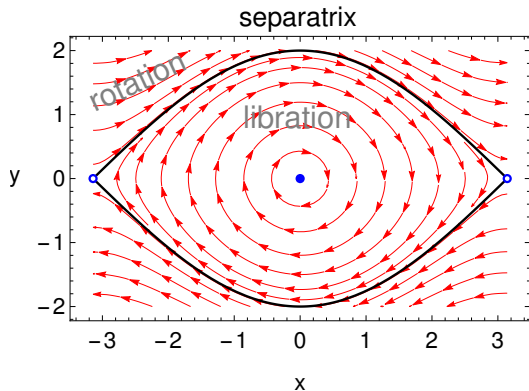
$$y = \pm 2\omega \cos \frac{x}{2}$$



- $E > \omega^2$ — rotacje,
- $E < \omega^2$ — libracje.

Wahadło proste — separatrixa

$$y = \pm 2\omega \cos \frac{x}{2}$$

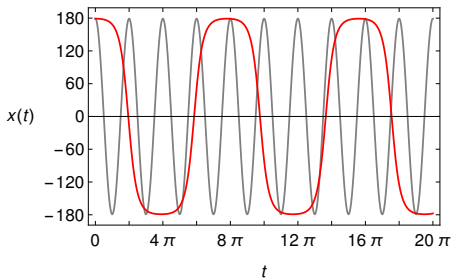
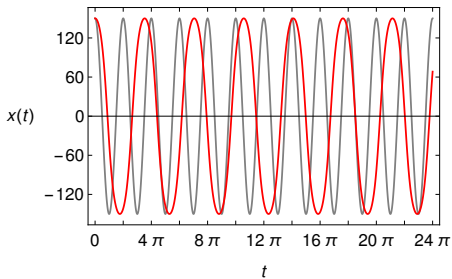
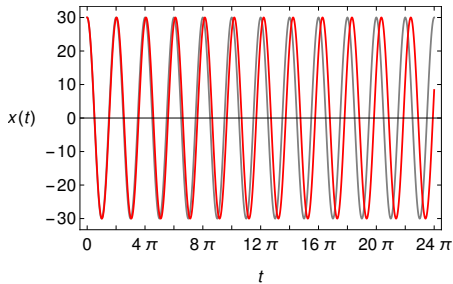


- $E > \omega^2$ — rotacje,
- $E < \omega^2$ — libracje.

Dla przypadku granicznego $E = \omega^2$ ruch ma miejsce na separatrixie (zał. $x_0 = 0$), która jest niestabilną trajekcją:

$$x(t) = 4 \arctan [\exp (\pm \omega t)] - \pi$$

Wahadło proste vs. oscylator harmoniczny



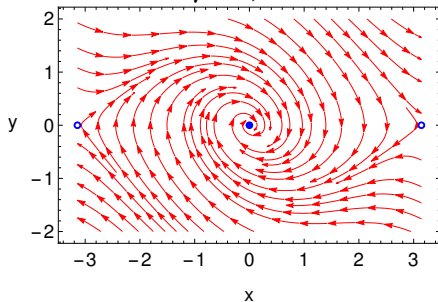
$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega^2 \sin x = 0 :$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\gamma y - \omega^2 \sin x \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{punkty stałe: } (x^*, y^*) = (k\pi, 0), \ k \in \mathbb{Z} \\ \nabla \cdot \mathbf{f} = -\gamma < 0 \end{array}$$

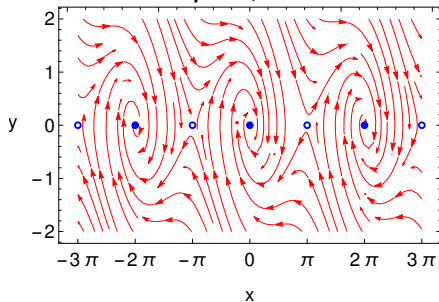
$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega^2 \sin x = 0 :$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\gamma y - \omega^2 \sin x \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{punkty stałe: } (x^*, y^*) = (k\pi, 0), k \in \mathbb{Z} \\ \nabla \cdot \mathbf{f} = -\gamma < 0 \end{array}$$

$$\gamma=0.5, \omega=1$$



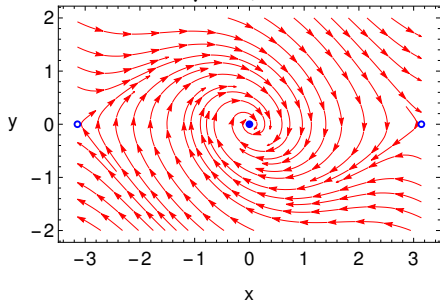
$$\gamma=0.5, \omega=1$$



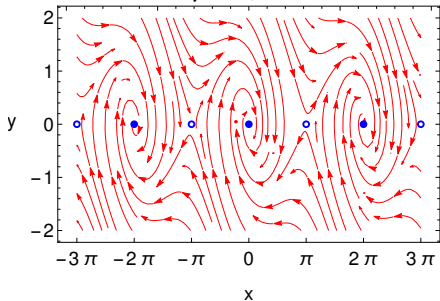
$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \omega^2 \sin x = 0 :$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\gamma y - \omega^2 \sin x \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{punkty stałe: } (x^*, y^*) = (k\pi, 0), k \in \mathbb{Z} \\ \nabla \cdot \mathbf{f} = -\gamma < 0 \end{array}$$

$\gamma=0.5, \omega=1$



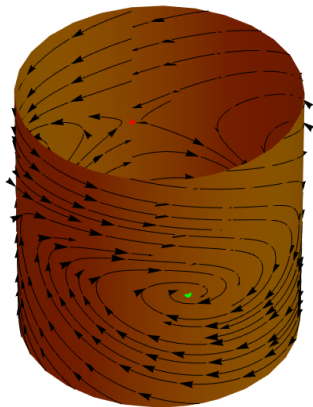
$\gamma=0.5, \omega=1$



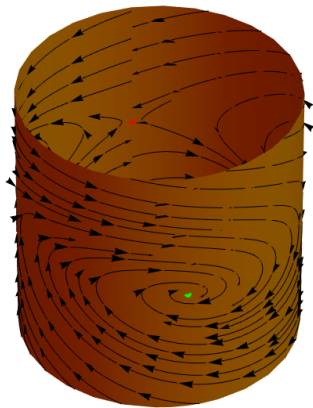
$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\omega^2 \cos x & -\gamma \end{pmatrix} \Big|_{x=k\pi} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ \omega^2 (-1)^{k+1} & -\gamma \end{pmatrix}$$

$$\text{Tr} \mathbf{J} = -\gamma < 0, \det \mathbf{J} = \omega^2 (-1)^k \leq 0$$

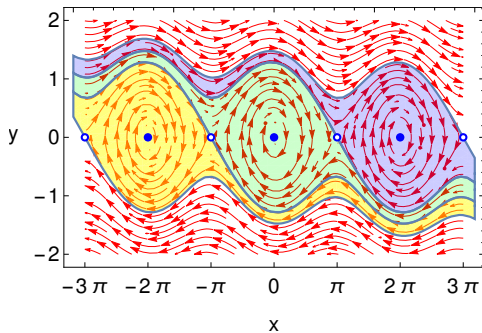
Topologia cylindra, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$:



Topologia cylindra, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{R}$:



Baseny przyciągania:



Wahadło tłumione z wymuszeniem

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \sin x = A \cos(\omega_D t) :$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\gamma y - \sin x + A \cos z \\ \dot{z} = \omega_D \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{brak punktów stałych (bo } \omega_D \neq 0) \\ \nabla \cdot \mathbf{f} = -\gamma < 0 \end{array}$$

Wahadło tłumione z wymuszeniem

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \sin x = A \cos(\omega_D t) :$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\gamma y - \sin x + A \cos z \\ \dot{z} = \omega_D \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{brak punktów stałych (bo } \omega_D \neq 0) \\ \nabla \cdot \mathbf{f} = -\gamma < 0 \end{array}$$

[Jeśli $\omega_D = 0$, to jest to wahadło wymuszone stałym momentem siły; ma wtedy punkty stałe $\sin x^* = A$.]

Wahadło tłumione z wymuszeniem

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \sin x = A \cos(\omega_D t) :$$

$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\gamma y - \sin x + A \cos z \\ \dot{z} = \omega_D \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{brak punktów stałych (bo } \omega_D \neq 0) \\ \nabla \cdot \mathbf{f} = -\gamma < 0 \end{array}$$

[Jeśli $\omega_D = 0$, to jest to wahadło wymuszone stałym momentem siły; ma wtedy punkty stałe $\sin x^* = A$.]

Układ 3D $\Rightarrow$ twierdzenie Poincarégo-Bendixsona nie wyklucza możliwości pojawienia się chaosu; $\sin x, \cos z$ — człony nieliniowe, zatem warunki konieczne są spełnione.

Wahadło tłumione z wymuszeniem

$$\ddot{x} + \gamma \dot{x} + \sin x = A \cos(\omega_D t) :$$

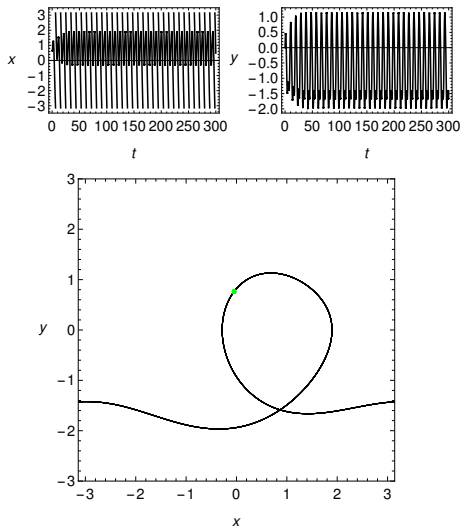
$$\begin{cases} \dot{x} = y \\ \dot{y} = -\gamma y - \sin x + A \cos z \\ \dot{z} = \omega_D \end{cases} \quad \begin{array}{l} \text{brak punktów stałych (bo } \omega_D \neq 0) \\ \nabla \cdot \mathbf{f} = -\gamma < 0 \end{array}$$

[Jeśli $\omega_D = 0$, to jest to wahadło wymuszone stałym momentem siły; ma wtedy punkty stałe $\sin x^* = A$.]

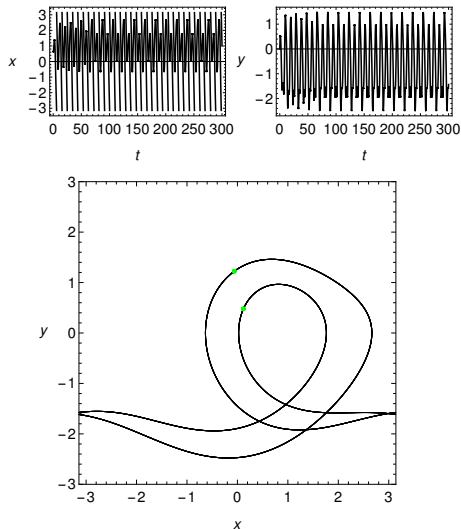
Układ 3D $\Rightarrow$ twierdzenie Poincarégo-Bendixsona nie wyklucza możliwości pojawienia się chaosu; $\sin x, \cos z$ — człony nieliniowe, zatem warunki konieczne są spełnione.

$\dot{z} = \omega_D \Rightarrow z(t) = z_0 + \omega_D t \bmod 2\pi$, więc tylko x, y są interesujące dynamicznie (ale z jest konieczne!).

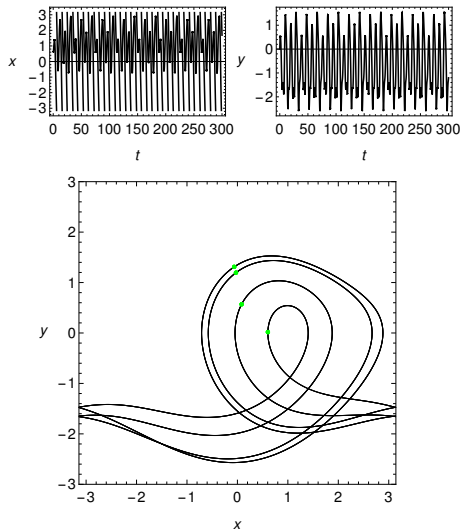
Wahadło tłumione z wymuszeniem — $A = 1.35$



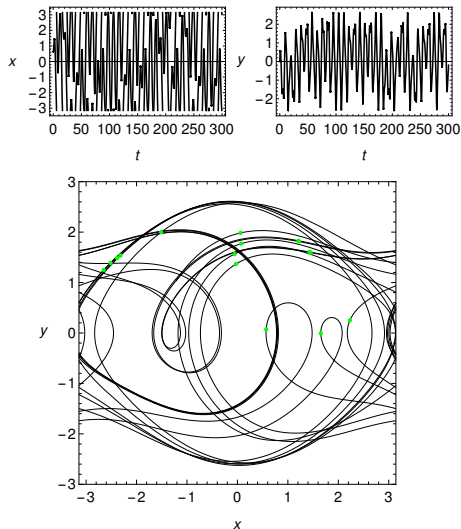
Wahadło tłumione z wymuszeniem — $A = 1.45$



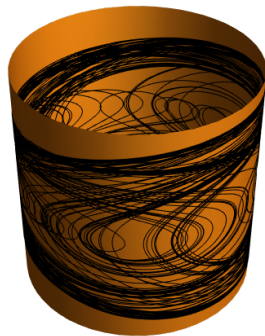
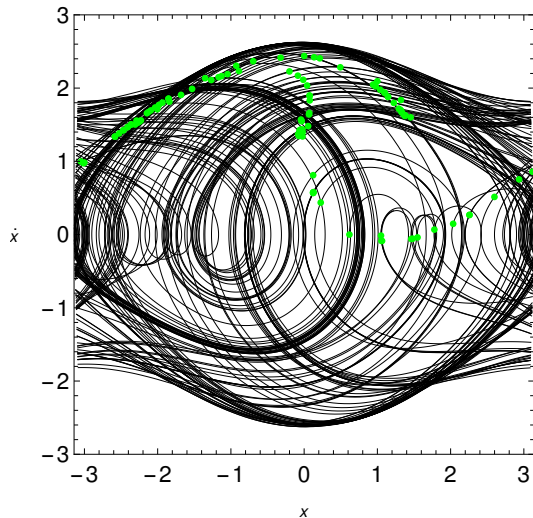
Wahadło tłumione z wymuszeniem — $A = 1.47$



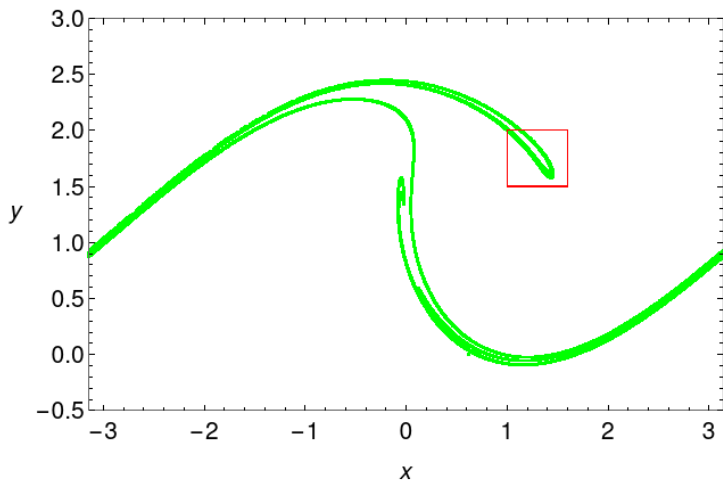
Wahadło tłumione z wymuszeniem — $A = 1.5$



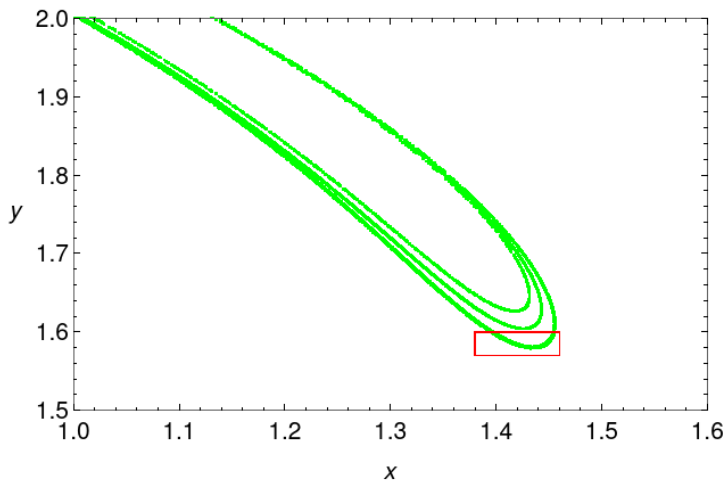
Wahadło tłumione z wymuszeniem — $A = 1.5$, $t_{\max} = 10^3$



Przekrój Poincarégo — $t_{\max} = 10^6$



Przekrój Poincarégo — $t_{\max} = 10^6$



Przekrój Poincarégo — $t_{\max} = 10^6$

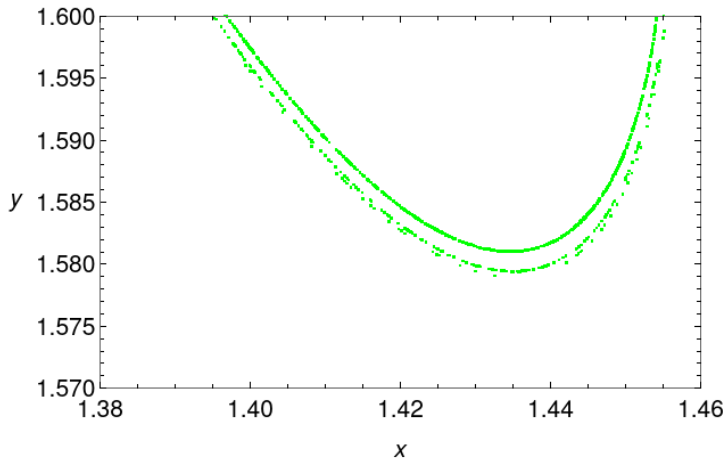
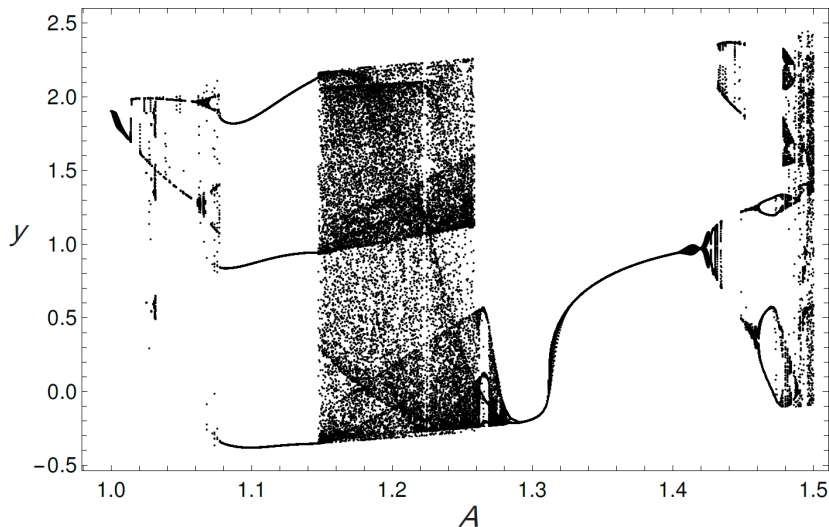


Diagram bifurkacyjny

$y(t)$ rejestrowane z częstotliwością ω_D , tj. co każdy cykl wymuszenia:



$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \beta x + \alpha x^3 = \gamma \cos(\omega_D t)$$

$$\beta < 0$$

$$\alpha, \delta, \gamma, \omega_D > 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\beta x - \alpha x^3 - \delta y + \gamma \cos z \\ \dot{z} &= \omega_D \end{cases}$$

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \beta x + \alpha x^3 = \gamma \cos(\omega_D t)$$

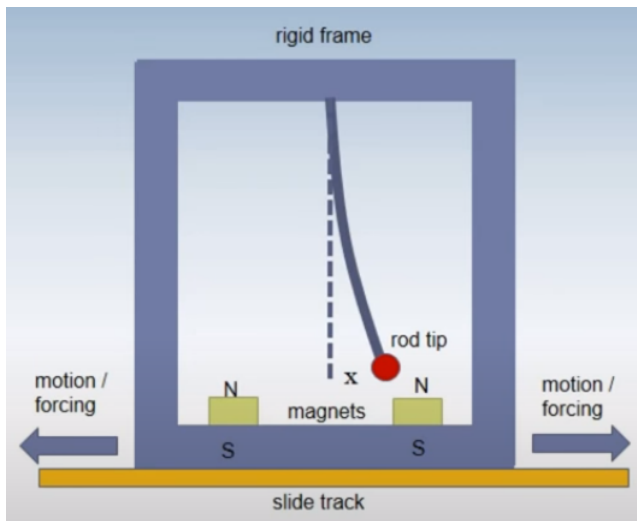
$$\beta < 0$$

$$\alpha, \delta, \gamma, \omega_D > 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\beta x - \alpha x^3 - \delta y + \gamma \cos z \\ \dot{z} &= \omega_D \end{cases}$$

- Brak punktów stałych (bo $\omega_D \neq 0$)
- $\nabla \cdot \mathbf{f} = -\delta < 0$ — układ dyssypatywny

Wahadło Duffinga



¹<https://www.youtube.com/watch?v=y-Xj0c6fRbc>

Wahadło Duffinga, $\gamma = 0$

Brak wymuszenia:

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \beta x + \alpha x^3 = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\beta x - \alpha x^3 - \delta y \end{cases}$$

Wahadło Duffinga, $\gamma = 0$

Brak wymuszenia:

$$\ddot{x} + \delta\dot{x} + \beta x + \alpha x^3 = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\beta x - \alpha x^3 - \delta y \end{cases}$$

Punkty stałe: $(x^*, y^*) = \left\{ (0, 0), \left(\pm \sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}, 0 \right) \right\} \equiv \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_{2,3}\}.$

Wahadło Duffinga, $\gamma = 0$

Brak wymuszenia:

$$\ddot{x} + \delta \dot{x} + \beta x + \alpha x^3 = 0$$

$$\begin{cases} \dot{x} &= y \\ \dot{y} &= -\beta x - \alpha x^3 - \delta y \end{cases}$$

Punkty stałe: $(x^*, y^*) = \left\{ (0, 0), \left(\pm \sqrt{-\frac{\beta}{\alpha}}, 0 \right) \right\} \equiv \{\mathbf{p}_1, \mathbf{p}_{2,3}\}.$

$$\mathbf{J}_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -\beta & -\delta \end{pmatrix}, \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\delta \pm \sqrt{\delta^2 - 4\beta} \right)$$

$\delta > 0, \beta < 0 \Rightarrow \sqrt{\delta^2 - 4\beta} > \delta$, więc $\lambda_1 < 0, \lambda_2 > 0$, zatem $\mathbf{p}_1 = (0, 0)$ jest siodłem.

$$\mathbf{J}_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2\beta & -\delta \end{pmatrix}, \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\delta \pm \sqrt{\delta^2 + 8\beta} \right)$$

- $\text{Tr} \mathbf{J}_{2,3} = -\delta < 0$,
- $\det \mathbf{J}_{2,3} = -2\beta > 0$

$$\mathbf{J}_{2,3} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2\beta & -\delta \end{pmatrix}, \lambda_{1,2} = \frac{1}{2} \left(\delta \pm \sqrt{\delta^2 + 8\beta} \right)$$

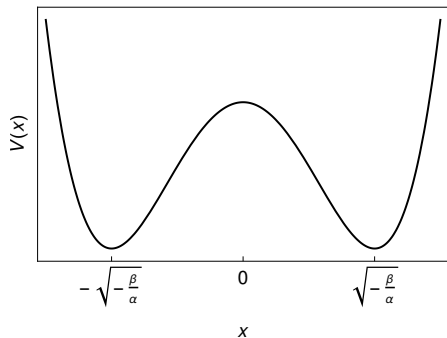
- $\text{Tr} \mathbf{J}_{2,3} = -\delta < 0$,
- $\det \mathbf{J}_{2,3} = -2\beta > 0$

zatem są to zlewy ($\delta^2 + 8\beta > 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} \in \mathbb{R}$) lub stabilne ogniska ($\delta^2 + 8\beta < 0 \Rightarrow \lambda_{1,2} \in \mathbb{C} : \text{Re } \lambda_{1,2} < 0$); ew. zdegenerowane zlewy (gdy $\delta^2 + 8\beta = 0$).

Wahadło Duffinga, $\delta = \gamma = 0$

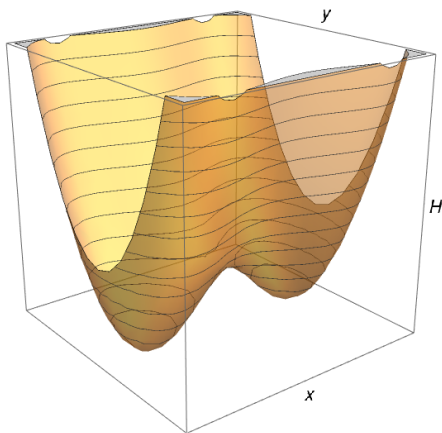
Brak tłumienia ($\delta = 0$) daje

potencjał: $V(x) = \frac{\alpha x^4}{4} + \frac{\beta x^2}{2}$

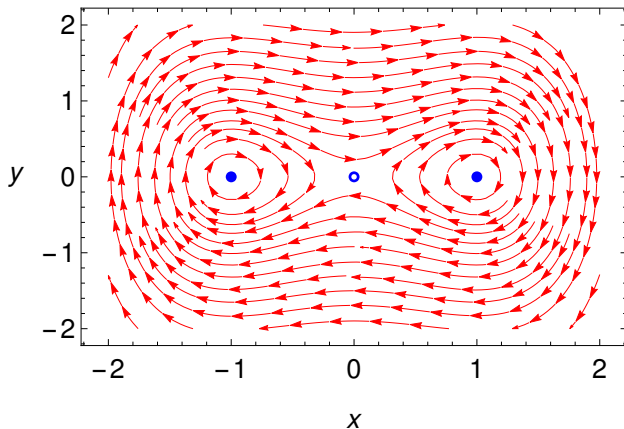


Hamiltonian:

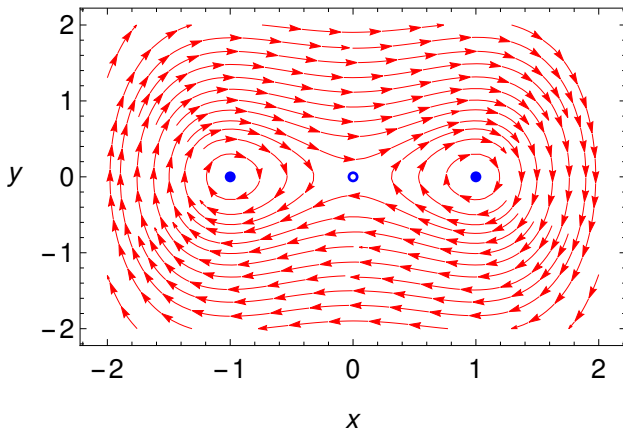
$$H(x, y) = \frac{\alpha x^4}{4} + \frac{\beta x^2}{2} + \frac{y^2}{2}$$



Wahadło Duffinga, $\delta = \gamma = 0$



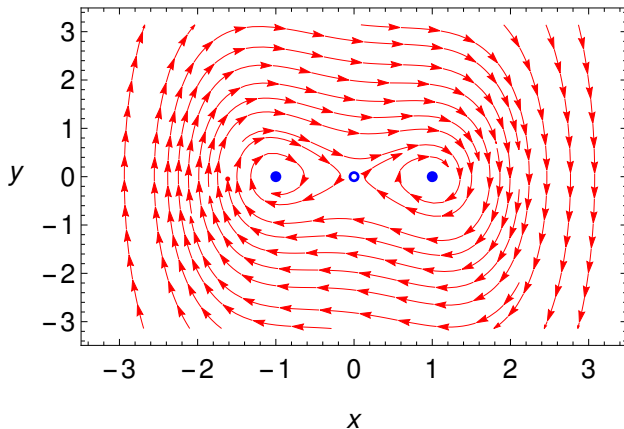
Wahadło Duffinga, $\delta = \gamma = 0$



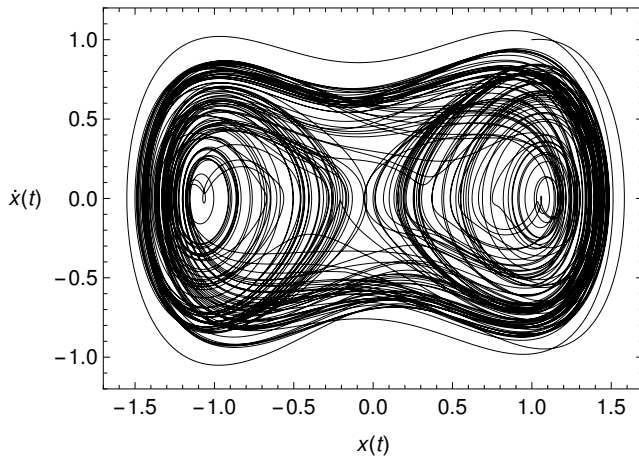
Zadanie 24

Separatrysa to krzywa w kształcie ósemki przechodząca przez punkt siodłowy w początku układu współrzędnych. Wyprowadzić jej równanie oraz naszkicować wykres na portrecie fazowym.

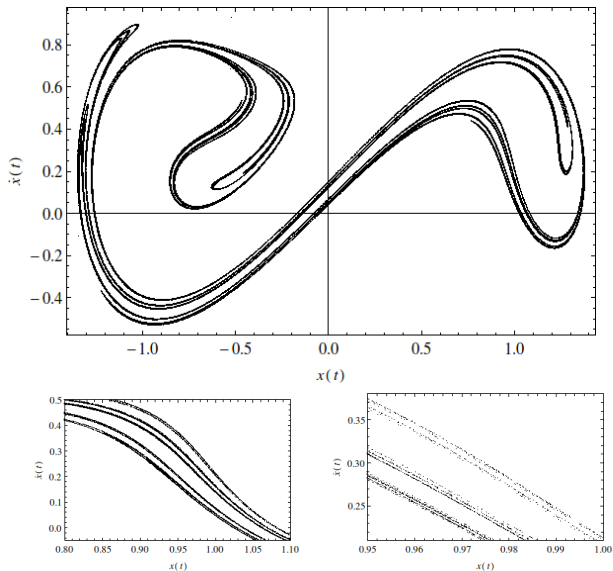
Wahadło Duffinga, $\gamma = 0$



Wahadło Duffinga



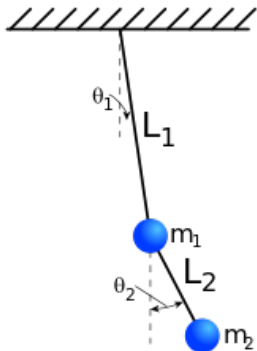
Atraktor Duffinga



Wahadło podwójne

Układ hamiltonowski $\Rightarrow$ energia jest zachowana.

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{-g(2m_1+m_2)\sin\theta_1 - m_2g\sin(\theta_1-2\theta_2) - 2\sin(\theta_1-\theta_2)m_2(\dot{\theta}_2^2 L_2 + \dot{\theta}_1^2 L_1 \cos(\theta_1-\theta_2))}{L_1(2m_1+m_2-m_2\cos(2\theta_1-2\theta_2))}$$
$$\ddot{\theta}_2 = \frac{2\sin(\theta_1-\theta_2)(\dot{\theta}_1^2 L_1(m_1+m_2) + g(m_1+m_2)\cos\theta_1 + \dot{\theta}_2^2 L_2 m_2 \cos(\theta_1-\theta_2))}{L_2(2m_1+m_2-m_2\cos(2\theta_1-2\theta_2))}$$



Dla małych kątów
(w praktyce: $\theta_{1,2} \lesssim 30^\circ$):

$$\ddot{\theta}_1 = \frac{g(\theta_2 - \mu\theta_1)}{L_1(\mu - 1)}$$

$$\ddot{\theta}_2 = \frac{g\mu(\theta_1 - \theta_2)}{L_2(\mu - 1)}$$

gdzie $\mu = 1 + m_1/m_2$.

Wahadło podwójne — małe kąty

Dokładne rozwiązanie (strona 1/69):

[illegible]

Wahadło podwójne — małe kąty

Równe masy i długości: $m_1 = m_2 \Rightarrow \mu = 2$, $L_1 = L_2 \equiv L$:

Wahadło podwójne — małe kąty

Równe masy i długości: $m_1 = m_2 \Rightarrow \mu = 2$, $L_1 = L_2 \equiv L$:

$$\theta_1(t) = \left\{ 2(\sqrt{2}\theta_{1,0} + \theta_{2,0})\omega_0 \cos(\sqrt{2 - \sqrt{2}}\omega_0 t) + \right. \\ 2(\sqrt{2}\theta_{1,0} - \theta_{2,0})\omega_0 \cos(\sqrt{2 + \sqrt{2}}\omega_0 t) + \\ \sqrt{2 - \sqrt{2}} \left[(2(1 + \sqrt{2})\dot{\theta}_{1,0} + (2 + \sqrt{2})\dot{\theta}_{2,0}) \sin(\sqrt{2 - \sqrt{2}}\omega_0 t) + \right. \\ \left. \left. (2\dot{\theta}_{1,0} - \sqrt{2}\dot{\theta}_{2,0}) \sin(\sqrt{2 + \sqrt{2}}\omega_0 t) \right] \right\} / (4\sqrt{2}\omega_0)$$

Wahadło podwójne — małe kąty

Równe masy i długości: $m_1 = m_2 \Rightarrow \mu = 2$, $L_1 = L_2 \equiv L$:

$$\theta_1(t) = \left\{ 2(\sqrt{2}\theta_{1,0} + \theta_{2,0})\omega_0 \cos(\sqrt{2 - \sqrt{2}}\omega_0 t) + \right. \\ \left. 2(\sqrt{2}\theta_{1,0} - \theta_{2,0})\omega_0 \cos(\sqrt{2 + \sqrt{2}}\omega_0 t) + \right. \\ \left. \sqrt{2 - \sqrt{2}} \left[(2(1 + \sqrt{2})\dot{\theta}_{1,0} + (2 + \sqrt{2})\dot{\theta}_{2,0}) \sin(\sqrt{2 - \sqrt{2}}\omega_0 t) + \right. \right. \\ \left. \left. (2\dot{\theta}_{1,0} - \sqrt{2}\dot{\theta}_{2,0}) \sin(\sqrt{2 + \sqrt{2}}\omega_0 t) \right] \right\} / (4\sqrt{2}\omega_0)$$

$$\theta_2(t) = \left\{ (2\theta_{1,0} + \sqrt{2}\theta_{2,0})\omega_0 \cos(\sqrt{2 - \sqrt{2}}\omega_0 t) + \right. \\ \left. (\sqrt{2}\theta_{2,0} - 2\theta_{1,0})\omega_0 \cos(\sqrt{2 + \sqrt{2}}\omega_0 t) + \right. \\ \left. \sqrt{2 - \sqrt{2}} \left[((2 + \sqrt{2})\dot{\theta}_{1,0} + (1 + \sqrt{2})\dot{\theta}_{2,0}) \sin(\sqrt{2 - \sqrt{2}}\omega_0 t) + \right. \right. \\ \left. \left. (\dot{\theta}_{2,0} - \sqrt{2}\dot{\theta}_{1,0}) \sin(\sqrt{2 + \sqrt{2}}\omega_0 t) \right] \right\} / (2\sqrt{2}\omega_0)$$

Wahadło podwójne — małe kąty

Zakładając rozwiązanie postaci (por. z oscylatorem harmonicznym)

$$\theta_i = c_i \cos(\omega t + \delta_i)$$

oraz

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L}}$$

dostaniemy częstotliwości modów normalnych:

$$\omega \equiv \omega_{\pm} = \omega_0 \sqrt{2 \pm \sqrt{2}}$$

Wahadło podwójne

Obliczenia numeryczne dają $\lambda = 7.9 \text{ s}^{-1}$, zaś eksperymentalnie²
 $\lambda = (7.5 \pm 1.5) \text{ s}^{-1} \Rightarrow$ czas Lapunowa $\approx 0.13 \text{ s}$.

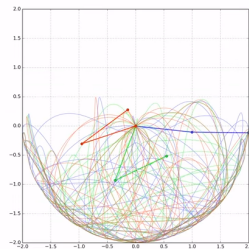
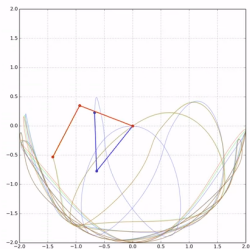
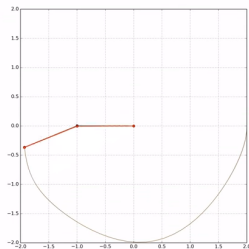
²Shinbrot, Grebogi, Wisdom, Yorke, Am. J. Phys. 60(6), 491 (1992)

³<https://www.youtube.com/watch?v=pEjZd-AvPco>

Wahadło podwójne

Obliczenia numeryczne dają $\lambda = 7.9 \text{ s}^{-1}$, zaś eksperymentalnie²
 $\lambda = (7.5 \pm 1.5) \text{ s}^{-1} \Rightarrow \text{czas Lapunowa} \approx 0.13 \text{ s}$.

Symulacje:³



²Shinbrot, Grebogi, Wisdom, Yorke, Am. J. Phys. 60(6), 491 (1992)

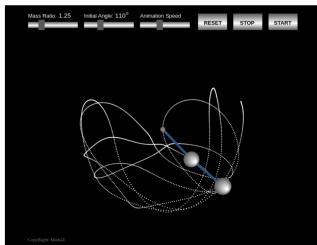
³<https://www.youtube.com/watch?v=pEjZd-AvPco>

Wahadło podwójne



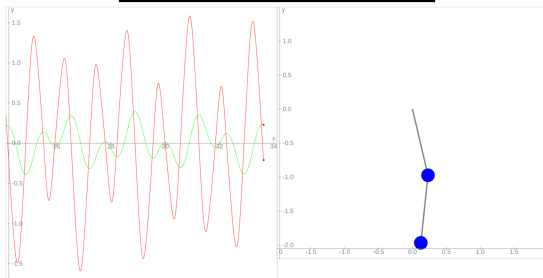
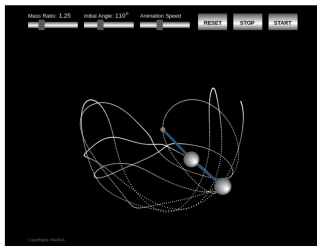
⁴<https://youtu.be/U39RMUzCjiU?t=20>
https://www.youtube.com/watch?v=1PvGLd9_DjA

Wahadło podwójne



⁵<https://www.math24.net/double-pendulum>
<https://www.myphysicslab.com/pendulum/double-pendulum-en.html>

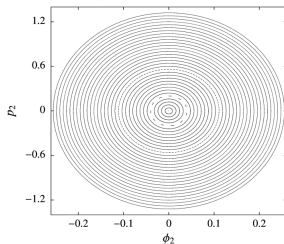
Wahadło podwójne



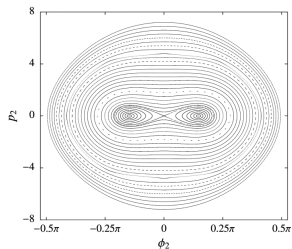
⁵<https://www.math24.net/double-pendulum>

<https://www.myphysicslab.com/pendulum/double-pendulum-en.html>

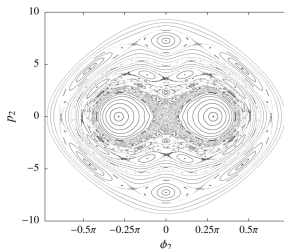
Wahadło podwójne — przekroje Poincarégo



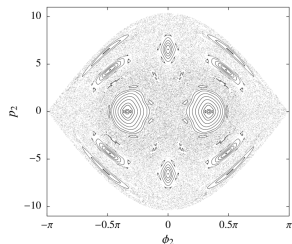
(a) $E = -8.9$



(b) $E = -6$



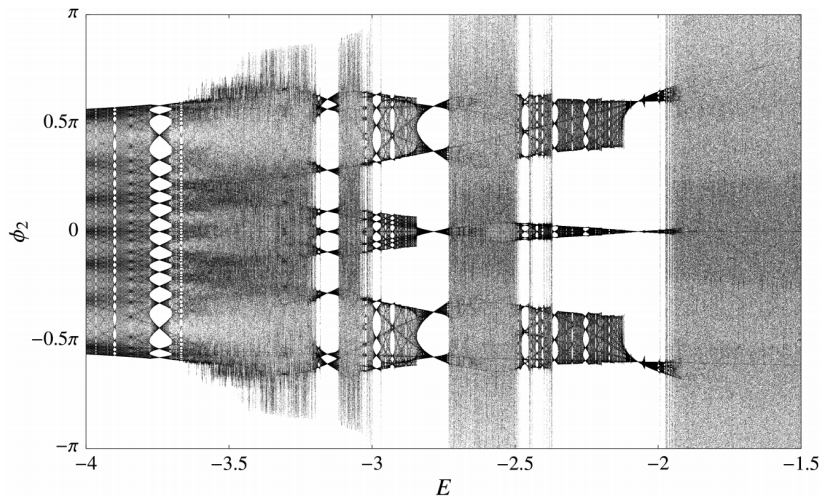
(a) $E = -4$



(b) $E = -3$

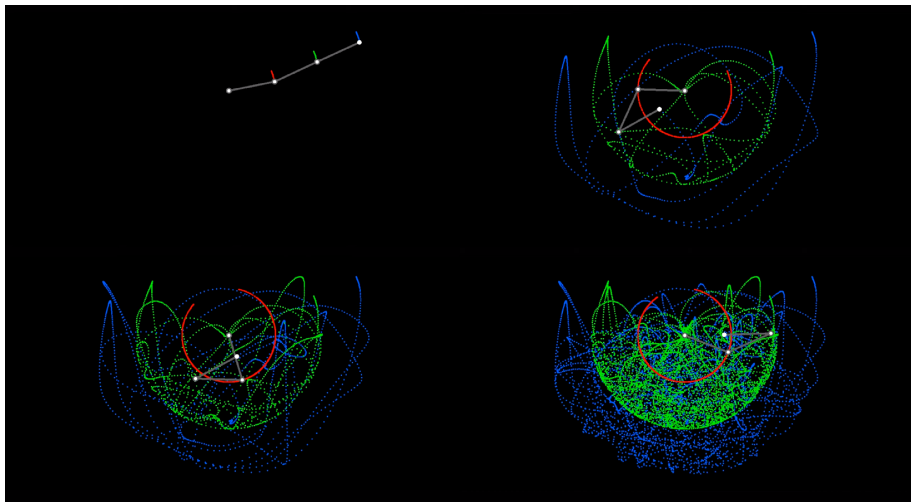
⁶Stachowiak & Szumiński, Phys. Lett. A 379, 3017 (2015)

Wahadło podwójne — diagram bifurkacyjny



⁶Stachowiak & Szumiński, Phys. Lett. A 379, 3017 (2015)

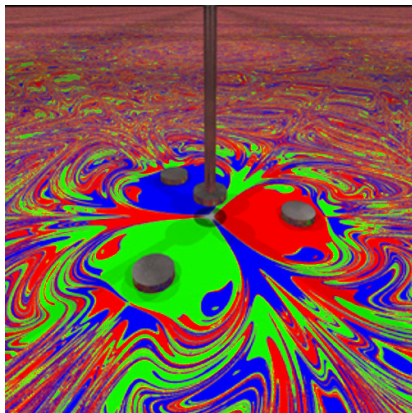
Wahadło potrójne



⁷<https://www.youtube.com/watch?v=dDU2JsgLpm4>

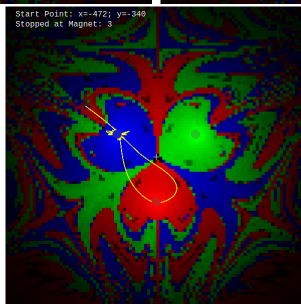
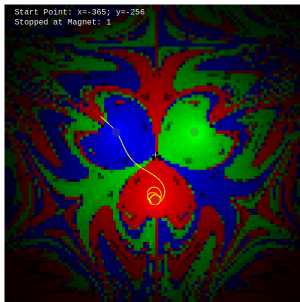
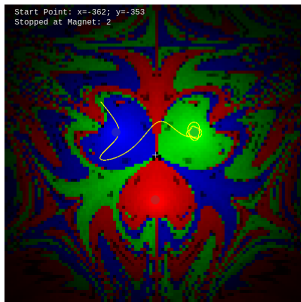
Wahadło magnetyczne

$$\ddot{\mathbf{x}} + b\dot{\mathbf{x}} + \mathbf{x} = \sum_{i=1}^3 \frac{\mathbf{X}_i - \mathbf{x}}{\left(|\mathbf{X}_i - \mathbf{x}|^2 + D^2\right)^{5/2}}$$

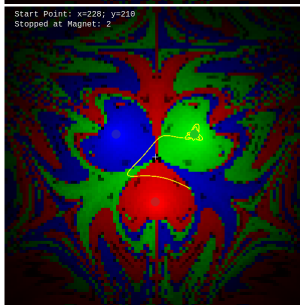
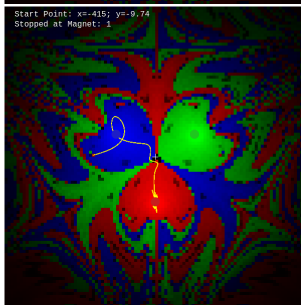
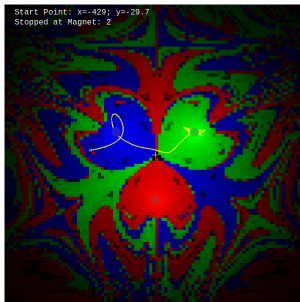
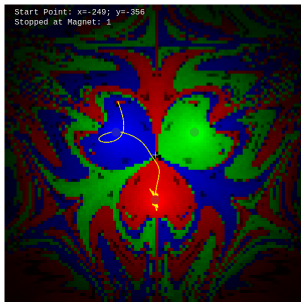


⁸<https://math.hmc.edu/jacobsen/demolab/magnetic-pendulum-2/>

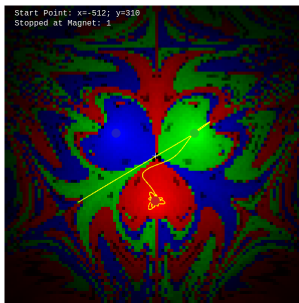
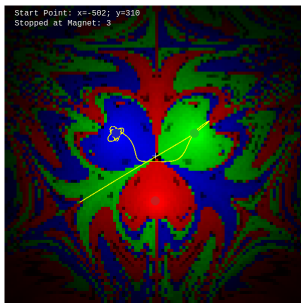
Wahadło magnetyczne



Wahadło magnetyczne



Wahadło magnetyczne



⁹https://beltoforion.de/en/magnetic_pendulum/