

Wprowadzenie do teorii chaosu

Wykład 4: układ Lorenza

Mariusz Tarnopolski

Instytut Astronomii UMK

Chaos ©2022



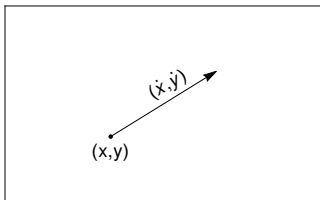
Układy dynamiczne

W układach 1D, punkty stałe mogą być stabilne (przyciągające) lub niestabilne (odpychające). W układach 2D pojawiają się nowe zachowania.

Układy dynamiczne

W układach 1D, punkty stałe mogą być stabilne (przyciągające) lub niestabilne (odpychające). W układach 2D pojawiają się nowe zachowania. Rozważmy układ z czasem ciągłym:

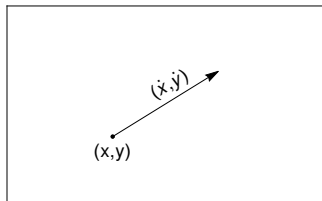
$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$



Układy dynamiczne

W układach 1D, punkty stałe mogą być stabilne (przyciągające) lub niestabilne (odpychające). W układach 2D pojawiają się nowe zachowania. Rozważmy układ z czasem ciągłym:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$

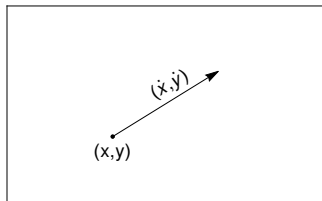


Rozważmy potok fazowy (*pole wektorowe*) w otoczeniu punktu stałego $\mathbf{x}^* = (x^*, y^*) : \dot{\mathbf{x}}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = 0 \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = 0 \Leftrightarrow f(x^*, y^*) = 0, g(x^*, y^*) = 0$.

Układy dynamiczne

W układach 1D, punkty stałe mogą być stabilne (przyciągające) lub niestabilne (odpychające). W układach 2D pojawiają się nowe zachowania. Rozważmy układ z czasem ciągłym:

$$\begin{cases} \dot{x} = f(x, y) \\ \dot{y} = g(x, y) \end{cases} \Leftrightarrow \dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$



Rozważmy potok fazowy (*pole wektorowe*) w otoczeniu punktu stałego $\mathbf{x}^* = (x^*, y^*) : \dot{\mathbf{x}}|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} = 0 \Rightarrow \mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = 0 \Leftrightarrow f(x^*, y^*) = 0, g(x^*, y^*) = 0$. Jeśli $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^1$, wtedy $\mathbf{x}(t)$ istnieje i jest **jednoznaczne** $\Rightarrow$ rozwiązanie nie przecina samo siebie.

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \equiv \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \equiv \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

λ_1, λ_2 — wartości własne, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ — wektory własne macierzy $\mathbf{A}$

$$\lambda^2 - \lambda \text{Tr} \mathbf{A} + \det \mathbf{A} = 0$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \equiv \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

λ_1, λ_2 — wartości własne, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ — wektory własne macierzy $\mathbf{A}$

$$\lambda^2 - \lambda \text{Tr} \mathbf{A} + \det \mathbf{A} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{Tr} \mathbf{A} \pm \sqrt{(\text{Tr} \mathbf{A})^2 - 4 \det \mathbf{A}}}{2}$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \equiv \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

λ_1, λ_2 — wartości własne, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ — wektory własne macierzy $\mathbf{A}$

$$\lambda^2 - \lambda \text{Tr} \mathbf{A} + \det \mathbf{A} = 0$$

$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{Tr} \mathbf{A} \pm \sqrt{(\text{Tr} \mathbf{A})^2 - 4 \det \mathbf{A}}}{2}$$

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2$$

$$\begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \equiv \mathbf{A} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

λ_1, λ_2 — wartości własne, $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2$ — wektory własne macierzy $\mathbf{A}$

$$\lambda^2 - \lambda \text{Tr} \mathbf{A} + \det \mathbf{A} = 0$$

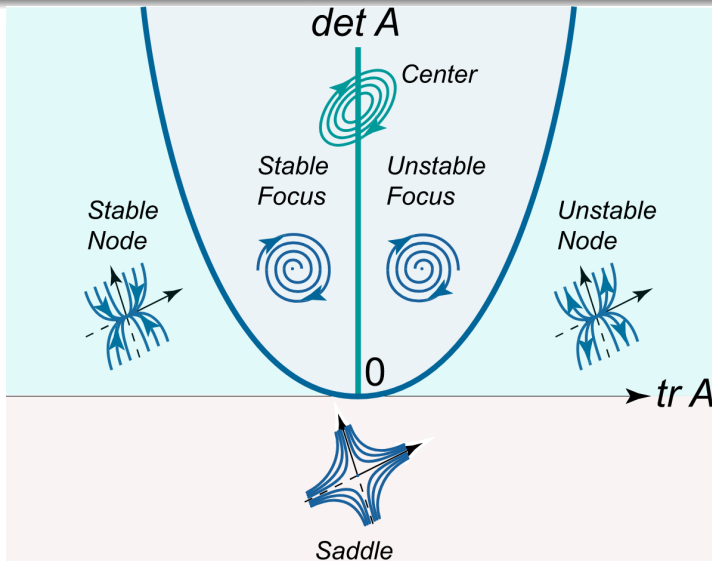
$$\lambda_{1,2} = \frac{\text{Tr} \mathbf{A} \pm \sqrt{(\text{Tr} \mathbf{A})^2 - 4 \det \mathbf{A}}}{2}$$

$$\mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda_1 t} \mathbf{v}_1 + c_2 e^{\lambda_2 t} \mathbf{v}_2$$

Specjalny przypadek

$\dim \ker \mathbf{A} = 1 \Rightarrow \mathbf{x}(t) = c_1 e^{\lambda t} \mathbf{v} + c_2 e^{\lambda t} (t \mathbf{v} + \mathbf{w})$, gdzie $(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) \mathbf{w} = \mathbf{v}$.

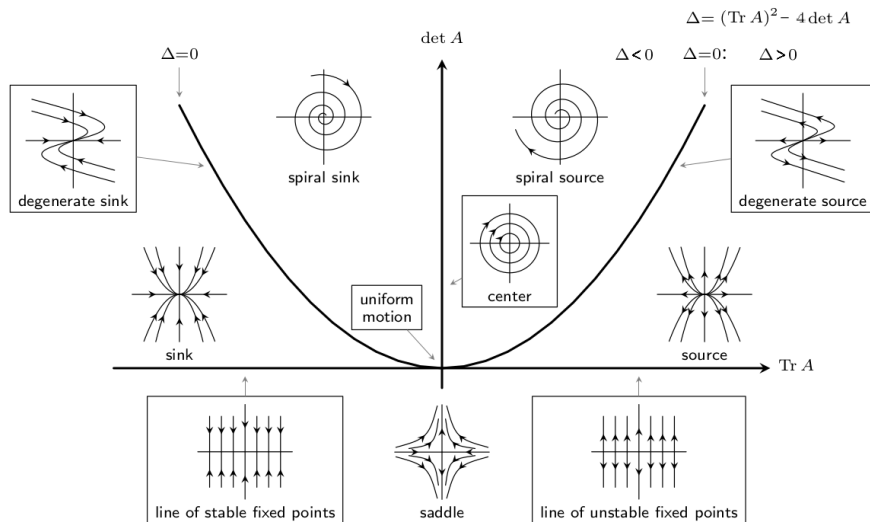
Układy liniowe



► Naprzód

¹<https://www.math24.net/linear-autonomous-systems-equilibrium-points/>

Poincaré Diagram: Classification of Phase Portraits in the $(\det A, \text{Tr } A)$ -plane



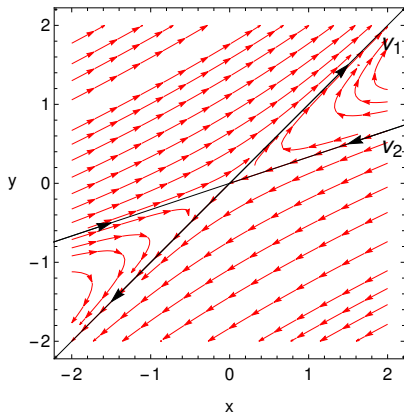
Zadanie 20

Określić jakie zachodzą relacje między wartościami własnymi (λ_1, λ_2) w poszczególnych obszarach diagramu $(\text{Tr}\mathbf{A}, \det\mathbf{A})$.

Układy liniowe

Przykład — punkt siodłowy: $\det \mathbf{A} = \det \begin{pmatrix} -11 & 15 \\ -5 & 9 \end{pmatrix} < 0$, $\text{Tr} \mathbf{A} < 0$.

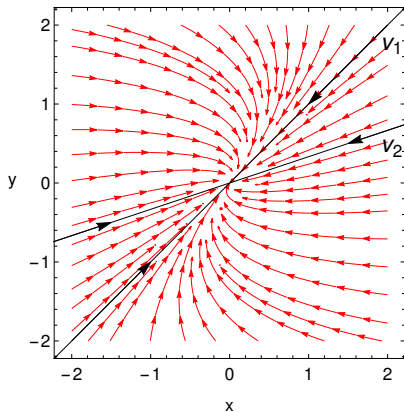
$\lambda_1 > 0, \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ wektory własne są liniowo niezależne.



v_1 — kierunek niestabilny, v_2 — kierunek stabilny.

Układy liniowe

Przykład — zlew: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} -7 & 3 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ daje $\det \mathbf{A} > 0$, $\text{Tr} \mathbf{A} < 0$, oraz $(\text{Tr} \mathbf{A})^2 - 4\det \mathbf{A} > 0$. $\lambda_1 < \lambda_2 < 0 \Rightarrow$ niezależne wektory własne.

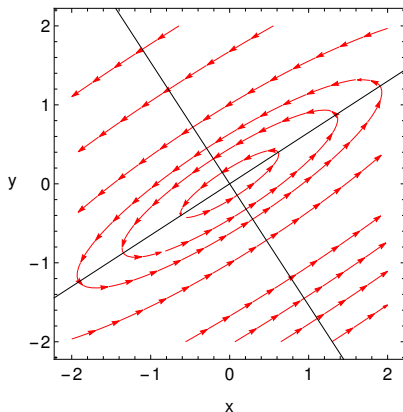


v_1 — kierunek szybki, v_2 — kierunek wolny.

Układy liniowe

Przykład — środek: $\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 9 & -15 \\ 7 & -9 \end{pmatrix}$ daje $\det \mathbf{A} > 0$, $\text{Tr} \mathbf{A} = 0$.

$\lambda_{1,2}$ — urojone $\Rightarrow$ zespolone wektory własne.



Osie — podchwytiliwe: $\tan \varphi = \frac{A_{12} + A_{21} \pm \sqrt{4A_{11}^2 + (A_{12} + A_{21})^2}}{2A_{11}}$.

Układy nieliniowe

Zlinearyzujemy układ w pobliżu $\mathbf{x}^*$. Następnie zrobmy liniową analizę stabilności.

Układy nieliniowe

Zlinearyzujemy układ w pobliżu $\mathbf{x}^*$. Następnie zrobmy liniową analizę stabilności.

Punkt stały $(x^*, y^*) : f(x^*, y^*) = 0, g(x^*, y^*) = 0$.

Układy nieliniowe

Zlinearyzujemy układ w pobliżu $\mathbf{x}^*$. Następnie zrobmy liniową analizę stabilności.

Punkt stały $(x^*, y^*) : f(x^*, y^*) = 0, g(x^*, y^*) = 0$.

Rozważmy niewielkie odchylenie od niego:

$$u(t) = x(t) - x^*, v(t) = y(t) - y^*.$$

Układy nieliniowe

Zlinearyzujemy układ w pobliżu $\mathbf{x}^*$. Następnie zrobmy liniową analizę stabilności.

Punkt stały $(x^*, y^*) : f(x^*, y^*) = 0, g(x^*, y^*) = 0$.

Rozważmy niewielkie odchylenie od niego:

$u(t) = x(t) - x^*, v(t) = y(t) - y^*$. Wtedy:

$$\begin{aligned}\dot{u} = \dot{x} = f(x, y) &= f(x^* + u, y^* + v) \\ &= \underbrace{f(x^*, y^*)}_{\equiv 0} + u(t) \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}}_{\text{stała}} + v(t) \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}}_{\text{stała}} + \dots\end{aligned}$$

Układy nieliniowe

Zlinearyzujemy układ w pobliżu $\mathbf{x}^*$. Następnie zrobmy liniową analizę stabilności.

Punkt stały $(x^*, y^*) : f(x^*, y^*) = 0, g(x^*, y^*) = 0$.

Rozważmy niewielkie odchylenie od niego:

$u(t) = x(t) - x^*, v(t) = y(t) - y^*$. Wtedy:

$$\begin{aligned}\dot{u} = \dot{x} = f(x, y) &= f(x^* + u, y^* + v) \\ &= \underbrace{f(x^*, y^*)}_{\equiv 0} + u(t) \underbrace{\frac{\partial f}{\partial x} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}}_{\text{stała}} + v(t) \underbrace{\frac{\partial f}{\partial y} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}}_{\text{stała}} + \dots\end{aligned}$$

$$\text{Analogicznie: } \dot{v} = u(t) \underbrace{\frac{\partial g}{\partial x} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}}_{\text{stała}} + v(t) \underbrace{\frac{\partial g}{\partial y} \Big|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}}_{\text{stała}} + \dots$$

Układy nieliniowe

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \dots \equiv \mathbf{J}(x^*, y^*) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \dots$$

Pomijając wyrazy kwadratowe oraz wyższych rzędów dostajemy układ zlinearyzowany w pobliżu punktu stałego.

$$\begin{pmatrix} \dot{u} \\ \dot{v} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} & \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial g}{\partial x} & \frac{\partial g}{\partial y} \end{pmatrix}_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*} \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \dots \equiv \mathbf{J}(x^*, y^*) \begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} + \dots$$

Pomijając wyrazy kwadratowe oraz wyższych rzędów dostajemy układ zlinearyzowany w pobliżu punktu stałego.

Caveat emptor!

Linearyzacja pozwala poprawnie sklasyfikować siodła, zlewy/źródła, a także ogniska (spirale). Zachowanie zdegenerowanych zlewów/źródeł, środków, nie izolowanych punktów stałych [tj. granic obszarów w przestrzeni $(\text{Tr}\mathbf{J}, \det\mathbf{J})$] może być zaburzone przez wyrazy nieliniowe. Wynika to z

twierdzenia Hartmana-Grobmana:

Układ dynamiczny $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ oraz jego linearyzacja $\dot{\mathbf{u}} = \mathbf{J}(x^*, y^*)\mathbf{u}$ w otoczeniu hiperbolicznych punktów stałych (tj. takich, w których wartości własne jacobianu $\mathbf{J}(x^*, y^*)$ mają $\text{Re } \lambda \neq 0$) są topologicznie sprzężone.

Zadanie 21

Zlinearyzować

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + ax(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= x + ay(x^2 + y^2) \end{cases}$$

oraz zbadać stabilność punktów stałych ($a \neq 0$).

Porównać z portretem fazowym układu nieliniowego (np.

<https://aeb019.hosted.uark.edu/pplane.html>).

Rozwiązać układ analitycznie.

Twierdzenie Poincarégo-Bendixsona

Rozważmy $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ w $\mathbb{R}^2$, gdzie $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^2$, o skończonej liczbie punktów stałych. Wtedy każdy zwarty zbiór graniczny jest jednym z następujących:

- 1 punkt stały,
- 2 orbita okresowa,
- 3 hetero- lub homokliniczna orbita (tj. łącząca różne punkty stałe albo punkt stały ze sobą, odpowiednio).

Twierdzenie Poincarégo-Bendixsona

Rozważmy $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ w $\mathbb{R}^2$, gdzie $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^2$, o skończonej liczbie punktów stałych. Wtedy każdy zwarty zbiór graniczny jest jednym z następujących:

- 1 punkt stały,
- 2 orbita okresowa,
- 3 hetero- lub homokliniczna orbita (tj. łącząca różne punkty stałe albo punkt stały ze sobą, odpowiednio).

Następstwo twierdzenia PB

Przestrzeń 2D jest zbyt „ciasna” żeby mógł się pojawić chaos. A zatem autonomiczny układ dynamiczny $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ musi być co najmniej 3D żeby zachowania chaotyczne mogły zaistnieć.

Twierdzenie Poincarégo-Bendixsona

Rozważmy $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ w $\mathbb{R}^2$, gdzie $\mathbf{f} \in \mathcal{C}^2$, o skończonej liczbie punktów stałych. Wtedy każdy zwarty zbiór graniczny jest jednym z następujących:

- 1 punkt stały,
- 2 orbita okresowa,
- 3 hetero- lub homokliniczna orbita (tj. łącząca różne punkty stałe albo punkt stały ze sobą, odpowiednio).

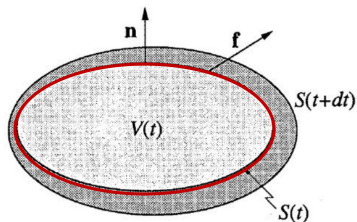
Następstwo twierdzenia PB

Przestrzeń 2D jest zbyt „ciasna” żeby mógł się pojawić chaos. A zatem autonomiczny układ dynamiczny $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ musi być co najmniej 3D żeby zachowania chaotyczne mogły zaistnieć.

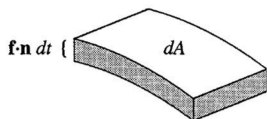
Warunki dla odwzorowań. Twierdzenie PB stosuje się tylko do **układów z ciągłym czasem**. Dla odwzorowań (układów dynamicznych z dyskretnym czasem) do chaosu potrzeba:

- (i) 2D jeśli odwz. jest odwracalne (np. odwz. Chirikowa),
- (ii) 1D jeśli odwz. jest nieodwracalne (np. odwz. logistyczne).

Kontrakcja objętości



- $\mathbf{n}$ — wektor jednostkowy, normalny do powierzchni zamkniętej $S(t)$ o objętości $V(t)$
- $\mathbf{f}$ — pole prędkości punktów wewnątrz $S(t)$
- W czasie dt , obszar o powierzchni dA przesuwa się w obszarze o objętości $(\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dt) dA$

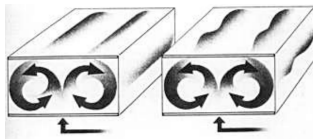


- $V(t + dt) = V(t) + \int_S (\mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dt) dA$
- $\dot{V} = \int_S \mathbf{f} \cdot \mathbf{n} dA$
- Z twierdzenia o dywergencji: $\dot{V} = \int_V \nabla \cdot \mathbf{f} dV$
- Jeśli $\nabla \cdot \mathbf{f}$ jest stałe: $\frac{d}{dt} \ln V = \nabla \cdot \mathbf{f}$

Układ Lorenza²

Mocno uproszczony model konwekcji atmosferycznej.

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= -xz + rx - y \\ \dot{z} &= xy - bz \end{cases}$$



²Lorenz, J. Atmos. Sci., 20, 130 (1963); Sparrow, The Lorenz Equations

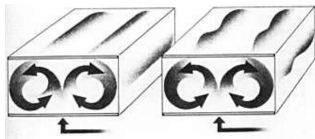
³Haken, Phys. Lett., 53, 77 (1975)

⁴<https://www.youtube.com/watch?v=SlwEt5QhAGY>

Układ Lorenza²

Mocno uproszczony model konwekcji atmosferycznej.

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= -xz + rx - y \\ \dot{z} &= xy - bz \end{cases}$$



- $x \sim$ prędkość
- $y \sim$ horyzontalny profil temperatury
- $z \sim$ wertykalny profil temperatury
- $\sigma \sim$ liczba Prandtla $= 10$
- $r \sim$ liczba Rayleigha $= 28$
- $b \sim$ rozmiar cylindra $(R/H) = 8/3$
- $\sigma, b, r > 0$

²Lorenz, J. Atmos. Sci., 20, 130 (1963); Sparrow, The Lorenz Equations

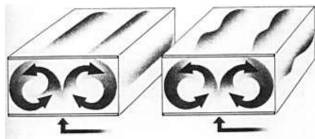
³Haken, Phys. Lett., 53, 77 (1975)

⁴<https://www.youtube.com/watch?v=SlwEt5QhAGY>

Układ Lorenza²

Mocno uproszczony model konwekcji atmosferycznej.

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= -xz + rx - y \\ \dot{z} &= xy - bz \end{cases}$$



- $x \sim$ prędkość
- $y \sim$ horyzontalny profil temperatury
- $z \sim$ wertykalny profil temperatury
- $\sigma \sim$ liczba Prandtla = 10
- $r \sim$ liczba Rayleigha = 28
- $b \sim$ rozmiar cylindra $(R/H) = 8/3$
- $\sigma, b, r > 0$

Pojawia się w:

- laserach³
- dynamach
- obwodach el.
- reakcjach chem.
- kole wodnym⁴

²Lorenz, J. Atmos. Sci., 20, 130 (1963); Sparrow, The Lorenz Equations

³Haken, Phys. Lett., 53, 77 (1975)

⁴<https://www.youtube.com/watch?v=SlwEt5QhAGY>

Układ Lorenza — ograniczoność rozwiązań

Rozważmy sferyczną powierzchnię $\mathcal{S} : R^2 = x^2 + y^2 + (z - r - \sigma)^2$. Jeśli dana trajektoria zaczyna się wewnątrz $\mathcal{S}$:

Układ Lorenza — ograniczoność rozwiązań

Rozważmy sferyczną powierzchnię $\mathcal{S} : R^2 = x^2 + y^2 + (z - r - \sigma)^2$. Jeśli dana trajektoria zaczyna się wewnątrz $\mathcal{S}$:

$$\frac{d}{dt}R^2 = \frac{d}{dt}[x^2 + y^2 + (z - r - \sigma)^2] = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} + 2(z - r - \sigma)\dot{z}$$

Układ Lorenza — ograniczoność rozwiązań

Rozważmy sferyczną powierzchnię $\mathcal{S} : R^2 = x^2 + y^2 + (z - r - \sigma)^2$. Jeśli dana trajektoria zaczyna się wewnątrz $\mathcal{S}$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}R^2 &= \frac{d}{dt}[x^2 + y^2 + (z - r - \sigma)^2] = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} + 2(z - r - \sigma)\dot{z} \\ &= -2 \left[\sigma x^2 + y^2 + b \left(z - \frac{r + \sigma}{2} \right)^2 - \frac{b(r + \sigma)^2}{4} \right]\end{aligned}$$

Układ Lorenza — ograniczoność rozwiązań

Rozważmy sferyczną powierzchnię $\mathcal{S} : R^2 = x^2 + y^2 + (z - r - \sigma)^2$. Jeśli dana trajektoria zaczyna się wewnątrz $\mathcal{S}$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}R^2 &= \frac{d}{dt}[x^2 + y^2 + (z - r - \sigma)^2] = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} + 2(z - r - \sigma)\dot{z} \\ &= -2 \left[\sigma x^2 + y^2 + b \left(z - \frac{r + \sigma}{2} \right)^2 - \frac{b(r + \sigma)^2}{4} \right]\end{aligned}$$

Weźmy początkowe R na tyle duże by objąć elipsoidę $\mathcal{E} \subset \mathcal{S}$:

$$\sigma x^2 + y^2 + b \left(z - \frac{r + \sigma}{2} \right)^2 = \frac{b(r + \sigma)^2}{4}.$$

Układ Lorenza — ograniczoność rozwiązań

Rozważmy sferyczną powierzchnię $\mathcal{S} : R^2 = x^2 + y^2 + (z - r - \sigma)^2$. Jeśli dana trajektoria zaczyna się wewnątrz $\mathcal{S}$:

$$\begin{aligned}\frac{d}{dt}R^2 &= \frac{d}{dt}[x^2 + y^2 + (z - r - \sigma)^2] = 2x\dot{x} + 2y\dot{y} + 2(z - r - \sigma)\dot{z} \\ &= -2 \left[\sigma x^2 + y^2 + b \left(z - \frac{r + \sigma}{2} \right)^2 - \frac{b(r + \sigma)^2}{4} \right]\end{aligned}$$

Weźmy początkowe R na tyle duże by objąć elipsoidę $\mathcal{E} \subset \mathcal{S}$:

$$\sigma x^2 + y^2 + b \left(z - \frac{r + \sigma}{2} \right)^2 = \frac{b(r + \sigma)^2}{4}.$$

Wtedy na zewnątrz $\mathcal{E}$ (w szczególności, na powierzchni $\mathcal{S}$) zachodzi $\frac{d}{dt}R^2 < 0$, zatem trajektoria zawsze zmierza ku wnętrzu $\mathcal{S}$ i nigdy z niego nie wychodzi $\Rightarrow \mathcal{S}$ jest **obszarem pułapkowania**, trajektoria jest ograniczona i nigdy nie ucieka do nieskończoności.

Układ Lorenza — kontrakcja objętości

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= -xz + rx - y \\ \dot{z} &= xy - bz \end{cases}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = -\sigma - 1 - b \in \text{const.} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \ln V = -\sigma - 1 - b \Rightarrow$$

$$\ln V = -(\sigma + b + 1)t + \ln V_0, \text{ gdzie } 0 < V_0 \in \text{const.} \Rightarrow$$

$$V(t) = V_0 e^{-(\sigma+b+1)t}$$

Układ Lorenza — kontrakcja objętości

$$\begin{cases} \dot{x} &= \sigma(y - x) \\ \dot{y} &= -xz + rx - y \\ \dot{z} &= xy - bz \end{cases}$$

$$\nabla \cdot \mathbf{f} = -\sigma - 1 - b \in \text{const.} \Rightarrow$$

$$\frac{d}{dt} \ln V = -\sigma - 1 - b \Rightarrow$$

$$\ln V = -(\sigma + b + 1)t + \ln V_0, \text{ gdzie } 0 < V_0 \in \text{const.} \Rightarrow$$

$$V(t) = V_0 e^{-(\sigma+b+1)t}$$

Zatem:

- dowolna skończona objętość V_0 ewoluuje w zbiór o zerowej mierze $\Rightarrow$
- nie mogą istnieć odpychające punkty stałe.

Układ Lorenza — punkty stałe

$$\begin{cases} \dot{x} = \sigma(y - x) & = 0 \\ \dot{y} = -xz + rx - y & = 0 \\ \dot{z} = xy - bz & = 0 \end{cases}$$

- ❶ $x = y = z = 0$ — istnieje zawsze
- ❷ $x = y = \pm\sqrt{b(r-1)}$, $z = r-1$; oznaczane $C^\pm$, istnieją gdy $r \geq 1$

Układ Lorenza — stabilność pocz. ukł. wsp.

$$\mathbf{J}(0, 0, 0) = \left(\begin{array}{ccc} -\sigma & \sigma & 0 \\ -z + r & -1 & -x \\ y & x & -b \end{array} \right)_{\mathbf{x}=(0,0,0)} = \left(\begin{array}{cc} \mathbf{j} & 0 \\ 0 & -b \end{array} \right)$$

Macierz blokowa z blokiem $\mathbf{j} = \left(\begin{array}{cc} -\sigma & \sigma \\ r & -1 \end{array} \right)$.

Układ Lorenza — stabilność pocz. ukł. wsp.

$$\mathbf{J}(0,0,0) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ -z+r & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}_{\mathbf{x}=(0,0,0)} = \begin{pmatrix} \mathbf{j} & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}$$

Macierz blokowa z blokiem $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ r & -1 \end{pmatrix}$. Wartości własne:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(\sigma+1) \pm \sqrt{(\sigma-1)^2 + 4\sigma r}}{2}; \lambda_3 = -b < 0$$

Układ Lorenza — stabilność pocz. ukł. wsp.

$$\mathbf{J}(0,0,0) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ -z+r & -1 & -x \\ y & x & -b \end{pmatrix}_{\mathbf{x}=(0,0,0)} = \begin{pmatrix} \mathbf{j} & 0 \\ 0 & -b \end{pmatrix}$$

Macierz blokowa z blokiem $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ r & -1 \end{pmatrix}$. Wartości własne:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(\sigma+1) \pm \sqrt{(\sigma-1)^2 + 4\sigma r}}{2}; \lambda_3 = -b < 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr} \mathbf{j} = -(\sigma+1) < 0$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = -\det \mathbf{j} = \sigma(r-1) \Leftrightarrow \det \mathbf{j} = \sigma(1-r)$$

$$\Delta = (\text{Tr} \mathbf{j})^2 - 4\det \mathbf{j} > 0$$

Układ Lorenza — stabilność pocz. ukł. wsp.

$$\mathbf{J}(0,0,0) = \left(\begin{array}{ccc} -\sigma & \sigma & 0 \\ -z+r & -1 & -x \\ y & x & -b \end{array} \right)_{\mathbf{x}=(0,0,0)} = \left(\begin{array}{cc} \mathbf{j} & 0 \\ 0 & -b \end{array} \right)$$

Macierz blokowa z blokiem $\mathbf{j} = \left(\begin{array}{cc} -\sigma & \sigma \\ r & -1 \end{array} \right)$. Wartości własne:

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(\sigma+1) \pm \sqrt{(\sigma-1)^2 + 4\sigma r}}{2}; \lambda_3 = -b < 0$$

$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr} \mathbf{j} = -(\sigma+1) < 0$$

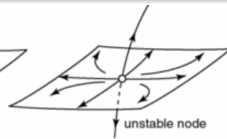
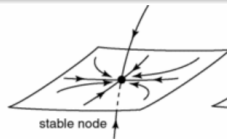
$$\lambda_1 \lambda_2 = -\det \mathbf{j} = \sigma(r-1) \Leftrightarrow \det \mathbf{j} = \sigma(1-r)$$

$$\Delta = (\text{Tr} \mathbf{j})^2 - 4\det \mathbf{j} > 0$$

Zatem $(0,0,0)$ jest zlewem dla $r < 1$, zaś siodłem (niestabilnym w jednym kierunku) dla $r > 1 \Rightarrow r = 1$ powstanie stałej konwekcji. [► Wstecz](#)

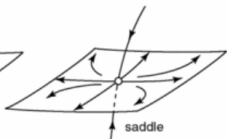
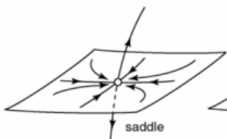
Układ Lorenza — stabilność pocz. ukł. wsp.

$$\mathbf{J}(0,0,0) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ -z+r & -1 & -1 \\ y & x & -\sigma \end{pmatrix}$$



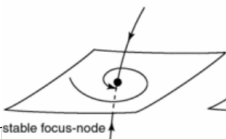
Macierz blokowa z blokiem $\mathbf{j} = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma \\ r & -1 \end{pmatrix}$

$$\lambda_{1,2} = \frac{-(\sigma + 1) \pm \sqrt{(\sigma - 1)^2 + 4\sigma r}}{2}$$



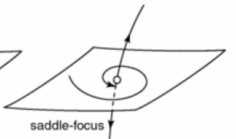
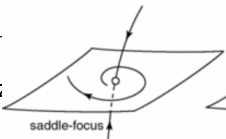
$$\lambda_1 + \lambda_2 = \text{Tr} \mathbf{j} = -\sigma - 1$$

$$\lambda_1 \lambda_2 = -\det \mathbf{j} = \sigma(r - 1)$$



$$\Delta = (\text{Tr} \mathbf{j})^2 - 4 \det \mathbf{j}$$

Zatem $(0,0,0)$ jest zlewem dla $r < 1$, i kierunkiem dla $r > 1 \Rightarrow r = 1$ powstania



Układ Lorenza — stabilność punktów $C^\pm$

$$\mathbf{J}(C^+) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & -\sqrt{b(r-1)} \\ \sqrt{b(r-1)} & \sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{J}(C^-) = \begin{pmatrix} -\sigma & \sigma & 0 \\ 1 & -1 & \sqrt{b(r-1)} \\ -\sqrt{b(r-1)} & -\sqrt{b(r-1)} & -b \end{pmatrix}$$

Wielomian charakterystyczny:

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + (\sigma + r)b\lambda + 2\sigma b(r - 1) = 0$$

Rozwiązanie jest skomplikowane...

Układ Lorenza — stabilność punktów $C^\pm$

...ale istnieje **twierdzenie Routha-Hurwitza**:

Wielomian charakterystyczny macierzy $\mathbf{J}$:

$$|\lambda \mathbf{1} - \mathbf{J}| = \lambda^n + b_1 \lambda^{n-1} + \dots + b_{n-1} \lambda + b_n = 0$$

daje wartości własne λ o ujemnych częściach rzeczywistych (co implikuje stabilność powiązanego punktu stałego) jeśli

$$\forall k = 1, \dots, n : \Delta_k > 0$$

gdzie

$$\Delta_k = \begin{vmatrix} b_1 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_3 & b_2 & b_1 & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ b_5 & b_4 & b_3 & b_2 & b_1 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{2k-1} & b_{2k-2} & b_{2k-3} & b_{2k-4} & b_{2k-5} & b_{2k-6} & \dots & b_k \end{vmatrix}$$

Układ Lorenza — stabilność punktów $C^\pm$

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + (\sigma + r)b\lambda + 2\sigma b(r - 1) = 0 :$$

- $b_1 = \sigma + b + 1$
- $b_2 = (\sigma + r)b$
- $b_3 = 2\sigma b(r - 1)$

Układ Lorenza — stabilność punktów $C^\pm$

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + (\sigma + r)b\lambda + 2\sigma b(r - 1) = 0 :$$

- $b_1 = \sigma + b + 1$
- $b_2 = (\sigma + r)b$
- $b_3 = 2\sigma b(r - 1)$

Zatem:

- $\Delta_1 = b_1 > 0$
- $\Delta_2 = b_1 b_2 - b_3 = (\sigma + b + 1)[(\sigma + r)b] - 2\sigma b(r - 1) =$
 $r(1 + b - \sigma) + \sigma(\sigma + b + 3) > 0 \Leftrightarrow r < r_H = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}$ gdy $\sigma > b + 1$
- $\Delta_3 = b_3 \Delta_2 \Rightarrow$ taki sam warunek jak z Δ_2 , czyli $b_3 > 0$ dla $r > 1$

Układ Lorenza — stabilność punktów $C^\pm$

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + (\sigma + r)b\lambda + 2\sigma b(r - 1) = 0 :$$

- $b_1 = \sigma + b + 1$
- $b_2 = (\sigma + r)b$
- $b_3 = 2\sigma b(r - 1)$

Zatem:

- $\Delta_1 = b_1 > 0$
- $\Delta_2 = b_1 b_2 - b_3 = (\sigma + b + 1)[(\sigma + r)b] - 2\sigma b(r - 1) =$
 $r(1 + b - \sigma) + \sigma(\sigma + b + 3) > 0 \Leftrightarrow r < r_H = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}$ gdy $\sigma > b + 1$
- $\Delta_3 = b_3 \Delta_2 \Rightarrow$ taki sam warunek jak z Δ_2 , czyli $b_3 > 0$ dla $r > 1$

Układ Lorenza — stabilność punktów $C^\pm$

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + (\sigma + r)b\lambda + 2\sigma b(r - 1) = 0 :$$

- $b_1 = \sigma + b + 1$
- $b_2 = (\sigma + r)b$
- $b_3 = 2\sigma b(r - 1)$

Zatem:

- $\Delta_1 = b_1 > 0$
- $\Delta_2 = b_1 b_2 - b_3 = (\sigma + b + 1)[(\sigma + r)b] - 2\sigma b(r - 1) =$
 $r(1 + b - \sigma) + \sigma(\sigma + b + 3) > 0 \Leftrightarrow r < r_H = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}$ gdy $\sigma > b + 1$
- $\Delta_3 = b_3 \Delta_2 \Rightarrow$ taki sam warunek jak z Δ_2 , czyli $b_3 > 0$ dla $r > 1$

Układ Lorenza — stabilność punktów $C^\pm$

$$\lambda^3 + (\sigma + b + 1)\lambda^2 + (\sigma + r)b\lambda + 2\sigma b(r - 1) = 0 :$$

- $b_1 = \sigma + b + 1$
- $b_2 = (\sigma + r)b$
- $b_3 = 2\sigma b(r - 1)$

Zatem:

- $\Delta_1 = b_1 > 0$
- $\Delta_2 = b_1 b_2 - b_3 = (\sigma + b + 1)[(\sigma + r)b] - 2\sigma b(r - 1) =$
 $r(1 + b - \sigma) + \sigma(\sigma + b + 3) > 0 \Leftrightarrow r < r_H = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1}$ gdy $\sigma > b + 1$
- $\Delta_3 = b_3 \Delta_2 \Rightarrow$ taki sam warunek jak z Δ_2 , czyli $b_3 > 0$ dla $r > 1$

Jeśli $\sigma < b + 1$, stała konwekcja jest zawsze stabilna (nie istnieje $r > 0$ spełniające warunek Δ_2).

Dla danego $\sigma > b + 1$:

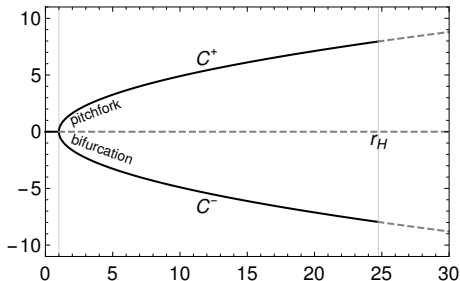
- ❶ jedna rzeczywista, ujemna wartość własna ($\rightarrow$ kierunek stabilny)
- ❷ oraz dwie zespolone sprzężone wartości własne; urojone gdy

$$r = r_H = \frac{\sigma(\sigma + b + 3)}{\sigma - b - 1},$$

tj. $r_H = 470/19 \approx 24.74$ dla $\sigma = 10$ oraz $b = 8/3$ (odtąd ustalone wartości),

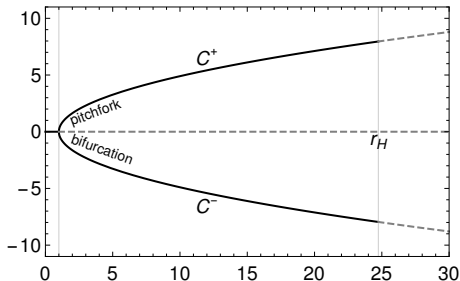
- ❸ $C^\pm$ stabilne dla $1 < r < r_H$ (stała konwekcja)
- ❹ i tracą stabilność gdy $r > r_H$.

Układ Lorenza — dynamika



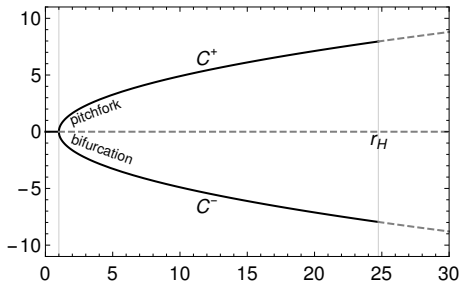
- 1 Dla $0 < r < 1$ istnieje jeden punkt stały (stabilny) w pocz. ukł. wsp.
→ brak konwekcji.
- 2 Bifurkacja podwajania okresu następuje gdy $r = 1$ — pocz. ukł. wsp. traci stabilność oraz powstają dwa nowe punkty stałe $C^\pm$ (stała konwekcja), stabilne dla $1 < r < r_H$. (Gdy $r \approx 1.3456$ pojawiają się pierwsze oscylacje wokół $C^\pm$.)
- 3 $C^\pm$ tracą stabilność gdy $r > r_H$; nie ma już żadnych stabilnych punktów stałych.

Układ Lorenza — dynamika



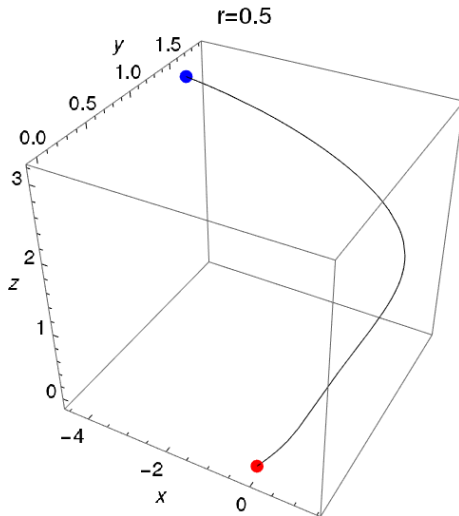
- 1 Dla $0 < r < 1$ istnieje jeden punkt stały (stabilny) w pocz. ukł. wsp. → brak konwekcji.
- 2 Bifurkacja podwajania okresu następuje gdy $r = 1$ — pocz. ukł. wsp. traci stabilność oraz powstają dwa nowe punkty stałe $C^\pm$ (stała konwekcja), stabilne dla $1 < r < r_H$. (Gdy $r \approx 1.3456$ pojawiają się pierwsze oscylacje wokół $C^\pm$.)
- 3 $C^\pm$ tracą stabilność gdy $r > r_H$; nie ma już żadnych stabilnych punktów stałych.

Układ Lorenza — dynamika

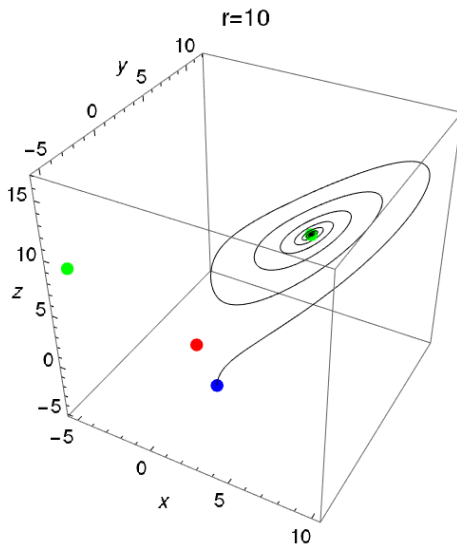


- 1 Dla $0 < r < 1$ istnieje jeden punkt stały (stabilny) w pocz. ukł. wsp. → brak konwekcji.
- 2 Bifurkacja podwajania okresu następuje gdy $r = 1$ — pocz. ukł. wsp. traci stabilność oraz powstają dwa nowe punkty stałe $C^\pm$ (stała konwekcja), stabilne dla $1 < r < r_H$. (Gdy $r \approx 1.3456$ pojawiają się pierwsze oscylacje wokół $C^\pm$.)
- 3 $C^\pm$ tracą stabilność gdy $r > r_H$; nie ma już żadnych stabilnych punktów stałych.

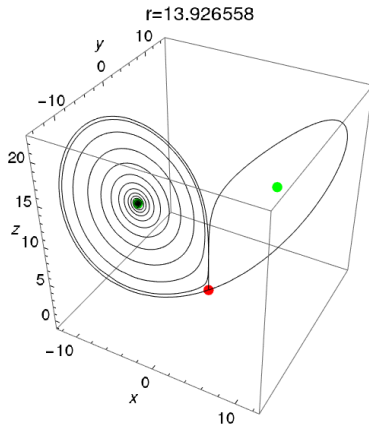
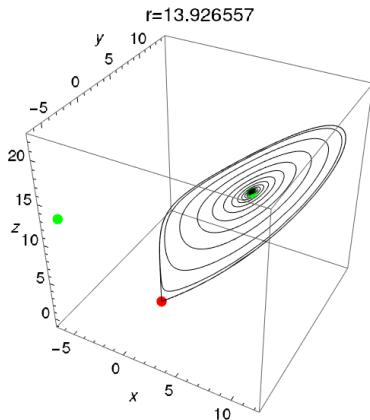
Układ Lorenza — rozwiązania numeryczne



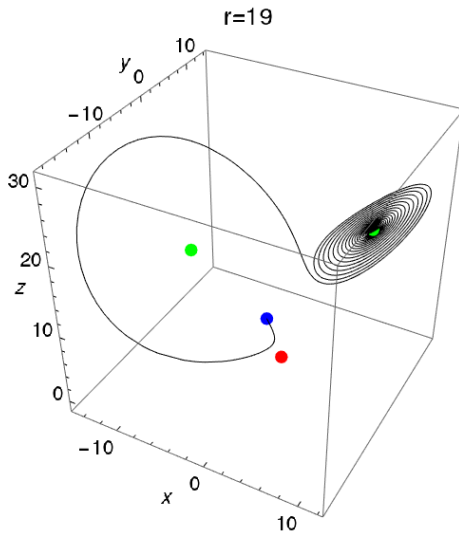
Układ Lorenza — rozwiązania numeryczne



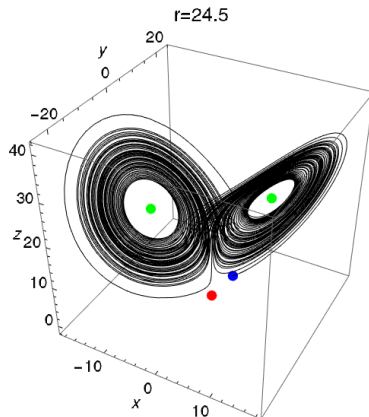
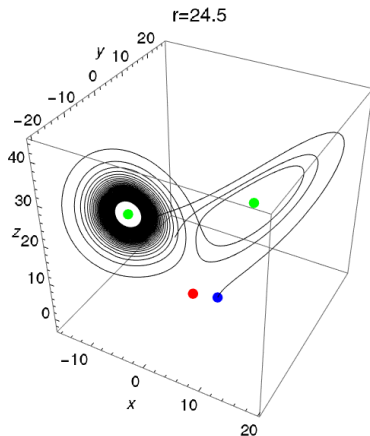
Układ Lorenza — rozwiązania numeryczne



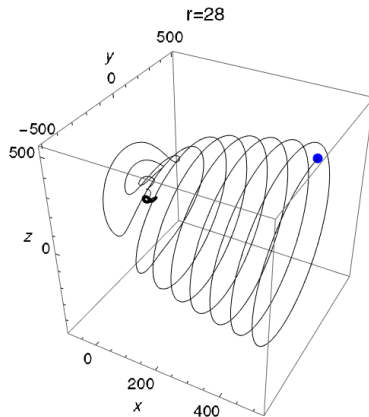
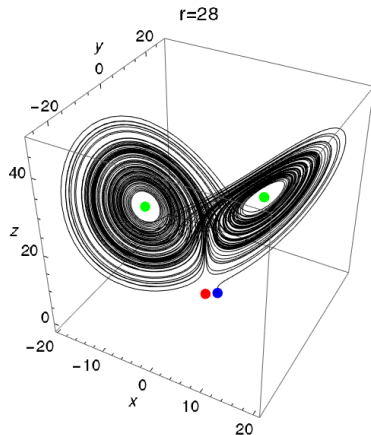
Układ Lorenza — rozwiązania numeryczne



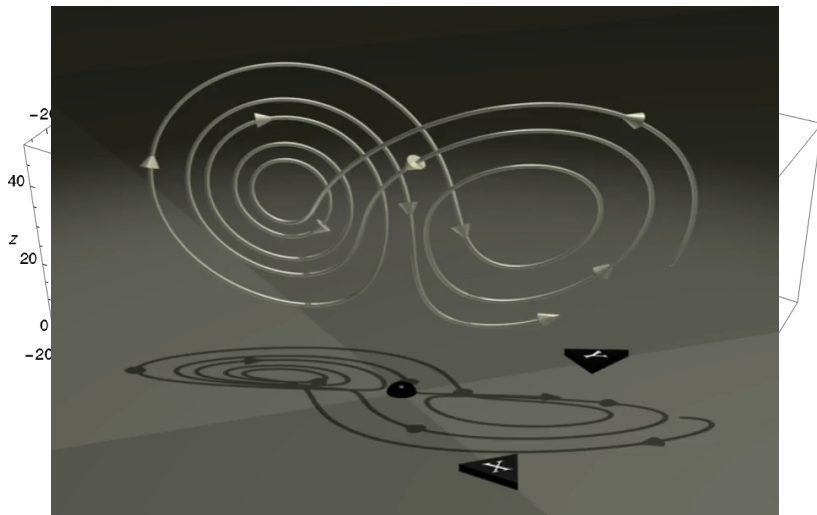
Układ Lorenza — rozwiązania numeryczne



Układ Lorenza — rozwiązania numeryczne

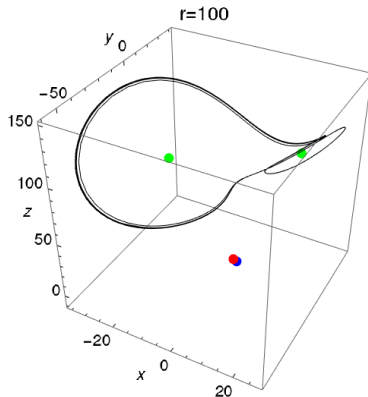
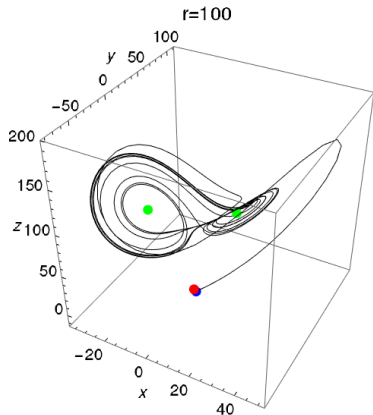


Układ Lorenza — rozwiązania numeryczne



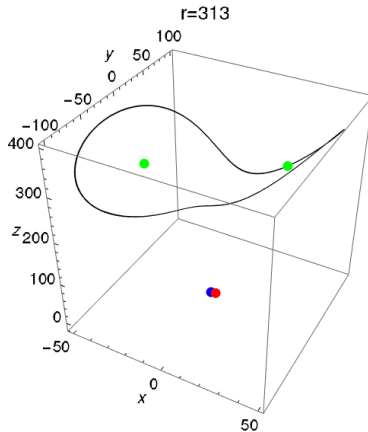
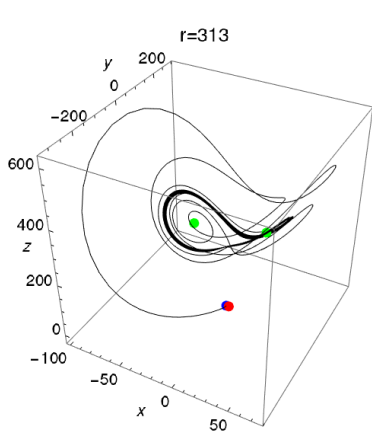
Układ Lorenza — rozwiązania numeryczne

Pomijając fazę przejściową:



Układ Lorenza — rozwiązania numeryczne

Pomijając fazę przejściową:



Układ Lorenza — pełna dynamika

- 1 Dla $1 < r < r_I \lesssim 13.926$, trajektorie startujące z pobliża pocz. ukł. wsp. wzdłuż niestabilnego kierunku są przyciągane do bliższego $C^\pm$. Występuje homokliniczna bifurkacja w r_I .
- 2 Gdy $r_I < r < r_{II} \approx 24.06$, trajektorie oscylują między $C^\pm$ zanim zaczną zmierzać do jednego z nich po spirali (przejściowy chaos — nowe zjawisko).
- 3 Gdy $r_{II} < r < r_H \approx 24.74$ to powstaje prawdziwy chaos, ale układ ma aż 3 atraktory: $C^\pm$ oraz dziwny atraktor.
- 4 W $r = r_H$ ma miejsce bifurkacja Hopfa.
- 5 Dla $r_H < r < r_{III} \approx 30.1$ dziwny atraktor jest asymptotycznie jedynym stabilnym rozwiązaniem układu Lorenza.
- 6 Dla $r_{III} < r < r_{IV} \lesssim 313$ mamy okna okresowe, kaskady podwajania okresu, chaos, intermitencje, itd.
- 7 Dla $r \gtrsim 313$ istnieją stabilne atraktory będące cyklami granicznymi.
Układy nieliniowe są pełne niemonotonicznych niespodzianek...

Układ Lorenza — pełna dynamika

- 1 Dla $1 < r < r_I \lesssim 13.926$, trajektorie startujące z pobliża pocz. ukł. wsp. wzdłuż niestabilnego kierunku są przyciągane do bliższego $C^\pm$. Występuje homokliniczna bifurkacja w r_I .
- 2 Gdy $r_I < r < r_{II} \approx 24.06$, trajektorie oscylują między $C^\pm$ zanim zaczną zmierzać do jednego z nich po spirali (przejściowy chaos — nowe zjawisko).
- 3 Gdy $r_{II} < r < r_H \approx 24.74$ to powstaje prawdziwy chaos, ale układ ma aż 3 atraktory: $C^\pm$ oraz dziwny atraktor.
- 4 W $r = r_H$ ma miejsce bifurkacja Hopfa.
- 5 Dla $r_H < r < r_{III} \approx 30.1$ dziwny atraktor jest asymptotycznie jedynym stabilnym rozwiązaniem układu Lorenza.
- 6 Dla $r_{III} < r < r_{IV} \lesssim 313$ mamy okna okresowe, kaskady podwajania okresu, chaos, intermitencje, itd.
- 7 Dla $r \gtrsim 313$ istnieją stabilne atraktory będące cyklami granicznymi.
Układy nieliniowe są pełne niemonotonicznych niespodzianek...

Układ Lorenza — pełna dynamika

- 1 Dla $1 < r < r_I \lesssim 13.926$, trajektorie startujące z pobliża pocz. ukł. wsp. wzdłuż niestabilnego kierunku są przyciągane do bliższego $C^\pm$. Występuje homokliniczna bifurkacja w r_I .
- 2 Gdy $r_I < r < r_{II} \approx 24.06$, trajektorie oscylują między $C^\pm$ zanim zaczną zmierzać do jednego z nich po spirali (przejściowy chaos — nowe zjawisko).
- 3 Gdy $r_{II} < r < r_H \approx 24.74$ to powstaje prawdziwy chaos, ale układ ma aż 3 atraktory: $C^\pm$ oraz dziwny atraktor.
- 4 W $r = r_H$ ma miejsce bifurkacja Hopfa.
- 5 Dla $r_H < r < r_{III} \approx 30.1$ dziwny atraktor jest asymptotycznie jedynym stabilnym rozwiązaniem układu Lorenza.
- 6 Dla $r_{III} < r < r_{IV} \lesssim 313$ mamy okna okresowe, kaskady podwajania okresu, chaos, intermitencje, itd.
- 7 Dla $r \gtrsim 313$ istnieją stabilne atraktory będące cyklami granicznymi.
Układy nieliniowe są pełne niemonotonicznych niespodzianek...

Układ Lorenza — pełna dynamika

- 1 Dla $1 < r < r_I \lesssim 13.926$, trajektorie startujące z pobliża pocz. ukł. wsp. wzdłuż niestabilnego kierunku są przyciągane do bliższego $C^\pm$. Występuje homokliniczna bifurkacja w r_I .
- 2 Gdy $r_I < r < r_{II} \approx 24.06$, trajektorie oscylują między $C^\pm$ zanim zaczną zmierzać do jednego z nich po spirali (przejściowy chaos — nowe zjawisko).
- 3 Gdy $r_{II} < r < r_H \approx 24.74$ to powstaje prawdziwy chaos, ale układ ma aż 3 atraktory: $C^\pm$ oraz dziwny atraktor.
- 4 W $r = r_H$ ma miejsce bifurkacja Hopfa.
- 5 Dla $r_H < r < r_{III} \approx 30.1$ dziwny atraktor jest asymptotycznie jedynym stabilnym rozwiązaniem układu Lorenza.
- 6 Dla $r_{III} < r < r_{IV} \lesssim 313$ mamy okna okresowe, kaskady podwajania okresu, chaos, intermitencje, itd.
- 7 Dla $r \gtrsim 313$ istnieją stabilne atraktory będące cyklami granicznymi.
Układy nieliniowe są pełne niemonotonicznych niespodzianek...

Układ Lorenza — pełna dynamika

- 1 Dla $1 < r < r_I \lesssim 13.926$, trajektorie startujące z pobliża pocz. ukł. wsp. wzdłuż niestabilnego kierunku są przyciągane do bliższego $C^\pm$. Występuje homokliniczna bifurkacja w r_I .
- 2 Gdy $r_I < r < r_{II} \approx 24.06$, trajektorie oscylują między $C^\pm$ zanim zaczną zmierzać do jednego z nich po spirali (przejściowy chaos — nowe zjawisko).
- 3 Gdy $r_{II} < r < r_H \approx 24.74$ to powstaje prawdziwy chaos, ale układ ma aż 3 atraktory: $C^\pm$ oraz dziwny atraktor.
- 4 W $r = r_H$ ma miejsce bifurkacja Hopfa.
- 5 Dla $r_H < r < r_{III} \approx 30.1$ dziwny atraktor jest asymptotycznie jedynym stabilnym rozwiązaniem układu Lorenza.
- 6 Dla $r_{III} < r < r_{IV} \lesssim 313$ mamy okna okresowe, kaskady podwajania okresu, chaos, intermitencje, itd.
- 7 Dla $r \gtrsim 313$ istnieją stabilne atraktory będące cyklami granicznymi. Układy nieliniowe są pełne niemonotonicznych niespodzianek...

Układ Lorenza — pełna dynamika

- 1 Dla $1 < r < r_I \lesssim 13.926$, trajektorie startujące z pobliża pocz. ukł. wsp. wzdłuż niestabilnego kierunku są przyciągane do bliższego $C^\pm$. Występuje homokliniczna bifurkacja w r_I .
- 2 Gdy $r_I < r < r_{II} \approx 24.06$, trajektorie oscylują między $C^\pm$ zanim zaczną zmierzać do jednego z nich po spirali (przejściowy chaos — nowe zjawisko).
- 3 Gdy $r_{II} < r < r_H \approx 24.74$ to powstaje prawdziwy chaos, ale układ ma aż 3 atraktory: $C^\pm$ oraz dziwny atraktor.
- 4 W $r = r_H$ ma miejsce bifurkacja Hopfa.
- 5 Dla $r_H < r < r_{III} \approx 30.1$ dziwny atraktor jest asymptotycznie jedynym stabilnym rozwiązaniem układu Lorenza.
- 6 Dla $r_{III} < r < r_{IV} \lesssim 313$ mamy okna okresowe, kaskady podwajania okresu, chaos, intermitencje, itd.
- 7 Dla $r \gtrsim 313$ istnieją stabilne atraktory będące cyklami granicznymi.
Układy nieliniowe są pełne niemonotonicznych niespodzianek...

Układ Lorenza — pełna dynamika

- 1 Dla $1 < r < r_I \lesssim 13.926$, trajektorie startujące z pobliża pocz. ukł. wsp. wzdłuż niestabilnego kierunku są przyciągane do bliższego $C^\pm$. Występuje homokliniczna bifurkacja w r_I .
 - 2 Gdy $r_I < r < r_{II} \approx 24.06$, trajektorie oscylują między $C^\pm$ zanim zaczną zmierzać do jednego z nich po spirali (przejściowy chaos — nowe zjawisko).
 - 3 Gdy $r_{II} < r < r_H \approx 24.74$ to powstaje prawdziwy chaos, ale układ ma aż 3 atraktory: $C^\pm$ oraz dziwny atraktor.
 - 4 W $r = r_H$ ma miejsce bifurkacja Hopfa.
 - 5 Dla $r_H < r < r_{III} \approx 30.1$ dziwny atraktor jest asymptotycznie jedynym stabilnym rozwiązaniem układu Lorenza.
 - 6 Dla $r_{III} < r < r_{IV} \lesssim 313$ mamy okna okresowe, kaskady podwajania okresu, chaos, intermitencje, itd.
 - 7 Dla $r \gtrsim 313$ istnieją stabilne atraktory będące cyklami granicznymi.
- Układy nieliniowe są pełne niemonotonicznych niespodzianek...

Układ Lorenza — pełna dynamika

- 1 Dla $1 < r < r_I \lesssim 13.926$, trajektorie startujące z pobliża pocz. ukł. wsp. wzdłuż niestabilnego kierunku są przyciągane do bliższego $C^\pm$. Występuje homokliniczna bifurkacja w r_I .
- 2 Gdy $r_I < r < r_{II} \approx 24.06$, trajektorie oscylują między $C^\pm$ zanim zaczną zmierzać do jednego z nich po spirali (przejściowy chaos — nowe zjawisko).
- 3 Gdy $r_{II} < r < r_H \approx 24.74$ to powstaje prawdziwy chaos, ale układ ma aż 3 atraktory: $C^\pm$ oraz dziwny atraktor.
- 4 W $r = r_H$ ma miejsce bifurkacja Hopfa.
- 5 Dla $r_H < r < r_{III} \approx 30.1$ dziwny atraktor jest asymptotycznie jedynym stabilnym rozwiązaniem układu Lorenza.
- 6 Dla $r_{III} < r < r_{IV} \lesssim 313$ mamy okna okresowe, kaskady podwajania okresu, chaos, intermitencje, itd.
- 7 Dla $r \gtrsim 313$ istnieją stabilne atraktory będące cyklami granicznymi. Układy nieliniowe są pełne niemonotonicznych niespodzianek...

Bifurkacja Hopfa

Sprzężone zespolone wartości własne macierzy $\mathbf{J}$ stają się urojone.

Bifurkacja Hopfa

Sprzężone zespolone wartości własne macierzy $\mathbf{J}$ stają się urojone.
Stabilna spirala $\rightarrow$ niestabilna spirala otoczona cyklem granicznym.

Bifurkacja Hopfa

Sprzężone zespolone wartości własne macierzy $\mathbf{J}$ stają się urojone.

Stabilna spirala $\rightarrow$ niestabilna spirala otoczona cyklem granicznym.

Przykład: $\dot{\theta} = 1$, $\dot{\rho} = \rho(\alpha - \rho^2)$. Punkt stały w $\rho = 0$, stabilny gdy $\alpha \leq 0$ (spirala), niestabilny dla $\alpha > 0$.

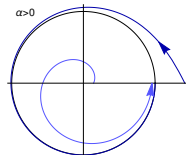
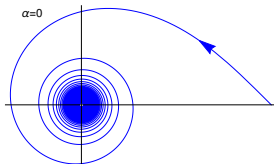
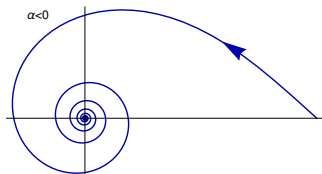
Bifurkacja Hopfa

Sprężone zespolone wartości własne macierzy $\mathbf{J}$ stają się urojone.

Stabilna spirala $\rightarrow$ niestabilna spirala otoczona cyklem granicznym.

Przykład: $\dot{\theta} = 1$, $\dot{\rho} = \rho(\alpha - \rho^2)$. Punkt stały w $\rho = 0$, stabilny gdy $\alpha \leq 0$ (spirala), niestabilny dla $\alpha > 0$.

Gdy $\alpha > 0$, pojawia się nowy, stabilny punkt stały, $\rho = \sqrt{\alpha}$, prowadzący do powstania cyklu granicznego (superkrytyczna bifurkacja Hopfa w $\alpha = 0$: punkt stały zmienia się w cykl graniczny):



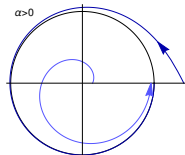
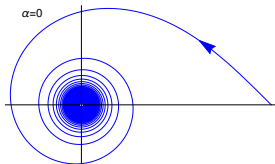
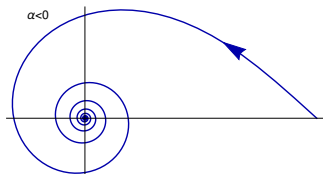
Bifurkacja Hopfa

Sprężone zespolone wartości własne macierzy $\mathbf{J}$ stają się urojone.

Stabilna spirala $\rightarrow$ niestabilna spirala otoczona cyklem granicznym.

Przykład: $\dot{\theta} = 1$, $\dot{\rho} = \rho(\alpha - \rho^2)$. Punkt stały w $\rho = 0$, stabilny gdy $\alpha \leq 0$ (spirala), niestabilny dla $\alpha > 0$.

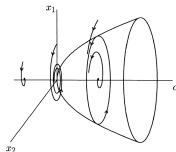
Gdy $\alpha > 0$, pojawia się nowy, stabilny punkt stały, $\rho = \sqrt{\alpha}$, prowadzący do powstania cyklu granicznego (superkrytyczna bifurkacja Hopfa w $\alpha = 0$: punkt stały zmienia się w cykl graniczny):



Gdy $\alpha < 0$, wartości własne $\lambda = \alpha \pm i\omega$, więc gdy $\alpha \rightarrow 0^-$, λ stają się urojone. Gdy $\alpha = 0$ trajektoria zmierza do punktu stałego po niezwykle gęstej spirali (nieliniowa stabilność).

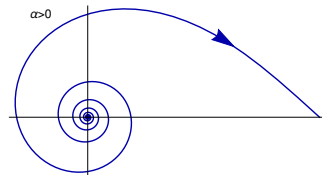
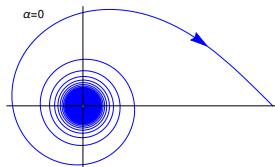
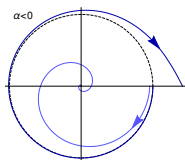
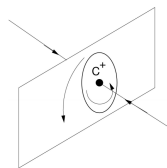
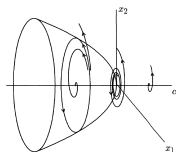
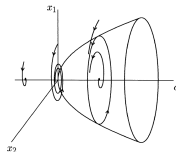
Bifurkacje Hopfa

- Superkrytyczna bifurkacja Hopfa:



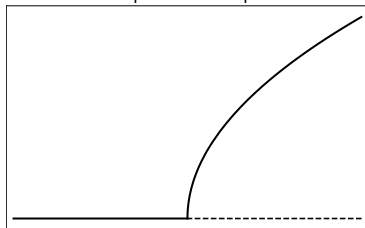
Bifurkacje Hopfa

- Superkrytyczna bifurkacja Hopfa:
- Subkrytyczna bifurkacja Hopfa:
 $\dot{\rho} = \rho(\alpha + \rho^2)$



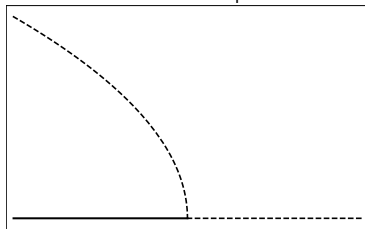
Bifurkacje Hopfa

supercritical Hopf



α

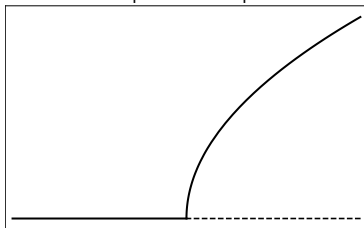
subcritical Hopf



α

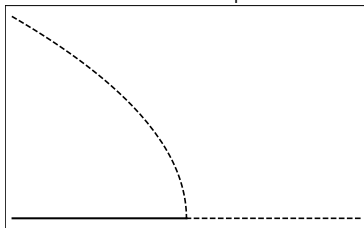
Bifurkacje Hopfa

supercritical Hopf



α

subcritical Hopf



α

Zadanie 22

Pokazać, że gdy $r = r_H$, to para wartości własnych $\lambda_{1,2}$ punktów $C^\pm$ układu Lorentza jest urojona i sprzężona.

Obliczyć też λ_3 .

(Wskazówka: faktoryzacja wielomianu charakterystycznego.)

Bifurkacja homokliniczna

Kiedy cykl graniczny *zderza się* z siodłem:

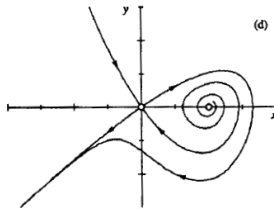
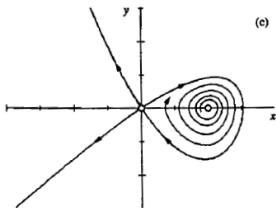
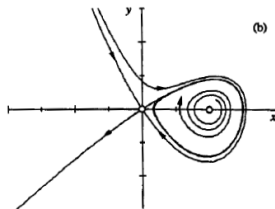
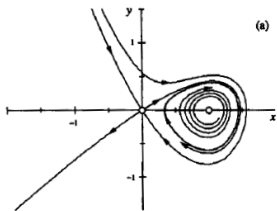
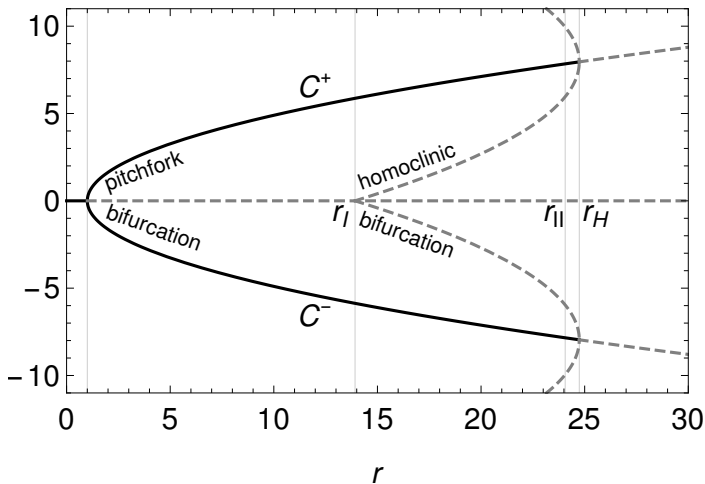
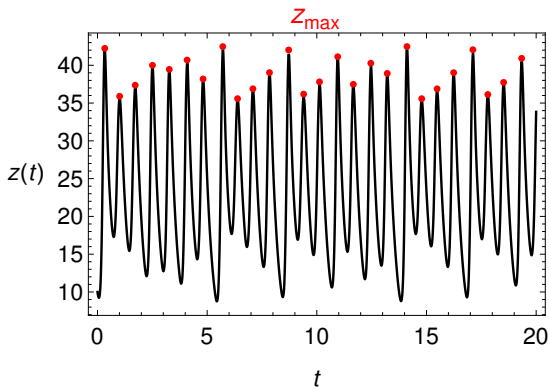


Diagram bifurkacyjny

Bardziej kompletny diagram bifurkacyjny układu Lorenza:

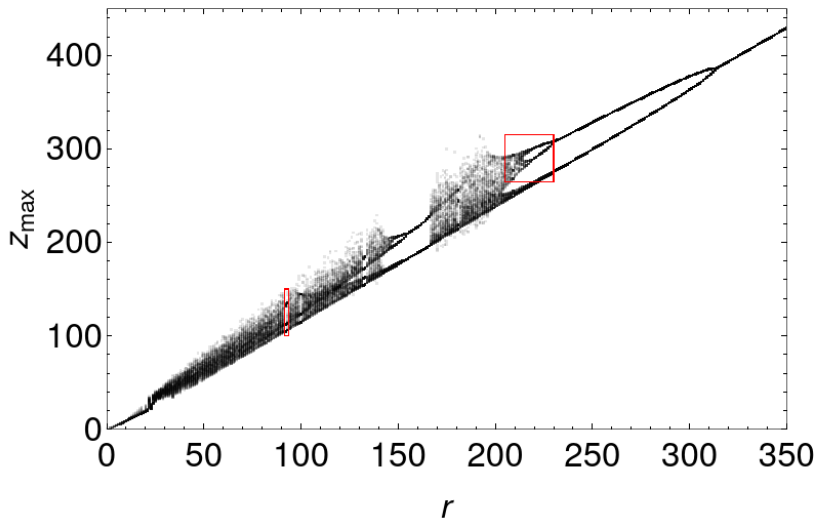


Układ Lorenza — diagram bifurkacyjny

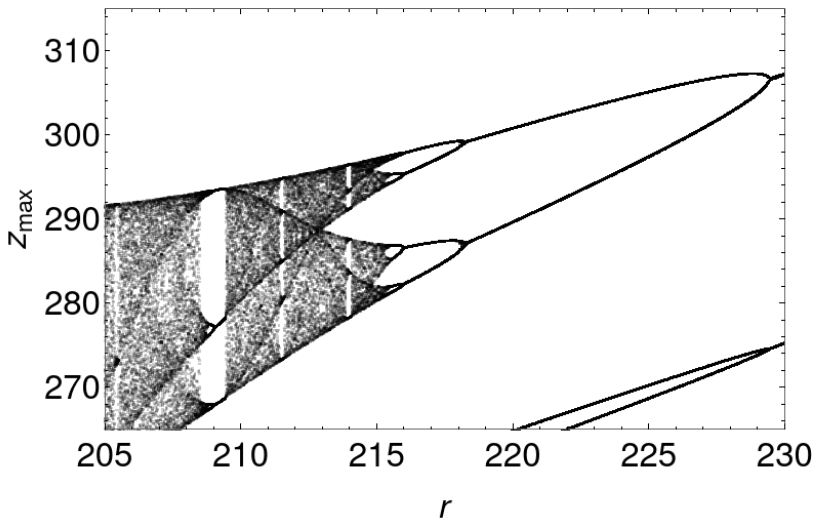


$$z_{\max} \in \{\dots, M_{n-1}, M_n, M_{n+1}, \dots\}$$

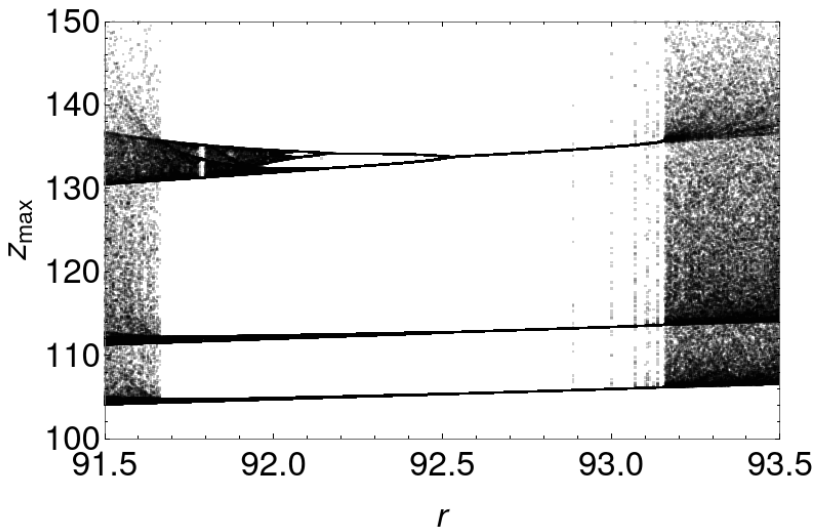
Układ Lorenza — diagram bifurkacyjny



Układ Lorenza — diagram bifurkacyjny



Układ Lorenza — diagram bifurkacyjny



„Odwzorowanie” Lorenza:

brak cykli granicznych dla $r > r_H$

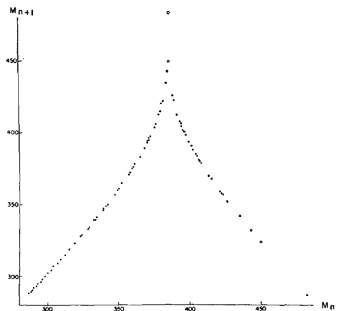


FIG. 4. Corresponding values of relative maximum of Z (abscissa) and subsequent relative maximum of Z (ordinate) occurring during the first 6000 iterations.

„Odwzorowanie” Lorenza:

brak cykli granicznych dla $r > r_H$

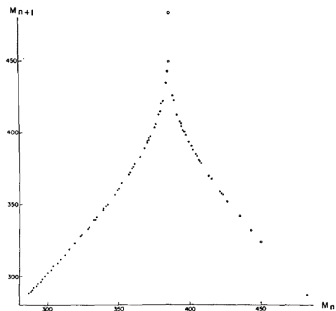


FIG. 4. Corresponding values of relative maximum of Z (abscissa) and subsequent relative maximum of Z (ordinate) occurring during the first 6000 iterations.

Ta „krzywa” ma grubość!

- $|f'(M_n)| > 1$ — cykle graniczne są niestabilne.

„Odwzorowanie” Lorenza:

brak cykli granicznych dla $r > r_H$

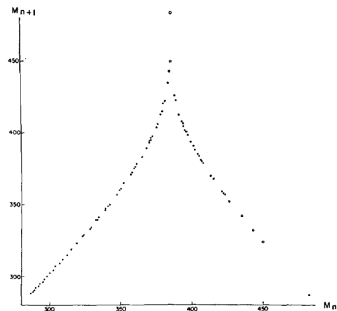


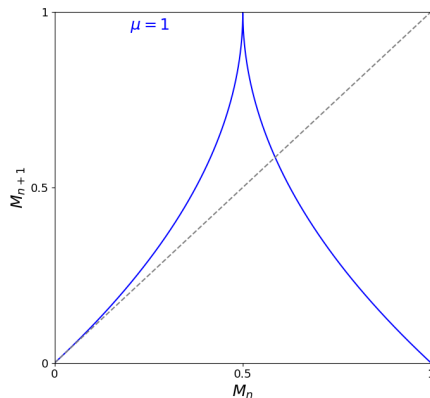
FIG. 4. Corresponding values of relative maximum of Z (abscissa) and subsequent relative maximum of Z (ordinate) occurring during the first 6000 iterations.

Ta „krzywa” ma grubość!

- $|f'(M_n)| > 1$ — cykle graniczne są niestabilne.

- Model odwz. Lorenza, $\mu \in (0, 1]$:

$$M_{n+1} = \mu \left(1 - \sqrt{|2M_n - 1|} \right)$$



Rozwiązania okresowe dla $r \gg 1$

Zdefiniujmy $\epsilon = r^{-1/2} \ll 1$ oraz przeskalujmy zmienne:
 $x = u/\epsilon$, $y = v/(\epsilon^2 \sigma)$, $z = (w/\sigma + 1)/\epsilon^2$, $t = \epsilon \tau$.

Rozwiązania okresowe dla $r \gg 1$

Zdefiniujmy $\epsilon = r^{-1/2} \ll 1$ oraz przeskalujmy zmienne:

$x = u/\epsilon$, $y = v/(\epsilon^2\sigma)$, $z = (w/\sigma + 1)/\epsilon^2$, $t = \epsilon\tau$. Układ Lorenza przyjmuje wtedy postać:

$$\begin{cases} \dot{u} &= v - \epsilon\sigma u \\ \dot{v} &= -uw - \epsilon v \\ \dot{w} &= uv - \epsilon b(w + \sigma) \end{cases}$$

Rozwiązania okresowe dla $r \gg 1$

Zdefiniujmy $\epsilon = r^{-1/2} \ll 1$ oraz przeskalujmy zmienne:

$x = u/\epsilon$, $y = v/(\epsilon^2\sigma)$, $z = (w/\sigma + 1)/\epsilon^2$, $t = \epsilon\tau$. Układ Lorenza przyjmuje wtedy postać:

$$\begin{cases} \dot{u} &= v - \epsilon\sigma u \\ \dot{v} &= -uw - \epsilon v \\ \dot{w} &= uv - \epsilon b(w + \sigma) \end{cases}$$

Pomijając małe wyrazy, tj. rzędu $\mathcal{O}(\epsilon)$:

$$\begin{cases} \dot{u} &= v \\ \dot{v} &= -uw \\ \dot{w} &= uv \end{cases}$$

Rozwiązania okresowe dla $r \gg 1$

Zdefiniujmy $\epsilon = r^{-1/2} \ll 1$ oraz przeskalujmy zmienne:

$x = u/\epsilon$, $y = v/(\epsilon^2\sigma)$, $z = (w/\sigma + 1)/\epsilon^2$, $t = \epsilon\tau$. Układ Lorenza przyjmuje wtedy postać:

$$\begin{cases} \dot{u} &= v - \epsilon\sigma u \\ \dot{v} &= -uw - \epsilon v \\ \dot{w} &= uv - \epsilon b(w + \sigma) \end{cases}$$

Pomijając małe wyrazy, tj. rzędu $\mathcal{O}(\epsilon)$:

$$\begin{cases} \dot{u} &= v \\ \dot{v} &= -uw \\ \dot{w} &= uv \end{cases}$$

skąd dostaniemy dwie całki pierwsze:

$$2\alpha_1 = u^2 - 2w, \quad \alpha_2^2 = v^2 + w^2.$$

Rozwiązania okresowe dla $r \gg 1$

Zdefiniujmy $\epsilon = r^{-1/2} \ll 1$ oraz przeskalujmy zmienne:

$x = u/\epsilon$, $y = v/(\epsilon^2\sigma)$, $z = (w/\sigma + 1)/\epsilon^2$, $t = \epsilon\tau$. Układ Lorenza przyjmuje wtedy postać:

$$\begin{cases} \dot{u} &= v - \epsilon\sigma u \\ \dot{v} &= -uw - \epsilon v \\ \dot{w} &= uv - \epsilon b(w + \sigma) \end{cases}$$

Pomijając małe wyrazy, tj. rzędu $\mathcal{O}(\epsilon)$:

$$\begin{cases} \dot{u} &= v \\ \dot{v} &= -uw \\ \dot{w} &= uv \end{cases}$$

skąd dostaniemy dwie całki pierwsze:

$$2\alpha_1 = u^2 - 2w, \quad \alpha_2^2 = v^2 + w^2.$$

Ostatecznie:

$$\dot{w} = \sqrt{2(\alpha_2 - w)(\alpha_2 + w)(\alpha_1 + w)}$$

o rozwiązaniach w postaci funkcji eliptycznych (sn, cn, ...), które są okresowe.

Rozwiązania okresowe dla $r \gg 1$

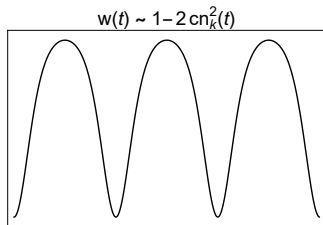
Zdefiniujmy $\epsilon = r^{-1/2} \ll 1$ oraz przeskalujmy zmienne:

$x = u/\epsilon$, $y = v/(\epsilon^2\sigma)$, $z = (w/\sigma + 1)/\epsilon^2$, $t = \epsilon\tau$. Układ Lorenza przyjmuje wtedy postać:

$$\begin{cases} \dot{u} &= v - \epsilon\sigma u \\ \dot{v} &= -uw - \epsilon v \\ \dot{w} &= uv - \epsilon b(w + \sigma) \end{cases}$$

Pomijając małe wyrazy, tj. rzędu $\mathcal{O}(\epsilon)$:

$$\begin{cases} \dot{u} &= v \\ \dot{v} &= -uw \\ \dot{w} &= uv \end{cases}$$



skąd dostaniemy dwie całki pierwsze:

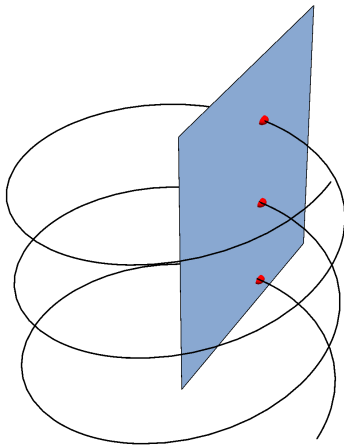
$$2\alpha_1 = u^2 - 2w, \quad \alpha_2^2 = v^2 + w^2.$$

Ostatecznie:

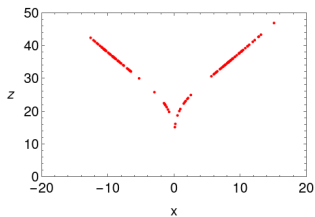
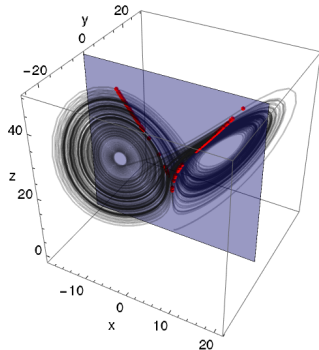
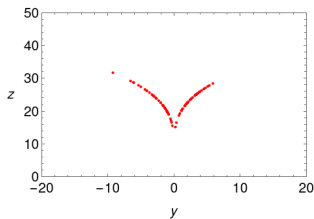
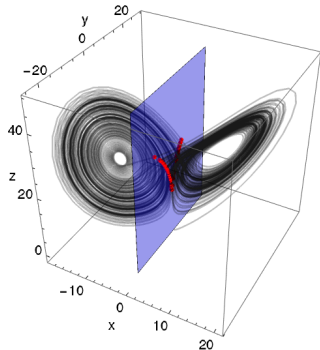
$$\dot{w} = \sqrt{2(\alpha_2 - w)(\alpha_2 + w)(\alpha_1 + w)}$$

o rozwiązaniach w postaci funkcji eliptycznych (sn, cn, ...), które są okresowe.

Przekrój Poincarégo



Przekrój Poincarégo



Rozważmy układ dynamiczny $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ z warunkiem początkowym $\mathbf{x}_0$ oraz infinytezymalny wektor odchylenia (pomiędzy dwiema początkowo bliskimi orbitami) $\mathbf{w}$, którego ewolucja dana jest równaniem

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{J}_t \cdot \mathbf{w}(t),$$

gdzie $\mathbf{J}_t$ jest jacobianem $\mathbf{f}$ w chwili t , z warunkiem początkowym $\mathbf{x}_0$.

⁵Alligood, Sauer, Yorke. Chaos. An Introduction to Dynamical Systems.

Rozważmy układ dynamiczny $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ z warunkiem początkowym $\mathbf{x}_0$ oraz infitezymalny wektor odchylenia (pomiędzy dwiema początkowo bliskimi orbitami) $\mathbf{w}$, którego ewolucja dana jest równaniem

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{J}_t \cdot \mathbf{w}(t),$$

gdzie $\mathbf{J}_t$ jest jacobianem $\mathbf{f}$ w chwili t , z warunkiem początkowym $\mathbf{x}_0$.

Wykładniki Lapunowa są dane jako

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|\mathbf{w}_i(t)|}{|\mathbf{w}_i(0)|}$$

⁵Alligood, Sauer, Yorke. Chaos. An Introduction to Dynamical Systems.

Rozważmy układ dynamiczny $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ z warunkiem początkowym $\mathbf{x}_0$ oraz infitezymalny wektor odchylenia (pomiędzy dwiema początkowo bliskimi orbitami) $\mathbf{w}$, którego ewolucja dana jest równaniem

$$\dot{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{J}_t \cdot \mathbf{w}(t),$$

gdzie $\mathbf{J}_t$ jest jacobianem $\mathbf{f}$ w chwili t , z warunkiem początkowym $\mathbf{x}_0$.

Wykładniki Lapunowa są dane jako

$$\lambda_i = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{1}{t} \ln \frac{|\mathbf{w}_i(t)|}{|\mathbf{w}_i(0)|}$$

W praktyce, trzeba wziąć pod uwagę ewolucję potoku fazowego wzdłuż trajektorii.⁵

⁵Alligood, Sauer, Yorke. Chaos. An Introduction to Dynamical Systems.

Wykładniki Lapunowa

- Potok fazowy $\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)$ jest punktem, do którego orbita z warunkiem początkowym $\mathbf{x}_0$ dociera po czasie t .
- Niech $D\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ będzie pochodną $\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)$ względem $\mathbf{x}_0$, dla ustalonego t . Jej ewolucję można wyrazić poprzez równanie różniczkowe (zwane *równaniem wariacyjnym*).
- Zauważmy, że $\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)$ jest rozwiązaniem układu $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, zatem spełnia $\frac{d}{dt}\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}[\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)]$.
- Różniczkując względem $\mathbf{x}_0$ otrzymamy

$$\frac{d}{dt}D\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0) = D\mathbf{f}[\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)] \cdot D\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0),$$

czyli właśnie *równanie wariacyjne*.

- Zauważmy też, że $D\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)$ jest jacobianem $\mathbf{J}_t$ potoku (jako jawnej funkcji t) wyrażonym w punkcie $\mathbf{x}_0$. Warunkiem początkowym jest macierz jednostkowa, ponieważ $\mathbf{F}_0(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ z definicji. $D\mathbf{f}[\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)]$ może być obliczone bezpośrednio z układu dynamicznego.

Wykładniki Lapunowa

- Potok fazowy $\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)$ jest punktem, do którego orbita z warunkiem początkowym $\mathbf{x}_0$ dociera po czasie t .
- Niech $D\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ będzie pochodną $\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)$ względem $\mathbf{x}_0$, dla ustalonego t . Jej ewolucję można wyrazić poprzez równanie różniczkowe (zwane *równaniem wariacyjnym*).
- Zauważmy, że $\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)$ jest rozwiązaniem układu $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, zatem spełnia $\frac{d}{dt}\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}[\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)]$.
- Różniczkując względem $\mathbf{x}_0$ otrzymamy

$$\frac{d}{dt}D\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0) = D\mathbf{f}[\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)] \cdot D\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0),$$

czyli właśnie *równanie wariacyjne*.

- Zauważmy też, że $D\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)$ jest jacobianem $\mathbf{J}_t$ potoku (jako jawnej funkcji t) wyrażonym w punkcie $\mathbf{x}_0$. Warunkiem początkowym jest macierz jednostkowa, ponieważ $\mathbf{F}_0(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ z definicji. $D\mathbf{f}[\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)]$ może być obliczone bezpośrednio z układu dynamicznego.

Wykładniki Lapunowa

- Potok fazowy $\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)$ jest punktem, do którego orbita z warunkiem początkowym $\mathbf{x}_0$ dociera po czasie t .
- Niech $D\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ będzie pochodną $\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)$ względem $\mathbf{x}_0$, dla ustalonego t . Jej ewolucję można wyrazić poprzez równanie różniczkowe (zwane *równaniem wariacyjnym*).
- Zauważmy, że $\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)$ jest rozwiązaniem układu $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, zatem spełnia $\frac{d}{dt}\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}[\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)]$.
- Różniczkując względem $\mathbf{x}_0$ otrzymamy

$$\frac{d}{dt}D\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0) = D\mathbf{f}[\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)] \cdot D\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0),$$

czyli właśnie *równanie wariacyjne*.

- Zauważmy też, że $D\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)$ jest jacobianem $\mathbf{J}_t$ potoku (jako jawnej funkcji t) wyrażonym w punkcie $\mathbf{x}_0$. Warunkiem początkowym jest macierz jednostkowa, ponieważ $\mathbf{F}_0(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ z definicji. $D\mathbf{f}[\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)]$ może być obliczone bezpośrednio z układu dynamicznego.

Wykładniki Lapunowa

- Potok fazowy $\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)$ jest punktem, do którego orbita z warunkiem początkowym $\mathbf{x}_0$ dociera po czasie t .
- Niech $D\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ będzie pochodną $\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)$ względem $\mathbf{x}_0$, dla ustalonego t . Jej ewolucję można wyrazić poprzez równanie różniczkowe (zwane *równaniem wariacyjnym*).
- Zauważmy, że $\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)$ jest rozwiązaniem układu $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, zatem spełnia $\frac{d}{dt}\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}[\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)]$.
- Różniczkując względem $\mathbf{x}_0$ otrzymamy

$$\frac{d}{dt}D\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0) = D\mathbf{f}[\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)] \cdot D\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0),$$

czyli właśnie *równanie wariacyjne*.

- Zauważmy też, że $D\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)$ jest jacobianem $\mathbf{J}_t$ potoku (jako jawnej funkcji t) wyrażonym w punkcie $\mathbf{x}_0$. Warunkiem początkowym jest macierz jednostkowa, ponieważ $\mathbf{F}_0(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ z definicji. $D\mathbf{f}[\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)]$ może być obliczone bezpośrednio z układu dynamicznego.

Wykładniki Lapunowa

- Potok fazowy $\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)$ jest punktem, do którego orbita z warunkiem początkowym $\mathbf{x}_0$ dociera po czasie t .
- Niech $D\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0) \in \mathbb{R}^{N \times N}$ będzie pochodną $\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)$ względem $\mathbf{x}_0$, dla ustalonego t . Jej ewolucję można wyrazić poprzez równanie różniczkowe (zwane *równaniem wariacyjnym*).
- Zauważmy, że $\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)$ jest rozwiązaniem układu $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$, zatem spełnia $\frac{d}{dt}\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0) = \mathbf{f}[\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)]$.
- Różniczkując względem $\mathbf{x}_0$ otrzymamy

$$\frac{d}{dt}D\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0) = D\mathbf{f}[\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)] \cdot D\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0),$$

czyli właśnie *równanie wariacyjne*.

- Zauważmy też, że $D\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)$ jest jacobianem $\mathbf{J}_t$ potoku (jako jawnej funkcji t) wyrażonym w punkcie $\mathbf{x}_0$. Warunkiem początkowym jest macierz jednostkowa, ponieważ $\mathbf{F}_0(\mathbf{x}_0) = \mathbf{x}_0$ z definicji. $D\mathbf{f}[\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)]$ może być obliczone bezpośrednio z układu dynamicznego.

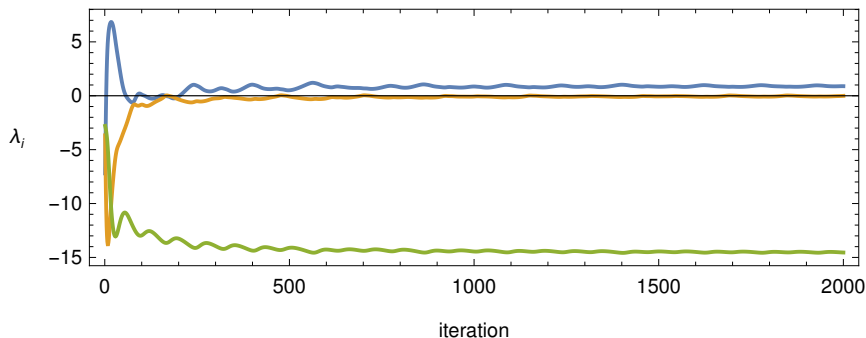
- Żeby obliczyć $D\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)$ w chwili t , potrzebne jest rozwiązanie: $\mathbf{x}(t)$. A zatem układ dynamiczny oraz równanie wariacyjne tworzą układ równań, które muszą być rozwiązywane jednocześnie.
- Skoro przestrzeń fazowa jest ograniczona, ewolucja potoku fazowego nie może przebiegać dowolnie długo. Ponadto, wektory odchylenia ostatecznie ustawiają się w kierunku największego λ . (Por. wykład 3, slajd 7.)
- Żeby temu zapobiec, po relatywnie krótkim przedziale czasu Δt wektory tworzące kolumny macierzy $D\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)$ są ortonormalizowane przy użyciu procedury Grama-Schmidta, która jest powtarzana po upływie kolejnego Δt , itd. Normy tych wektorów są po każdej iteracji akumulowane i uśredniane, dając *widmo Lapunowa* (tj. zbiór wszystkich wykładników Lapunowa).

- Żeby obliczyć $D\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)$ w chwili t , potrzebne jest rozwiązanie: $\mathbf{x}(t)$. A zatem układ dynamiczny oraz równanie wariacyjne tworzą układ równań, które muszą być rozwiązywane jednocześnie.
- Skoro przestrzeń fazowa jest ograniczona, ewolucja potoku fazowego nie może przebiegać dowolnie długo. Ponadto, wektory odchylenia ostatecznie ustawiają się w kierunku największego λ . (Por. wykład 3, slajd 7.)
- Żeby temu zapobiec, po relatywnie krótkim przedziale czasu Δt wektory tworzące kolumny macierzy $D\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)$ są ortonormalizowane przy użyciu procedury Grama-Schmidta, która jest powtarzana po upływie kolejnego Δt , itd. Normy tych wektorów są po każdej iteracji akumulowane i uśredniane, dając *widmo Lapunowa* (tj. zbiór wszystkich wykładników Lapunowa).

- Żeby obliczyć $D\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)$ w chwili t , potrzebne jest rozwiązanie: $\mathbf{x}(t)$. A zatem układ dynamiczny oraz równanie wariacyjne tworzą układ równań, które muszą być rozwiązywane jednocześnie.
- Skoro przestrzeń fazowa jest ograniczona, ewolucja potoku fazowego nie może przebiegać dowolnie długo. Ponadto, wektory odchylenia ostatecznie ustawiają się w kierunku największego λ . (Por. wykład 3, slajd 7.)
- Żeby temu zapobiec, po relatywnie krótkim przedziale czasu Δt wektory tworzące kolumny macierzy $D\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)$ są ortonormalizowane przy użyciu procedury Grama-Schmidta, która jest powtarzana po upływie kolejnego Δt , itd. Normy tych wektorów są po każdej iteracji akumulowane i uśredniane, dając *widmo Lapunowa* (tj. zbiór wszystkich wykładników Lapunowa).

- Żeby obliczyć $D\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)$ w chwili t , potrzebne jest rozwiązanie: $\mathbf{x}(t)$. A zatem układ dynamiczny oraz równanie wariacyjne tworzą układ równań, które muszą być rozwiązywane jednocześnie.
- Skoro przestrzeń fazowa jest ograniczona, ewolucja potoku fazowego nie może przebiegać dowolnie długo. Ponadto, wektory odchylenia ostatecznie ustawiają się w kierunku największego λ . (Por. wykład 3, slajd 7.)
- Żeby temu zapobiec, po relatywnie krótkim przedziale czasu Δt wektory tworzące kolumny macierzy $D\mathbf{F}_t(\mathbf{x}_0)$ są ortonormalizowane przy użyciu procedury Grama-Schmidta, która jest powtarzana po upływie kolejnego Δt , itd. Normy tych wektorów są po każdej iteracji akumulowane i uśredniane, dając *widmo Lapunowa* (tj. zbiór wszystkich wykładników Lapunowa).
- Zawsze będzie istniał (dla pewnego i) $\lambda_i = 0$ związany z kierunkiem wzdłuż orbity.

Rysując λ_i w funkcji iteracji dostaniemy wykres (tzw. *convergence plot*):



$$(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0.8884, -0.0107, -14.5444)$$

- $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0.8884, -0.0107, -14.5444)$

- $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0.8884, -0.0107, -14.5444)$
- $V(t) = V_0 \exp(\sum_i \lambda_i t)$

- $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0.8884, -0.0107, -14.5444)$
- $V(t) = V_0 \exp(\sum_i \lambda_i t) \Rightarrow$
- $\dot{V} = V \sum_i \lambda_i$

- $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0.8884, -0.0107, -14.5444)$
- $V(t) = V_0 \exp(\sum_i \lambda_i t) \Rightarrow$
- $\dot{V} = V \sum_i \lambda_i \equiv \int_V \nabla \cdot \mathbf{f} dV$ (por. slajd [14](#))

- $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0.8884, -0.0107, -14.5444)$
- $V(t) = V_0 \exp(\sum_i \lambda_i t) \Rightarrow$
- $\dot{V} = V \sum_i \lambda_i \equiv \int_V \nabla \cdot \mathbf{f} dV$ (por. slajd [14](#))
- Układ Lorenza: $\nabla \cdot \mathbf{f} = -(\sigma + b + 1) \in \text{const.}$ (por. slajd [17](#)) $\Rightarrow$
- $\int_V \nabla \cdot \mathbf{f} dV = V \nabla \cdot \mathbf{f}$

- $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0.8884, -0.0107, -14.5444)$
- $V(t) = V_0 \exp(\sum_i \lambda_i t) \Rightarrow$
- $\dot{V} = V \sum_i \lambda_i \equiv \int_V \nabla \cdot \mathbf{f} dV$ (por. slajd [14](#))
- Układ Lorenza: $\nabla \cdot \mathbf{f} = -(\sigma + b + 1) \in \text{const.}$ (por. slajd [17](#)) $\Rightarrow$
- $\int_V \nabla \cdot \mathbf{f} dV = V \nabla \cdot \mathbf{f} \Rightarrow$
- $\sum_i \lambda_i = \nabla \cdot \mathbf{f}$

- $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0.8884, -0.0107, -14.5444)$
- $V(t) = V_0 \exp(\sum_i \lambda_i t) \Rightarrow$
- $\dot{V} = V \sum_i \lambda_i \equiv \int_V \nabla \cdot \mathbf{f} dV$ (por. slajd [14](#))
- Układ Lorenza: $\nabla \cdot \mathbf{f} = -(\sigma + b + 1) \in \text{const.}$ (por. slajd [17](#)) $\Rightarrow$
- $\int_V \nabla \cdot \mathbf{f} dV = V \nabla \cdot \mathbf{f} \Rightarrow$
- $\sum_i \lambda_i = \nabla \cdot \mathbf{f}$
- $\sum_i \lambda_i = -13.6667 = \nabla \cdot \mathbf{f} = -(\sigma + b + 1) = -(10 + 8/3 + 1)$

- $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0.8884, -0.0107, -14.5444)$
- $V(t) = V_0 \exp(\sum_i \lambda_i t) \Rightarrow$
- $\dot{V} = V \sum_i \lambda_i \equiv \int_V \nabla \cdot \mathbf{f} dV$ (por. slajd [14](#))
- Układ Lorenza: $\nabla \cdot \mathbf{f} = -(\sigma + b + 1) \in \text{const.}$ (por. slajd [17](#)) $\Rightarrow$
- $\int_V \nabla \cdot \mathbf{f} dV = V \nabla \cdot \mathbf{f} \Rightarrow$
- $\sum_i \lambda_i = \nabla \cdot \mathbf{f}$
- $\sum_i \lambda_i = -13.6667 = \nabla \cdot \mathbf{f} = -(\sigma + b + 1) = -(10 + 8/3 + 1) \quad \checkmark$

- $(\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3) = (0.8884, -0.0107, -14.5444)$
- $V(t) = V_0 \exp(\sum_i \lambda_i t) \Rightarrow$
- $\dot{V} = V \sum_i \lambda_i \equiv \int_V \nabla \cdot \mathbf{f} dV$ (por. slajd [14](#))
- Układ Lorenza: $\nabla \cdot \mathbf{f} = -(\sigma + b + 1) \in \text{const.}$ (por. slajd [17](#)) $\Rightarrow$
- $\int_V \nabla \cdot \mathbf{f} dV = V \nabla \cdot \mathbf{f} \Rightarrow$
- $\sum_i \lambda_i = \nabla \cdot \mathbf{f}$
- $\sum_i \lambda_i = -13.6667 = \nabla \cdot \mathbf{f} = -(\sigma + b + 1) = -(10 + 8/3 + 1) \quad \checkmark$
- W ogólności zachodzi:

$$\sum_i \lambda_i = \langle \nabla \cdot \mathbf{f} \rangle_t$$

*Does the flap of a butterfly's wings in Brazil
set off a tornado in Texas?*

Edward Lorenz, 1972⁶

⁶Lorenz, The Essence of Chaos

*Does the flap of a butterfly's wings in Brazil
set off a tornado in Texas?*

Edward Lorenz, 1972⁶

The Butterfly Effect.



⁶Lorenz, The Essence of Chaos

Układ Lotki-Volterra — drapieżnik-ofiara

x — ofiara, y — drapieżnik:

$$\begin{cases} \dot{x} &= \alpha x - \beta xy \\ \dot{y} &= \delta xy - \gamma y \end{cases}$$

gdzie $\alpha, \beta, \delta, \gamma > 0$ i $x, y \geq 0$.

Układ Lotki-Volterra — drapieżnik-ofiara

x — ofiara, y — drapieżnik:

$$\begin{cases} \dot{x} &= \alpha x - \beta xy \\ \dot{y} &= \delta xy - \gamma y \end{cases}$$

gdzie $\alpha, \beta, \delta, \gamma > 0$ i $x, y \geq 0$.

Dwa punkty stałe:

- ❶ $(x, y) = (0, 0)$
- ❷ $(x, y) = (\alpha/\beta, \gamma/\delta)$

Układ Lotki-Volterra — drapieżnik-ofiara

x — ofiara, y — drapieżnik:

$$\begin{cases} \dot{x} &= \alpha x - \beta xy \\ \dot{y} &= \delta xy - \gamma y \end{cases}$$

gdzie $\alpha, \beta, \delta, \gamma > 0$ i $x, y \geq 0$.

Dwa punkty stałe:

❶ $(x, y) = (0, 0)$

❷ $(x, y) = (\alpha/\beta, \gamma/\delta)$

Jakobian:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \delta y & \delta x - \gamma \end{pmatrix}$$

Układ Lotki-Volterra — drapieżnik-ofiara

x — ofiara, y — drapieżnik:

$$\begin{cases} \dot{x} &= \alpha x - \beta xy \\ \dot{y} &= \delta xy - \gamma y \end{cases}$$

gdzie $\alpha, \beta, \delta, \gamma > 0$ i $x, y \geq 0$.

Dwa punkty stałe:

- ❶ $(x, y) = (0, 0)$
- ❷ $(x, y) = (\alpha/\beta, \gamma/\delta)$

Jakobian:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \delta y & \delta x - \gamma \end{pmatrix}$$

daje odpowiednio

- ❶ $\lambda_1 = \alpha, \lambda_2 = -\gamma \longrightarrow$ siodło
- ❷ $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\alpha\gamma} \longrightarrow$ środek

Układ Lotki-Volterra — drapieżnik-ofiara

x — ofiara, y — drapieżnik:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta xy \\ \dot{y} = \delta xy - \gamma y \end{cases}$$

Dzieląc równania przez siebie:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \frac{\delta x - \gamma}{\beta y - \alpha}$$

gdzie $\alpha, \beta, \delta, \gamma > 0$ i $x, y \geq 0$.

Dwa punkty stałe:

- ❶ $(x, y) = (0, 0)$
- ❷ $(x, y) = (\alpha/\beta, \gamma/\delta)$

Jakobian:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \delta y & \delta x - \gamma \end{pmatrix}$$

daje odpowiednio

- ❶ $\lambda_1 = \alpha, \lambda_2 = -\gamma \longrightarrow$ siodło
- ❷ $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\alpha\gamma} \longrightarrow$ środek

Układ Lotki-Volterra — drapieżnik-ofiara

x — ofiara, y — drapieżnik:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta xy \\ \dot{y} = \delta xy - \gamma y \end{cases}$$

gdzie $\alpha, \beta, \delta, \gamma > 0$ i $x, y \geq 0$.

Dwa punkty stałe:

❶ $(x, y) = (0, 0)$

❷ $(x, y) = (\alpha/\beta, \gamma/\delta)$

Jakobian:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \delta y & \delta x - \gamma \end{pmatrix}$$

daje odpowiednio

❶ $\lambda_1 = \alpha, \lambda_2 = -\gamma \longrightarrow$ siodło

❷ $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\alpha\gamma} \longrightarrow$ środek

Dzieląc równania przez siebie:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \frac{\delta x - \gamma}{\beta y - \alpha}$$

co po rozseparowaniu zmiennych prowadzi do

$$\frac{\beta y - \alpha}{y} dy + \frac{\delta x - \gamma}{x} dx = 0$$

Układ Lotki-Volterra — drapieżnik-ofiara

x — ofiara, y — drapieżnik:

$$\begin{cases} \dot{x} = \alpha x - \beta xy \\ \dot{y} = \delta xy - \gamma y \end{cases}$$

gdzie $\alpha, \beta, \delta, \gamma > 0$ i $x, y \geq 0$.

Dwa punkty stałe:

❶ $(x, y) = (0, 0)$

❷ $(x, y) = (\alpha/\beta, \gamma/\delta)$

Jakobian:

$$\mathbf{J} = \begin{pmatrix} \alpha - \beta y & -\beta x \\ \delta y & \delta x - \gamma \end{pmatrix}$$

daje odpowiednio

❶ $\lambda_1 = \alpha, \lambda_2 = -\gamma \longrightarrow$ siodło

❷ $\lambda_{1,2} = \pm i\sqrt{\alpha\gamma} \longrightarrow$ środek

Dzieląc równania przez siebie:

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{y}{x} \frac{\delta x - \gamma}{\beta y - \alpha}$$

co po rozseparowaniu zmiennych prowadzi do

$$\frac{\beta y - \alpha}{y} dy + \frac{\delta x - \gamma}{x} dx = 0$$

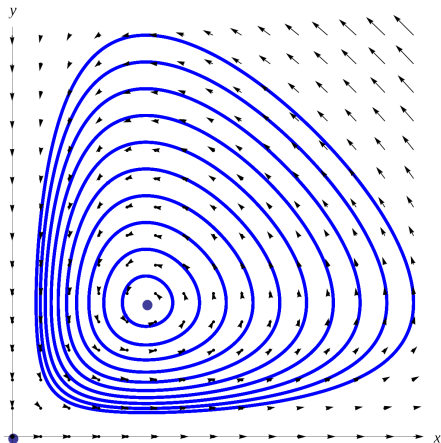
dając rozwiązanie w postaci funkcji uwikłanej:

$$\delta x - \gamma \ln x + \beta y - \alpha \ln y = V \in \text{const.}$$

lub

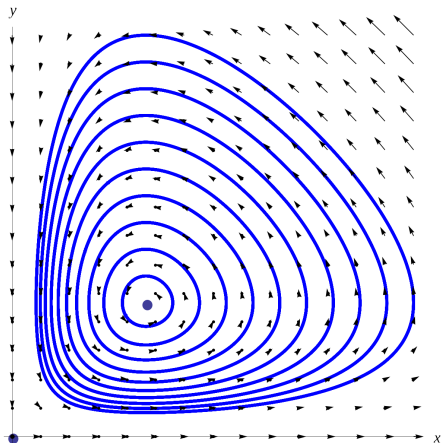
$$\frac{x^\gamma y^\alpha}{e^{\delta x + \beta y}} = e^{-V} \equiv K$$

Układ Lotki-Volterra — drapieżnik-ofiara



*Można też otrzymać rozwiązanie wyrażone poprzez funkcję specjalną W Lamberta.

Układ Lotki-Volterra — drapieżnik-ofiara



Można tak przeskalować zmienne x, y, t parametrami $\alpha, \beta, \delta, \gamma$, że układ równań przyjmuje postać

$$\begin{cases} \dot{x} &= Ax(1-y) \\ \dot{y} &= y(x-1) \end{cases}$$

o rozwiązaniu*

$$\frac{xy^A}{e^{x+Ay}} = K \in \text{const.}$$

*Można też otrzymać rozwiązanie wyrażone poprzez funkcję specjalną W Lamberta.

Układ Lotki-Volterra — rywalizacja międzygatunkowa

Zadanie 23

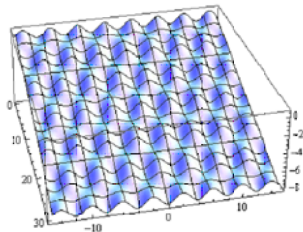
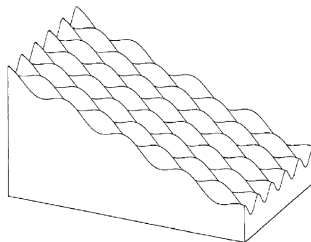
Rozważyć populacje królików i owiec, rywalizujących na ograniczonym obszarze o te same zasoby, opisanych układem dynamicznym

$$\begin{cases} \dot{x} &= x(3 - x) - 2xy \\ \dot{y} &= y(2 - y) - xy \end{cases}$$

Zbadać dynamikę tego modelu, tj. określić stabilność punktów stałych i naszkicować portret fazowy.

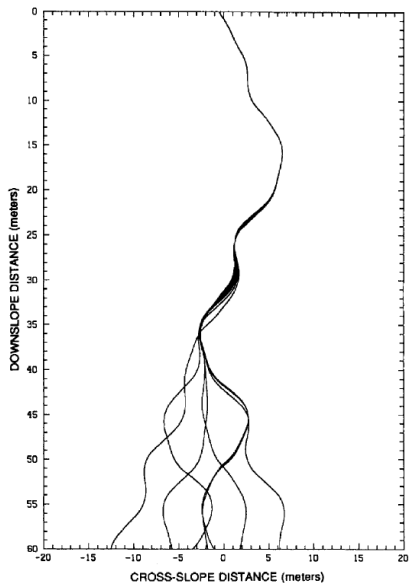


$$H(x, y) = -ax - b \cos(px) \cos(qy)$$



⁸Lorenz, The Essence of Chaos; Lurie, <https://arxiv.org/abs/0910.2213>

Modelowanie sanek



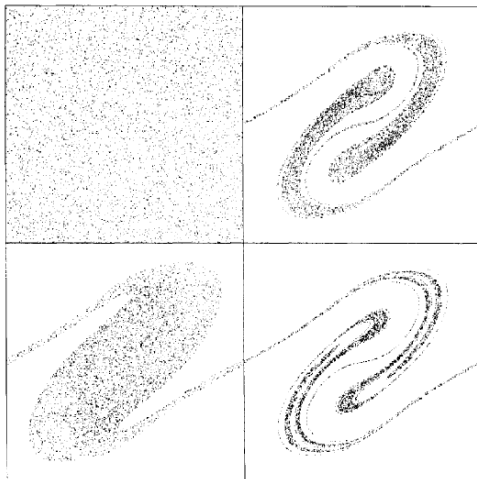
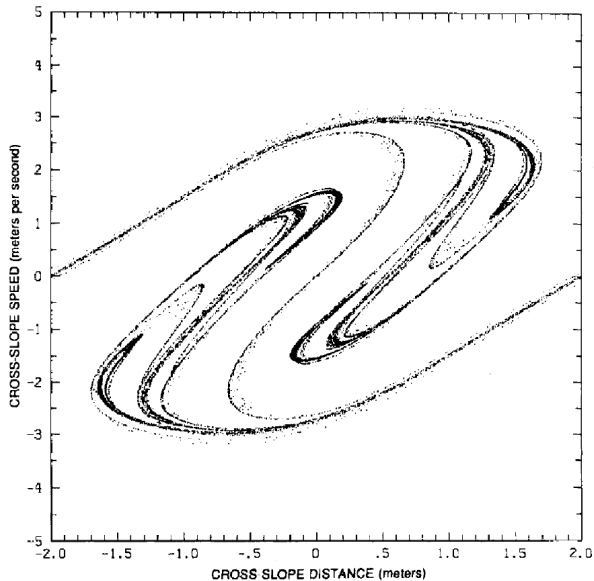
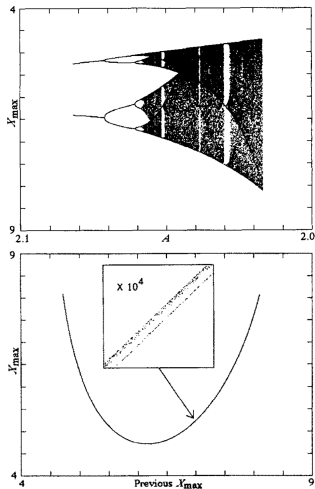


Figure 11. The upper left panel contains randomly chosen points representing the cross-slope positions and speeds of five-thousand sleds, all located on the same west-east line. The lower left and then the upper right and lower right panels represent the positions and speeds of the same sleds after they have traveled 5 and then 10 and 15 meters down the slope.



Najprostszy chaotyczny układ dynamiczny⁹

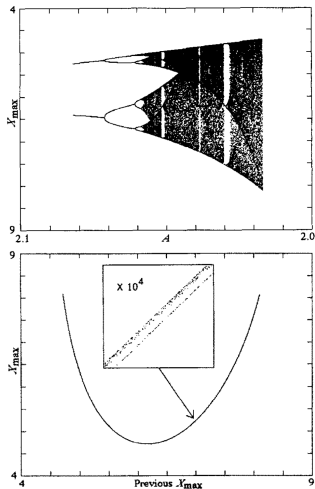
$$\ddot{x} + A\ddot{x} - \dot{x}^2 + x = 0$$



⁹z ciągłą nieliniowością; Sprott, Phys. Lett. A 228, 271 (1997)

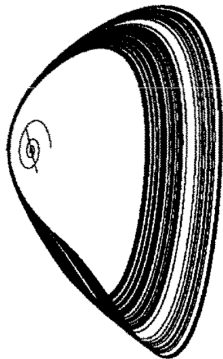
Najprostszy chaotyczny układ dynamiczny⁹

$$\ddot{x} + A\ddot{x} - \dot{x}^2 + x = 0$$



Zadanie 24

Przekształcić równanie ruchu do postaci układu dynamicznego i zbadać stabilność punktu stałego. (Wskazówka: twierdzenie Routha-Hurwitza.)



⁹z ciągłą nieliniowością; Sprott, Phys. Lett. A 228, 271 (1997)