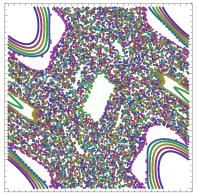
Wprowadzenie do teorii chaosu

Wykład 3: odwzorowania dwuwymiarowe

Mariusz Tarnopolski

Instytut Astronomii UMK

Chaos ©2022



Odwzorowania 2D

- 1D odwzorowanie $f : x_n \to x_{n+1} = f(x_n)$
- 2D odwzorowanie $\mathbf{M} : (x_n, y_n) \to (x_{n+1}, y_{n+1}) = \mathbf{M}(x_n, y_n)$

[1] Powiązanie między liczbami Fibonacciego a diagramem bifurkacyjnym odwzorowania logistycznego: Linage et al., Phys. Lett. A 359, 638-639 (2006)

Odwzorowania 2D

- 1D odwzorowanie $f : x_n \to x_{n+1} = f(x_n)$
- 2D odwzorowanie $\mathbf{M} : (x_n, y_n) \to (x_{n+1}, y_{n+1}) = \mathbf{M}(x_n, y_n)$

Rozważmy liczby Fibonacciego[1] jako przykład odwzorowania liniowego:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1},$$

gdzie $F_0 = 0$, $F_1 = 1$. Zmieńmy nazwy: $x_n = F_n$, $y_n = F_{n-1}$.

[1] Powiązanie między liczbami Fibonacciego a diagramem bifurkacyjnym odwzorowania logistycznego: Linage et al., Phys. Lett. A 359, 638-639 (2006)

Odwzorowania 2D

- 1D odwzorowanie $f : x_n \to x_{n+1} = f(x_n)$
- 2D odwzorowanie $\mathbf{M} : (x_n, y_n) \to (x_{n+1}, y_{n+1}) = \mathbf{M}(x_n, y_n)$

Rozważmy liczby Fibonacciego[1] jako przykład odwzorowania liniowego:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1},$$

gdzie $F_0 = 0$, $F_1 = 1$. Zmieńmy nazwy: $x_n = F_n$, $y_n = F_{n-1}$. Wtedy:

$$\begin{cases} x_{n+1} &= x_n + y_n \\ y_{n+1} &= x_n \end{cases}$$

gdzie $x_1 = 1$, $y_1 = 0$.

[1] Powiązanie między liczbami Fibonacciego a diagramem bifurkacyjnym odwzorowania logistycznego: Linage et al., Phys. Lett. A 359, 638-639 (2006)

Odwzorowania 2D

- 1D odwzorowanie $f : x_n \to x_{n+1} = f(x_n)$
- 2D odwzorowanie $\mathbf{M} : (x_n, y_n) \to (x_{n+1}, y_{n+1}) = \mathbf{M}(x_n, y_n)$

Rozważmy liczby Fibonacciego[1] jako przykład odwzorowania liniowego:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1},$$

gdzie $F_0 = 0$, $F_1 = 1$. Zmieńmy nazwy: $x_n = F_n$, $y_n = F_{n-1}$. Wtedy:

$$\begin{cases} x_{n+1} &= x_n + y_n \\ y_{n+1} &= x_n \end{cases}$$

gdzie $x_1 = 1$, $y_1 = 0$. Jest to układ postaci

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n,$$

gdzie $\mathbf{x}_n = (x_n, y_n)^\intercal$, $\mathbf{x}_1 = (1, 0)^\intercal$ oraz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

[1] Powiązanie między liczbami Fibonacciego a diagramem bifurkacyjnym odwzorowania logistycznego: Linage et al., Phys. Lett. A 359, 638-639 (2006)

Odwzorowania 2D

- 1D odwzorowanie $f : x_n \to x_{n+1} = f(x_n)$
- 2D odwzorowanie $\mathbf{M} : (x_n, y_n) \to (x_{n+1}, y_{n+1}) = \mathbf{M}(x_n, y_n)$

Rozważmy liczby Fibonacciego[1] jako przykład odwzorowania liniowego:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1},$$

gdzie $F_0 = 0$, $F_1 = 1$. Zmieńmy nazwy: $x_n = F_n$, $y_n = F_{n-1}$. Wtedy:

$$\begin{cases} x_{n+1} &= x_n + y_n \\ y_{n+1} &= x_n \end{cases}$$

gdzie $x_1 = 1$, $y_1 = 0$. Jest to układ postaci

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n,$$

gdzie $\mathbf{x}_n = (x_n, y_n)^\intercal$, $\mathbf{x}_1 = (1, 0)^\intercal$ oraz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ogólnym rozwiązaniem jest

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{x}_1 \qquad (*)$$

[1] Powiązanie między liczbami Fibonacciego a diagramem bifurkacyjnym odwzorowania logistycznego: Linage et al., Phys. Lett. A 359, 638-639 (2006)

Odwzorowania 2D

Istnieje macierz $\mathbf{J}$ podobna do $\mathbf{A}$, czyli taka, że[2]

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1},$$

gdzie kolumnami $\mathbf{P} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ są wektory własne. Zatem zachodzi

$$\mathbf{A}^{n-1} = \mathbf{P}\mathbf{J}^{n-1}\mathbf{P}^{-1} \qquad (**)$$

[2] W tym przykładzie – diagonalna; w ogólności jest to klatka Jordana.

Odwzorowania 2D

Istnieje macierz $\mathbf{J}$ podobna do $\mathbf{A}$, czyli taka, że[2]

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1},$$

gdzie kolumnami $\mathbf{P} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ są wektory własne. Zatem zachodzi

$$\mathbf{A}^{n-1} = \mathbf{P}\mathbf{J}^{n-1}\mathbf{P}^{-1} \qquad (**)$$

Wartości własne macierzy $\mathbf{A}$ to

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

oraz odpowiadające wektory własne

$$\mathbf{u}_{1,2} = (\lambda_{1,2},\, 1)^{\mathsf{T}}$$

[2] W tym przykładzie – diagonalna; w ogólności jest to klatka Jordana.

Odwzorowania 2D

Istnieje macierz $\mathbf{J}$ podobna do $\mathbf{A}$, czyli taka, że[2]

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1},$$

gdzie kolumnami $\mathbf{P} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ są wektory własne. Zatem zachodzi

$$\mathbf{A}^{n-1} = \mathbf{P}\mathbf{J}^{n-1}\mathbf{P}^{-1} \qquad (**)$$

Wartości własne macierzy $\mathbf{A}$ to

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

oraz odpowiadające wektory własne

$$\mathbf{u}_{1,2} = (\lambda_{1,2},\, 1)^{\mathsf{T}}$$

Podstawiając do $(**)$, a następnie do $(*)$ otrzymujemy

$$x_n \equiv F_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left[\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n\right]$$

[2] W tym przykładzie – diagonalna; w ogólności jest to klatka Jordana.

Wykładniki Lapunowa[3]

Rozważmy N-wymiarowe odwzorowanie $\mathbf{M}$ (dopuszczając by było nieliniowe):

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{M}(\mathbf{y}_n)$$

[3] Ott, Chaos in Dynamical Systems

Wykładniki Lapunowa[3]

Rozważmy N-wymiarowe odwzorowanie $\mathbf{M}$ (dopuszczając by było nieliniowe):

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{M}(\mathbf{y}_n)$$

oraz infinitezymalny wektor odchylenia (*deviation vector*; należący do przestrzeni stycznej) $\mathbf{w}_n$ w punkcie $\mathbf{y}_n$.

[3] Ott, Chaos in Dynamical Systems

Wykładniki Lapunowa[3]

Rozważmy N-wymiarowe odwzorowanie $\mathbf{M}$ (dopuszczając by było nieliniowe):

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{M}(\mathbf{y}_n)$$

oraz infinitezymalny wektor odchylenia (*deviation vector*; należący do przestrzeni stycznej) $\mathbf{w}_n$ w punkcie $\mathbf{y}_n$. Wtedy

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{DM}(\mathbf{y}_n) \cdot \mathbf{w}_n,$$

gdzie $\mathbf{DM}(\mathbf{y}_n)$ jest jakobianem odwzorowania $\mathbf{M}$ w punkcie $\mathbf{y}_n$.

[3] Ott, Chaos in Dynamical Systems

Wykładniki Lapunowa[3]

Rozważmy N-wymiarowe odwzorowanie $\mathbf{M}$ (dopuszczając by było nieliniowe):

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{M}(\mathbf{y}_n)$$

oraz infinitezymalny wektor odchylenia (*deviation vector*; należący do przestrzeni stycznej) $\mathbf{w}_n$ w punkcie $\mathbf{y}_n$. Wtedy

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{DM}(\mathbf{y}_n) \cdot \mathbf{w}_n,$$

gdzie $\mathbf{DM}(\mathbf{y}_n)$ jest jakobianem odwzorowania $\mathbf{M}$ w punkcie $\mathbf{y}_n$. W 2D:

$$\mathbf{DM}(x_n, y_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

[3] Ott, Chaos in Dynamical Systems

Wykładniki Lapunowa[3]

Wtedy

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{DM}^n(\mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{w}_0$$

gdzie

$$\mathbf{DM}^n(\mathbf{y}_0) = \mathbf{DM}(\mathbf{y}_{n-1}) \cdot \mathbf{DM}(\mathbf{y}_{n-2}) \cdot \ldots \cdot \mathbf{DM}(\mathbf{y}_1) \cdot \mathbf{DM}(\mathbf{y}_0)$$

Wykładniki Lapunowa[3]

Wtedy

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{DM}^n(\mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{w}_0$$

gdzie

$$\mathbf{DM}^n(\mathbf{y}_0) = \mathbf{DM}(\mathbf{y}_{n-1}) \cdot \mathbf{DM}(\mathbf{y}_{n-2}) \cdot \ldots \cdot \mathbf{DM}(\mathbf{y}_1) \cdot \mathbf{DM}(\mathbf{y}_0)$$

$\mathbf{u}_n = \frac{\mathbf{w}_n}{|\mathbf{w}_n|}$ (wektor jednostkowy) określa kierunek względem $\mathbf{y}_n$. Weźmy pewien $\mathbf{u}_0$.

Wykładniki Lapunowa[3]

Wtedy

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{DM}^n(\mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{w}_0$$

gdzie

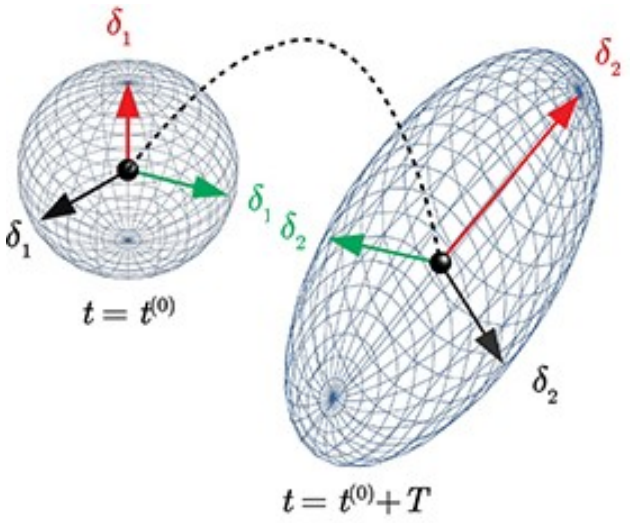
$$\mathbf{DM}^n(\mathbf{y}_0) = \mathbf{DM}(\mathbf{y}_{n-1}) \cdot \mathbf{DM}(\mathbf{y}_{n-2}) \cdot \ldots \cdot \mathbf{DM}(\mathbf{y}_1) \cdot \mathbf{DM}(\mathbf{y}_0)$$

$\mathbf{u}_n = \frac{\mathbf{w}_n}{|\mathbf{w}_n|}$ (wektor jednostkowy) określa kierunek względem $\mathbf{y}_n$. Weźmy pewien $\mathbf{u}_0$. Wtedy λ (wykładnik Lapunowa) w punkcie $\mathbf{y}_0$:

$$\lambda = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln \frac{|\mathbf{w}_n|}{|\mathbf{w}_0|} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln |\mathbf{DM}^n(\mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{u}_0| \equiv \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \ln |\mathbf{v}_n|$$

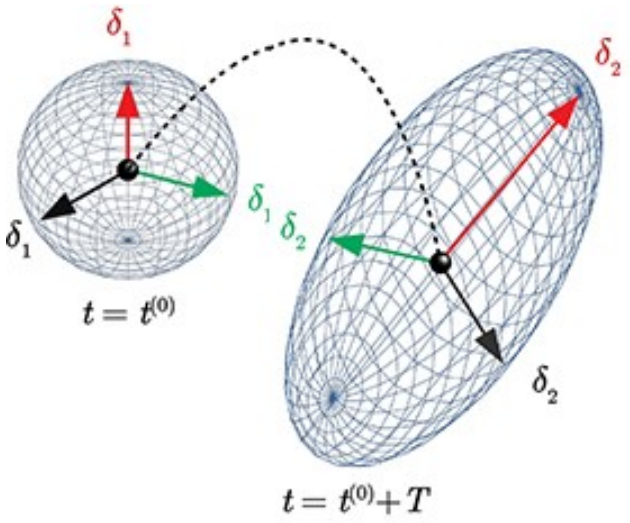
Wykładniki Lapunowa[3]

Rozważmy i-ty kierunek ortogonalny (N-wymiarowej przestrzeni):



Wykładniki Lapunowa[3]

Rozważmy i-ty kierunek ortogonalny (N-wymiarowej przestrzeni):

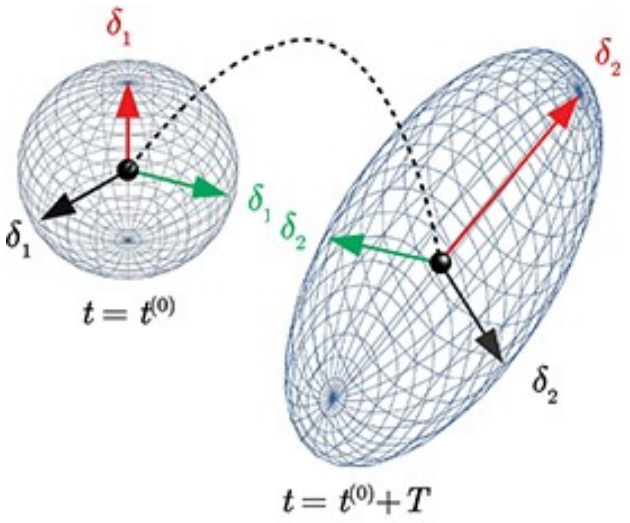


$$\begin{aligned}\lambda_i &\simeq \frac{1}{n}\ln\left|\mathbf{v}_n^i\right| \\ &= \frac{1}{n}\ln\sqrt{\left[\mathbf{DM}^n(\mathbf{y}_0)\cdot\mathbf{u}_0^i\right]^\intercal\cdot\left[\mathbf{DM}^n(\mathbf{y}_0)\cdot\mathbf{u}_0^i\right]} \\ &\equiv \frac{1}{2n}\ln\left[\left(\mathbf{u}_0^i\right)^\intercal\cdot\mathbf{H}_n(\mathbf{y}_0)\cdot\mathbf{u}_0^i\right] = \frac{1}{2n}\ln h_i,\end{aligned}$$

gdzie $\mathbf{H}_n(\mathbf{y}_0) = [\mathbf{DM}^n(\mathbf{y}_0)]^\intercal\,\mathbf{DM}^n(\mathbf{y}_0)$, zaś h_i jest i-tą wartością własną.

Wykładniki Lapunowa[3]

Rozważmy i-ty kierunek ortogonalny (N-wymiarowej przestrzeni):

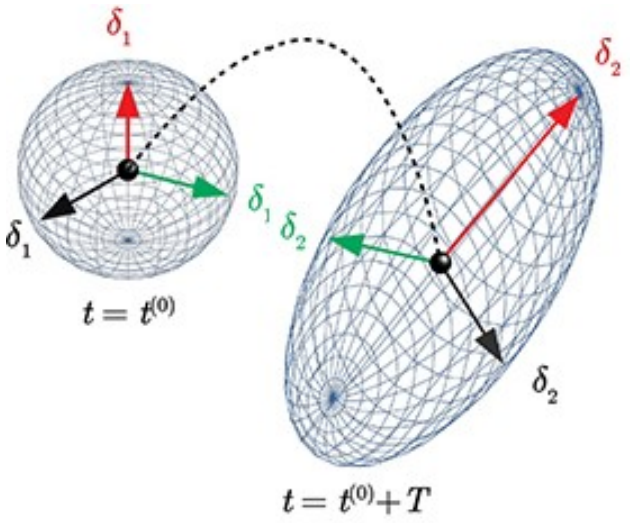


$$\begin{aligned}\lambda_i &\simeq \frac{1}{n}\ln\left|\mathbf{v}_n^i\right| \\ &= \frac{1}{n}\ln\sqrt{\left[\mathbf{DM}^n(\mathbf{y}_0)\cdot\mathbf{u}_0^i\right]^\intercal\cdot\left[\mathbf{DM}^n(\mathbf{y}_0)\cdot\mathbf{u}_0^i\right]} \\ &\equiv \frac{1}{2n}\ln\left[\left(\mathbf{u}_0^i\right)^\intercal\cdot\mathbf{H}_n(\mathbf{y}_0)\cdot\mathbf{u}_0^i\right] = \frac{1}{2n}\ln h_i,\end{aligned}$$

gdzie $\mathbf{H}_n(\mathbf{y}_0) = [\mathbf{DM}^n(\mathbf{y}_0)]^\intercal\,\mathbf{DM}^n(\mathbf{y}_0)$, zaś h_i jest i-tą wartością własną. $\mathbf{H}_n(\mathbf{y}_0)$ jest hermitowska nieujemnie określona, więc $h_i \geqslant 0$, zaś wektory własne można wybrać tak by były rzeczywiste.

Wykładniki Lapunowa[3]

Rozważmy i-ty kierunek ortogonalny (N-wymiarowej przestrzeni):



$$\begin{aligned}\lambda_i &\simeq \frac{1}{n}\ln\left|\mathbf{v}_n^i\right| \\ &= \frac{1}{n}\ln\sqrt{\left[\mathbf{DM}^n(\mathbf{y}_0)\cdot\mathbf{u}_0^i\right]^\intercal\cdot\left[\mathbf{DM}^n(\mathbf{y}_0)\cdot\mathbf{u}_0^i\right]} \\ &\equiv \frac{1}{2n}\ln\left[\left(\mathbf{u}_0^i\right)^\intercal\cdot\mathbf{H}_n(\mathbf{y}_0)\cdot\mathbf{u}_0^i\right] = \frac{1}{2n}\ln h_i,\end{aligned}$$

gdzie $\mathbf{H}_n(\mathbf{y}_0) = [\mathbf{DM}^n(\mathbf{y}_0)]^\intercal\,\mathbf{DM}^n(\mathbf{y}_0)$, zaś h_i jest i-tą wartością własną. $\mathbf{H}_n(\mathbf{y}_0)$ jest hermitowska nieujemnie określona, więc $h_i \geqslant 0$, zaś wektory własne można wybrać tak by były rzeczywiste.

Wprowadzamy porządek: $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_N$.

Wykładniki Lapunowa[3]

W przypadku układów nieliniowych wybór arbitralnego $\mathbf{u}_0$ zazwyczaj będzie kombinacją liniową wektorów własnych $\{\mathbf{e}_i\}$ macierzy $\mathbf{H}_n(\mathbf{y}_0)$:

$$\mathbf{u}_0 = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{e}_i$$

Wykładniki Lapunowa[3]

W przypadku układów nieliniowych wybór arbitralnego $\mathbf{u}_0$ zazwyczaj będzie kombinacją liniową wektorów własnych $\{\mathbf{e}_i\}$ macierzy $\mathbf{H}_n(\mathbf{y}_0)$:

$$\mathbf{u}_0 = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{e}_i$$

Zatem

$$(\mathbf{u}_0)^\intercal \cdot \mathbf{H}_n(\mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{u}_0 = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2 \exp\left(2n\lambda_i\right)$$

Wykładniki Lapunowa[3]

W przypadku układów nieliniowych wybór arbitralnego $\mathbf{u}_0$ zazwyczaj będzie kombinacją liniową wektorów własnych $\{\mathbf{e}_i\}$ macierzy $\mathbf{H}_n(\mathbf{y}_0)$:

$$\mathbf{u}_0 = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{e}_i$$

Zatem

$$(\mathbf{u}_0)^\intercal \cdot \mathbf{H}_n(\mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{u}_0 = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2 \exp\left(2n\lambda_i\right)$$

Dla dostatecznie dużych n dominującym będzie człon z $i = 1$ jako powiązany z największym wykładnikiem Lapunowa λ_1.
Czyli powyższy algorytm efektywnie doprowadzi do dobrze określonej wartości h_1, zatem też λ_1.

Wykładniki Lapunowa[3]

W przypadku układów nieliniowych wybór arbitralnego $\mathbf{u}_0$ zazwyczaj będzie kombinacją liniową wektorów własnych $\{\mathbf{e}_i\}$ macierzy $\mathbf{H}_n(\mathbf{y}_0)$:

$$\mathbf{u}_0 = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{e}_i$$

Zatem

$$(\mathbf{u}_0)^\intercal \cdot \mathbf{H}_n(\mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{u}_0 = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2 \exp\left(2n\lambda_i\right)$$

Dla dostatecznie dużych n dominującym będzie człon z $i = 1$ jako powiązany z największym wykładnikiem Lapunowa λ_1.
Czyli powyższy algorytm efektywnie doprowadzi do dobrze określonej wartości h_1, zatem też λ_1. Żeby uzyskać pozostałe $\lambda_{i>1}$ należałoby się ograniczyć do podprzestrzeni ortogonalnej do $\mathbf{e}_1$, czyli sukcesywnie podstawiać $\alpha_1 = 0$. Dostaniemy wtedy λ_2 jako drugi największy wykładnik Lapunowa itd. aż do N.

Wykładniki Lapunowa[3]

W przypadku układów nieliniowych wybór arbitralnego $\mathbf{u}_0$ zazwyczaj będzie kombinacją liniową wektorów własnych $\{\mathbf{e}_i\}$ macierzy $\mathbf{H}_n(\mathbf{y}_0)$:

$$\mathbf{u}_0 = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i \mathbf{e}_i$$

Zatem

$$(\mathbf{u}_0)^\intercal \cdot \mathbf{H}_n(\mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{u}_0 = \sum_{i=1}^{N} \alpha_i^2 \exp\left(2n\lambda_i\right)$$

Dla dostatecznie dużych n dominującym będzie człon z $i = 1$ jako powiązany z największym wykładnikiem Lapunowa λ_1.
Czyli powyższy algorytm efektywnie doprowadzi do dobrze określonej wartości h_1, zatem też λ_1. Żeby uzyskać pozostałe $\lambda_{i>1}$ należałoby się ograniczyć do podprzestrzeni ortogonalnej do $\mathbf{e}_1$, czyli sukcesywnie podstawiać $\alpha_1 = 0$. Dostaniemy wtedy λ_2 jako drugi największy wykładnik Lapunowa itd. aż do N. W praktyce jednak można równocześnie uzyskać wszystkie λ stosując ortogonalizację Grama-Schmidta po każdej iteracji (zob. też wykład 4, slajdy 46–48).

Wykładniki Lapunowa

Zadanie 18

Obliczyć wykładniki Lapunowa dla odwzorowania Arnolda (*Arnold's cat map* lub *Anosov map*):

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \mod 1$$

Czy to odwzorowanie jest chaotyczne? Co gdyby pominąć $\mod 1$?

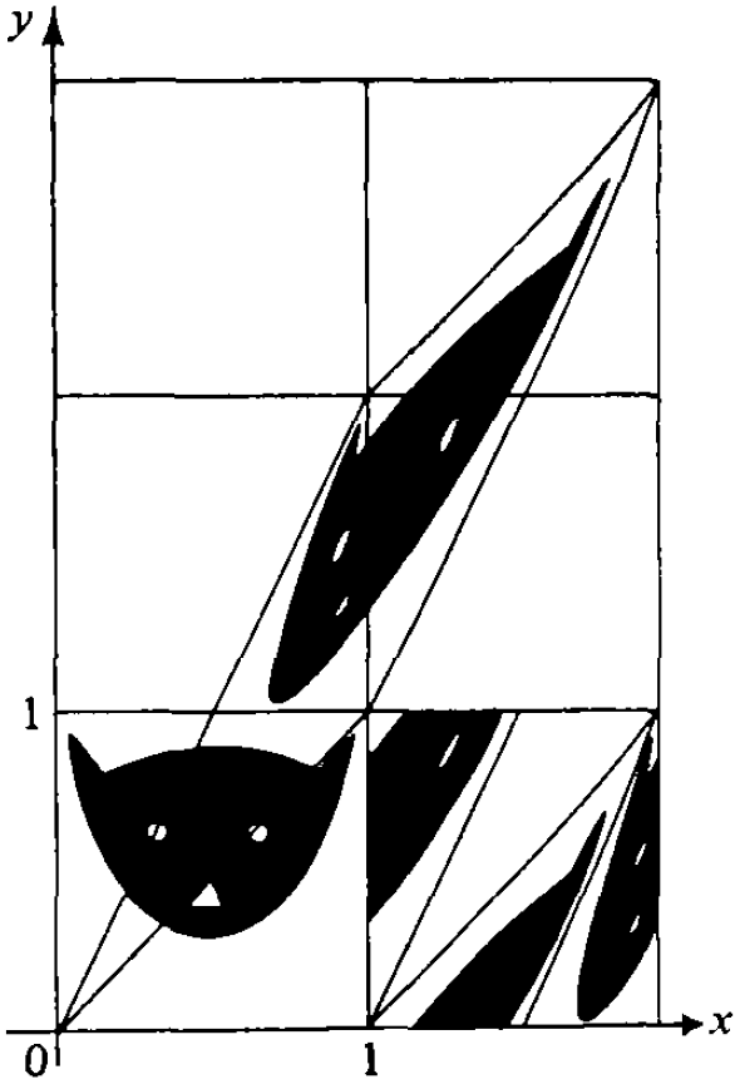
Wykładniki Lapunowa

Zadanie 18

Obliczyć wykładniki Lapunowa dla odwzorowania Arnolda (*Arnold's cat map* lub *Anosov map*):

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \mod 1$$

Czy to odwzorowanie jest chaotyczne? Co gdyby pominąć $\mod 1$?



Odwzorowania

zachowawcze (hamiltonowskie) i dyssypatywne

W ogólności, układy dynamiczne dzieli się na:

$$|\det \mathbf{DM}| = \begin{cases} < 1 & : \text{ dyssypatywne} \\ = 1 & : \text{ zachowawcze} \end{cases}$$

[Cf. zmiana zmiennych: $\mathrm{d}x\mathrm{d}y = |\det J|\mathrm{d}u\mathrm{d}v$.]

Odwzorowanie Hénona[4]

$$\begin{cases} x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 + y_n \\ y_{n+1} &= bx_n \end{cases}$$

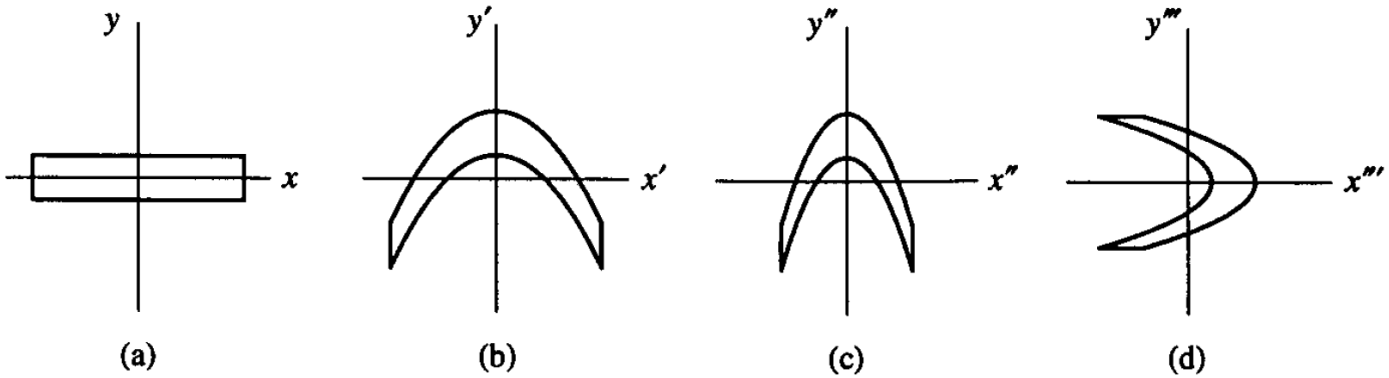
Zaprojektowane by łatwiej badać mechanizmy ściskania i rozciągania w układzie Lorenza (zob. wykład 4). Kanoniczne wartości: $a = 1.4, b = 0.3$.

[4] Hénon, Commun. Math. Phys. 50, 69-77 (1976)

Odwzorowanie Hénona[4]

$$\begin{cases} x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 + y_n \\ y_{n+1} &= bx_n \end{cases}$$

Zaprojektowane by łatwiej badać mechanizmy ściskania i rozciągania w układzie Lorenza (zob. wykład 4). Kanoniczne wartości: $a = 1.4, b = 0.3$. To odwzorowanie składa się z trzech transformacji ($T = T''' \circ T'' \circ T'$):



- b $T' \ : \quad x' = x, \qquad y' = 1 + y - ax^2$
- c $T'' \ : \quad x'' = bx', \quad y'' = y'$
- d $T''' \ : \quad x''' = y'', \quad y''' = x''$

[4] Hénon, Commun. Math. Phys. 50, 69-77 (1976)

Odwzorowanie Hénona

- Dwa punkty stałe: $\left\{x_{1,2} = \frac{b-1\pm\sqrt{(1-b)^2+4a}}{2a},\ y_{1,2} = bx_{1,2}\right\}$,
- rzeczywiste jeśli $a > -\frac{1}{4}(1-b)^2$.
- Jeden jest zawsze niestabilny; drugi staje się niestabilny gdy $a > \frac{3}{4}(1-b)^2$.

Odwzorowanie Hénona

- Dwa punkty stałe: $\left\{x_{1,2} = \frac{b-1\pm\sqrt{(1-b)^2+4a}}{2a},\ y_{1,2} = bx_{1,2}\right\}$,
- rzeczywiste jeśli $a > -\frac{1}{4}(1-b)^2$.
- Jeden jest zawsze niestabilny; drugi staje się niestabilny gdy $a > \frac{3}{4}(1-b)^2$.

Odwzorowanie Hénona

- Dwa punkty stałe: $\left\{x_{1,2} = \frac{b-1\pm\sqrt{(1-b)^2+4a}}{2a},\ y_{1,2} = bx_{1,2}\right\}$,
- rzeczywiste jeśli $a > -\frac{1}{4}(1-b)^2$.
- Jeden jest zawsze niestabilny; drugi staje się niestabilny gdy $a > \frac{3}{4}(1-b)^2$.

Odwzorowanie Hénona

Jakobian:

$$\det\mathbf{DM} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -2ax_n & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} = -b$$

$$|\det\mathbf{DM}| = |-b| : \begin{cases} < 1, & -1 < b < 1 \quad : \text{ dyssypatywne} \\ = 1, & b = \pm 1 \quad : \text{ zachowawcze} \end{cases}$$

Odwzorowanie Hénona

Jakobian:

$$\det\mathbf{DM} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -2ax_n & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} = -b$$

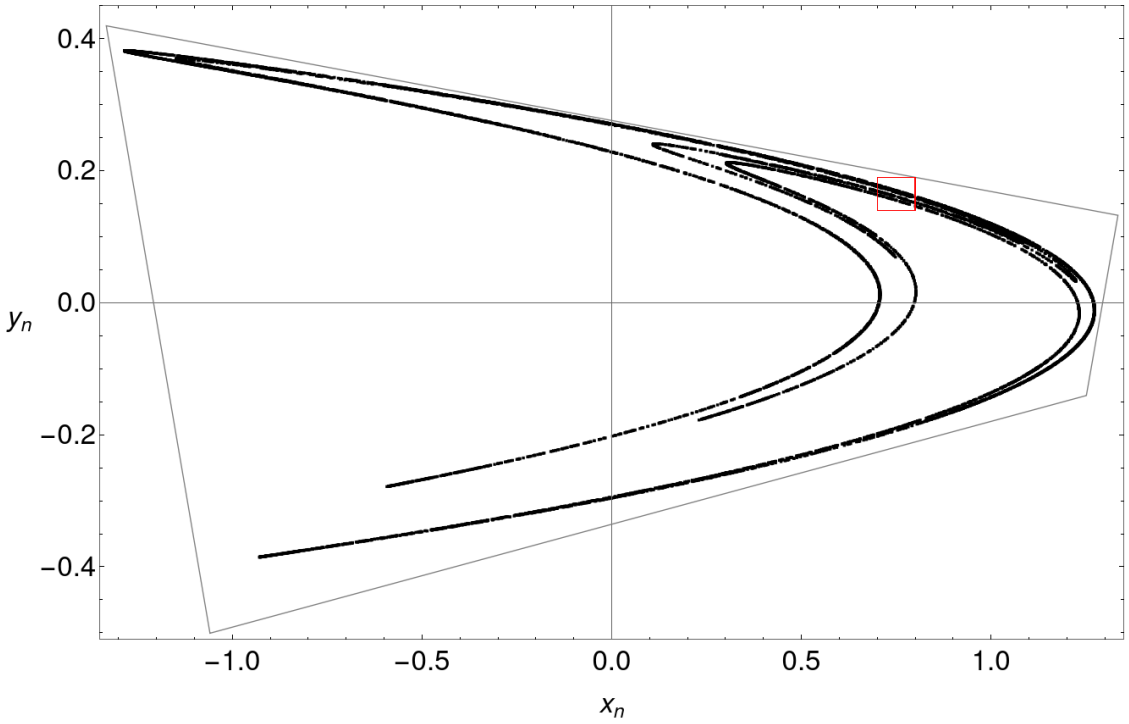
$$|\det\mathbf{DM}| = |-b| : \begin{cases} <1, & -1<b<1 \quad : \text{ dyssypatywne} \\ =1, & b=\pm 1 \quad : \text{ zachowawcze} \end{cases}$$

Zadanie 19

Zanalizować stabilność punktów stałych poprzez obliczenie wartości własnych ν jakobianu w tych punktach (przyjąć wartości kanoniczne): jeśli $|\nu| < 1$, to punkt stały jest stabilny; jeśli co najmniej jeden $|\nu| > 1$, to istnieje jakiś rodzaj niestabilności (por. $\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{DM}(\mathbf{y}_n) \cdot \mathbf{w}_n$ z $|\delta_{n+1}| = |f'(p)||\delta_n|$ z wykładu 2.; więcej szczegółów na wykładzie 4.).

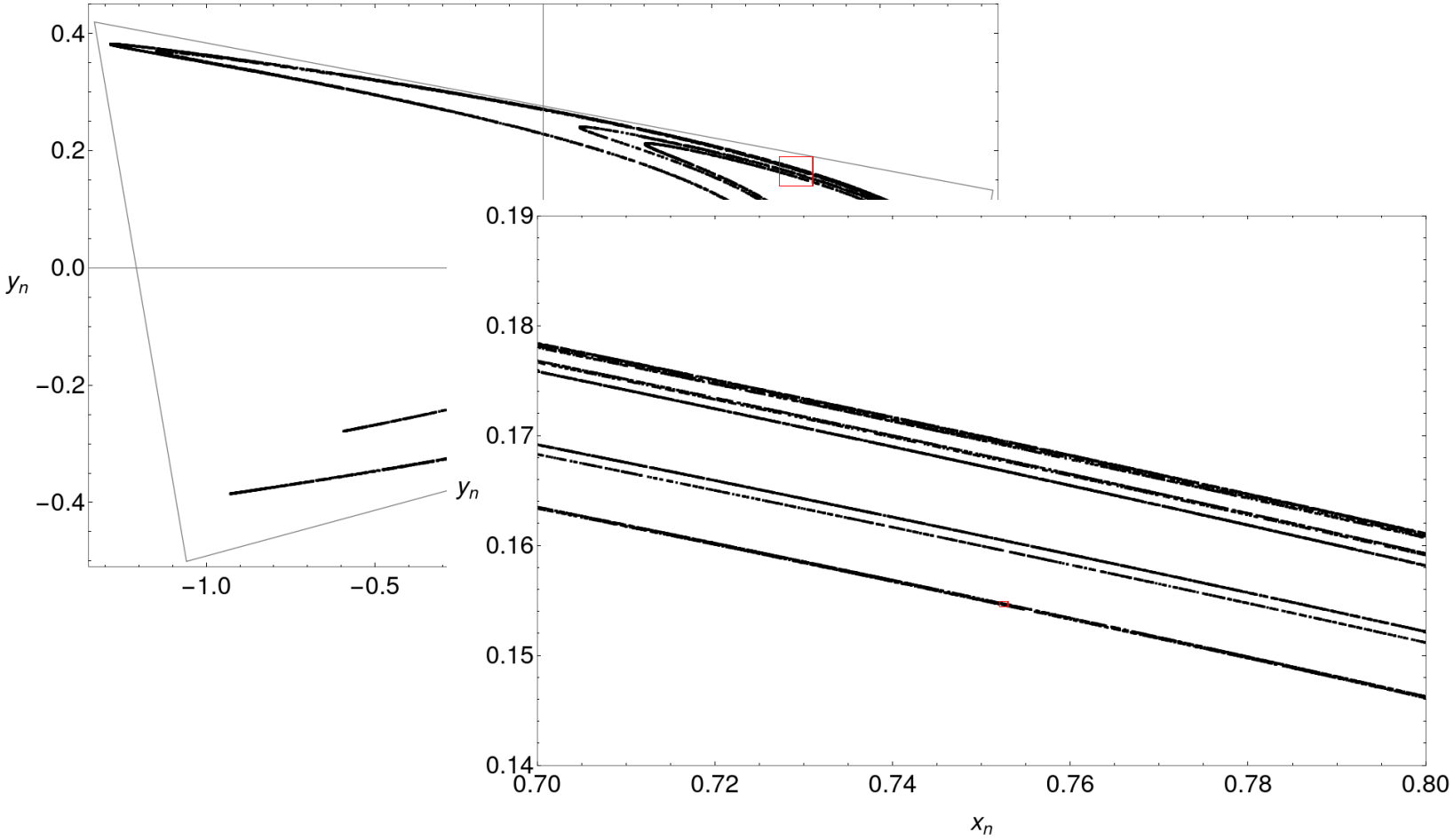
Odwzorowanie Hénona — dziwny atraktor

(więcej szczegółów na wykładzie 6.)



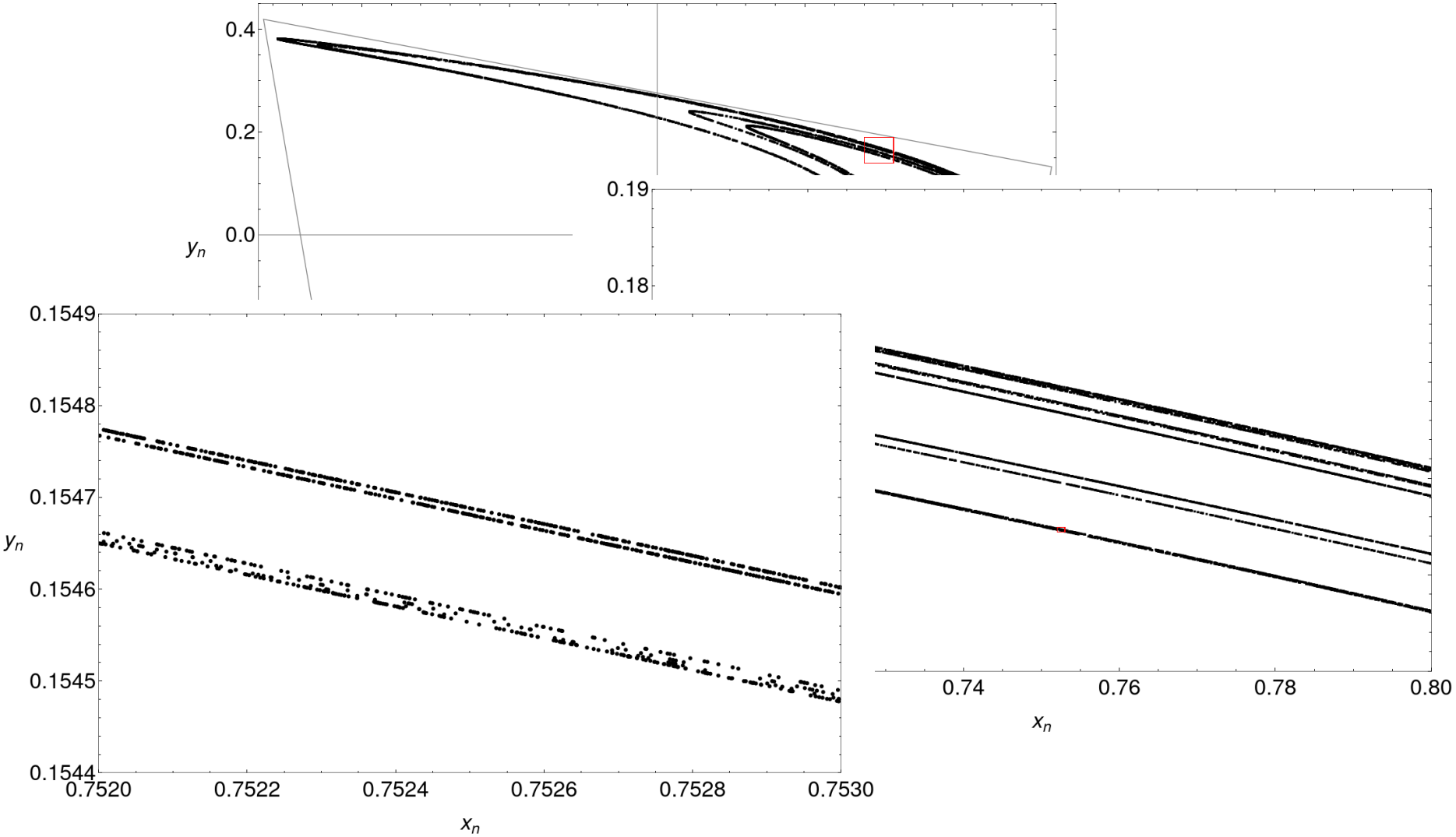
Odwzorowanie Hénona — dziwny atraktor

(więcej szczegółów na wykładzie 6.)



Odwzorowanie Hénona — dziwny atraktor

(więcej szczegółów na wykładzie 6.)



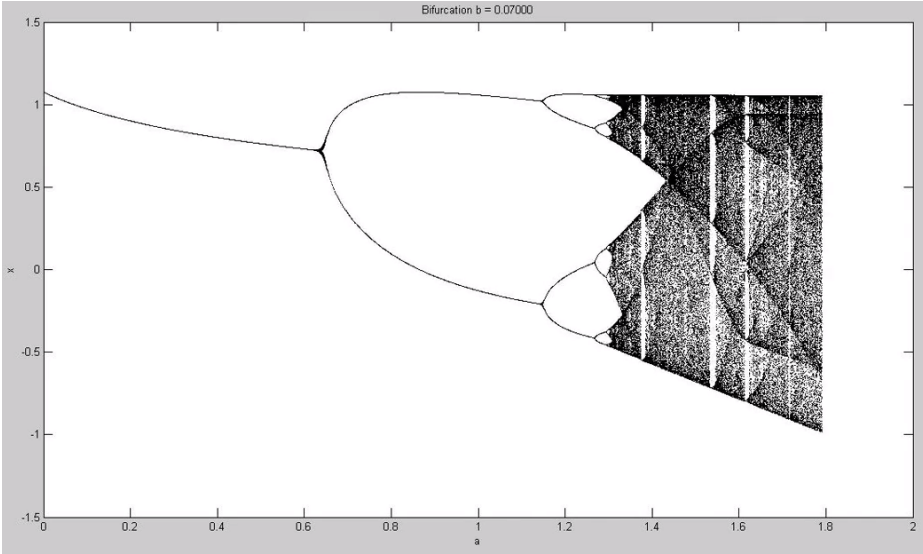
Odwzorowanie Hénona — obszar pułapkowania

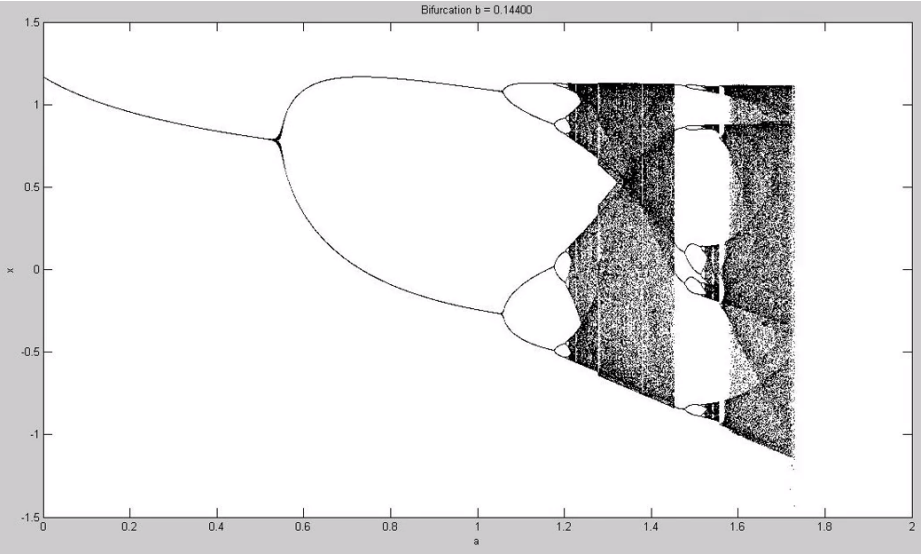
Odwzorowanie czworokąta $ABCD$:

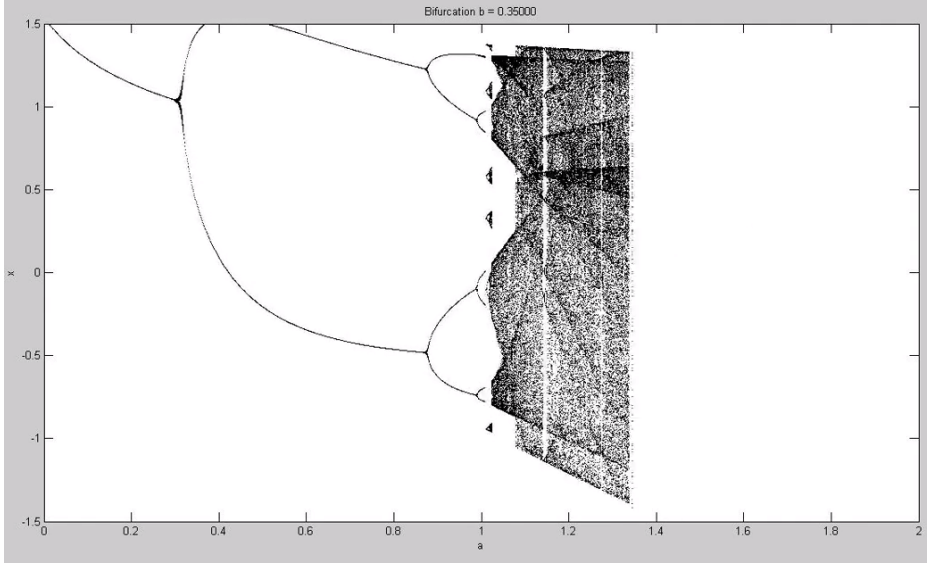
$$
\begin{aligned}
A &= (-1.33, 0.42) \\
B &= (1.32, 0.133) \\
C &= (1.245, -0.14) \\
D &= (-1.06, -0.5)
\end{aligned}
$$

odwzorowaniem Hénona zawiera się wewnątrz tego czworokąta, tj. $ABCD$ jest **obszarem pułapkowania** (*trapping region*) — $(x_0, y_0) \in ABCD$ prowadzi do ograniczonej orbity. (Łatwo znaleźć war. pocz. spoza $ABCD$, które uciekają do nieskończoności.)

Odwzorowanie Hénona — diagramy bifurkacyjne



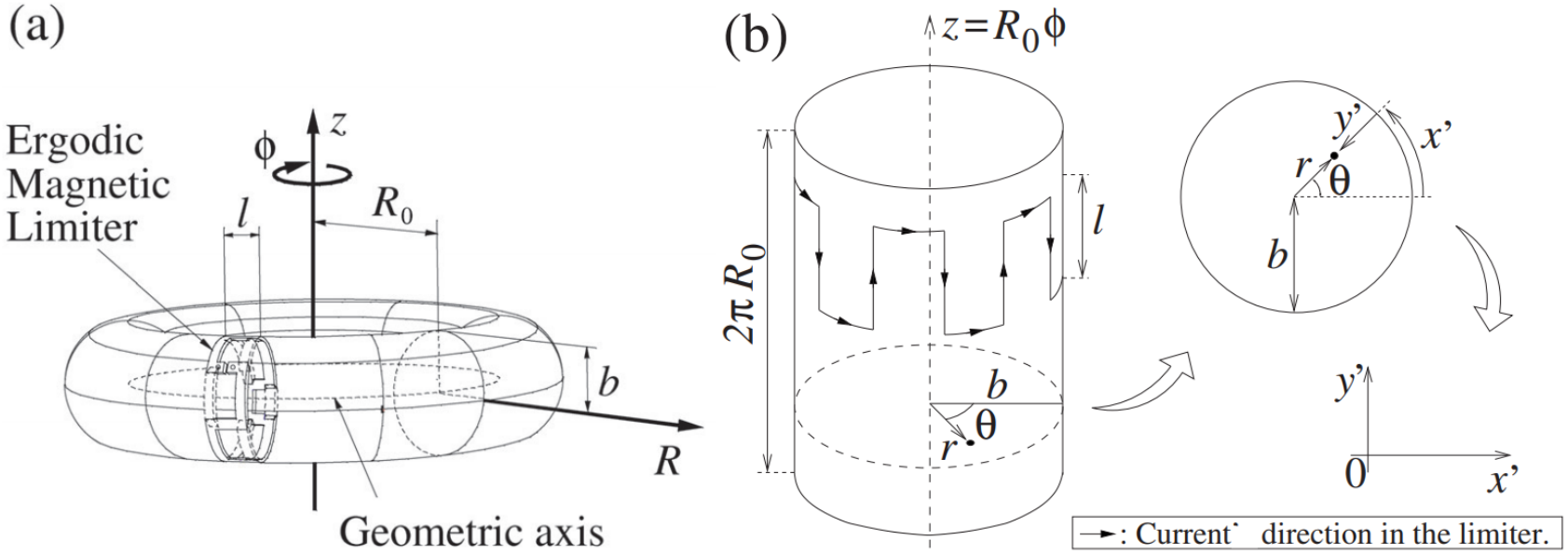




[5] https://www.youtube.com/watch?v=bmn6N5niYU4

Odwzorowanie Chirikowa (odwz. standardowe)

Uwięzienie plazmy w pułapce magnetycznej — *tokamaki* [6] (lata 1950').



Naładowana cząstka wirująca w polu $\vec{B}$ ma orbitalny moment magn. $\mu = v_\perp^2/2B$ antyrównoległy do $\vec{B}$, więc jeśli $\vec{B}$ nie jest jednorodne, to cząstka jest wypychana w obszary ze słabszym polem.

Np. $B(r) = B_0(1 + r^2)$, więc uwięzienie jest w $r \approx 0$.

[6] Portela, Caldas, Viana, Eur. Phys. J. Special Topics 165, 195–210 (2008)

Odwzorowanie Chirikowa (odwz. standardowe)

$$\begin{cases} r_{n+1} &= r_n + K\sin(\theta_n) \qquad \mod 2\pi \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + r_{n+1} \qquad \mod 2\pi \end{cases}$$

lub równoważnie

$$\begin{cases} r_{n+1} &= r_n + \frac{K}{2\pi}\sin(2\pi\theta_n) \qquad \mod 1 \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + r_{n+1} \qquad \mod 1 \end{cases}$$

Zatem trajektorie leżą na torusie, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, odwzorowywanym w kwadrat jednostkowy (ew. w $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$).

Odwzorowanie Chirikowa (odwz. standardowe)

$$\begin{cases} r_{n+1} &= r_n + K\sin(\theta_n) \qquad \mod 2\pi \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + r_{n+1} \qquad \mod 2\pi \end{cases}$$

lub równoważnie

$$\begin{cases} r_{n+1} &= r_n + \frac{K}{2\pi}\sin(2\pi\theta_n) \qquad \mod 1 \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + r_{n+1} \qquad \mod 1 \end{cases}$$

Zatem trajektorie leżą na torusie, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, odwzorowywanym w kwadrat jednostkowy (ew. w $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$). Jest to układ zachowawczy:

$$\det\mathbf{DM} = \det\begin{pmatrix} \frac{\partial r_{n+1}}{\partial r_n} & \frac{\partial r_{n+1}}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial r_n} & \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} 1 & K\cos(\theta_n) \\ 1 & 1 + K\cos(\theta_n) \end{pmatrix} = 1$$

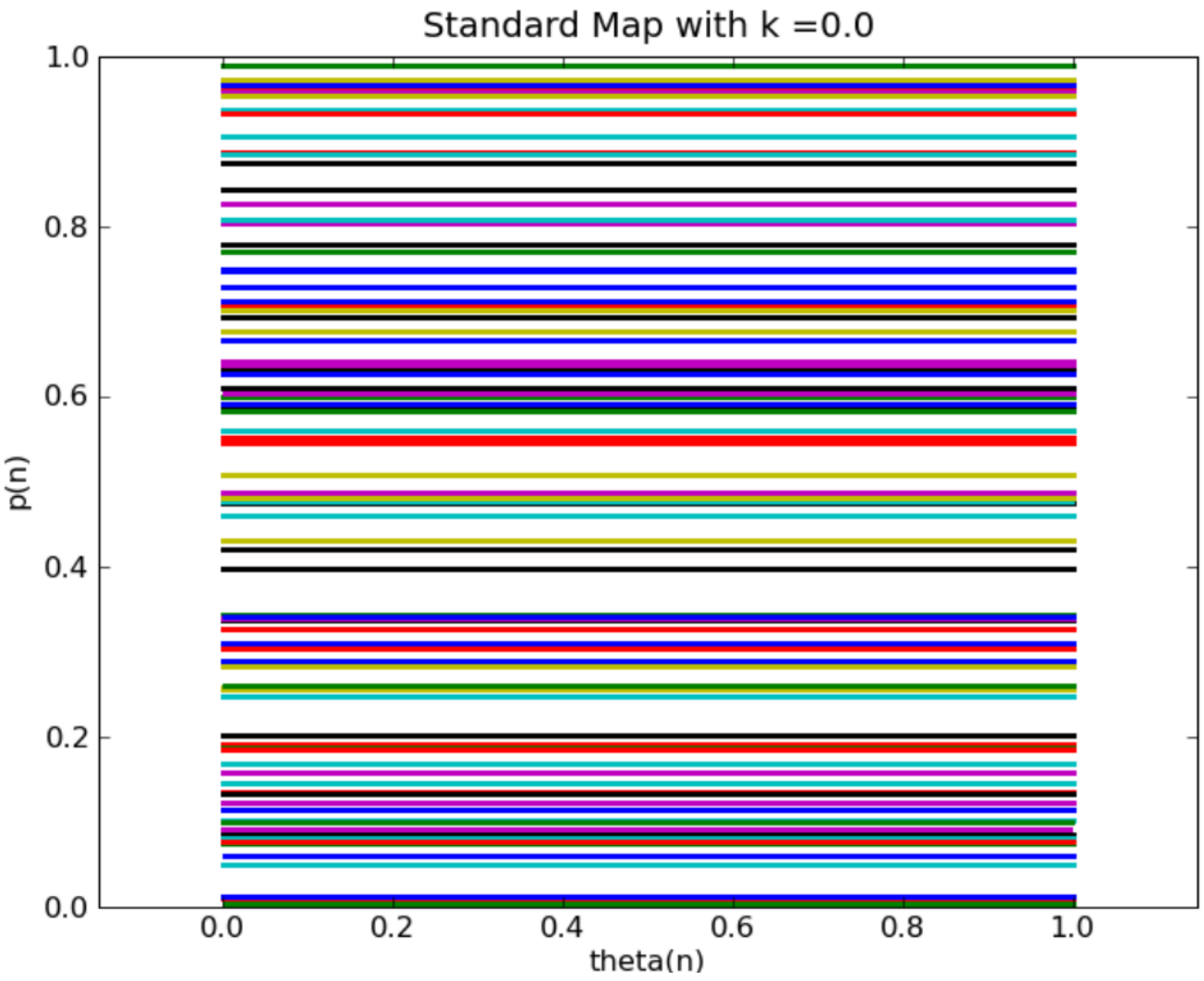
Odwzorowanie Chirikowa (odwz. standardowe)

Dla ustalonego r: $\theta_{n+1} = \theta_n + f(r)$.

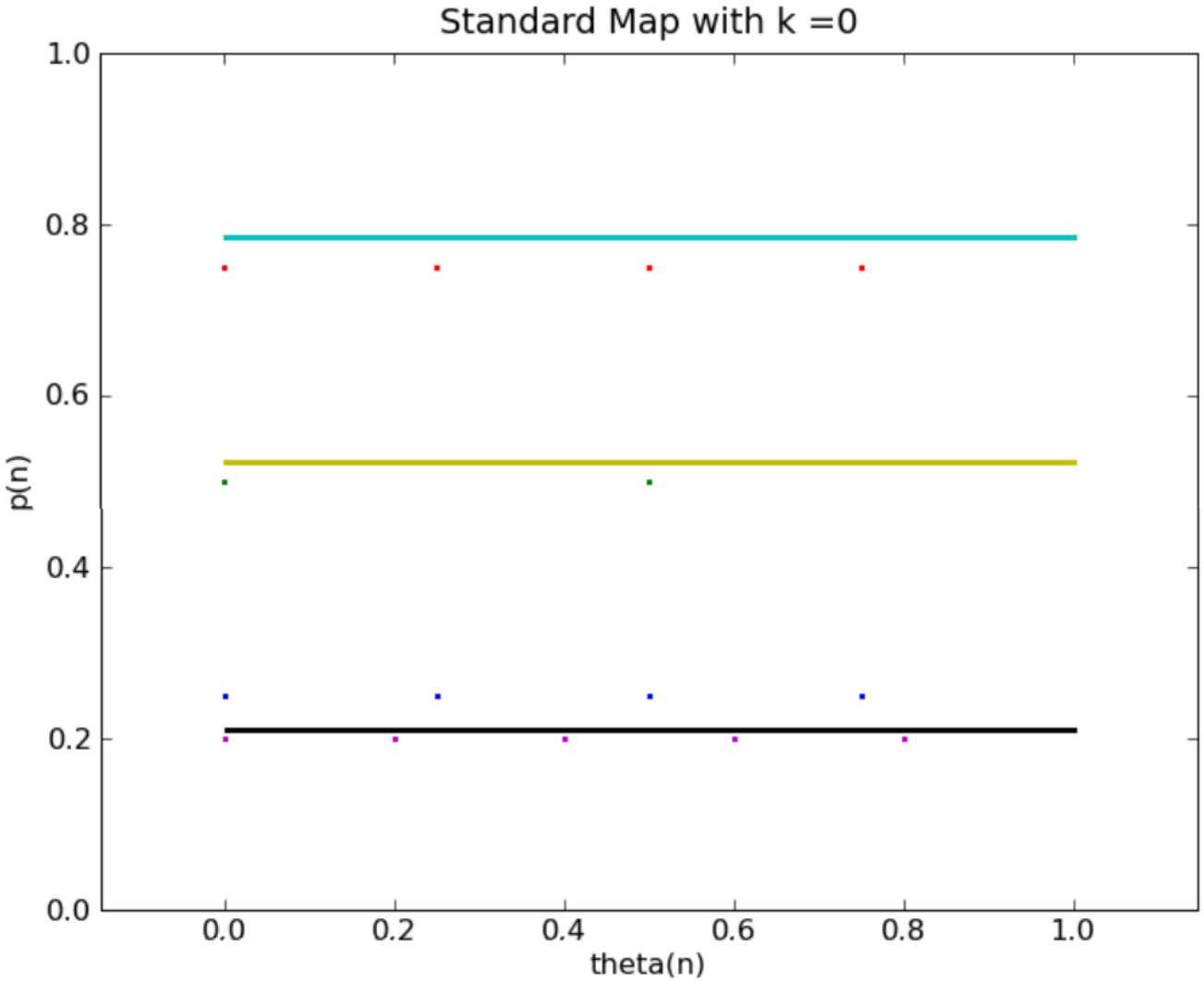
- $f(r)$ wymierne — orbity okresowe
- $f(r)$ niewymierne — orbity kwaziokresowe — torusy KAM.

Dla $K = 0$ jest $\theta_n = \theta_0 + nr_0$.
[$p \equiv r$ na następnych slajdach.]

Odwzorowanie Chirikowa (odwz. standardowe)

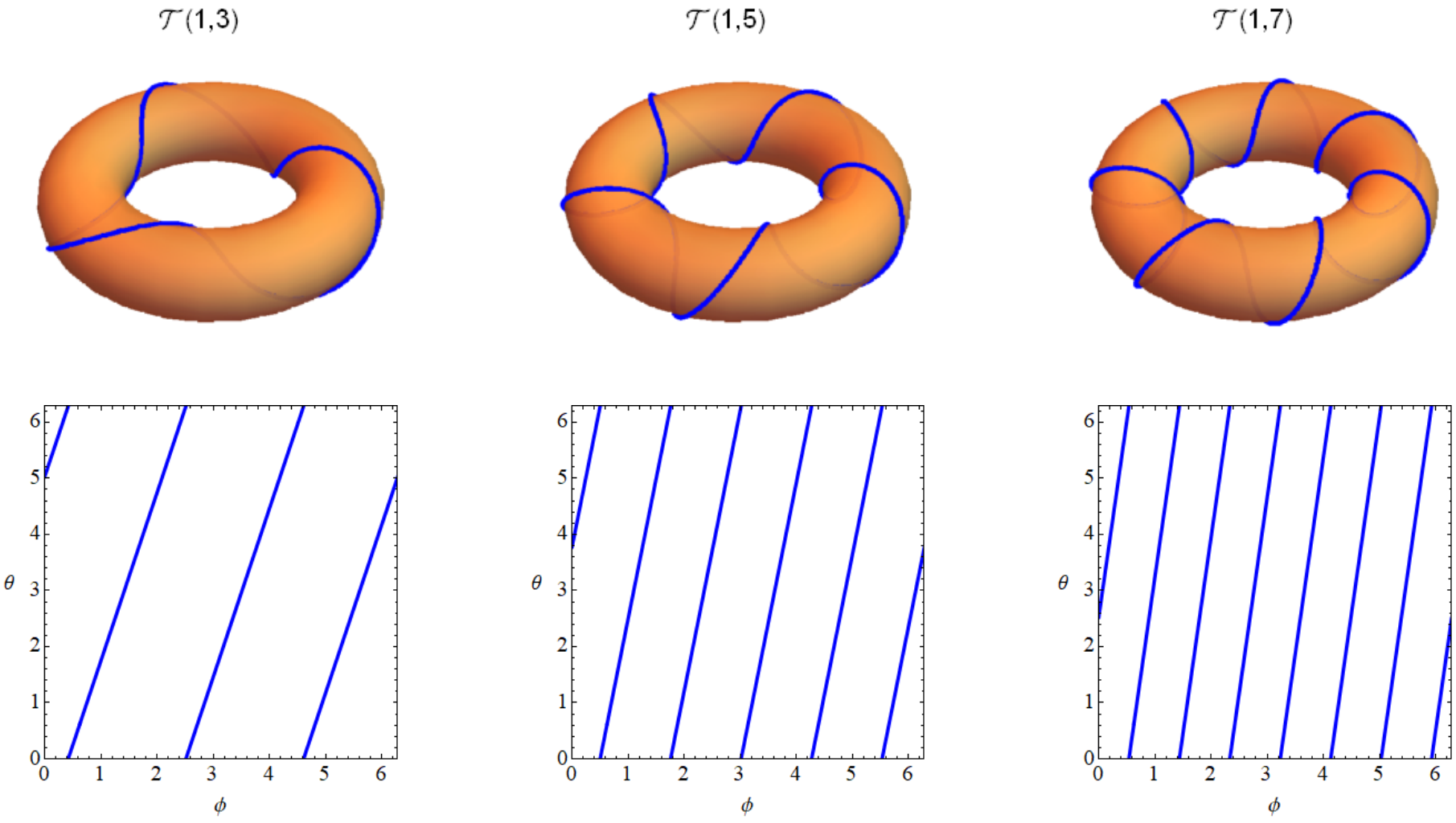


Odwzorowanie Chirikowa (odwz. standardowe)

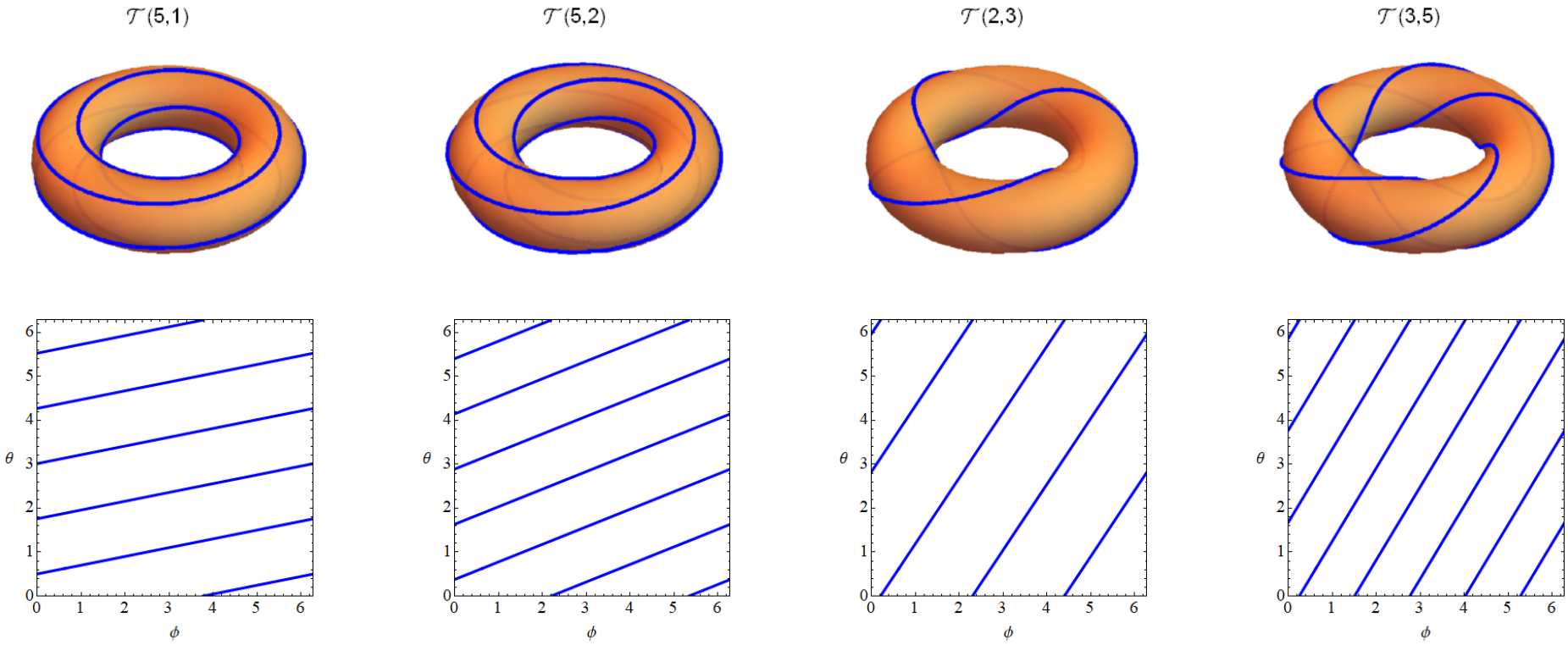


P_0 = π/4, 3/4, π/6, ½, ¼, π/15, 1/5

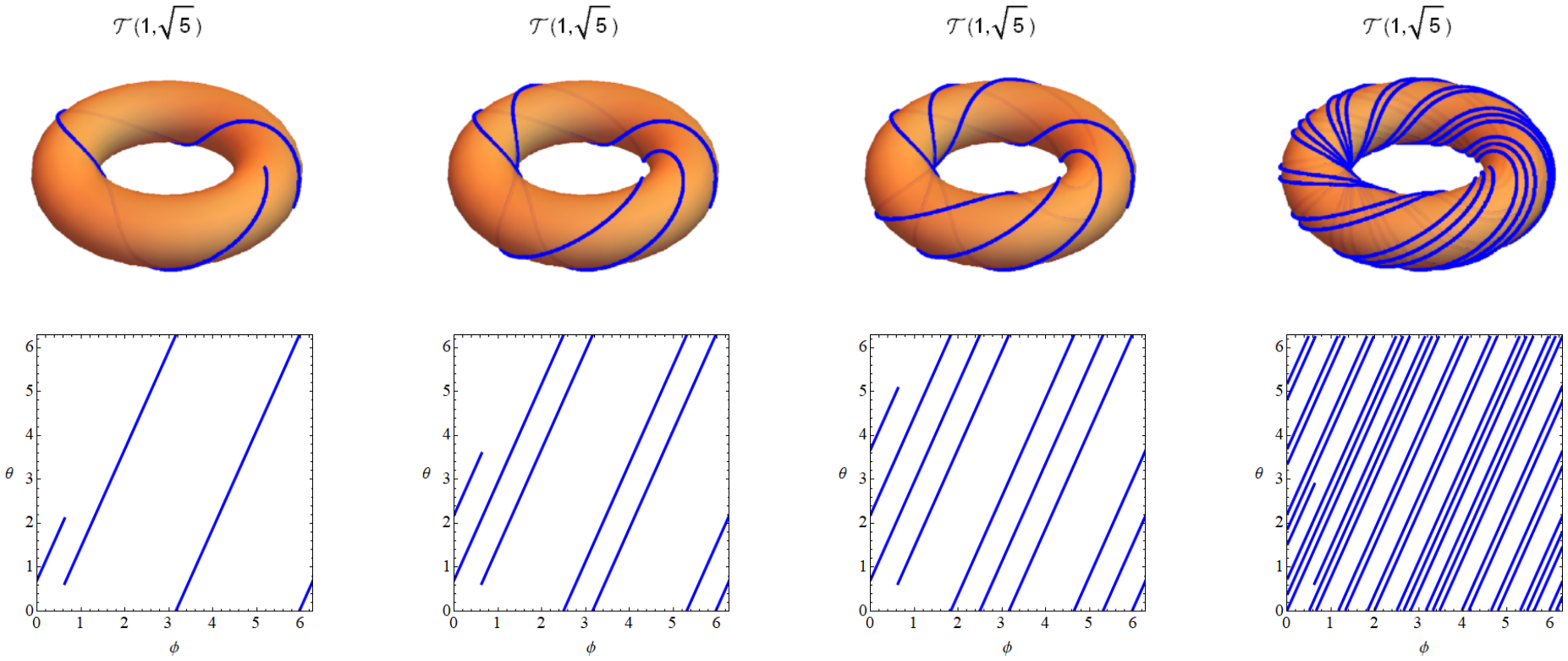
Ruch na torusie – okresowość



Ruch na torusie – okresowość

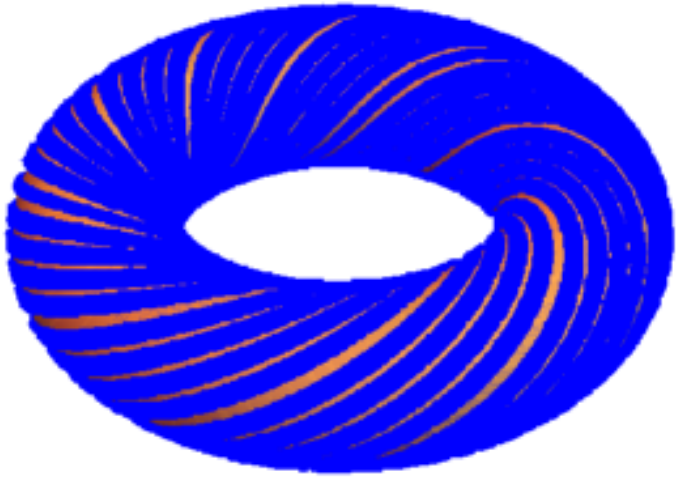


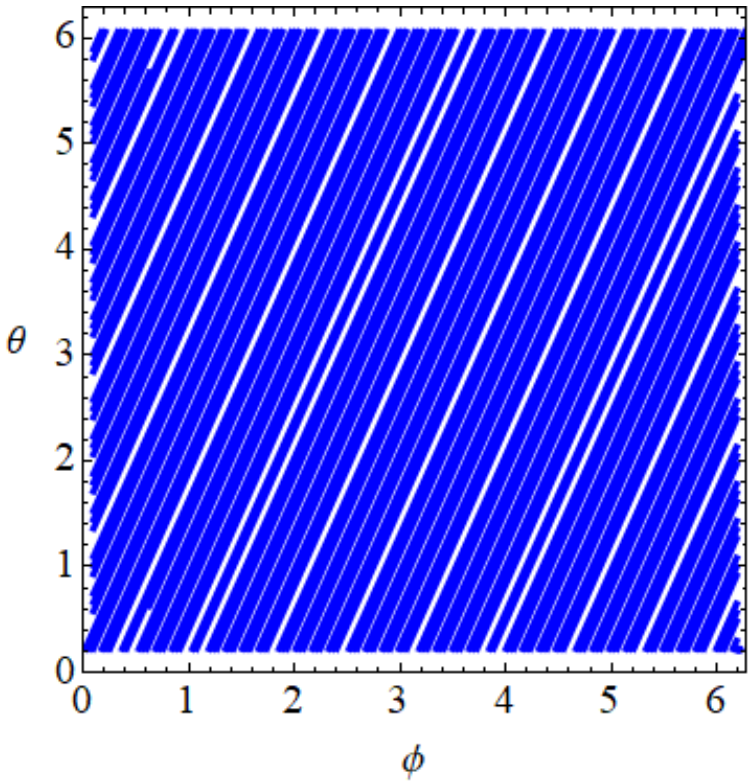
Ruch na torusie – quasiokresowość



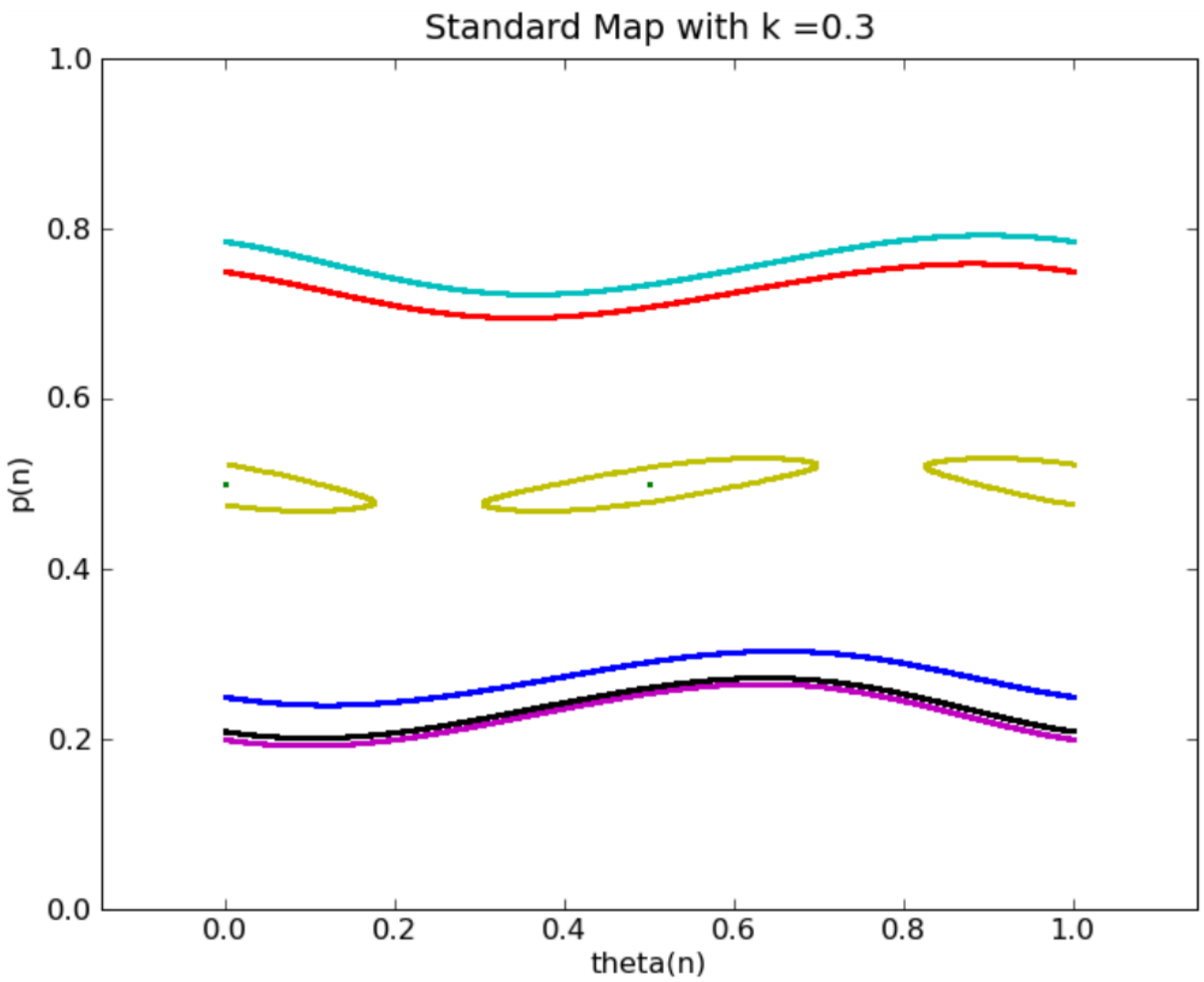
Ruch na torusie – quasiokresowość

$\mathcal{T}(1,\sqrt{5})$

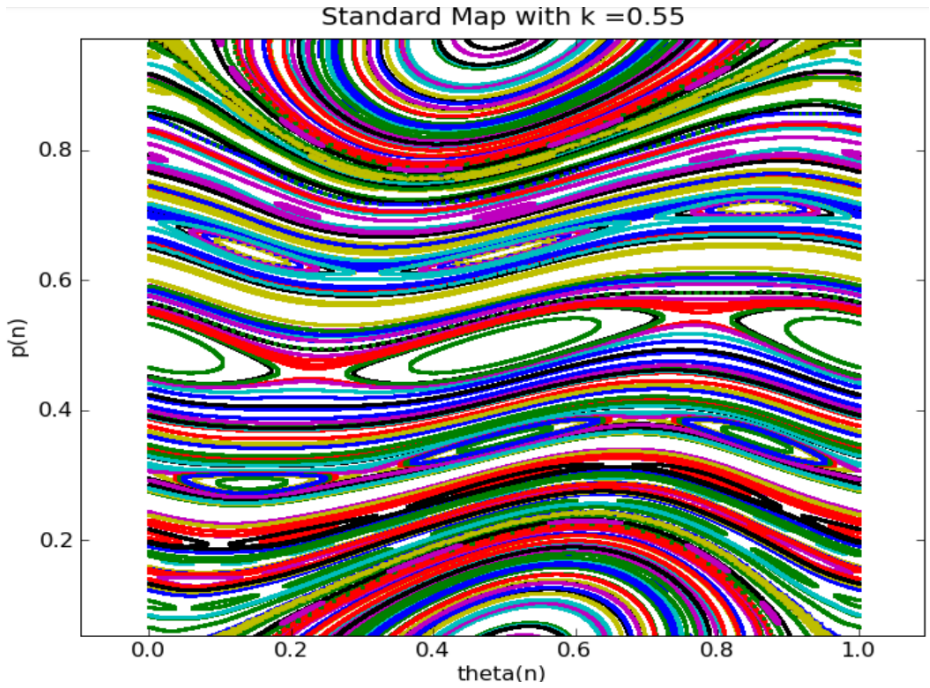


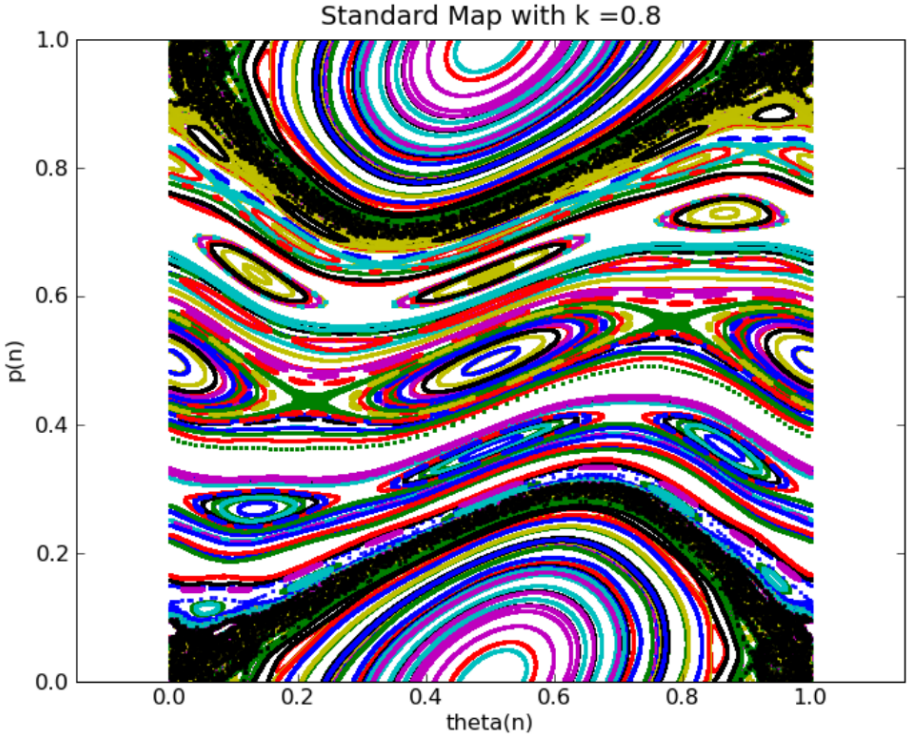


Odwzorowanie Chirikowa (odwz. standardowe)

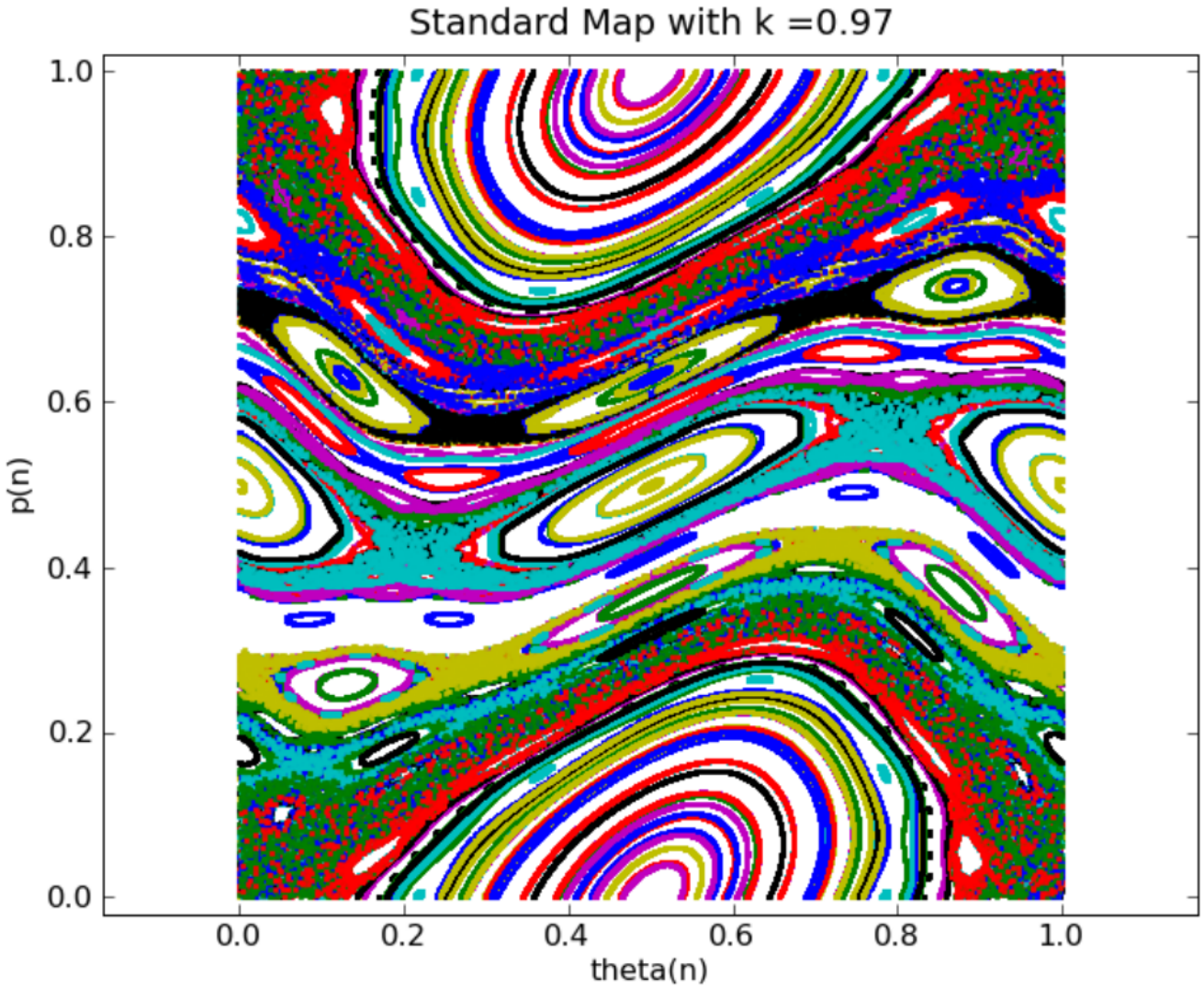


Odwzorowanie Chirikowa (odwz. standardowe)

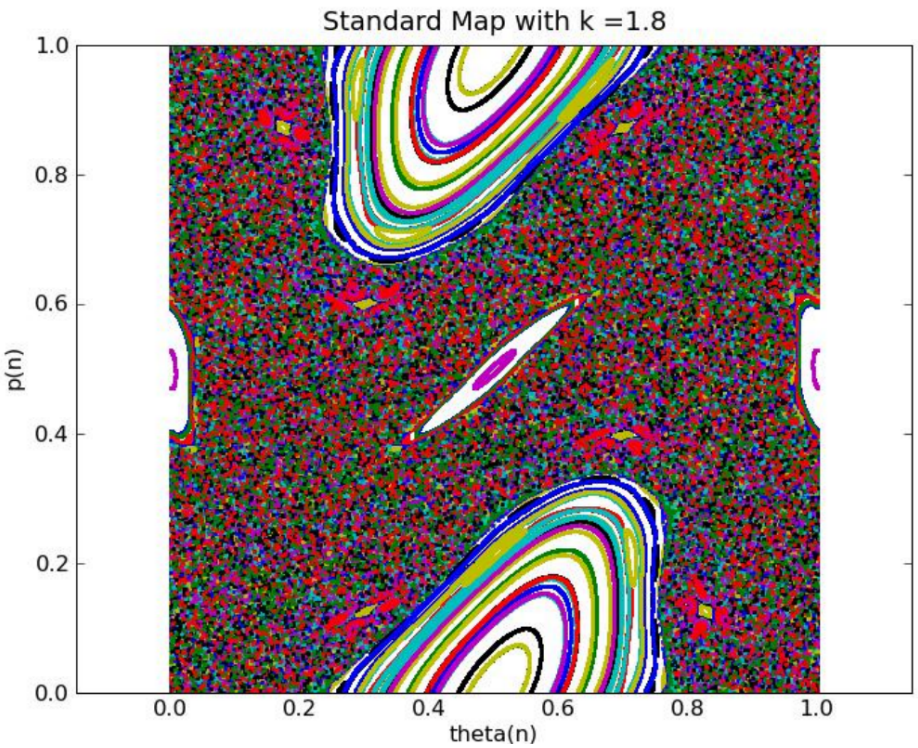


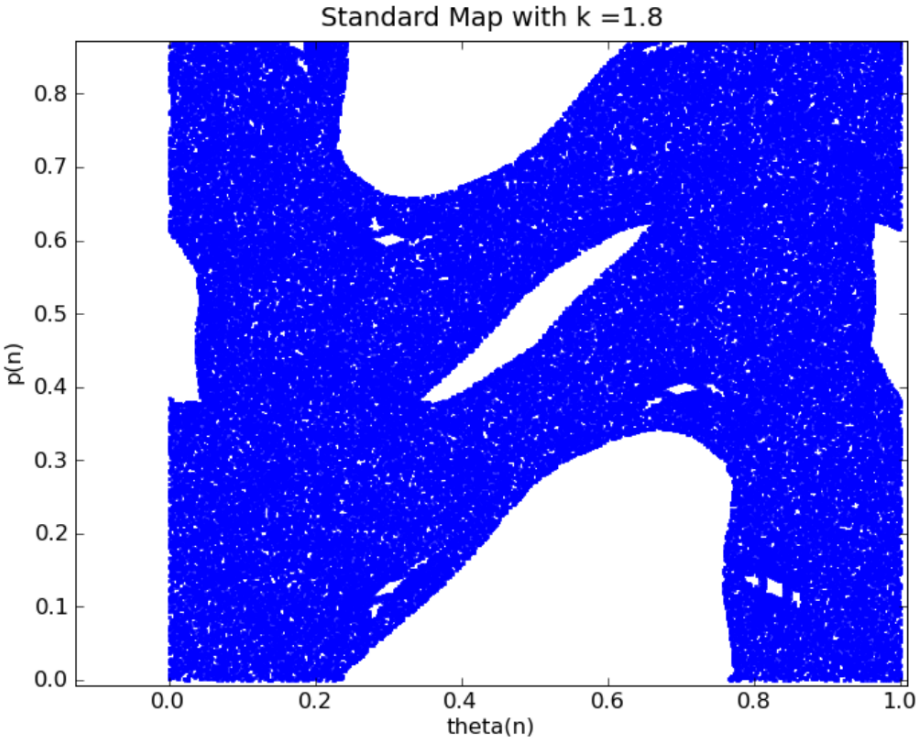


Odwzorowanie Chirikowa (odwz. standardowe)

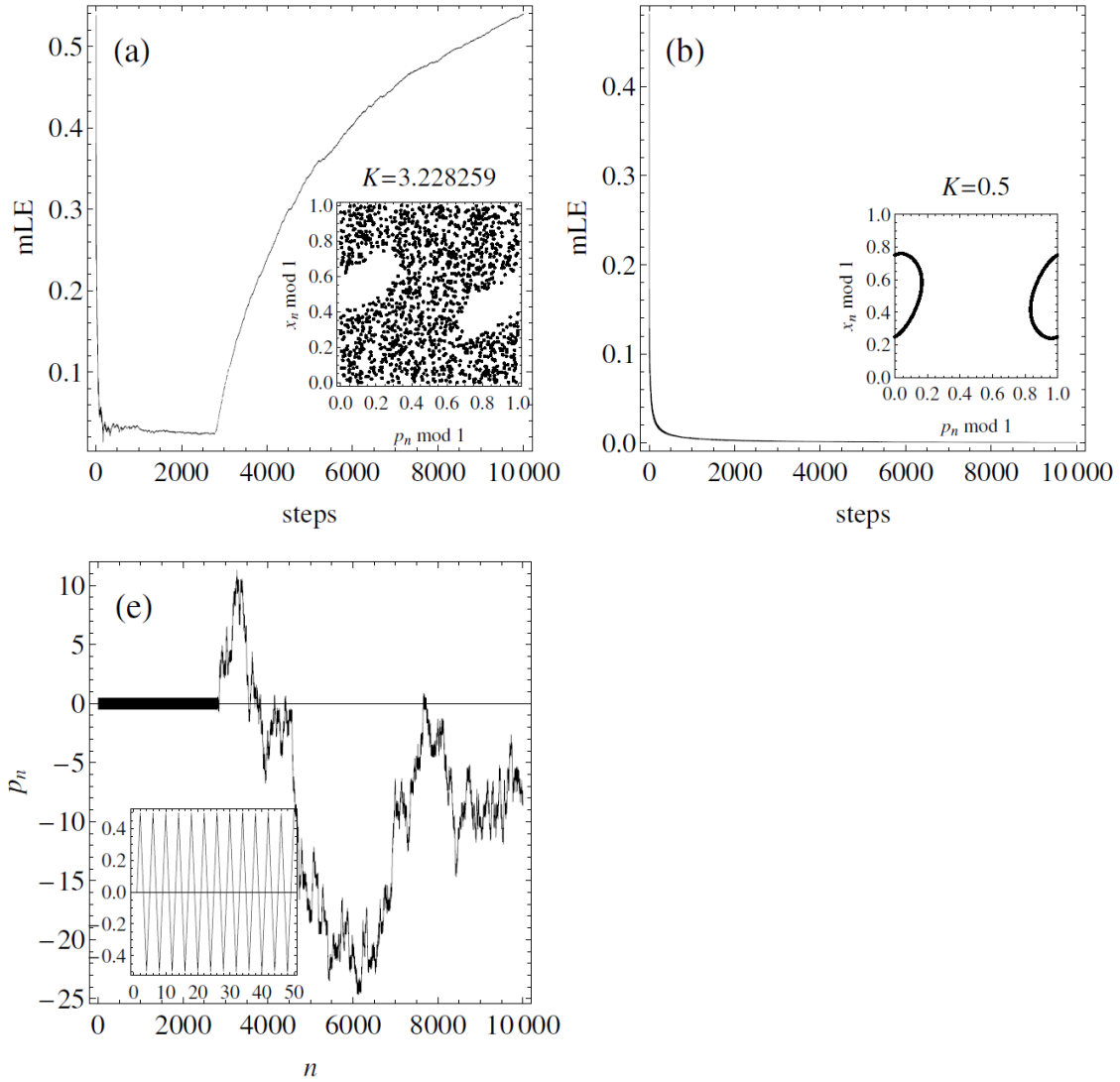


Odwzorowanie Chirikowa (odwz. standardowe)





Odwzorowanie Chirikowa — lepkie orbity (*sticky orbits*)



[7] MT, Phys. A 490, 834-844 (2018)

Odwzorowanie Chirikowa — rotor impulsowy

Położenie kątowe θ i pęd p.
K — natężenie impulsów. Hamiltonian:

$$\mathcal{H}(\theta, p, t) = \frac{1}{2}p^2 + K\cos\theta \sum_n \delta(t-n)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = p,\ \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = K\sin\theta \sum_n \delta(t-n)$$

czyli równanie ruchu przyjmuje postać

$$\ddot{\theta} = K\sin\theta \sum_n \delta(t-n) \qquad (*)$$

Odwzorowanie Chirikowa — rotor impulsowy

Położenie kątowe θ i pęd p.
K — natężenie impulsów. Hamiltonian:

$$\mathcal{H}(\theta, p, t) = \frac{1}{2}p^2 + K\cos\theta \sum_n \delta(t-n)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = p,\ \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = K\sin\theta \sum_n \delta(t-n)$$

czyli równanie ruchu przyjmuje postać

$$\ddot{\theta} = K\sin\theta \sum_n \delta(t-n) \qquad (*)$$

Impulsy następują w dyskretnych chwilach czasu n; przecałkujmy $(*)$ w przedziale $n < t < n+1$ — wewnątrz niego jest $\ddot{\theta} = 0$ (bo δ Diraca = 0), zatem $\dot{\theta} \in \mathrm{const.}$ — nazwijmy ją p_{n+1}. Zachodzi tedy (war. pocz. to $\theta(n)$ dla $t = n$)

$$\theta(t) = (t-n)p_{n+1} + \theta(n)$$

Odwzorowanie Chirikowa — rotor impulsowy

Dla $t = n + 1$ mamy, że $\theta(t) = (t - n)p_{n+1} + \theta(n)$ przyjmuje postać

$$\theta_{n+1} \equiv \theta(n+1) = (n + 1 - n)p_{n+1} + \theta_n = p_{n+1} + \theta_n$$

Przecałkujmy ponownie równ. ruchu $(*)$, teraz w przedziale $n - \varepsilon < t < n + \varepsilon$ (w domyśle chodzi o $\varepsilon \to 0$):

$$\int_{n-\varepsilon}^{n+\varepsilon} \ddot{\theta} dt - K \sin\theta = 0$$

Ponieważ $\dot{\theta}(n + \varepsilon) = p_{n+1}$ oraz $\dot{\theta}(n - \varepsilon) = p_n$, to

$$p_{n+1} - p_n - K \sin\theta_n = 0$$

czyli ponownie odwzorowanie Chirikowa[8]:

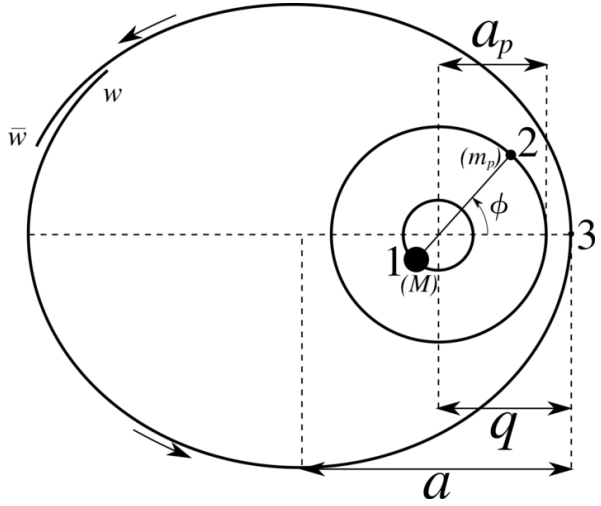
$$\begin{cases} \theta_{n+1} - \theta_n & = p_{n+1} \\ p_{n+1} - p_n & = K \sin\theta_n \end{cases}$$

[8] https://www.youtube.com/watch?v=liHV0hdT_Pg

Odwzorowanie Keplera

Zagadnienie trzech ciał z masą próbną m:

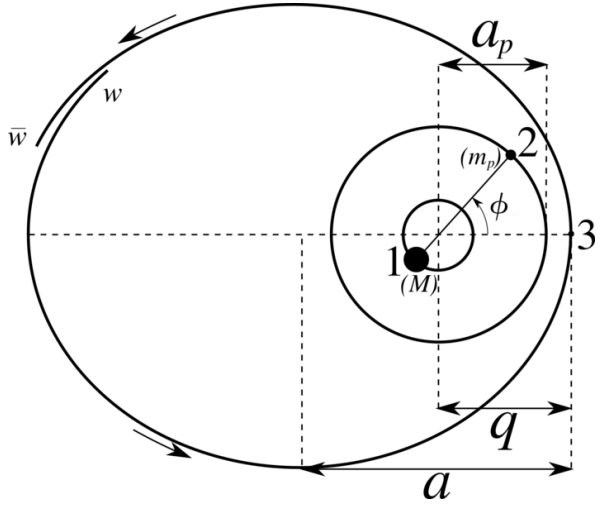
$$\begin{cases} w_{n+1} &= w_n + j \sin \phi_n \\ \phi_{n+1} &= \phi_n + 2\pi w_{n+1}^{-3/2} \end{cases}$$



Odwzorowanie Keplera

Zagadnienie trzech ciał z masą próbną m:

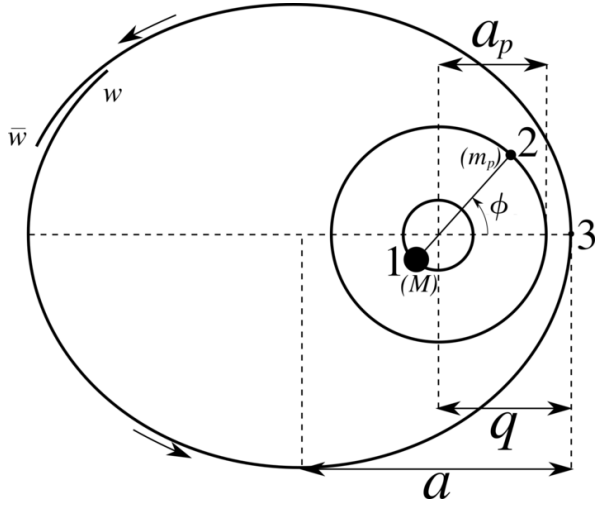
$$\begin{cases} w_{n+1} &= w_n + j \sin \phi_n \\ \phi_{n+1} &= \phi_n + 2\pi w_{n+1}^{-3/2} \end{cases}$$



- $\det \mathbf{DM} = 1$
- $w = \frac{-2E}{mv^2}$ jest przeskalowaniem energii E cząstki testowej o masie m; v — prędkość orbitalna planety
- $x = \frac{\phi}{2\pi} = t/T \mod 1$ — faza w czasach t, w których planeta jest w perycentrum; T — okres orbitalny planety m_p wokół gwiazdy M
- $j \sim \frac{GM}{v_p a}$ — bezwymiarowa siła pchnięcia grawitacyjnego w okolicach perycentrum
- Komety długookresowe — np. kometa Halleya:
$$j = j(M, m_p, q) = 0.007$$
- Także jonizacja wodoru lub atomy rydbergowskie
- Globalny chaos gdy $\frac{5}{2} j^{2/5} \lesssim 1 \Leftrightarrow j \lesssim 0.1$

Odwzorowanie Keplera

Zagadnienie trzech ciał z masą próbną m:

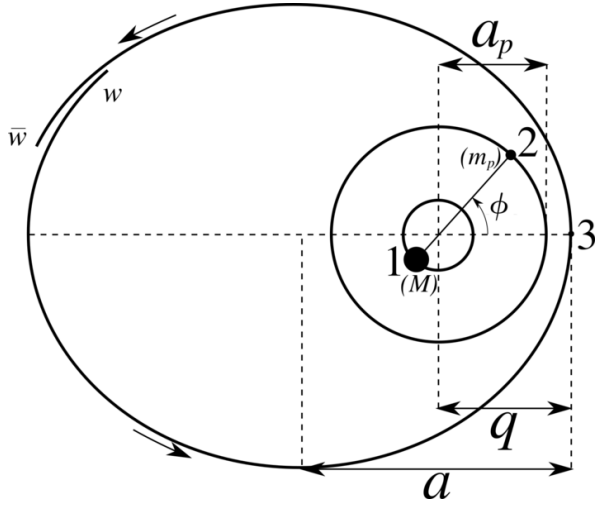


$$\begin{cases} w_{n+1} &= w_n + j \sin \phi_n \\ \phi_{n+1} &= \phi_n + 2\pi w_{n+1}^{-3/2} \end{cases}$$

- $\det \mathbf{DM} = 1$
- $w = \frac{-2E}{mv^2}$ jest przeskalowaniem energii E cząstki testowej o masie m; v — prędkość orbitalna planety
- $x = \frac{\phi}{2\pi} = t/T \mod 1$ — faza w czasach t, w których planeta jest w perycentrum; T — okres orbitalny planety m_p wokół gwiazdy M
- $j \sim \frac{GM}{v_p a}$ — bezwymiarowa siła pchnięcia grawitacyjnego w okolicach perycentrum
- Komety długookresowe — np. kometa Halleya:
$$j = j(M, m_p, q) = 0.007$$
- Także jonizacja wodoru lub atomy rydbergowskie
- Globalny chaos gdy $\frac{5}{2} j^{2/5} \lesssim 1 \Leftrightarrow j \lesssim 0.1$

Odwzorowanie Keplera

Zagadnienie trzech ciał z masą próbną m:

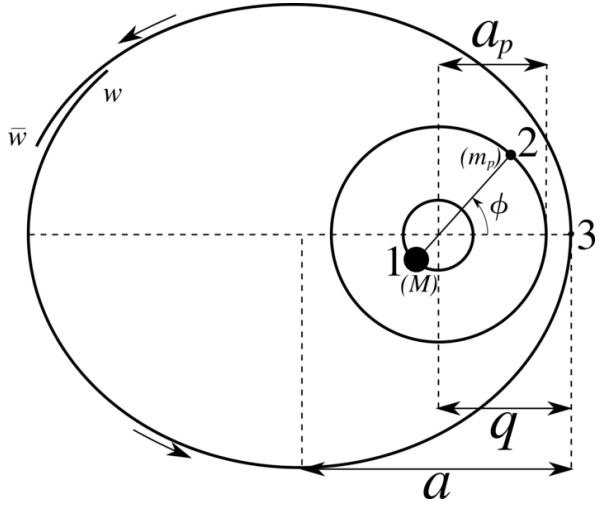


$$\begin{cases} w_{n+1} &= w_n + j \sin \phi_n \\ \phi_{n+1} &= \phi_n + 2\pi w_{n+1}^{-3/2} \end{cases}$$

- $\det \mathbf{DM} = 1$
- $w = \frac{-2E}{mv^2}$ jest przeskalowaniem energii E cząstki testowej o masie m; v — prędkość orbitalna planety
- $x = \frac{\phi}{2\pi} = t/T \mod 1$ — faza w czasach t, w których planeta jest w perycentrum; T — okres orbitalny planety m_p wokół gwiazdy M
- $j \sim \frac{GM}{v_p a}$ — bezwymiarowa siła pchnięcia grawitacyjnego w okolicach perycentrum
- Komety długookresowe — np. kometa Halleya:
$$j = j(M, m_p, q) = 0.007$$
- Także jonizacja wodoru lub atomy rydbergowskie
- Globalny chaos gdy $\frac{5}{2} j^{2/5} \lesssim 1 \Leftrightarrow j \lesssim 0.1$

Odwzorowanie Keplera

Zagadnienie trzech ciał z masą próbną m:

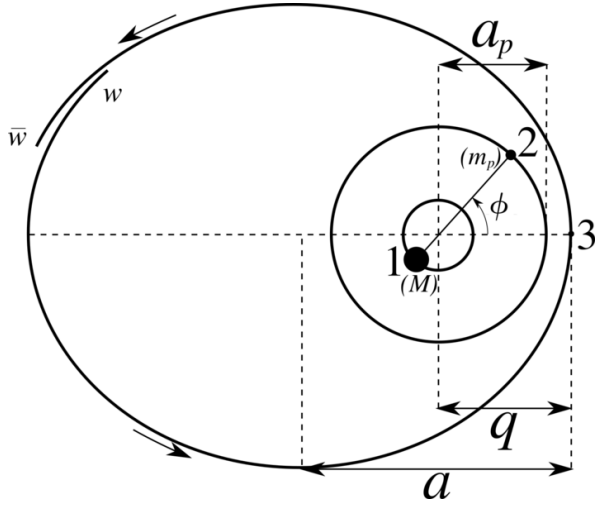


$$\begin{cases} w_{n+1} &= w_n + j \sin \phi_n \\ \phi_{n+1} &= \phi_n + 2\pi w_{n+1}^{-3/2} \end{cases}$$

- $\det \mathbf{DM} = 1$
- $w = \frac{-2E}{mv^2}$ jest przeskalowaniem energii E cząstki testowej o masie m; v — prędkość orbitalna planety
- $x = \frac{\phi}{2\pi} = t/T \mod 1$ — faza w czasach t, w których planeta jest w perycentrum; T — okres orbitalny planety m_p wokół gwiazdy M
- $j \sim \frac{GM}{v_p a}$ — bezwymiarowa siła pchnięcia grawitacyjnego w okolicach perycentrum
- Komety długookresowe — np. kometa Halleya:
$$j = j(M, m_p, q) = 0.007$$
- Także jonizacja wodoru lub atomy rydbergowskie
- Globalny chaos gdy $\frac{5}{2} j^{2/5} \lesssim 1 \Leftrightarrow j \lesssim 0.1$

Odwzorowanie Keplera

Zagadnienie trzech ciał z masą próbną m:

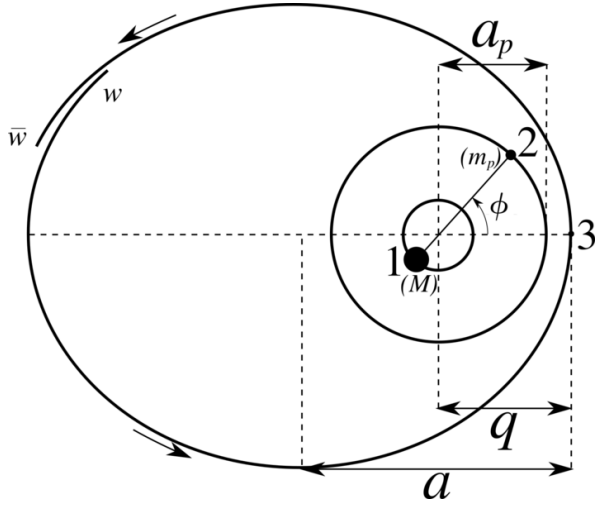


$$\begin{cases} w_{n+1} &= w_n + j \sin \phi_n \\ \phi_{n+1} &= \phi_n + 2\pi w_{n+1}^{-3/2} \end{cases}$$

- $\det \mathbf{DM} = 1$
- $w = \frac{-2E}{mv^2}$ jest przeskalowaniem energii E cząstki testowej o masie m; v — prędkość orbitalna planety
- $x = \frac{\phi}{2\pi} = t/T \mod 1$ — faza w czasach t, w których planeta jest w perycentrum; T — okres orbitalny planety m_p wokół gwiazdy M
- $j \sim \frac{GM}{v_p a}$ — bezwymiarowa siła pchnięcia grawitacyjnego w okolicach perycentrum
- Komety długookresowe — np. kometa Halleya:
$$j = j(M, m_p, q) = 0.007$$
- Także jonizacja wodoru lub atomy rydbergowskie
- Globalny chaos gdy $\frac{5}{2} j^{2/5} \lesssim 1 \Leftrightarrow j \lesssim 0.1$

Odwzorowanie Keplera

Zagadnienie trzech ciał z masą próbną m:

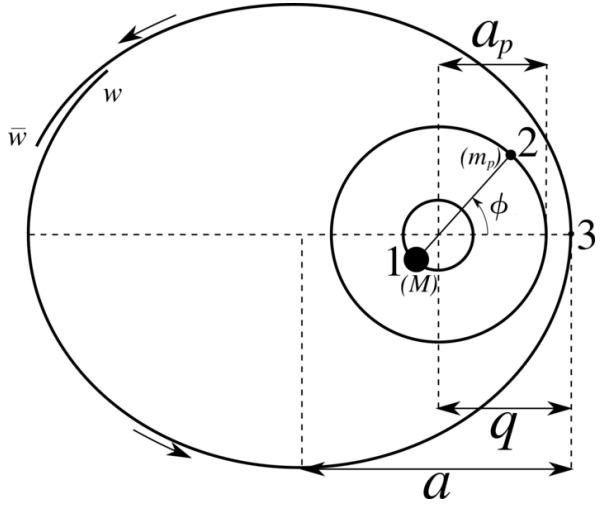


$$\begin{cases} w_{n+1} &= w_n + j \sin \phi_n \\ \phi_{n+1} &= \phi_n + 2\pi w_{n+1}^{-3/2} \end{cases}$$

- $\det \mathbf{DM} = 1$
- $w = \frac{-2E}{mv^2}$ jest przeskalowaniem energii E cząstki testowej o masie m; v — prędkość orbitalna planety
- $x = \frac{\phi}{2\pi} = t/T \mod 1$ — faza w czasach t, w których planeta jest w perycentrum; T — okres orbitalny planety m_p wokół gwiazdy M
- $j \sim \frac{GM}{v_p a}$ — bezwymiarowa siła pchnięcia grawitacyjnego w okolicach perycentrum
- Komety długookresowe — np. kometa Halleya:
$$j = j(M, m_p, q) = 0.007$$
- Także jonizacja wodoru lub atomy rydbergowskie
- Globalny chaos gdy $\frac{5}{2} j^{2/5} \lesssim 1 \Leftrightarrow j \lesssim 0.1$

Odwzorowanie Keplera

Zagadnienie trzech ciał z masą próbną m:

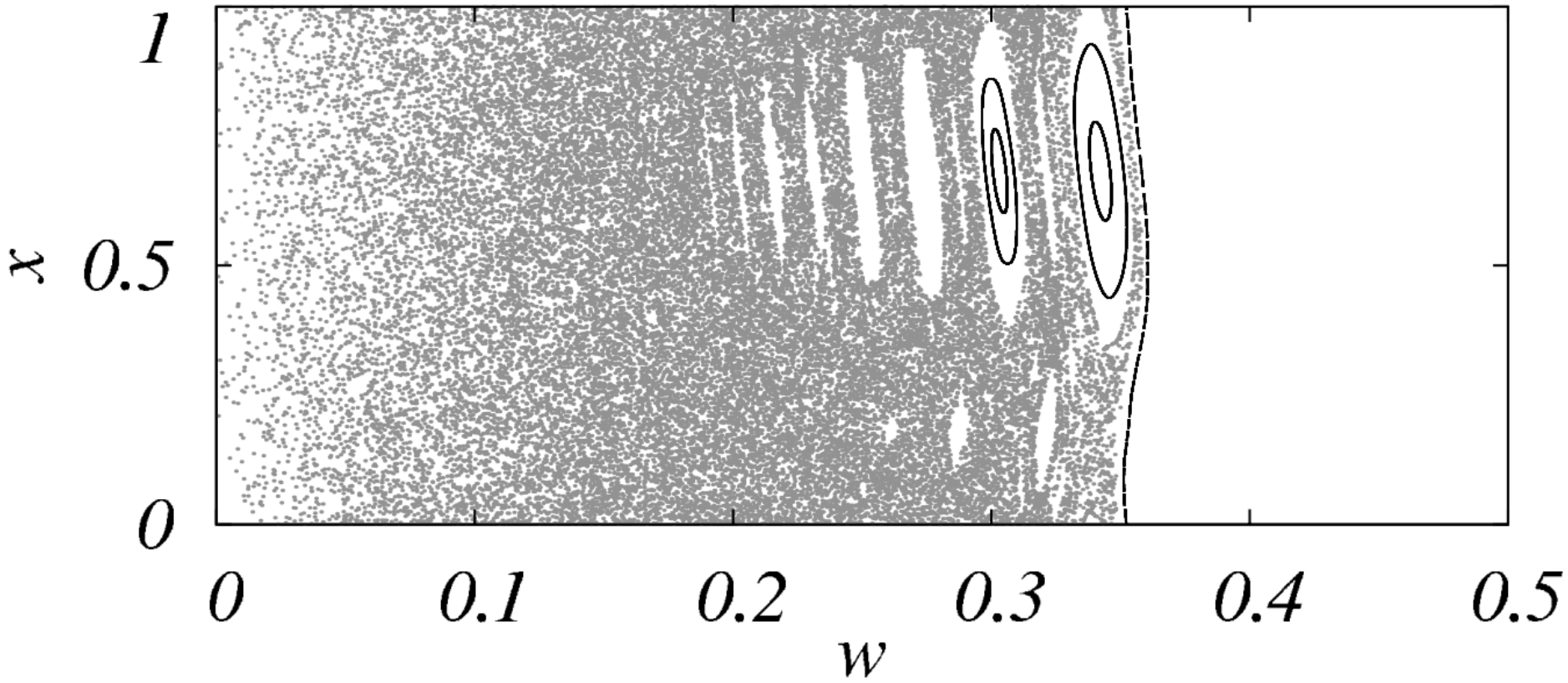


$$\begin{cases} w_{n+1} &= w_n + j \sin \phi_n \\ \phi_{n+1} &= \phi_n + 2\pi w_{n+1}^{-3/2} \end{cases}$$

- $\det \mathbf{DM} = 1$
- $w = \frac{-2E}{mv^2}$ jest przeskalowaniem energii E cząstki testowej o masie m; v — prędkość orbitalna planety
- $x = \frac{\phi}{2\pi} = t/T \mod 1$ — faza w czasach t, w których planeta jest w perycentrum; T — okres orbitalny planety m_p wokół gwiazdy M
- $j \sim \frac{GM}{v_p a}$ — bezwymiarowa siła pchnięcia grawitacyjnego w okolicach perycentrum
- Komety długookresowe — np. kometa Halleya:
$$j = j(M, m_p, q) = 0.007$$
- Także jonizacja wodoru lub atomy rydbergowskie
- Globalny chaos gdy $\frac{5}{2} j^{2/5} \lesssim 1 \Leftrightarrow j \lesssim 0.1$

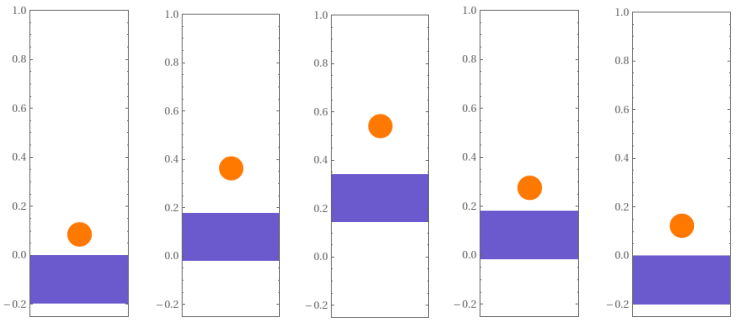
Odwzorowanie Keplera

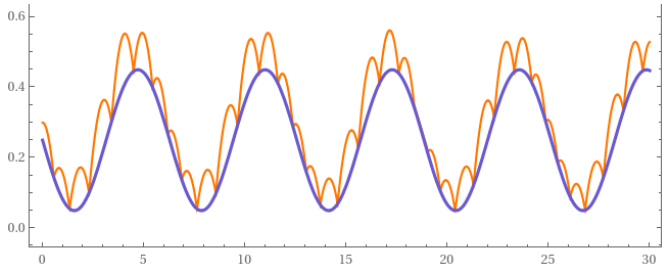
Dla komety Halleya:



[9] Rollin, Lages, Shepelyansky, Astron. Astrophys. 576, A40 (2015)

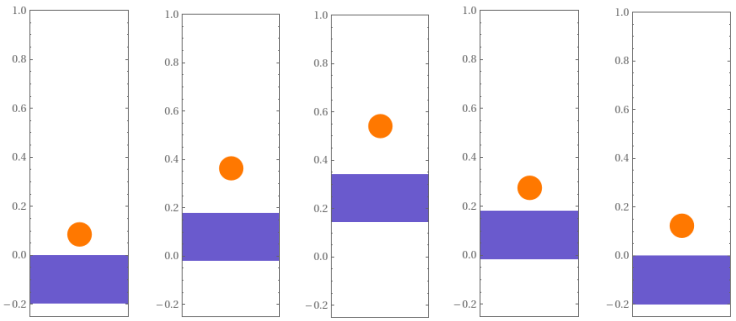
Odwzorowanie odbijającej się piłki[10]

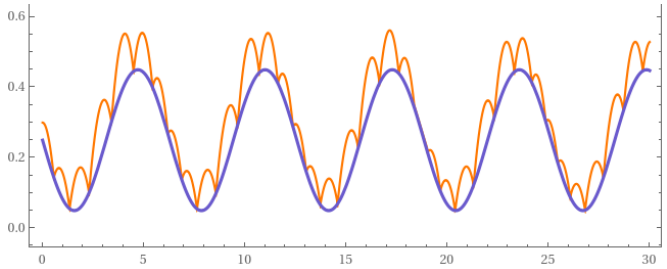




[10] Holmes, J. Sound Vib. 82(2) 173-189, 1982

Odwzorowanie odbijającej się piłki[10]

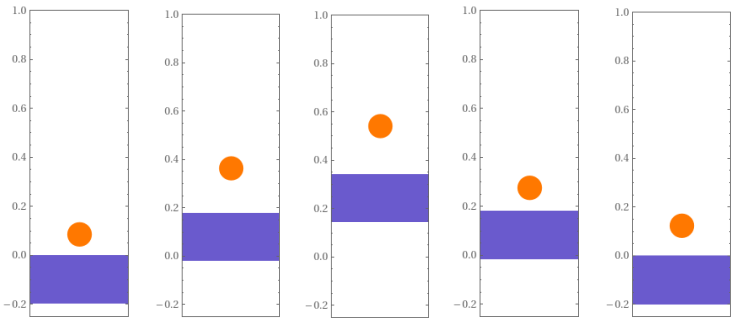


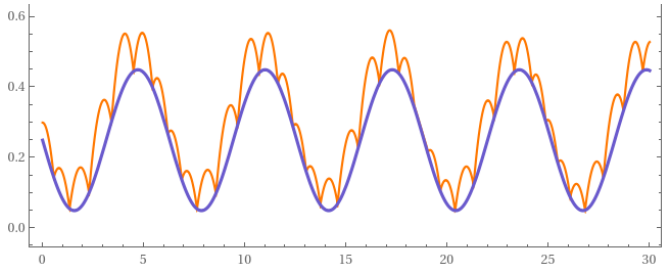


$$\begin{cases} \phi_{n+1} &= (\phi_n + v_n) \mod 2\pi \\ v_{n+1} &= \alpha v_n - \gamma \cos(\phi_n + v_n) \end{cases}$$

[10] Holmes, J. Sound Vib. 82(2) 173-189, 1982

Odwzorowanie odbijającej się piłki[10]



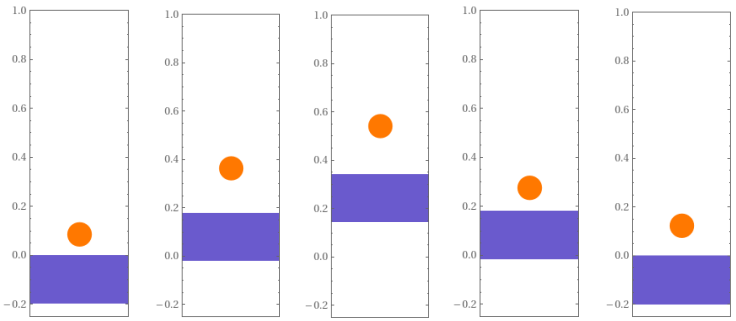


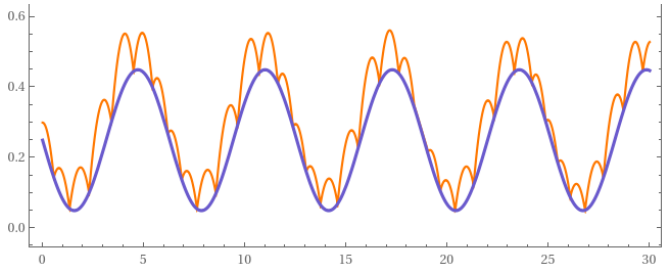
$$\begin{cases} \phi_{n+1} &= (\phi_n + v_n) \mod 2\pi \\ v_{n+1} &= \alpha v_n - \gamma \cos(\phi_n + v_n) \end{cases}$$

- ϕ_n — czas n-tego odbicia (modulo okres)
- v_n — prędkość w chwili n-tego odbicia
- $0 < \alpha \leqslant 1$ — współczynnik odbicia piłki (*coefficient of restitution*)
- $\gamma \geqslant 0$ — amplituda wymuszenia
- $\det \mathbf{DM} = \alpha$
- punkty stałe: $(\phi^*, v^*) = \left(\arccos\left(\frac{2k\pi(1-\alpha)}{\gamma}\right), 2k\pi\right)$, $k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N\}$, gdzie $N = \left\lfloor \frac{\gamma}{2\pi(1-\alpha)} \right\rfloor$.

[10] Holmes, J. Sound Vib. 82(2) 173-189, 1982

Odwzorowanie odbijającej się piłki[10]



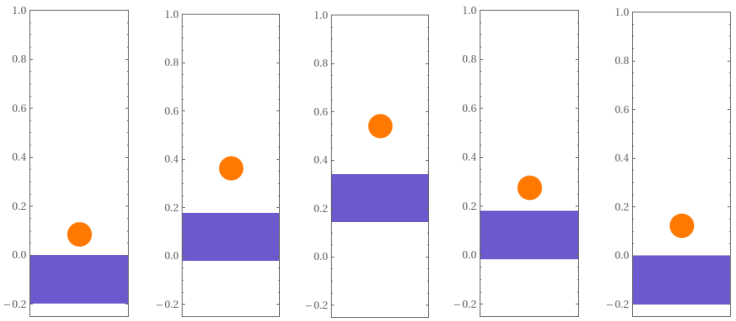


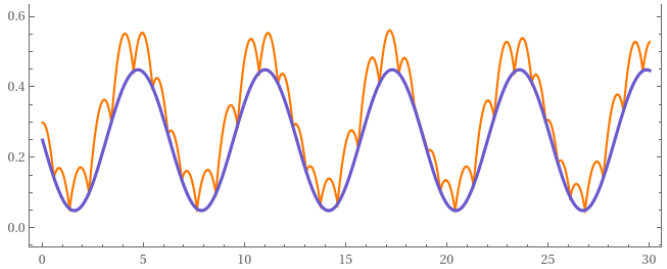
$$\begin{cases} \phi_{n+1} &= (\phi_n + v_n) \mod 2\pi \\ v_{n+1} &= \alpha v_n - \gamma \cos(\phi_n + v_n) \end{cases}$$

- ϕ_n — czas n-tego odbicia (modulo okres)
- v_n — prędkość w chwili n-tego odbicia
- $0 < \alpha \leqslant 1$ — współczynnik odbicia piłki (*coefficient of restitution*)
- $\gamma \geqslant 0$ — amplituda wymuszenia
- $\det \mathbf{DM} = \alpha$
- punkty stałe: $(\phi^*, v^*) = \left(\arccos\left(\frac{2k\pi(1-\alpha)}{\gamma}\right), 2k\pi\right)$, $k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N\}$, gdzie $N = \left\lfloor \frac{\gamma}{2\pi(1-\alpha)} \right\rfloor$.

[10] Holmes, J. Sound Vib. 82(2) 173-189, 1982

Odwzorowanie odbijającej się piłki[10]



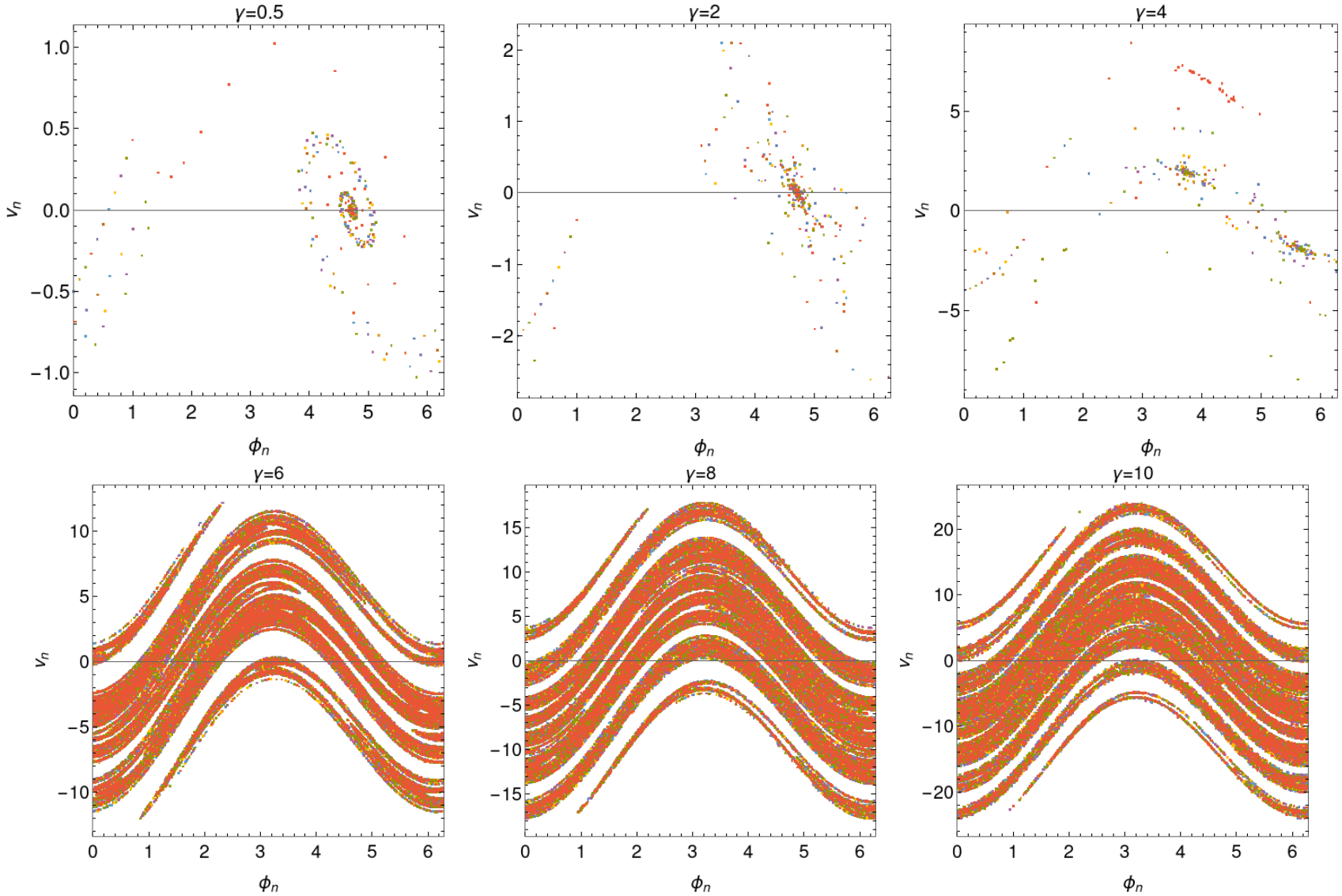


$$\begin{cases} \phi_{n+1} &= (\phi_n + v_n) \mod 2\pi \\ v_{n+1} &= \alpha v_n - \gamma \cos(\phi_n + v_n) \end{cases}$$

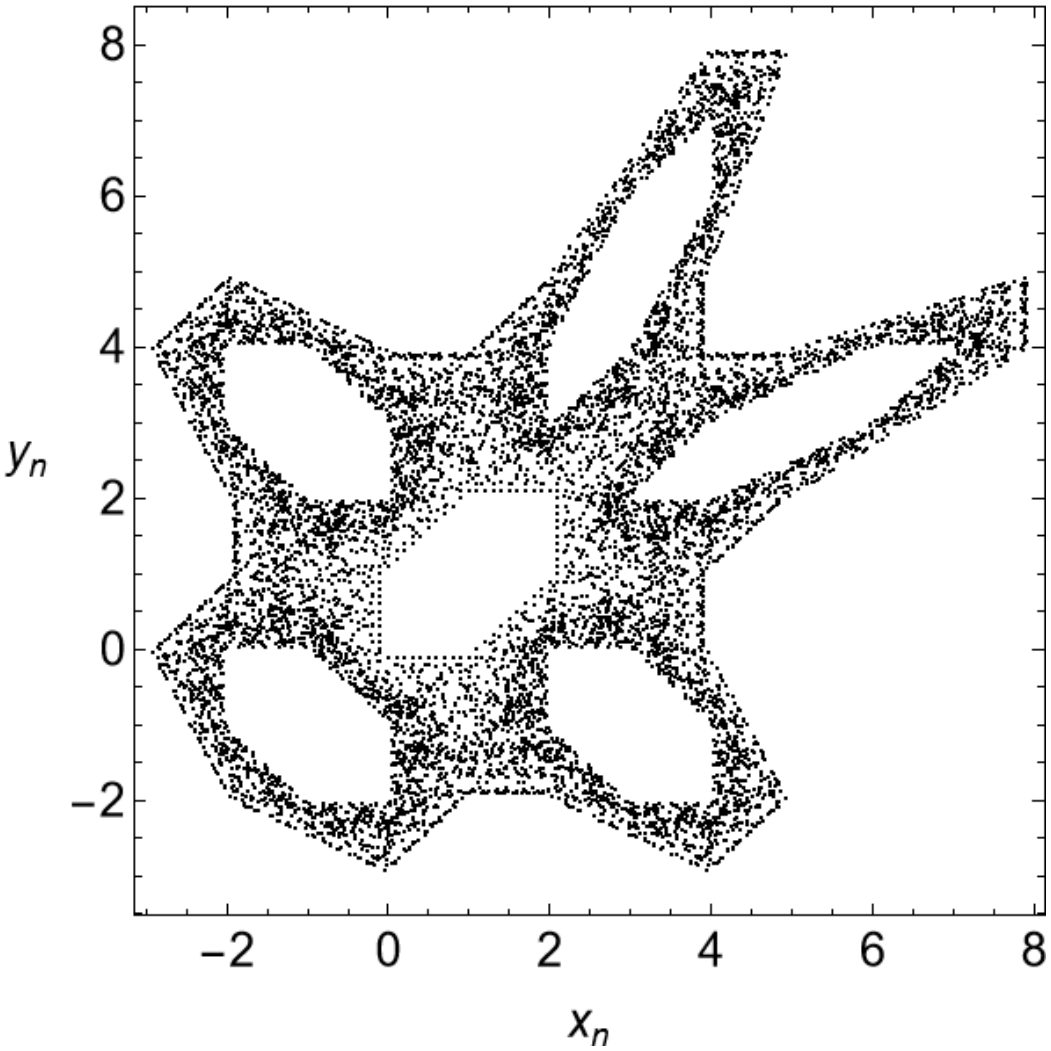
- ϕ_n — czas n-tego odbicia (modulo okres)
- v_n — prędkość w chwili n-tego odbicia
- $0 < \alpha \leqslant 1$ — współczynnik odbicia piłki (*coefficient of restitution*)
- $\gamma \geqslant 0$ — amplituda wymuszenia
- $\det \mathbf{DM} = \alpha$
- punkty stałe: $(\phi^*, v^*) = \left(\arccos\left(\frac{2k\pi(1-\alpha)}{\gamma}\right), 2k\pi\right)$,
  $k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \ldots, \pm N\}$, gdzie $N = \left\lfloor \frac{\gamma}{2\pi(1-\alpha)} \right\rfloor$.

[10] Holmes, J. Sound Vib. 82(2) 173-189, 1982

Odwzorowanie odbijającej się piłki ($\alpha = 0.7$)



[11] https://youtu.be/iNSkwed13AM?t=360

Odwzorowanie piernikowego ludzika

$$\begin{cases} x_{n+1} &= 1 - y_n + |x_n| \\ y_{n+1} &= x_n \end{cases}$$