

Wprowadzenie do teorii chaosu

Wykład 2: odwzorowanie logistyczne

Mariusz Tarnopolski

Instytut Astronomii UMK

Chaos ©2022



- **Układy dynamiczne:**

$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = f(x, t)$ lub $x_{n+1} = f(x_n)$, np. $\dot{x} = \sinh x$ lub $x_{n+1} = 2x_n$.

- **Układy dynamiczne:**

$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = f(x, t)$ lub $x_{n+1} = f(x_n)$, np. $\dot{x} = \sinh x$ lub $x_{n+1} = 2x_n$.

W ogólności, mogą też być wielowymiarowe, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ (także $\mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ itp.), a nawet nieskończenie wymiarowe.

Równanie logistyczne

- **Układy dynamiczne:**

$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = f(x, t)$ lub $x_{n+1} = f(x_n)$, np. $\dot{x} = \sinh x$ lub $x_{n+1} = 2x_n$.

W ogólności, mogą też być wielowymiarowe, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ (także $\mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ itp.), a nawet nieskończenie wymiarowe.

- Model wzrostu populacji (Verhulst 1845) — równanie logistyczne:

$$\dot{x} = rx(1 - x) \Rightarrow x(t) = \frac{1}{1 + e^{-rt}(x_0^{-1} - 1)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1$$

$$x = \frac{\text{populacja}}{\text{pojemność}} \in [0, 1], x(0) = x_0 > 0, r > 0 \text{ — tempo wzrostu}$$

Równanie logistyczne

- **Układy dynamiczne:**

$\dot{x} \equiv \frac{dx}{dt} = f(x, t)$ lub $x_{n+1} = f(x_n)$, np. $\dot{x} = \sinh x$ lub $x_{n+1} = 2x_n$.

W ogólności, mogą też być wielowymiarowe, $\mathbf{f} : \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^m$ (także $\mathbb{C}^m \rightarrow \mathbb{C}^m$ itp.), a nawet nieskończenie wymiarowe.

- Model wzrostu populacji (Verhulst 1845) — równanie logistyczne:

$$\dot{x} = rx(1 - x) \Rightarrow x(t) = \frac{1}{1 + e^{-rt}(x_0^{-1} - 1)} \xrightarrow{t \rightarrow \infty} 1$$

$x = \frac{\text{populacja}}{\text{pojemność}} \in [0, 1]$, $x(0) = x_0 > 0$, $r > 0$ — tempo wzrostu

- Możliwy wariant dyskretny:

$$x_{n+1} - x_n = rx_n(1 - x_{n+1}) \Rightarrow$$

$$x_n = \frac{1}{1 + (r + 1)^{-n}(x_0^{-1} - 1)}$$

- Powszechna forma^{1,2}:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), n \in \mathbb{N}_0$$

$$\forall n : x_n \in [0, 1] \Rightarrow r \in [0, 4]$$

¹May, Nat. 261 (5560): 459–467 (1976)

²<https://www.youtube.com/watch?v=ovJcsL7vyrk> — powszechność występowania.

- Powszechna forma^{1,2}:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n), n \in \mathbb{N}_0$$

$$\forall n : x_n \in [0, 1] \Rightarrow r \in [0, 4]$$

- Po transformacji $y_n = \frac{r}{a} \left(x_n - \frac{1}{2}\right)$, $a = \frac{r(r-2)}{4}$, odwzorowanie logistyczne jest równoważne $y_{n+1} = 1 - ay_n^2$. Jest to zatem najprostsze jednowymiarowe odwzorowanie nieliniowe.

¹May, Nat. 261 (5560): 459–467 (1976)

²<https://www.youtube.com/watch?v=ovJcsL7vyrk> — powszechność występowania.

Odwzorowanie logistyczne: $r = 0.5, x_0 = 0.3 \wedge x_0 = 0.7$

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

$$x_1 = 0.5 \cdot 0.3 \cdot (1 - 0.3) = 0.105$$

Odwzorowanie logistyczne: $r = 0.5, x_0 = 0.3 \wedge x_0 = 0.7$

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

$$x_1 = 0.5 \cdot 0.3 \cdot (1 - 0.3) = 0.105$$

$$x_2 = 0.5 \cdot 0.105 \cdot (1 - 0.105) = 0.0469875$$

Odwzorowanie logistyczne: $r = 0.5, x_0 = 0.3 \wedge x_0 = 0.7$

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

$$x_1 = 0.5 \cdot 0.3 \cdot (1 - 0.3) = 0.105$$

$$x_2 = 0.5 \cdot 0.105 \cdot (1 - 0.105) = 0.0469875$$

$$x_3 = 0.5 \cdot 0.0469875 \cdot (1 - 0.0469875) = 0.0223898$$

Odwzorowanie logistyczne: $r = 0.5, x_0 = 0.3 \wedge x_0 = 0.7$

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

$$x_1 = 0.5 \cdot 0.3 \cdot (1 - 0.3) = 0.105$$

$$x_2 = 0.5 \cdot 0.105 \cdot (1 - 0.105) = 0.0469875$$

$$x_3 = 0.5 \cdot 0.0469875 \cdot (1 - 0.0469875) = 0.0223898$$

$$x_4 = 0.5 \cdot 0.0223898 \cdot (1 - 0.0223898) = 0.0109443$$

Odwzorowanie logistyczne: $r = 0.5, x_0 = 0.3 \wedge x_0 = 0.7$

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

$$x_1 = 0.5 \cdot 0.3 \cdot (1 - 0.3) = 0.105$$

$$x_2 = 0.5 \cdot 0.105 \cdot (1 - 0.105) = 0.0469875$$

$$x_3 = 0.5 \cdot 0.0469875 \cdot (1 - 0.0469875) = 0.0223898$$

$$x_4 = 0.5 \cdot 0.0223898 \cdot (1 - 0.0223898) = 0.0109443$$

$\vdots$

$$x_{100} = 1.35156 \cdot 10^{-31}$$

Odwzorowanie logistyczne: $r = 0.5, x_0 = 0.3 \wedge x_0 = 0.7$

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

$$x_1 = 0.5 \cdot 0.3 \cdot (1 - 0.3) = 0.105$$

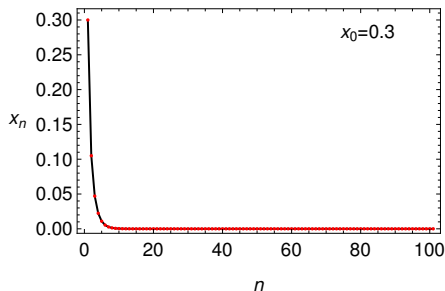
$$x_2 = 0.5 \cdot 0.105 \cdot (1 - 0.105) = 0.0469875$$

$$x_3 = 0.5 \cdot 0.0469875 \cdot (1 - 0.0469875) = 0.0223898$$

$$x_4 = 0.5 \cdot 0.0223898 \cdot (1 - 0.0223898) = 0.0109443$$

$\vdots$

$$x_{100} = 1.35156 \cdot 10^{-31}$$



Odwzorowanie logistyczne: $r = 0.5, x_0 = 0.3 \wedge x_0 = 0.7$

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

$$x_1 = 0.5 \cdot 0.3 \cdot (1 - 0.3) = 0.105$$

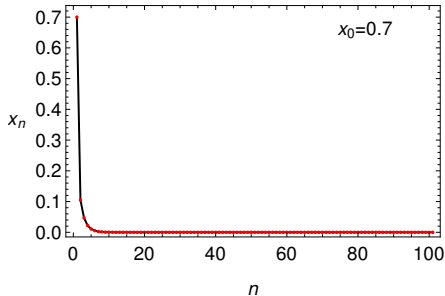
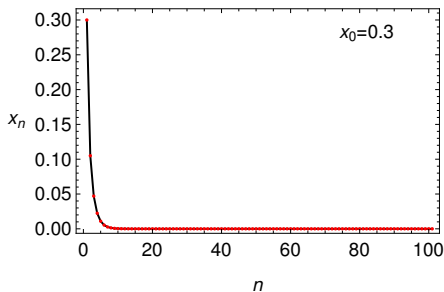
$$x_2 = 0.5 \cdot 0.105 \cdot (1 - 0.105) = 0.0469875$$

$$x_3 = 0.5 \cdot 0.0469875 \cdot (1 - 0.0469875) = 0.0223898$$

$$x_4 = 0.5 \cdot 0.0223898 \cdot (1 - 0.0223898) = 0.0109443$$

$\vdots$

$$x_{100} = 1.35156 \cdot 10^{-31}$$



Ograniczenie na x dla $r \in [0, 1]$

Twierdzenie³:

$$x_n \leq \frac{x_0}{r^{-n} + nx_0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Dowód: przez indukcję.

³Campbell & Broderick, J. Mach. Learn. Res. 20(15), 1-38 (2019),
<https://arxiv.org/abs/1710.05053> (Lemma A.6)

Ograniczenie na x dla $r \in [0, 1]$

Twierdzenie³:

$$x_n \leq \frac{x_0}{r^{-n} + nx_0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Dowód: przez indukcję. Dla $n = 0$: $x_0 \leq \frac{x_0}{r^0 + 0} = x_0$.

³Campbell & Broderick, J. Mach. Learn. Res. 20(15), 1-38 (2019),
<https://arxiv.org/abs/1710.05053> (Lemma A.6)

Ograniczenie na x dla $r \in [0, 1]$

Twierdzenie³:

$$x_n \leq \frac{x_0}{r^{-n} + nx_0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Dowód: przez indukcję. Dla $n = 0$: $x_0 \leq \frac{x_0}{r^0 + 0} = x_0$.

Następnie, $1 - x \leq \frac{1}{1+x}$ (dla $x \geq -1$) oraz dla dowolnego $n \geq 0$:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \leq r \frac{x_n}{1 + x_n}$$

³Campbell & Broderick, J. Mach. Learn. Res. 20(15), 1-38 (2019),
<https://arxiv.org/abs/1710.05053> (Lemma A.6)

Ograniczenie na x dla $r \in [0, 1]$

Twierdzenie³:

$$x_n \leq \frac{x_0}{r^{-n} + nx_0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Dowód: przez indukcję. Dla $n = 0$: $x_0 \leq \frac{x_0}{r^0 + 0} = x_0$.

Następnie, $1 - x \leq \frac{1}{1+x}$ (dla $x \geq -1$) oraz dla dowolnego $n \geq 0$:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \leq r \frac{x_n}{1 + x_n}$$

$x/(1+x)$ jest monotonicznie rosnąca dla $x \geq 0$; zakładając, że ograniczenie jest prawdziwe dla $n \geq 0$:

$$x_{n+1} \leq r \frac{\frac{x_0}{r^{-n} + nx_0}}{1 + \frac{x_0}{r^{-n} + nx_0}} = r \frac{x_0}{r^{-n} + nx_0 + x_0} = \frac{x_0}{r^{-(n+1)} + r^{-1}(n+1)x_0}$$

³Campbell & Broderick, J. Mach. Learn. Res. 20(15), 1-38 (2019),
<https://arxiv.org/abs/1710.05053> (Lemma A.6)

Ograniczenie na x dla $r \in [0, 1]$

Twierdzenie³:

$$x_n \leq \frac{x_0}{r^{-n} + nx_0} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

Dowód: przez indukcję. Dla $n = 0$: $x_0 \leq \frac{x_0}{r^0 + 0} = x_0$.

Następnie, $1 - x \leq \frac{1}{1+x}$ (dla $x \geq -1$) oraz dla dowolnego $n \geq 0$:

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n) \leq r \frac{x_n}{1 + x_n}$$

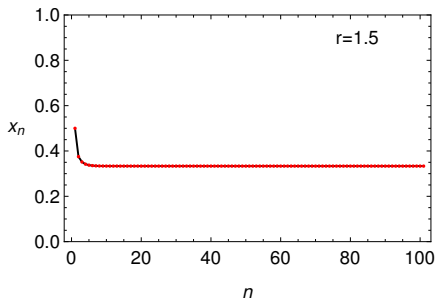
$x/(1+x)$ jest monotonicznie rosnąca dla $x \geq 0$; zakładając, że ograniczenie jest prawdziwe dla $n \geq 0$:

$$x_{n+1} \leq r \frac{\frac{x_0}{r^{-n} + nx_0}}{1 + \frac{x_0}{r^{-n} + nx_0}} = r \frac{x_0}{r^{-n} + nx_0 + x_0} = \frac{x_0}{r^{-(n+1)} + r^{-1}(n+1)x_0}$$

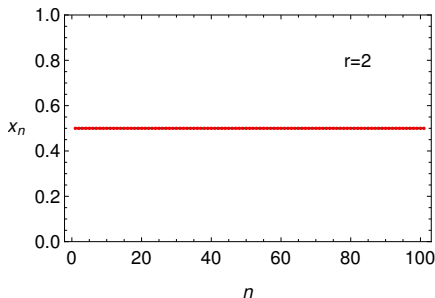
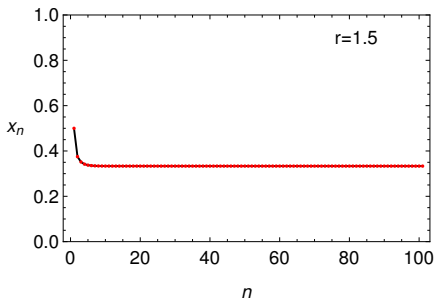
Ograniczenie jest zatem prawdziwe gdyż $r^{-1} \geq 1 \Leftrightarrow r \leq 1$. □

³Campbell & Broderick, J. Mach. Learn. Res. 20(15), 1-38 (2019),
<https://arxiv.org/abs/1710.05053> (Lemma A.6)

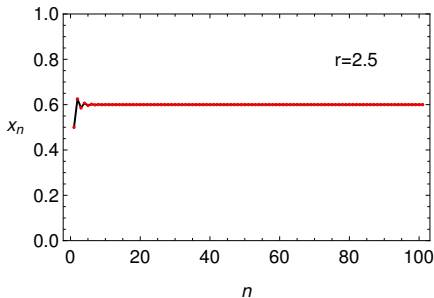
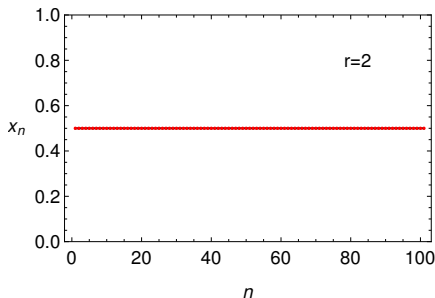
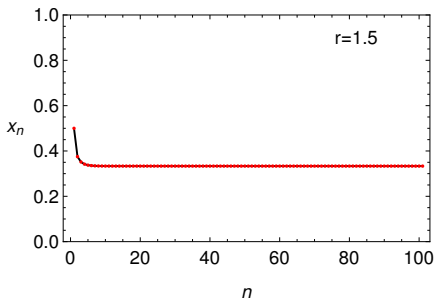
Odwzorowanie logistyczne, $x_0 = 0.5$



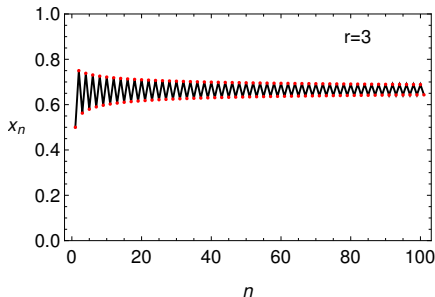
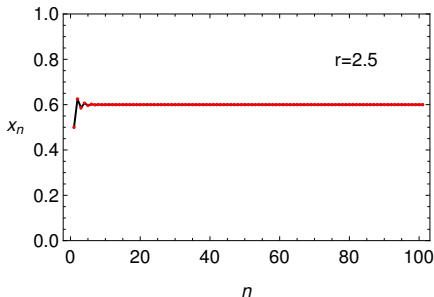
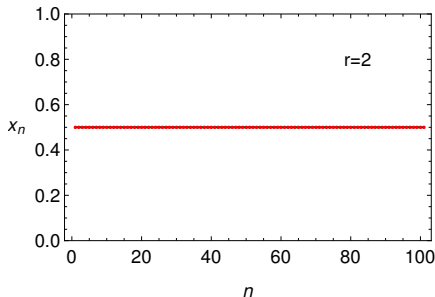
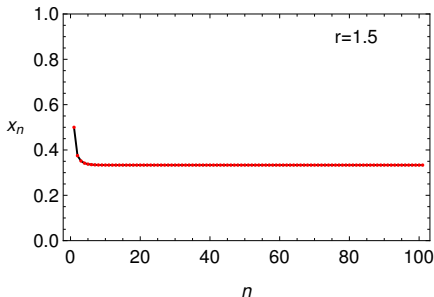
Odwzorowanie logistyczne, $x_0 = 0.5$



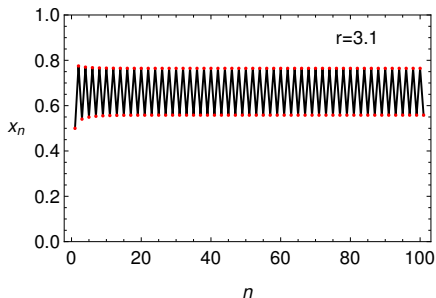
Odwzorowanie logistyczne, $x_0 = 0.5$



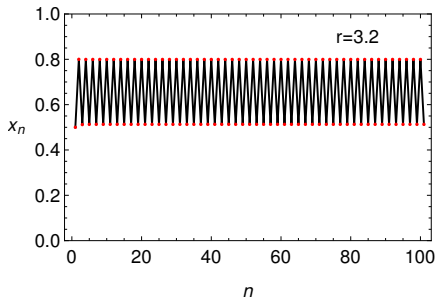
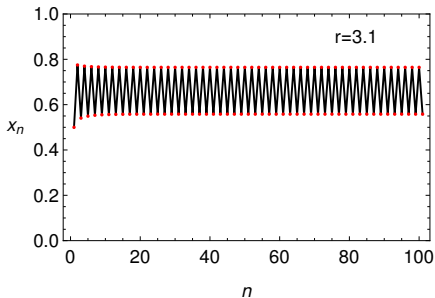
Odwzorowanie logistyczne, $x_0 = 0.5$



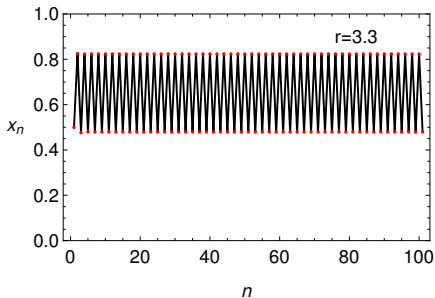
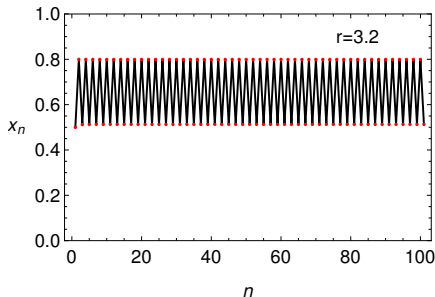
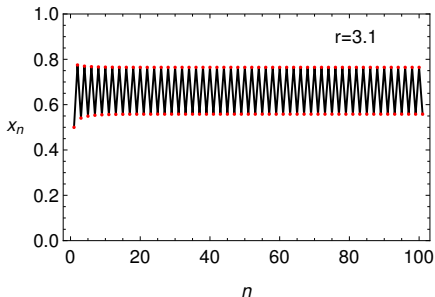
Odwzorowanie logistyczne, $x_0 = 0.5$



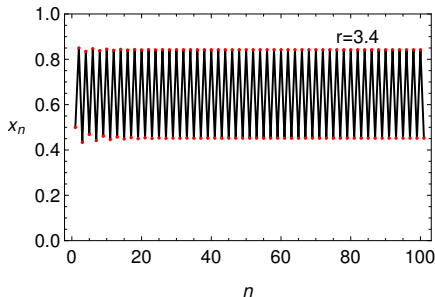
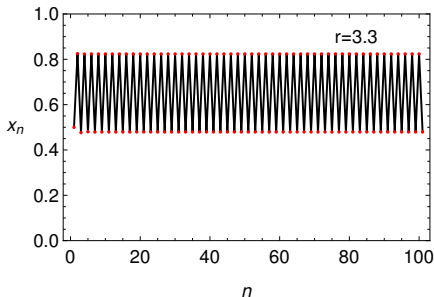
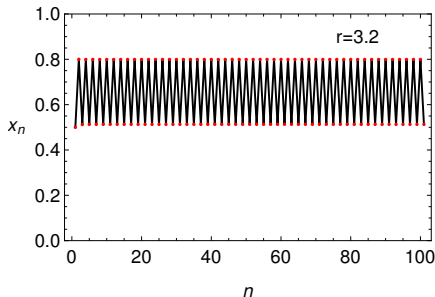
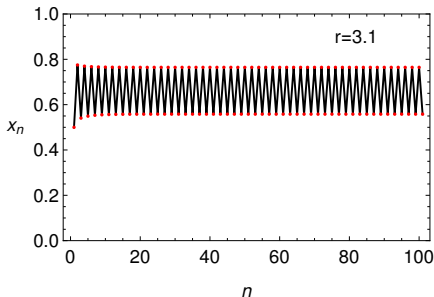
Odwzorowanie logistyczne, $x_0 = 0.5$



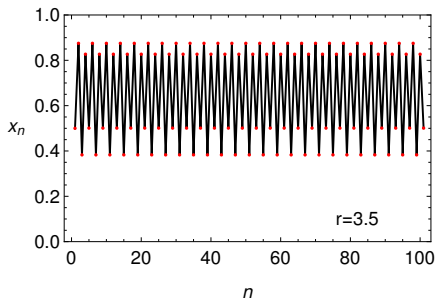
Odwzorowanie logistyczne, $x_0 = 0.5$



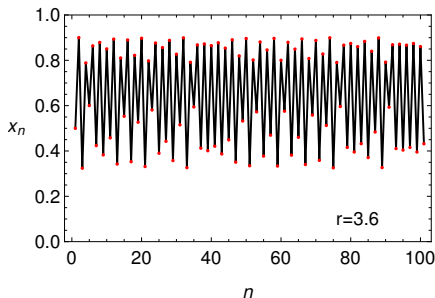
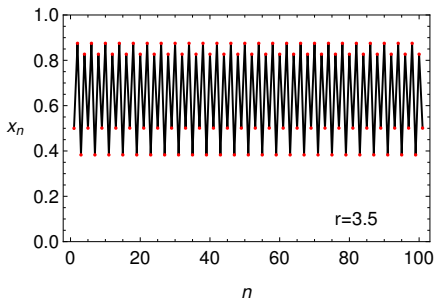
Odwzorowanie logistyczne, $x_0 = 0.5$



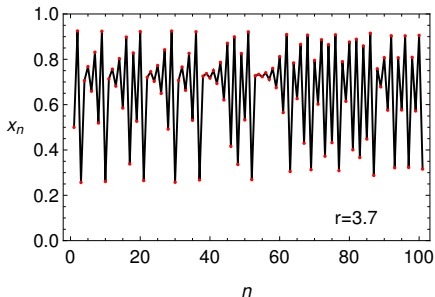
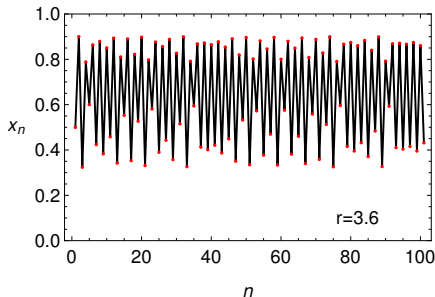
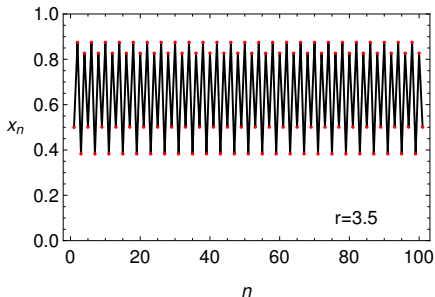
Odwzorowanie logistyczne, $x_0 = 0.5$



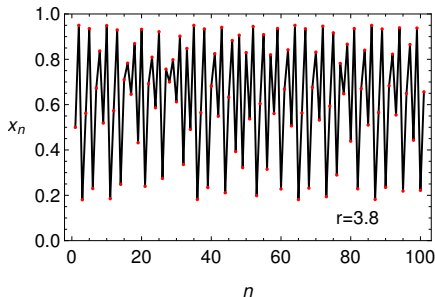
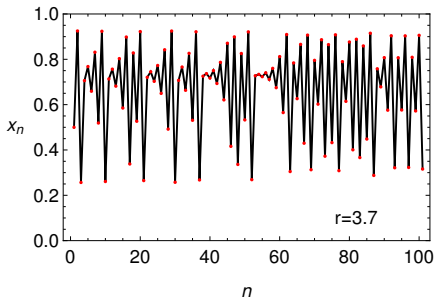
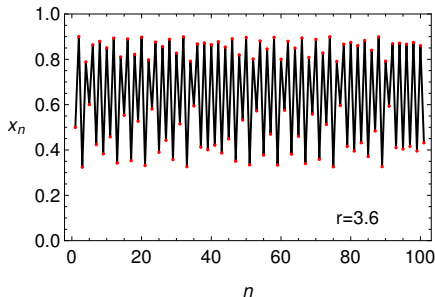
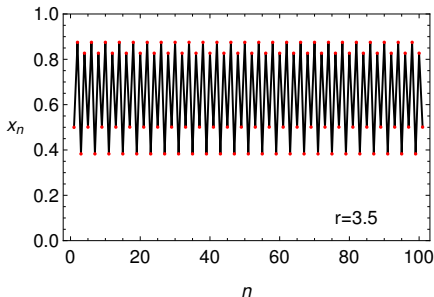
Odwzorowanie logistyczne, $x_0 = 0.5$



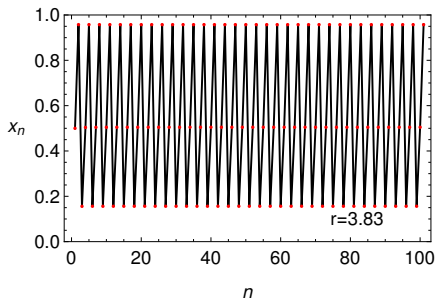
Odwzorowanie logistyczne, $x_0 = 0.5$



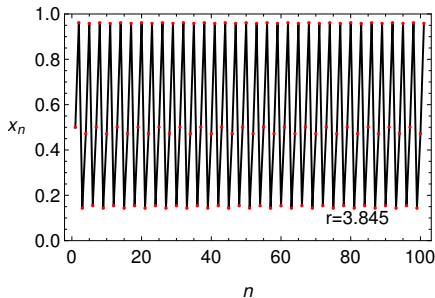
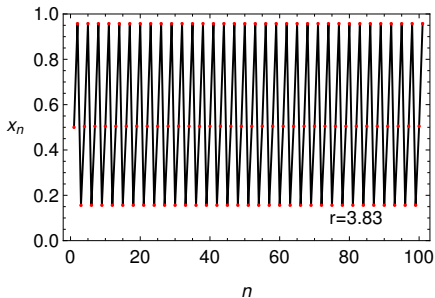
Odwzorowanie logistyczne, $x_0 = 0.5$



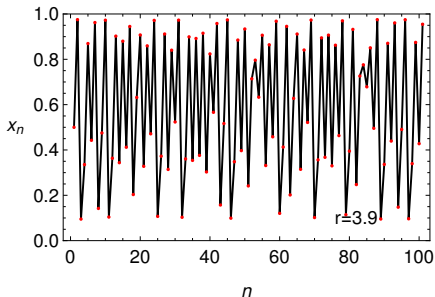
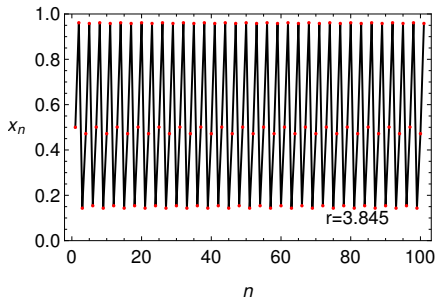
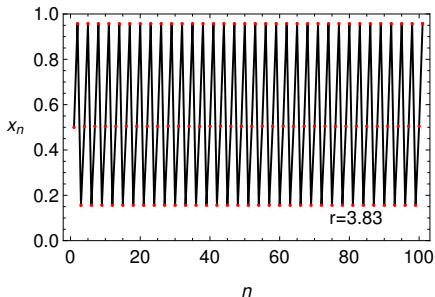
Odwzorowanie logistyczne, $x_0 = 0.5$



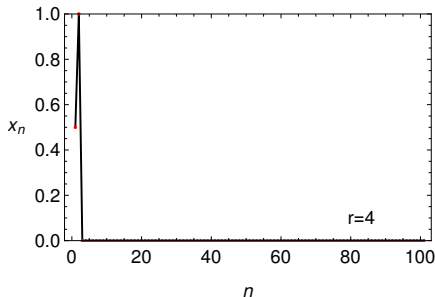
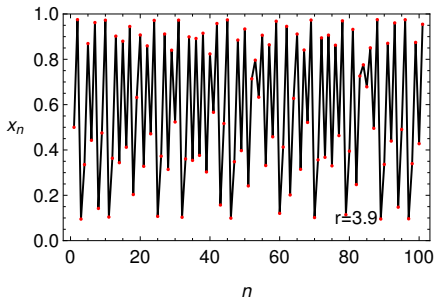
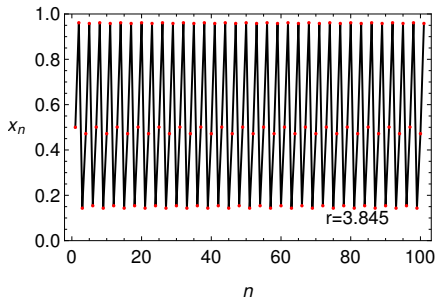
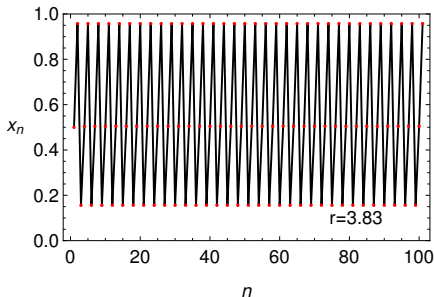
Odwzorowanie logistyczne, $x_0 = 0.5$



Odwzorowanie logistyczne, $x_0 = 0.5$



Odwzorowanie logistyczne, $x_0 = 0.5$



Odwzorowanie logistyczne, $r = 4, x_0 = 0.5 \wedge x_0 = 0.6$

$$x_0 = \frac{1}{2}$$

Odwzorowanie logistyczne, $r = 4, x_0 = 0.5 \wedge x_0 = 0.6$

$$x_0 = \frac{1}{2}$$

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

$$x_1 = 4 \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

Odwzorowanie logistyczne, $r = 4, x_0 = 0.5 \wedge x_0 = 0.6$

$$x_0 = \frac{1}{2}$$

$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

$$x_1 = 4 \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

$$x_2 = 4 \cdot 1(1 - 1) = 0$$

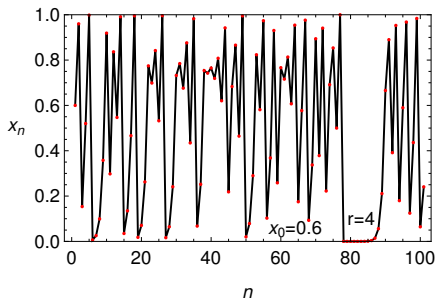
Odwzorowanie logistyczne, $r = 4, x_0 = 0.5 \wedge x_0 = 0.6$

$$x_0 = \frac{1}{2}$$

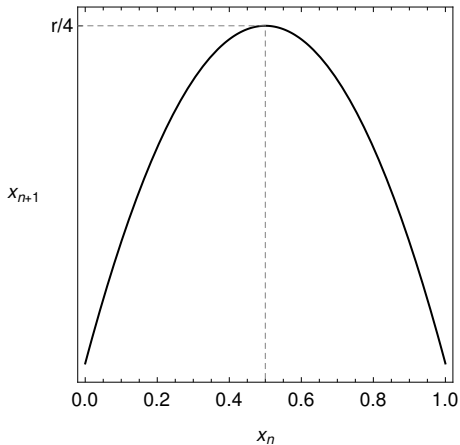
$$x_{n+1} = rx_n(1 - x_n)$$

$$x_1 = 4 \cdot \frac{1}{2} \left(1 - \frac{1}{2}\right) = 2 \cdot \frac{1}{2} = 1$$

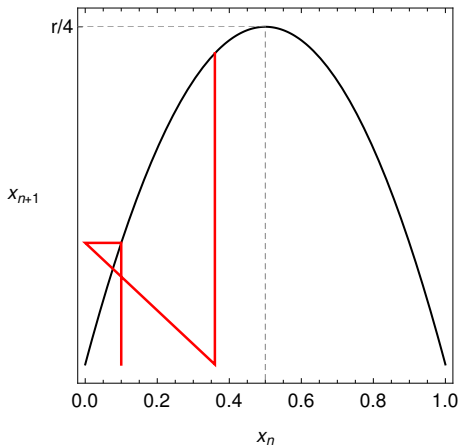
$$x_2 = 4 \cdot 1(1 - 1) = 0$$



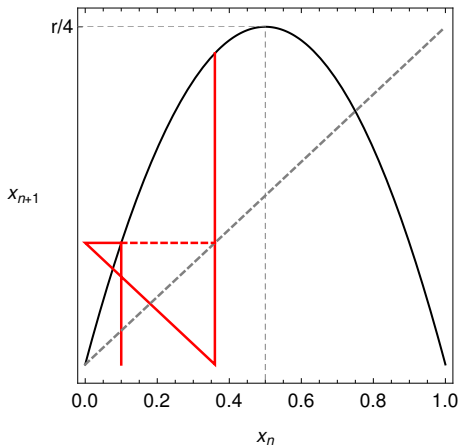
$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n)$$



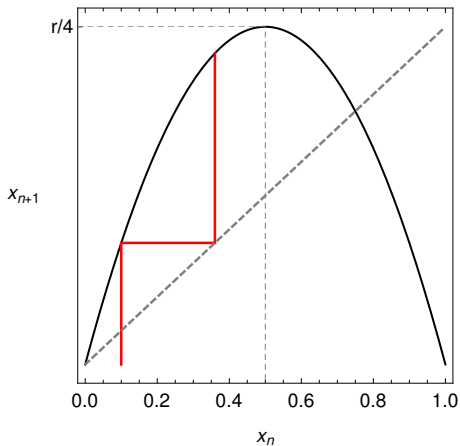
$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n)$$



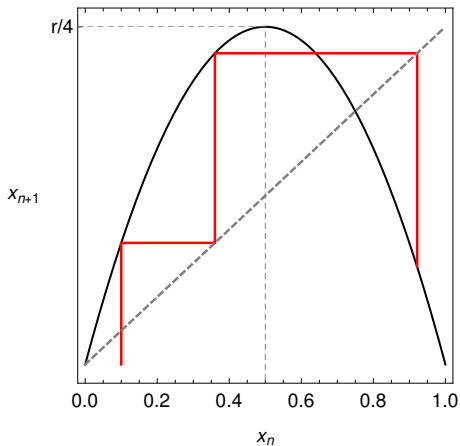
$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n)$$



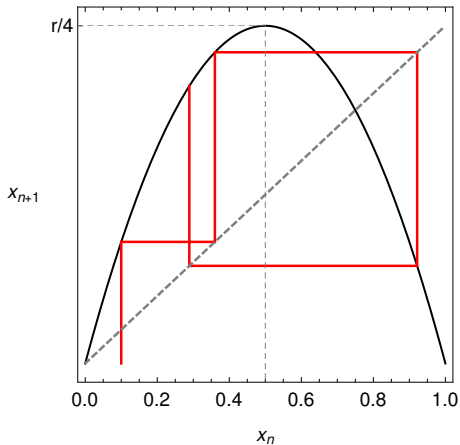
$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n)$$



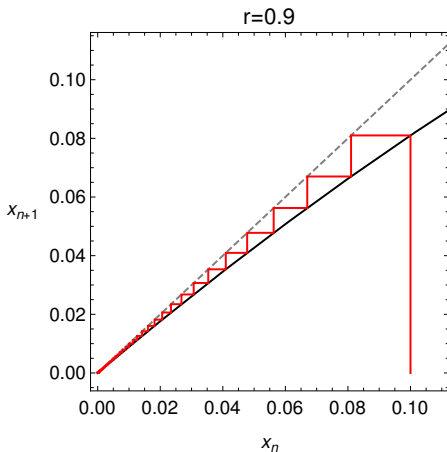
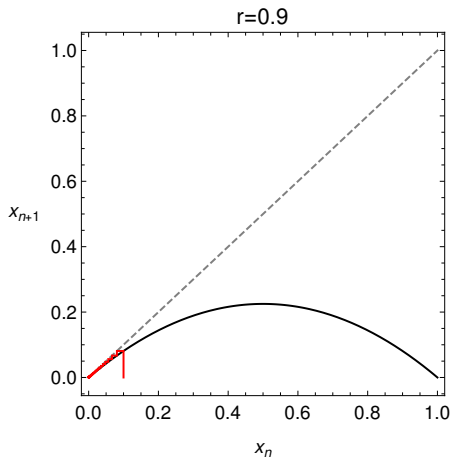
$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n)$$



$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n)$$

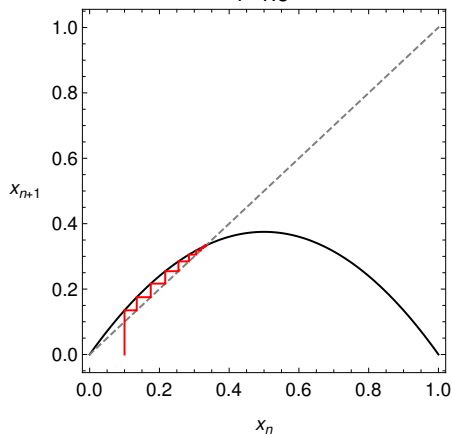


Cobweb: $r < 1$

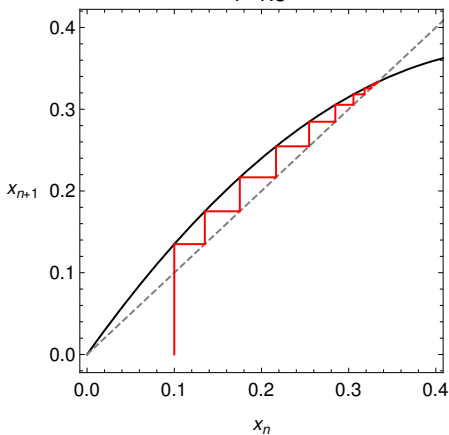


Cobweb: $1 < r < 2$

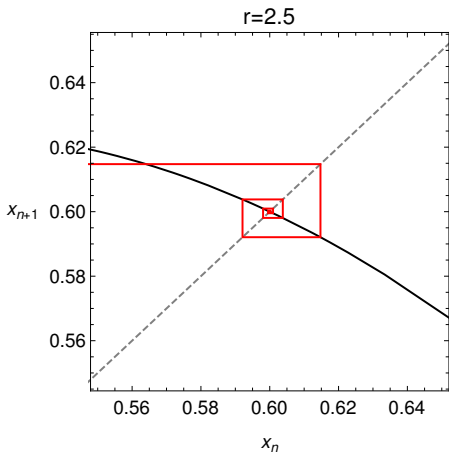
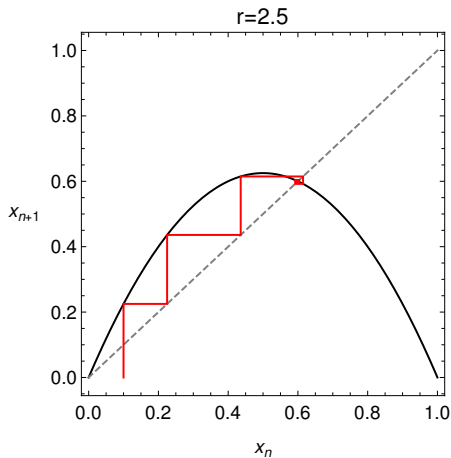
$r=1.5$



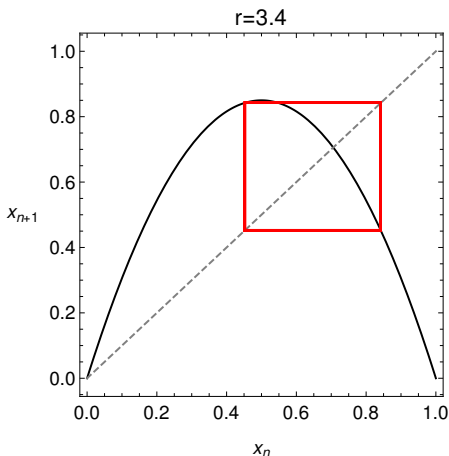
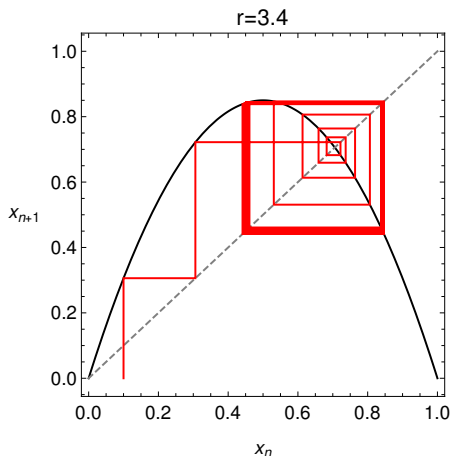
$r=1.5$



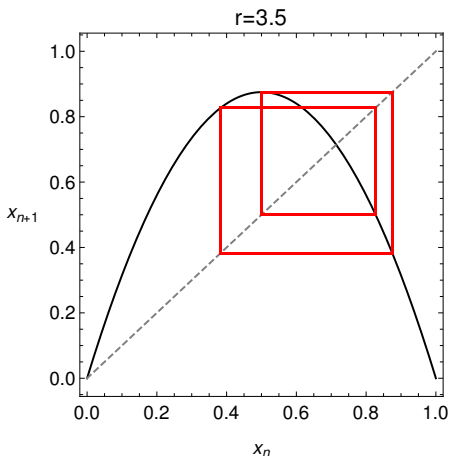
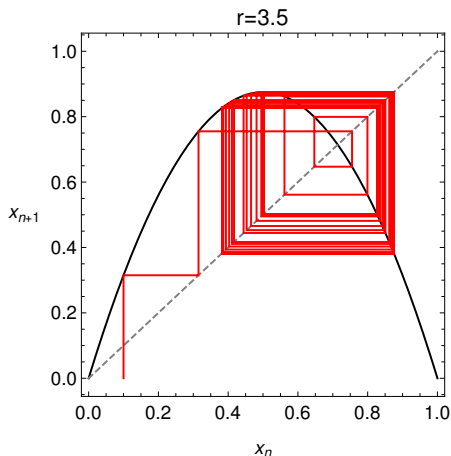
Cobweb: $2 < r < 3$



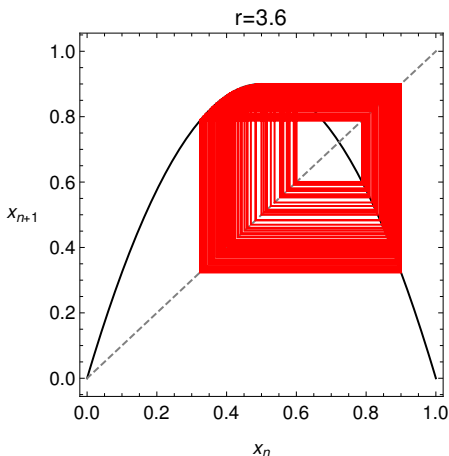
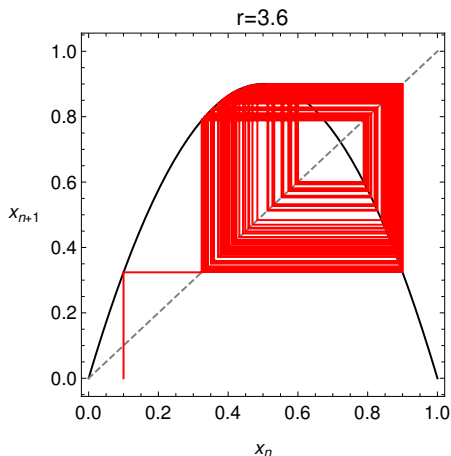
Pomijając fazę przejściową:



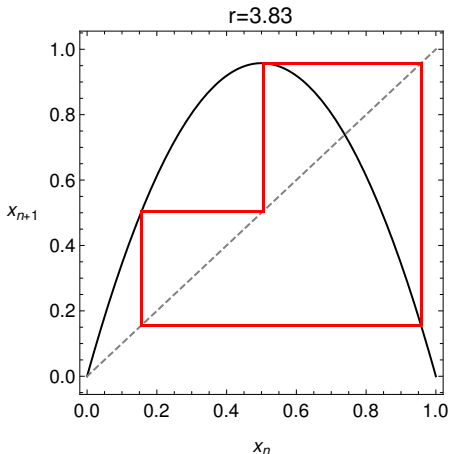
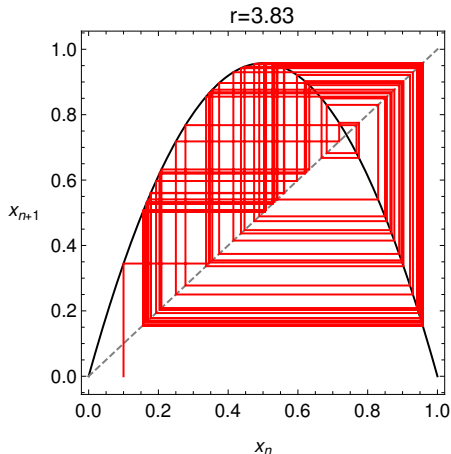
Pomijając fazę przejściową:



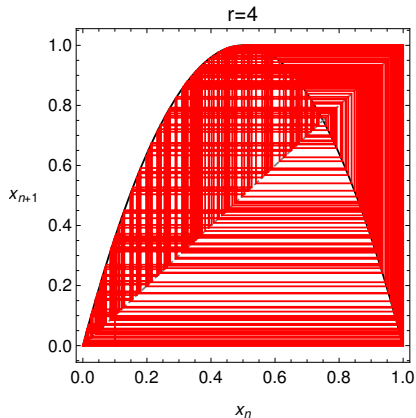
Pomijając fazę przejściową:



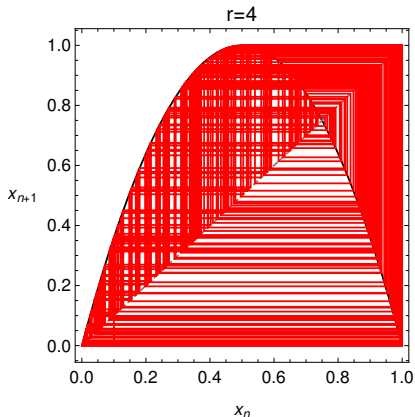
Pomijając fazę przejściową:



Cobweb: chaos



Cobweb: chaos

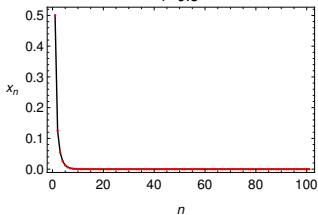


Rozwiązania analityczne znane dla $r = -2, 2, 4$; np.

$$x_{n+1} = 4x_n(1 - x_n) \Leftrightarrow x_n = \sin^2(2^n \arcsin \sqrt{x_0})$$

Punkty stałe

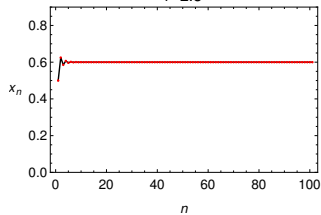
$r=0.5$



$$f(x_n) = rx_n(1 - x_n)$$

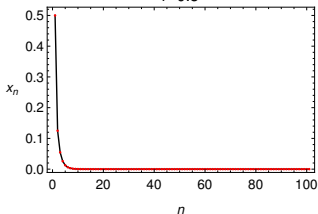
$$p : f(p) = p$$

$r=2.5$



Punkty stałe

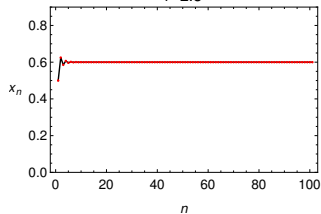
$r=0.5$



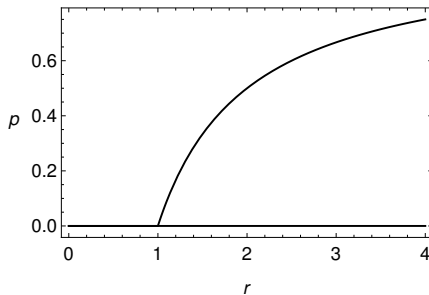
$$f(x_n) = rx_n(1 - x_n)$$

$$p : f(p) = p$$

$r=2.5$



$$f(p) = rp(1 - p) = p \Rightarrow p = 0 \wedge p = 1 - \frac{1}{r}$$



Punkty stałe

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n)$$

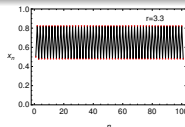
Orbity o okresie-1: $f(p) = p \Rightarrow p = 0 \wedge p = 1 - \frac{1}{r}$

Punkty stałe

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n)$$

Orbity o okresie-1: $f(p) = p \Rightarrow p = 0 \wedge p = 1 - \frac{1}{r}$

Orbity o okresie-2: $x_{n+2} = x_n \Leftrightarrow f(f(p)) = p$



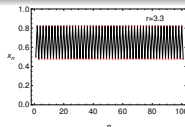
Punkty stałe

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n)$$

Orbity o okresie-1: $f(p) = p \Rightarrow p = 0 \wedge p = 1 - \frac{1}{r}$

Orbity o okresie-2: $x_{n+2} = x_n \Leftrightarrow f(f(p)) = p$

$$f(rp(1 - p)) = p \Leftrightarrow r[rp(1 - p)](1 - [rp(1 - p)]) = p \Rightarrow$$



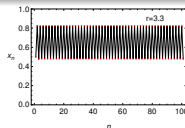
Punkty stałe

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n)$$

Orbity o okresie-1: $f(p) = p \Rightarrow p = 0 \wedge p = 1 - \frac{1}{r}$

Orbity o okresie-2: $x_{n+2} = x_n \Leftrightarrow f(f(p)) = p$

$$f(rp(1 - p)) = p \Leftrightarrow r[rp(1 - p)](1 - [rp(1 - p)]) = p \Rightarrow p = 0, p = 1 - \frac{1}{r}$$



Punkty stałe

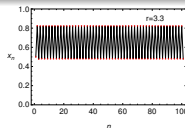
$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n)$$

Orbity o okresie-1: $f(p) = p \Rightarrow p = 0 \wedge p = 1 - \frac{1}{r}$

Orbity o okresie-2: $x_{n+2} = x_n \Leftrightarrow f(f(p)) = p$

$$f(rp(1 - p)) = p \Leftrightarrow r[rp(1 - p)](1 - [rp(1 - p)]) = p \Rightarrow$$

$$p = 0, p = 1 - \frac{1}{r}, p = \frac{r+1 \pm \sqrt{r^2 - 2r - 3}}{2r}$$



Punkty stałe

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n)$$

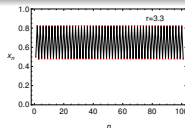
Orbity o okresie-1: $f(p) = p \Rightarrow p = 0 \wedge p = 1 - \frac{1}{r}$

Orbity o okresie-2: $x_{n+2} = x_n \Leftrightarrow f(f(p)) = p$

$$f(rp(1 - p)) = p \Leftrightarrow r[rp(1 - p)](1 - [rp(1 - p)]) = p \Rightarrow$$

$$p = 0, p = 1 - \frac{1}{r}, p = \frac{r+1 \pm \sqrt{r^2 - 2r - 3}}{2r}$$

$$r^2 - 2r - 3 > 0 \Leftrightarrow r > 3$$



Punkty stałe

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n)$$

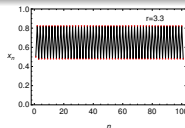
Orbity o okresie-1: $f(p) = p \Rightarrow p = 0 \wedge p = 1 - \frac{1}{r}$

Orbity o okresie-2: $x_{n+2} = x_n \Leftrightarrow f(f(p)) = p$

$$f(rp(1-p)) = p \Leftrightarrow r[rp(1-p)](1 - [rp(1-p)]) = p \Rightarrow$$

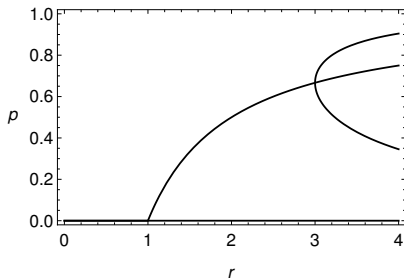
$$p = 0, p = 1 - \frac{1}{r}, p = \frac{r+1 \pm \sqrt{r^2 - 2r - 3}}{2r}$$

$$r^2 - 2r - 3 > 0 \Leftrightarrow r > 3$$



Bifurkacja podwajania okresu

(pitchfork bifurcation):



Punkty stałe

$$x_{n+1} = f(x_n) = rx_n(1 - x_n)$$

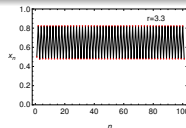
Orbity o okresie-1: $f(p) = p \Rightarrow p = 0 \wedge p = 1 - \frac{1}{r}$

Orbity o okresie-2: $x_{n+2} = x_n \Leftrightarrow f(f(p)) = p$

$$f(rp(1 - p)) = p \Leftrightarrow r[rp(1 - p)](1 - [rp(1 - p)]) = p \Rightarrow$$

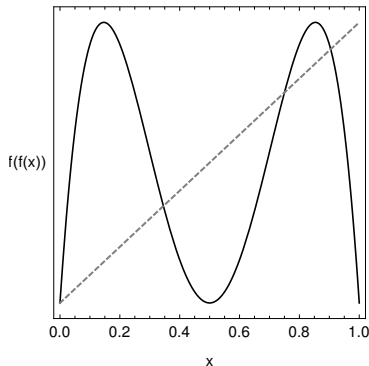
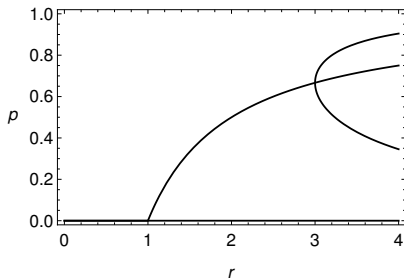
$$p = 0, p = 1 - \frac{1}{r}, p = \frac{r+1 \pm \sqrt{r^2 - 2r - 3}}{2r}$$

$$r^2 - 2r - 3 > 0 \Leftrightarrow r > 3$$



Bifurkacja podwajania okresu

(pitchfork bifurcation):



Punkty stałe

Orbity o okresie-3:

$$x_{n+3} = x_n \Leftrightarrow f(f(f(p))) \equiv f \circ f \circ f(p) \equiv f^3(p) = p$$

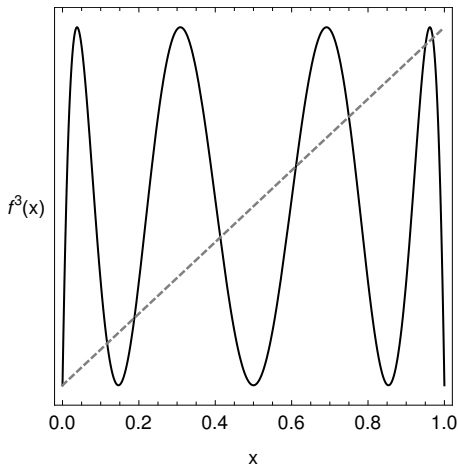


Diagram bifurkacyjny

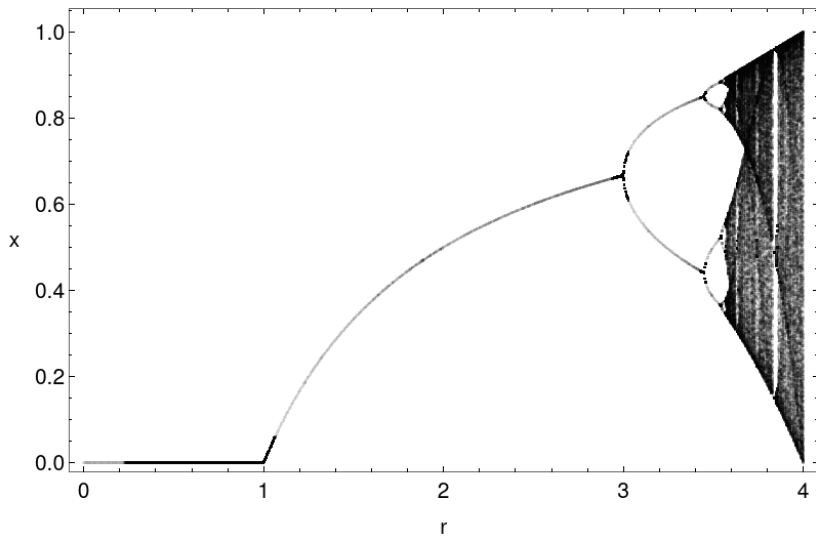


Diagram bifurkacyjny

Druga bifurkacja w $r = 1 + \sqrt{6} = 3.44949\dots$

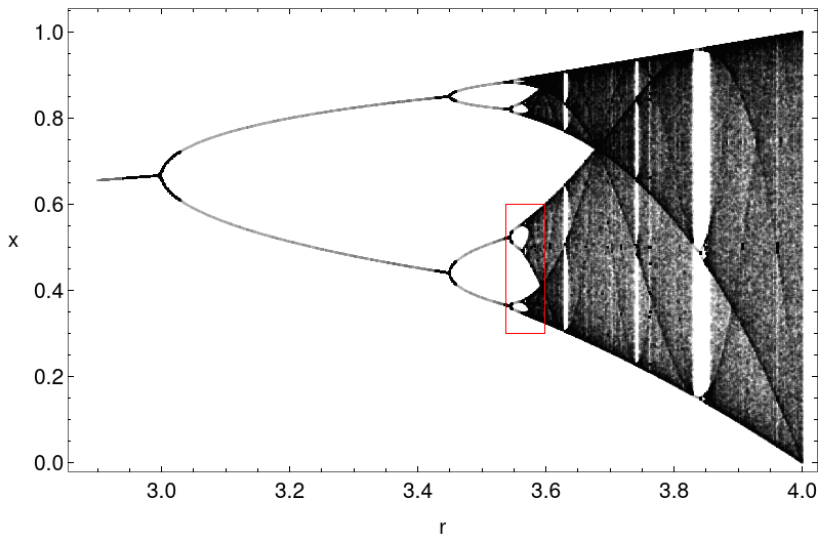


Diagram bifurkacyjny

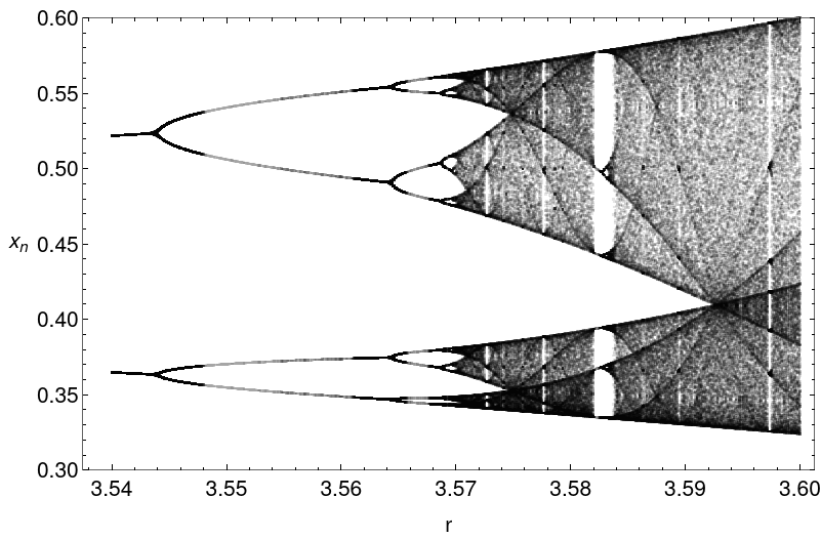
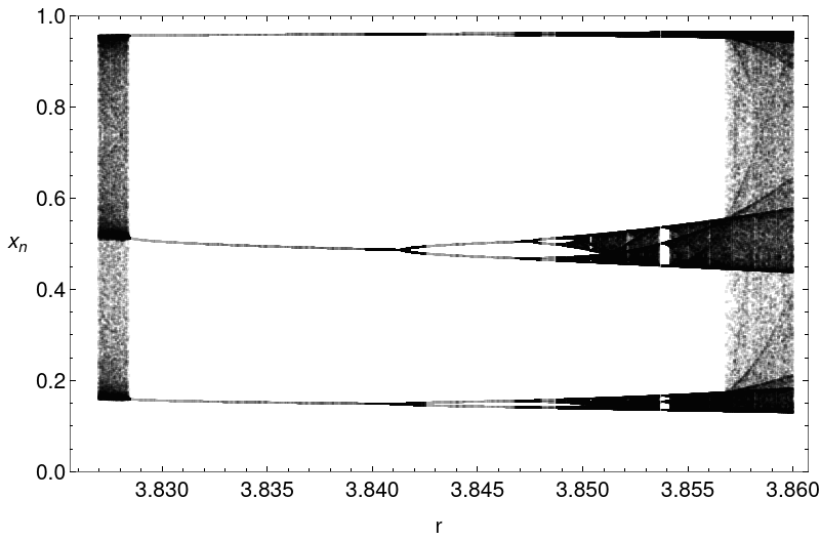
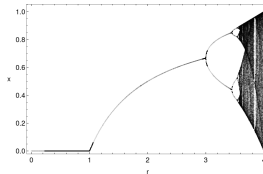
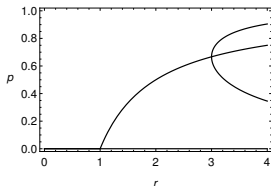


Diagram bifurkacyjny

Okno o okresie-3 pojawia się gdy $r = 1 + \sqrt{8} = 3.828427\dots$



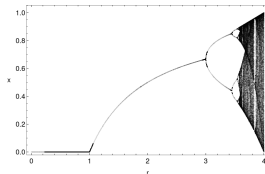
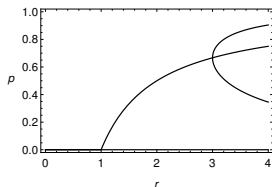
Stabilność punktów stałych



$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Odchylenie od punktu stałego: $\delta_n := x_n - p$.

Stabilność punktów stałych



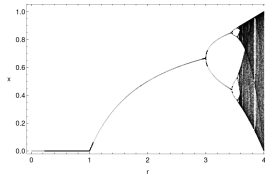
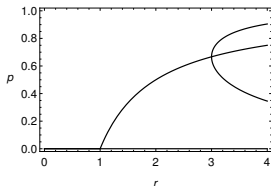
$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Odchylenie od punktu stałego: $\delta_n := x_n - p$.

Sąsiedztwo punktu p :

$$|\delta_{n+1}| = |x_{n+1} - p| = |f(p + \delta_n) - p| \simeq |f'(p)| |\delta_n|$$

Stabilność punktów stałych



$$x_{n+1} = f(x_n)$$

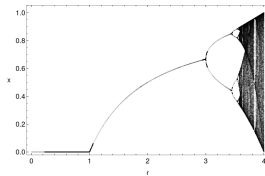
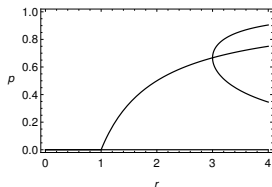
Odchylenie od punktu stałego: $\delta_n := x_n - p$.

Sąsiedztwo punktu p :

$$|\delta_{n+1}| = |x_{n+1} - p| = |f(p + \delta_n) - p| \simeq |f'(p)| |\delta_n|$$

- Warunek (liniowej) stabilności: $|\delta_{n+1}| < |\delta_n| \Rightarrow |f'(p)| < 1$.

Stabilność punktów stałych



$$x_{n+1} = f(x_n)$$

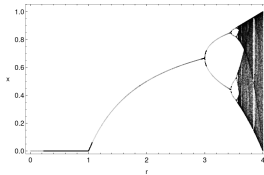
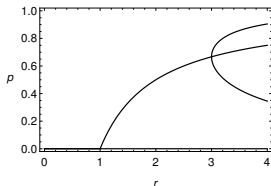
Odchylenie od punktu stałego: $\delta_n := x_n - p$.

Sąsiedztwo punktu p :

$$|\delta_{n+1}| = |x_{n+1} - p| = |f(p + \delta_n) - p| \simeq |f'(p)| |\delta_n|$$

- Warunek (liniowej) stabilności: $|\delta_{n+1}| < |\delta_n| \Rightarrow |f'(p)| < 1$.
- Gdy $|f'(p)| > 1$ to p jest niestabilny.

Stabilność punktów stałych



$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Odchylenie od punktu stałego: $\delta_n := x_n - p$.

Sąsiedztwo punktu p :

$$|\delta_{n+1}| = |x_{n+1} - p| = |f(p + \delta_n) - p| \simeq |f'(p)| |\delta_n|$$

- Warunek (liniowej) stabilności: $|\delta_{n+1}| < |\delta_n| \Rightarrow |f'(p)| < 1$.
- Gdy $|f'(p)| > 1$ to p jest niestabilny.
- $|f'(p)| = 1$ — niedecydowalne w przybliżeniu liniowym: stabilność kryje się w wyrazach $\mathcal{O}(\delta_n^2)$.

Stabilność punktów stałych

$$f(x) = rx(1 - x)$$

$$|f'(p)| = |r(1 - 2p)|$$

- $p = 0$ daje $|f'(0)| = r$ — stabilność dla $r < 1$

Stabilność punktów stałych

$$f(x) = rx(1 - x)$$

$$|f'(p)| = |r(1 - 2p)|$$

- $p = 0$ daje $|f'(0)| = r$ — stabilność dla $r < 1$
- $p = 1 - \frac{1}{r}$ stabilny dla $1 < r < 3$; niestabilny dla $r > 3$; **bifurkacja** w $r = 3$.

Stabilność punktów stałych

$$f(x) = rx(1 - x)$$

$$|f'(p)| = |r(1 - 2p)|$$

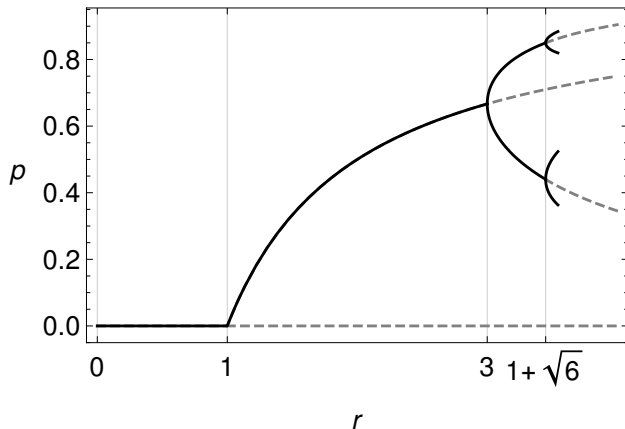
- $p = 0$ daje $|f'(0)| = r$ — stabilność dla $r < 1$
- $p = 1 - \frac{1}{r}$ stabilny dla $1 < r < 3$; niestabilny dla $r > 3$; **bifurkacja** w $r = 3$.
- $p_{1,2} = \frac{1+r \pm \sqrt{r^2-2r-3}}{2r}$ — punkty stałe ($x_{n+2} = x_n$) odwzorowania $f^2(x)$; analiza stabilności $\rightarrow$

$$-1 < r^2(1 - 2p_1)(1 - 2p_2) < 1 \Rightarrow 3 < r < 1 + \sqrt{6} = 3.44949 \dots$$

W $r = 1 + \sqrt{6}$ oba punkty stałe $p_{1,2}$ tracą stabilność $\rightarrow$ **kolejna bifurkacja**.

Stabilność punktów stałych

$$f(x) = rx(1 - x)$$



$$x_{n+1} = f(x_n)$$

$$\delta_n := x_n - p$$

$$\delta_{n+1} \simeq f'(p) \cdot \delta_n + \mathcal{O}(\delta_n^2)$$

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

$$\delta_n := x_n - p$$

$$\delta_{n+1} \simeq f'(p) \cdot \delta_n + \mathcal{O}(\delta_n^2)$$

- Przybliżenie liniowe: $\delta_n \simeq [f'(p)]^n \delta_0$.

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

$$\delta_n := x_n - p$$

$$\delta_{n+1} \simeq f'(p) \cdot \delta_n + \mathcal{O}(\delta_n^2)$$

- Przybliżenie liniowe: $\delta_n \simeq [f'(p)]^n \delta_0$.
- Gdy $f'(p) = 0$, to $\delta_{n+1} \propto \delta_n^2$ — czyli wyrazy kwadratowe określają dynamikę.

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

$$\delta_n := x_n - p$$

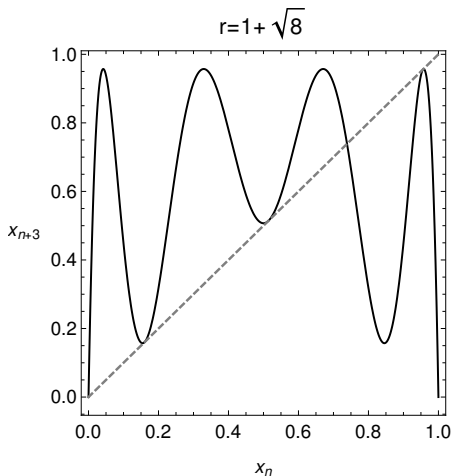
$$\delta_{n+1} \simeq f'(p) \cdot \delta_n + \mathcal{O}(\delta_n^2)$$

- Przybliżenie liniowe: $\delta_n \simeq [f'(p)]^n \delta_0$.
- Gdy $f'(p) = 0$, to $\delta_{n+1} \propto \delta_n^2$ — czyli wyrazy kwadratowe określają dynamikę.
- Wtedy $\delta_n \propto \delta_0^{(2^n)}$ — p jest **superstabilny**, ponieważ zaburzenia zamierają **znacznie** szybciej niż w przypadku liniowym.

Pojawienie się okna o okresie-3 dla $r = 1 + \sqrt{8} \approx 3.83$

$$x_{n+3} = f(f(f(x_n))) \equiv f \circ f \circ f(x_n) \equiv f^3(x_n)$$

Bifurkacja styczeńściowa:

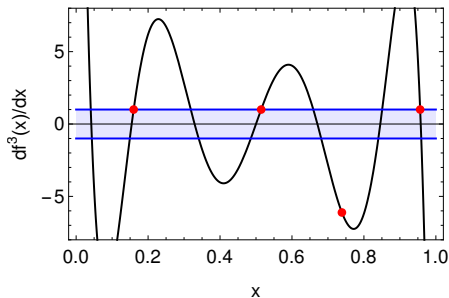
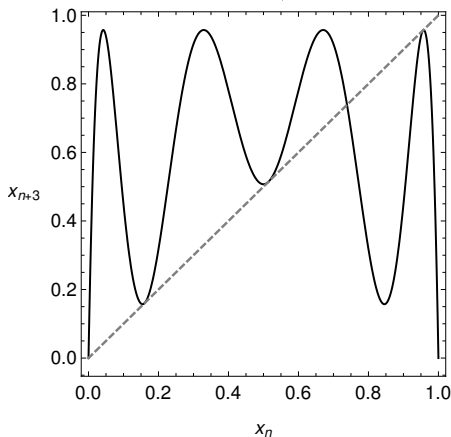


Pojawienie się okna o okresie-3 dla $r = 1 + \sqrt{8} \approx 3.83$

$$x_{n+3} = f(f(f(x_n))) \equiv f \circ f \circ f(x_n) \equiv f^3(x_n)$$

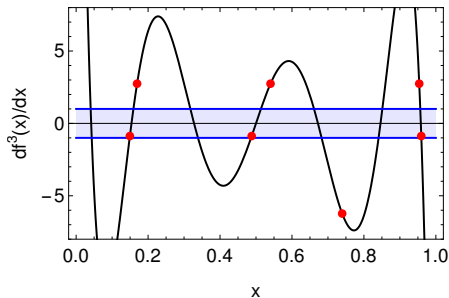
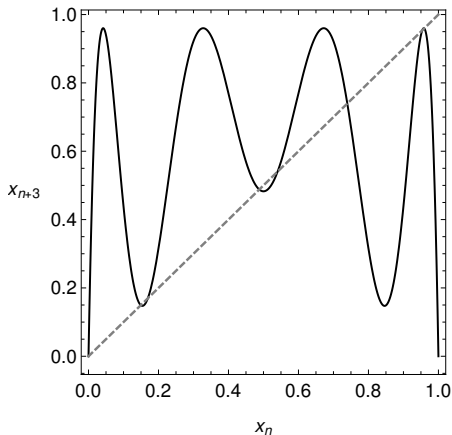
Bifurkacja styczościowa:

$$r = 1 + \sqrt{8}$$

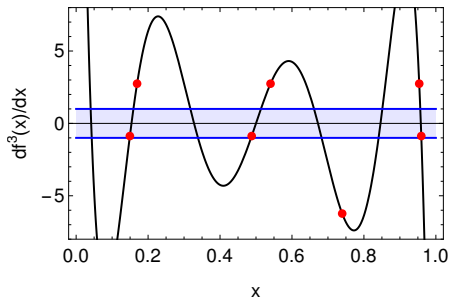
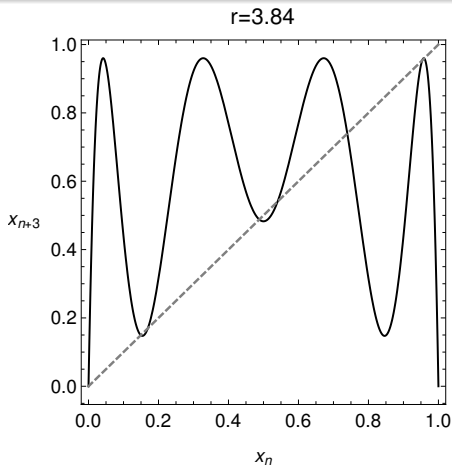


Pojawienie się okna o okresie-3 dla $r = 1 + \sqrt{8} \approx 3.83$

$r=3.84$



Pojawienie się okna o okresie-3 dla $r = 1 + \sqrt{8} \approx 3.83$

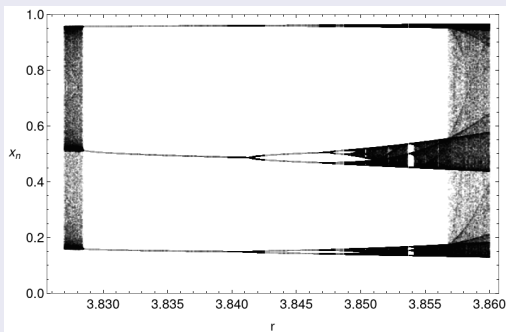


Zadanie 1

Zlokalizować pierwszą wartość r dla której bifurkacja styczeńnościowa prowadzi do orbity o okresie-5.

Koniec okna o okresie-3

(bifurkacja w okres-6)



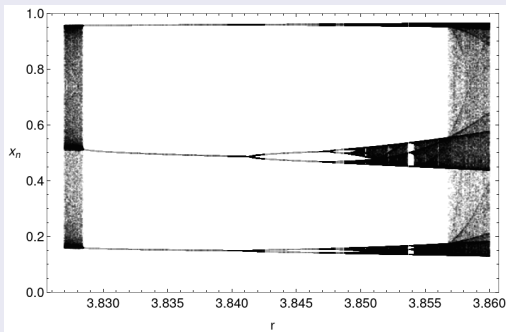
Dokładna wartość⁴:

$$r = 1 + \sqrt{\frac{11}{3} + \left(\frac{1915}{54} - \frac{5\sqrt{201}}{2}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(\frac{1915}{54} + \frac{5\sqrt{201}}{2}\right)^{\frac{1}{3}}} = 3.841499\dots$$

⁴Gordon, Math. Mag. 69, 118-120 (1996)

Superstabilna orbita o okresie-3

(zob. slajd 50)

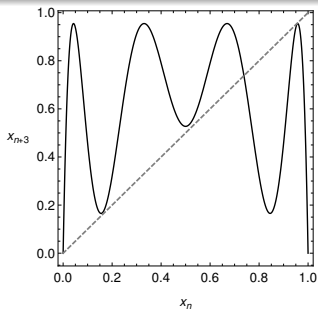


Dokładna wartość⁵:

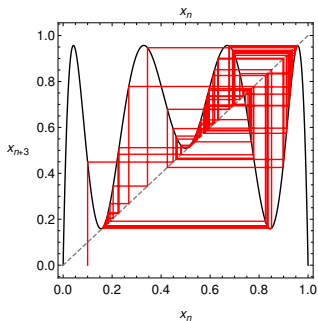
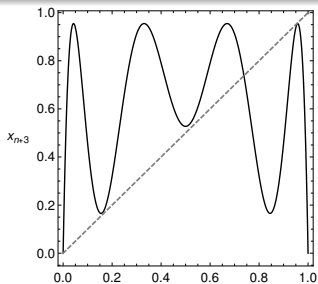
$$r = 1 + \sqrt{\frac{11}{3} + 6 \left(100 - 12\sqrt{69}\right)^{\frac{1}{3}} + \left(100 + 12\sqrt{69}\right)^{\frac{1}{3}}} = 3.831874 \dots$$

⁵Lee, J. Math. Phys. 50, 122702 (2009)

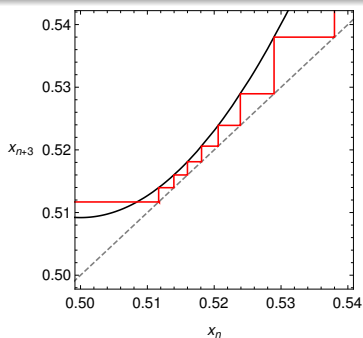
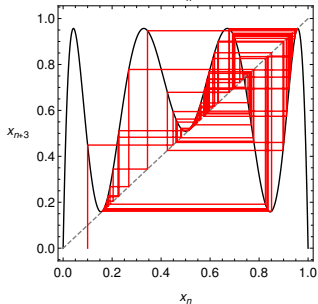
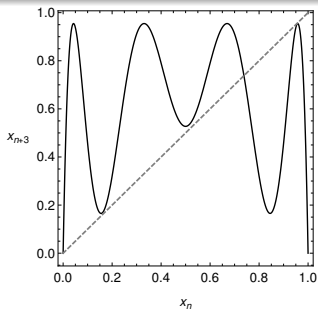
Intermitencja ($r \lesssim 1 + \sqrt{8}$)



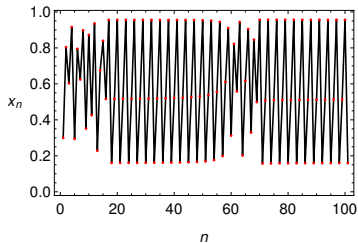
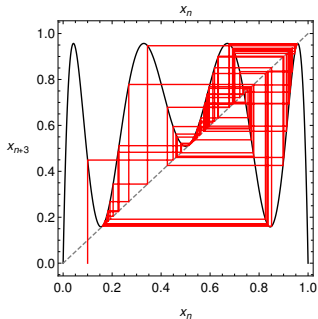
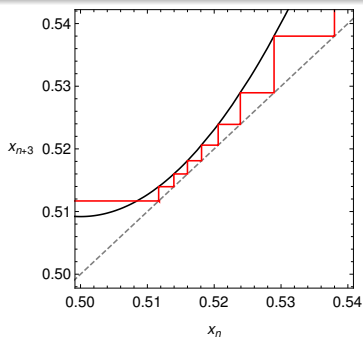
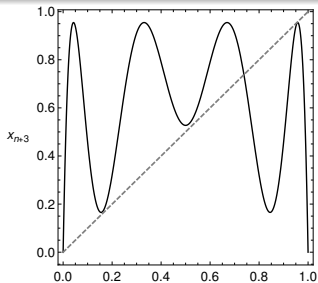
Intermitencja ($r \lesssim 1 + \sqrt{8}$)



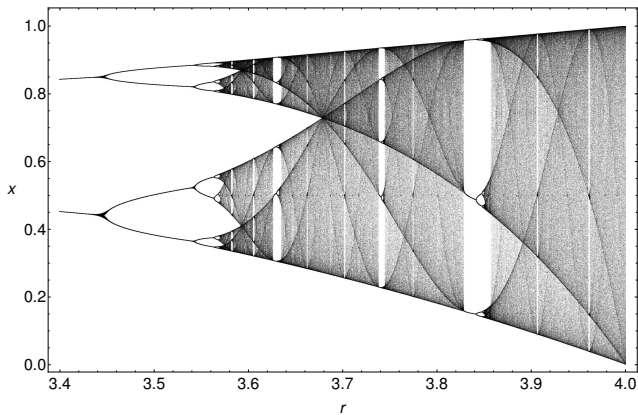
Intermitencja ($r \lesssim 1 + \sqrt{8}$)



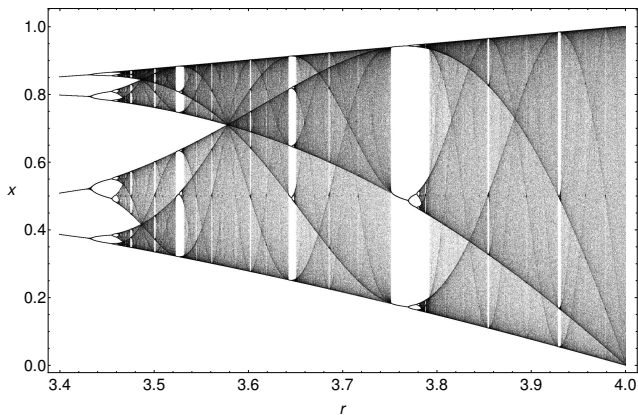
Intermitencja ($r \lesssim 1 + \sqrt{8}$)



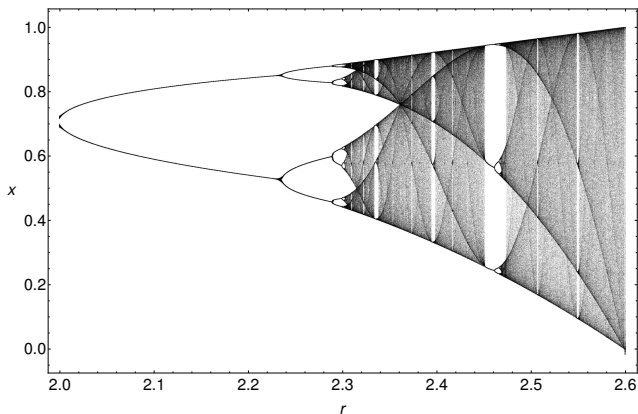
$$f(x) = rx(1 - x)$$



$$f(x) = \frac{r}{4} \sin(\pi x)$$



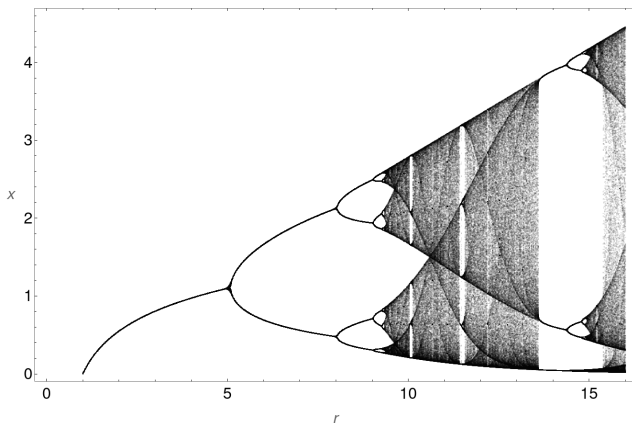
$$f(x) = rx(1 - x^2)$$



Uniwersalność

Model dynamiki lasera (amplituda pola elektrycznego)⁶:

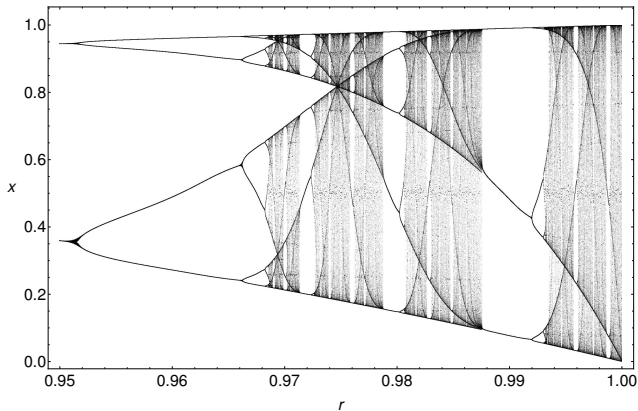
$$f(x) = rx(1 - \tanh x)$$



⁶Okulov & Oraevskii, Quantum Electron. 14(9), 1235-1237 (1984)

Uniwersalność...?

$$f(x) = r(1 - (2x - 1)^4)$$



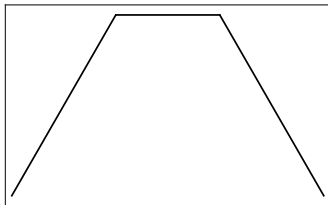
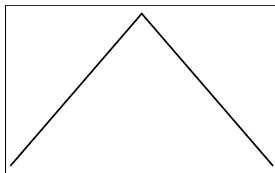
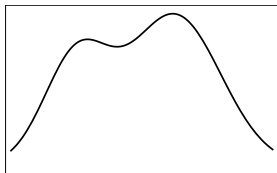
Uniwersalność — tak, ale...

Prawda dla odwzorowań unimodalnych z kwadratowym maksimum w x_m :
 $f(x_m) - f(x) \propto (x - x_m)^2$ gdy $x \approx x_m$, tj. $f''(x_m) \neq 0$.

Uniwersalność — tak, ale...

Prawda dla odwzorowań unimodalnych z kwadratowym maksimum w x_m :
 $f(x_m) - f(x) \propto (x - x_m)^2$ gdy $x \approx x_m$, tj. $f''(x_m) \neq 0$.

Nie zachodzi dla:



Zadanie 2

Określić typ maksimum odwzorowań:

$$\textcircled{1} f(x) = r(1 - (2x - 1)^4) \quad \textcircled{2} g(x) = \frac{rx(1 - x)}{1 + x}$$

Zadanie 3

Niech będzie dane odwzorowanie trójkątne (*tent map*)⁷

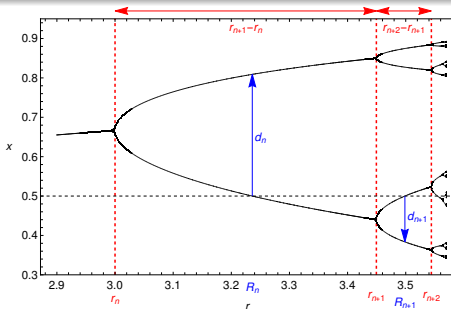
$$x_{n+1} = T(x_n) = \begin{cases} \mu x_n & x_n < 1/2 \\ \mu(1 - x_n) & x_n \geq 1/2 \end{cases}$$

gdzie $x \in [0, 1]$, $\mu \in [0, 2]$.

- $\textcircled{1}$ Zbadać stabilność punktów stałych $T(x)$ w zależności od parametru μ .
- $\textcircled{2}$ Rozważyć $T^2(x)$. Jakie ma punkty stałe? Wskazać okres-2. Czy jest on stabilny?
- $\textcircled{3}$ Przyjąć $\mu = 2$. Znaleźć orbity o okresie-3.

⁷Równoważne sformułowania: $x_{n+1} = \frac{\mu}{2} (1 - 2|x_n - 1/2|) \equiv \mu \min\{x_n, 1 - x_n\}$

Stałe Feigenbauma

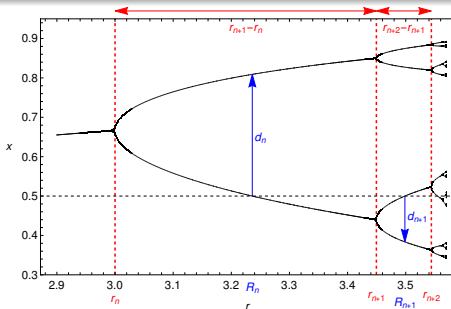


Stałe uniwersalne określające tempo w jakim zachodzi kaskada podwajania okresu⁸:

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_{n+1} - r_n}{r_{n+2} - r_{n+1}} = 4.669\,201\,609\dots$$

⁸Feigenbaum, J. Stat. Phys. 19, 25-52 (1978); 21, 669-706 (1979)

Stałe Feigenbauma



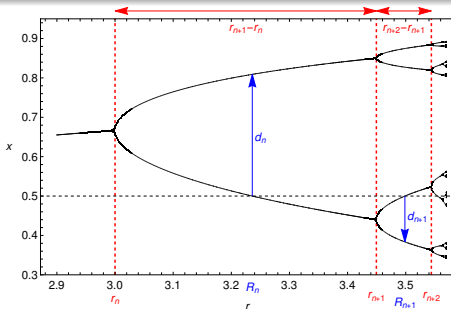
Stałe uniwersalne określające tempo w jakim zachodzi kaskada podwajania okresu⁸:

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_{n+1} - r_n}{r_{n+2} - r_{n+1}} = 4.669\,201\,609\ldots$$

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} = -2.502\,907\,875\ldots$$

⁸Feigenbaum, J. Stat. Phys. 19, 25-52 (1978); 21, 669-706 (1979)

Stałe Feigenbauma



Stałe uniwersalne określające tempo w jakim zachodzi kaskada podwajania okresu⁸:

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{r_{n+1} - r_n}{r_{n+2} - r_{n+1}} = 4.669\,201\,609\dots$$

$$\alpha = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{d_n}{d_{n+1}} = -2.502\,907\,875\dots$$

Uważa się, że są przestępne; nie udowodniono jednak nawet, że są niewymierne.

⁸Feigenbaum, J. Stat. Phys. 19, 25-52 (1978); 21, 669-706 (1979)

Kaskada podwajania okresu $\rightarrow$ chaos

Dla $n \gg 1$:

$$\frac{r_{n+1} - r_n}{r_{n+2} - r_{n+1}} \approx \delta > 1$$

zatem istnieje r_∞ , gdzie następuje akumulacja kaskady (nieskończony okres, czyli aperiodyczność):

$$|r_\infty - r_n| \propto \delta^{-n}$$

takie, że

$$r_\infty = 3.569\,945\,671\dots$$

Stałe Feigenbauma

Superstabilne n -cykle: $f^n(p) = p \wedge \left. \frac{df^n(x)}{dx} \right|_{x=p} = 0$.

⁹Peitgen, Jürgens, Saupe, Chaos and Fractals. New Frontiers of Science.

Stałe Feigenbauma

Superstabilne n -cykle: $f^n(p) = p \wedge \left. \frac{df^n(x)}{dx} \right|_{x=p} = 0$.

Okazuje się, że cykle superstabilne zawsze przechodzą przez $x_m \Rightarrow$ cykle superstabilne odwzorowania logistycznego przechodzą przez $\frac{1}{2}$. [Wartość krytyczna — $f(x_m)$.]

⁹Peitgen, Jürgens, Saupe, Chaos and Fractals. New Frontiers of Science.

Stałe Feigenbauma

Superstabilne n -cykle: $f^n(p) = p \wedge \left. \frac{df^n(x)}{dx} \right|_{x=p} = 0$.

Okazuje się, że cykle superstabilne zawsze przechodzą przez $x_m \Rightarrow$ cykle superstabilne odwzorowania logistycznego przechodzą przez $\frac{1}{2}$. [Wartość krytyczna — $f(x_m)$.]

Zadanie 4

Udowodnić powyższy fakt.

⁹Peitgen, Jürgens, Saupe, Chaos and Fractals. New Frontiers of Science.

Stałe Feigenbauma

Superstabilne n -cykle: $f^n(p) = p \wedge \left. \frac{df^n(x)}{dx} \right|_{x=p} = 0$.

Okazuje się, że cykle superstabilne zawsze przechodzą przez $x_m \Rightarrow$ cykle superstabilne odwzorowania logistycznego przechodzą przez $\frac{1}{2}$. [Wartość krytyczna — $f(x_m)$.]

Zadanie 4

Udowodnić powyższy fakt.

Niech R_n oznacza r dla którego istnieje superstabilny 2^n -cykl; wtedy⁹

$$r_n < R_n < r_{n+1}$$

⁹Peitgen, Jürgens, Saupe, Chaos and Fractals. New Frontiers of Science.

Stałe Feigenbauma

Superstabilne n -cykle: $f^n(p) = p \wedge \left. \frac{df^n(x)}{dx} \right|_{x=p} = 0$.

Okazuje się, że cykle superstabilne zawsze przechodzą przez $x_m \Rightarrow$ cykle superstabilne odwzorowania logistycznego przechodzą przez $\frac{1}{2}$. [Wartość krytyczna — $f(x_m)$.]

Zadanie 4

Udowodnić powyższy fakt.

Niech R_n oznacza r dla którego istnieje superstabilny 2^n -cykl; wtedy⁹

$$r_n < R_n < r_{n+1}$$

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_{n+1} - R_n}{R_{n+2} - R_{n+1}}$$

⁹Peitgen, Jürgens, Saupe, Chaos and Fractals. New Frontiers of Science.

Stałe Feigenbauma

Superstabilne n -cykle: $f^n(p) = p \wedge \left. \frac{df^n(x)}{dx} \right|_{x=p} = 0$.

Okazuje się, że cykle superstabilne zawsze przechodzą przez $x_m \Rightarrow$ cykle superstabilne odwzorowania logistycznego przechodzą przez $\frac{1}{2}$. [Wartość krytyczna — $f(x_m)$.]

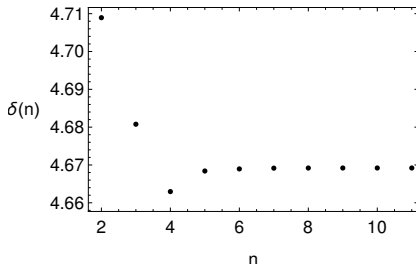
Zadanie 4

Udowodnić powyższy fakt.

Niech R_n oznacza r dla którego istnieje superstabilny 2^n -cykl; wtedy⁹

$$r_n < R_n < r_{n+1}$$

$$\delta = \lim_{n \rightarrow \infty} \delta(n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{R_{n+1} - R_n}{R_{n+2} - R_{n+1}}$$



⁹Peitgen, Jürgens, Saupe, Chaos and Fractals. New Frontiers of Science.

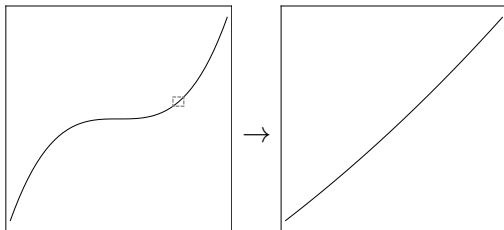
Uniwersalność: renormalizacja

Jak funkcja zmienia się pod wpływem przeskalowania?

Uniwersalność: renormalizacja

Jak funkcja zmienia się pod wpływem przeskalowania?

Np. powiększenie (zoom):

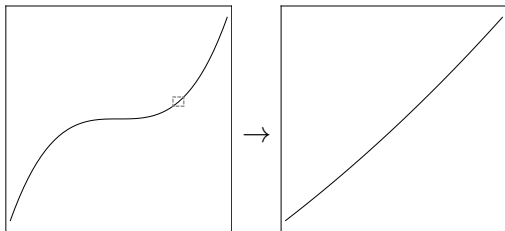


Każda krzywa gładka wydaje się prostą po takim przeskalowaniu.

Uniwersalność: renormalizacja

Jak funkcja zmienia się pod wpływem przeskalowania?

Np. powiększenie (zoom):



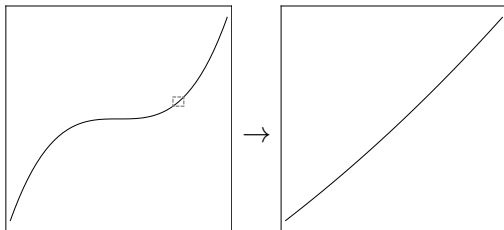
Każda krzywa gładka wydaje się prostą po takim przeskalowaniu.

Prosta jest zatem (w granicy) **punktem stałym (krzywą uniwersalną)** tej transformacji.

Uniwersalność: renormalizacja

Jak funkcja zmienia się pod wpływem przeskalowania?

Np. powiększenie (zoom):



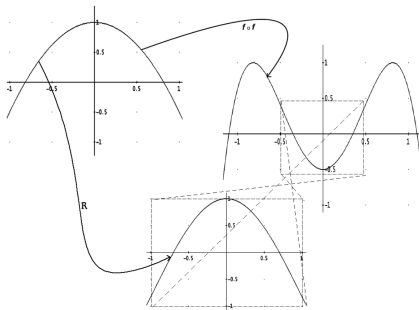
Każda krzywa gładka wydaje się prostą po takim przeskalowaniu.

Prosta jest zatem (w granicy) **punktem stałym (krzywą uniwersalną)** tej transformacji.

Diagram bifurkacyjny odwzorowania logistycznego przejawia samopodobieństwo: kaskada podwajania okresu jest w pełni zawarta w małym fragmencie pełnego diagramu.

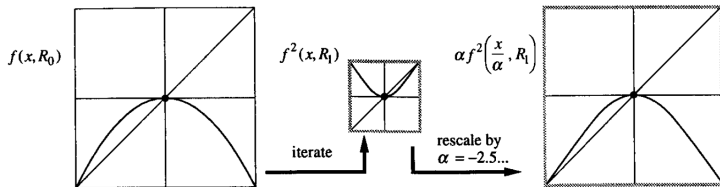
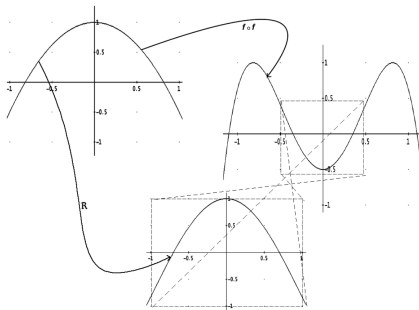
Uniwersalność: renormalizacja

Istnieje zatem przeskalowanie (grupa renormalizacji), która zachowuje ww. samopodobieństwo: kiedy okres-1 bifurkuje w okres-2, punkt stały odwzorowania f staje się punktem stałym odwzorowania f^2 . Tzn., że f jest renormalizowane w f^2 . Podobnie dla bifurkacji z f^2 w f^4 itd.



Uniwersalność: renormalizacja

Istnieje zatem przeskalowanie (grupa renormalizacji), która zachowuje ww. samopodobieństwo: kiedy okres-1 bifurkuje w okres-2, punkt stały odwzorowania f staje się punktem stałym odwzorowania f^2 . Tzn., że f jest renormalizowane w f^2 . Podobnie dla bifurkacji z f^2 w f^4 itd.



Rozważmy superstabilne 2^n -cykle, które zachodzą dla $r = R_n$:

$$\left. \frac{df_{R_n}^{2^n}(x)}{dx} \right|_{x=p} = 0$$

Rozważmy superstabilne 2^n -cykle, które zachodzą dla $r = R_n$:

$$\left. \frac{df_{R_n}^{2^n}(x)}{dx} \right|_{x=p} = 0$$

Z diagramu bifurkacyjnego mamy, że

$$d_n = f_{R_n}^{2^{n-1}}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$$

Rozważmy superstabilne 2^n -cykle, które zachodzą dla $r = R_n$:

$$\left. \frac{df_{R_n}^{2^n}(x)}{dx} \right|_{x=p} = 0$$

Z diagramu bifurkacyjnego mamy, że

$$d_n = f_{R_n}^{2^{n-1}}\left(\frac{1}{2}\right) - \frac{1}{2}$$

Możemy dokonać takiej transformacji współrzędnych, by $x = 1/2 \rightarrow x = 0$ (por. slajdy [3](#) oraz [68](#)):

$$d_n = f_{R_n}^{2^{n-1}}(0)$$

Uniwersalność: renormalizacja

Mamy zatem z definicji stałej α

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-|\alpha|)^n d_{n+1} = d_1$$

lub też

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-|\alpha|)^n f_{R_{n+1}}^{2^n}(0) = d_1$$

Uniwersalność: renormalizacja

Mamy zatem z definicji stałej α

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-|\alpha|)^n d_{n+1} = d_1$$

lub też

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-|\alpha|)^n f_{R_{n+1}}^{2^n}(0) = d_1$$

Pozwalając na dowolne x , po stosownym przeskalowaniu przez α^n , mamy w granicy funkcję

$$g_1(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-|\alpha|)^n f_{R_{n+1}}^{2^n} \left(\frac{x}{(-|\alpha|)^n} \right)$$

Uniwersalność: renormalizacja

Mamy zatem z definicji stałej α

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-|\alpha|)^n d_{n+1} = d_1$$

lub też

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (-|\alpha|)^n f_{R_{n+1}}^{2^n}(0) = d_1$$

Pozwalając na dowolne x , po stosownym przeskalowaniu przez α^n , mamy w granicy funkcję

$$g_1(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-|\alpha|)^n f_{R_{n+1}}^{2^n} \left(\frac{x}{(-|\alpha|)^n} \right)$$

która prowadzi do rodziny funkcji

$$g_i(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-|\alpha|)^n f_{R_{n+i}}^{2^n} \left(\frac{x}{(-|\alpha|)^n} \right)$$

$$g_{i-1}(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} (-|\alpha|)^n f_{R_{n+i-1}}^{2^n} \left(\frac{x}{(-|\alpha|)^n} \right)$$

Uniwersalność: renormalizacja

$$\begin{aligned} g_{i-1}(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-|\alpha|)^n f_{R_{n+i-1}}^{2^n} \left(\frac{x}{(-|\alpha|)^n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-|\alpha|) (-|\alpha|)^{n-1} f_{R_{n-1+i}}^{2^{n-1+1}} \left(-\frac{1}{|\alpha|} \frac{x}{(-|\alpha|)^{n-1}} \right) \end{aligned}$$

Uniwersalność: renormalizacja

$$\begin{aligned} g_{i-1}(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-|\alpha|)^n f_{R_{n+i-1}}^{2^n} \left(\frac{x}{(-|\alpha|)^n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-|\alpha|) (-|\alpha|)^{n-1} f_{R_{n-1+i}}^{2^{n-1+1}} \left(-\frac{1}{|\alpha|} \frac{x}{(-|\alpha|)^{n-1}} \right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} (-|\alpha|) (-|\alpha|)^m f_{R_{m+i}}^{2^m} \left[\frac{1}{(-|\alpha|)^m} (-|\alpha|)^m f_{R_{m+i}}^{2^m} \left(-\frac{1}{|\alpha|} \frac{x}{(-|\alpha|)^m} \right) \right] \end{aligned}$$

Uniwersalność: renormalizacja

$$\begin{aligned} g_{i-1}(x) &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-|\alpha|)^n f_{R_{n+i-1}}^{2^n} \left(\frac{x}{(-|\alpha|)^n} \right) \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} (-|\alpha|) (-|\alpha|)^{n-1} f_{R_{n-1+i}}^{2^{n-1+1}} \left(-\frac{1}{|\alpha|} \frac{x}{(-|\alpha|)^{n-1}} \right) \\ &= \lim_{m \rightarrow \infty} (-|\alpha|) (-|\alpha|)^m f_{R_{m+i}}^{2^m} \left[\frac{1}{(-|\alpha|)^m} (-|\alpha|)^m f_{R_{m+i}}^{2^m} \left(-\frac{1}{|\alpha|} \frac{x}{(-|\alpha|)^m} \right) \right] \\ &= -|\alpha| g_i \left[g_i \left(-\frac{x}{|\alpha|} \right) \right] \equiv T g_i(x) \end{aligned}$$

gdzie T jest operatorem podwajania okresu.

Uniwersalność: renormalizacja

W granicy $i \rightarrow \infty$ funkcja $g(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} g_i(x)$ jest punktem stałym¹⁰ operatora T :

$$g(x) = Tg(x) \equiv \alpha g^2\left(\frac{x}{\alpha}\right)$$

¹⁰Sfondrini: <https://arxiv.org/pdf/1210.2262.pdf>;
Steven Strogatz, wykłady: <https://www.youtube.com/watch?v=90kVNInimSc> oraz
<https://www.youtube.com/watch?v=97XDsyXr5HU>

Uniwersalność: renormalizacja

W granicy $i \rightarrow \infty$ funkcja $g(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} g_i(x)$ jest punktem stałym¹⁰ operatora T :

$$g(x) = Tg(x) \equiv \alpha g^2\left(\frac{x}{\alpha}\right)$$

Zadanie 5

Pokazać, że $\mu g(x/\mu)$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, również spełnia powyższe równanie (Feigenbauma-Cvitanovića, FC).

¹⁰Sfondrini: <https://arxiv.org/pdf/1210.2262.pdf>;
Steven Strogatz, wykłady: <https://www.youtube.com/watch?v=90kVNInimSc> oraz
<https://www.youtube.com/watch?v=97XDsyXr5HU>

Uniwersalność: renormalizacja

W granicy $i \rightarrow \infty$ funkcja $g(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} g_i(x)$ jest punktem stałym¹⁰ operatora T :

$$g(x) = Tg(x) \equiv \alpha g^2\left(\frac{x}{\alpha}\right)$$

Zadanie 5

Pokazać, że $\mu g(x/\mu)$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, również spełnia powyższe równanie (Feigenbauma-Cvitanovića, FC).

Zatem można arbitralnie przeskalować g tak by $g(0) = 1$.

¹⁰Sfondrini: <https://arxiv.org/pdf/1210.2262.pdf>;
Steven Strogatz, wykłady: <https://www.youtube.com/watch?v=90kVNInimSc> oraz
<https://www.youtube.com/watch?v=97XDsyXr5HU>

Uniwersalność: renormalizacja

W granicy $i \rightarrow \infty$ funkcja $g(x) = \lim_{i \rightarrow \infty} g_i(x)$ jest punktem stałym¹⁰ operatora T :

$$g(x) = Tg(x) \equiv \alpha g^2\left(\frac{x}{\alpha}\right)$$

Zadanie 5

Pokazać, że $\mu g(x/\mu)$, $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, również spełnia powyższe równanie (Feigenbauma-Cvitanovića, FC).

Zatem można arbitralnie przeskalować g tak by $g(0) = 1$. Wtedy

$$1 \equiv g(0) = \alpha g[g(0)] \equiv \alpha g(1),$$

zatem

$$\alpha = \frac{1}{g(1)}$$

¹⁰Sfondrini: <https://arxiv.org/pdf/1210.2262.pdf>;
Steven Strogatz, wykłady: <https://www.youtube.com/watch?v=90kVNInimSc> oraz
<https://www.youtube.com/watch?v=97XDsyXr5HU>

Uniwersalność: renormalizacja

Równanie FC jest równaniem funkcyjnym na funkcję g , które nie ma znanego, ogólnego analitycznego rozwiązania. Można je rozwiązać w przybliżeniu, zakładając $g(x)$ w postaci szeregu i wstawiając bezpośrednio do równania FC oraz uzgadniając współczynniki przy kolejnych potęgach x .

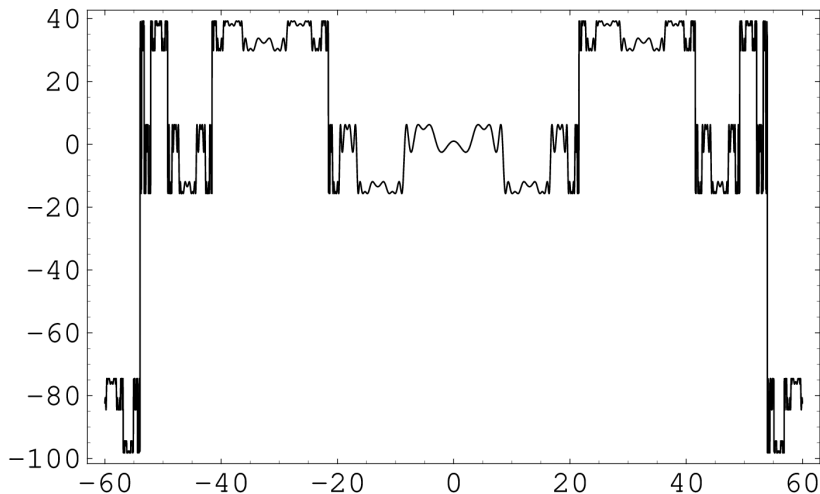
Równanie FC jest równaniem funkcyjnym na funkcję g , które nie ma znanego, ogólnego analitycznego rozwiązania. Można je rozwiązać w przybliżeniu, zakładając $g(x)$ w postaci szeregu i wstawiając bezpośrednio do równania FC oraz uzgadniając współczynniki przy kolejnych potęgach x .

Zadanie 6

Założyć, że $g(x) = 1 + bx^2 + \mathcal{O}(x^4)$. Rozwiązać równanie FC oraz obliczyć wartość α . Ile wynosi błąd względny?

Uniwersalność: renormalizacja

Funkcja Feigenbauma $g(x)$:

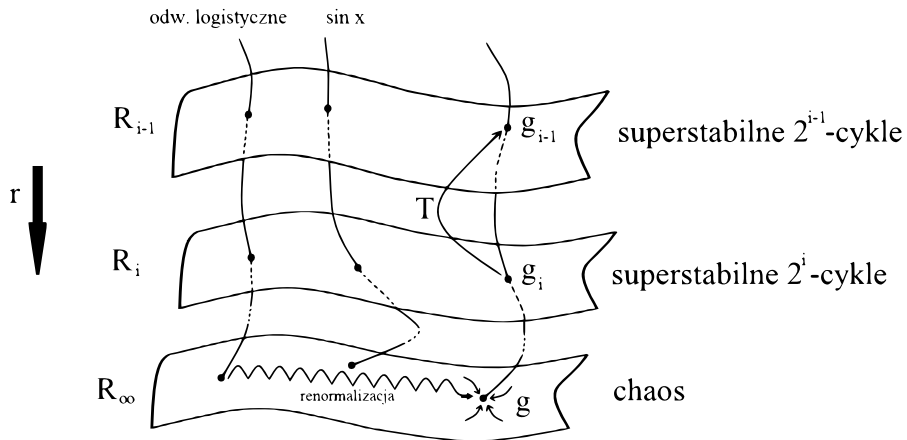


Uniwersalność: renormalizacja

Przestrzeń funkcji unimodalnych z kwadratowym maksimum:

Uniwersalność: renormalizacja

Przestrzeń funkcji unimodalnych z kwadratowym maksimum:



Uniwersalność: renormalizacja

$g(x)$ jest punktem stałym operatora T . Linearyzując równanie FC wokół tego punktu stałego, tj. przyjmując w równ. FC $g(x) + \varepsilon h(x)$ zamiast $g(x)$, $|\varepsilon| \ll 1$, dostaniemy równanie funkcyjne na $h(x)$ gdzie

δ jest wartością własną:

$$\alpha \left[h \left(g \left(\frac{x}{\alpha} \right) \right) + g' \left(g \left(\frac{x}{\alpha} \right) \right) h \left(\frac{x}{\alpha} \right) \right] = \delta h(x), \quad \delta > 1$$

Uniwersalność: renormalizacja

$g(x)$ jest punktem stałym operatora T . Linearyzując równanie FC wokół tego punktu stałego, tj. przyjmując w równ. FC $g(x) + \varepsilon h(x)$ zamiast $g(x)$, $|\varepsilon| \ll 1$, dostaniemy równanie funkcyjne na $h(x)$ gdzie

δ jest wartością własną:

$$\alpha \left[h \left(g \left(\frac{x}{\alpha} \right) \right) + g' \left(g \left(\frac{x}{\alpha} \right) \right) h \left(\frac{x}{\alpha} \right) \right] = \delta h(x), \quad \delta > 1$$

Zadanie 7

Założyć, że $h(x) = h(0) + \mathcal{O}(x)$, $h(0) \neq 0$. Rozwiązać powyższe równanie własne oraz obliczyć wartość δ . Ile wynosi błąd względny?

Uniwersalność: renormalizacja

Różne rodzaje odwzorowań

$$f_a(x) = 1 - a|x|^b,$$

$b = 2, 3, 4, \dots$ (tj. różnego typu maksima), prowadzą do różnych wartości $\alpha(b)$ i $\delta(b)$:

Uniwersalność: renormalizacja

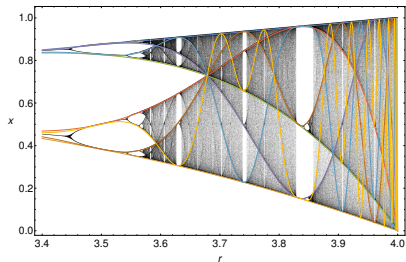
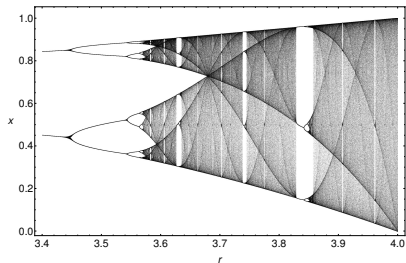
Różne rodzaje odwzorowań

$$f_a(x) = 1 - a|x|^b,$$

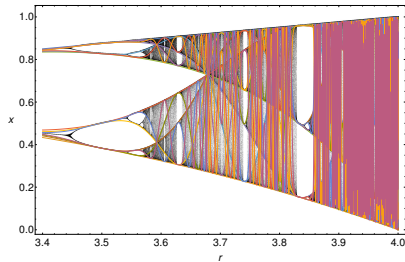
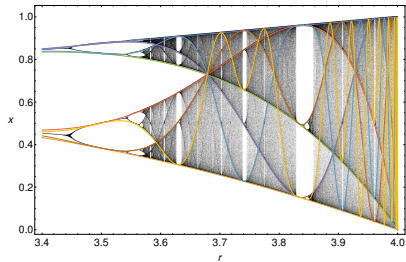
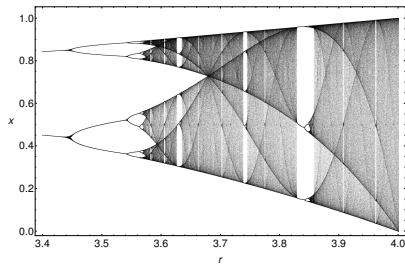
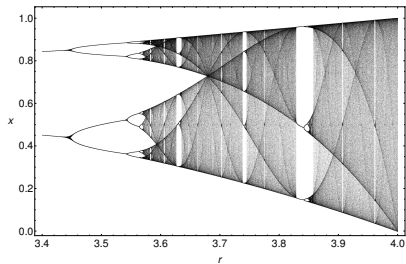
$b = 2, 3, 4, \dots$ (tj. różnego typu maksima), prowadzą do różnych wartości $\alpha(b)$ i $\delta(b)$:

$\alpha(2)$	-2.502907875095892822283902873218215786381271376727149977336192056779235463179590206703299649746433834129595232
$\delta(2)$	4.6692016091029906718532038204662016172581855774757686327456513430041343302113147371387
$\alpha(3)$	-1.92769096384764084494999435296631905189265896703673262074357967274086677490009
$\delta(3)$	5.9679687037774510409941930199796723235126029198274239483931720
$\alpha(4)$	-1.690302971405244853343780150324161348228278059709561966682423263
$\delta(4)$	7.28468621707334336430893056799555306947804661979979065907212
$\alpha(5)$	-1.555771250196518402132978629657484410192322899174229329
$\delta(5)$	8.349499132066963521109747401811235583257476
$\alpha(6)$	-1.4677424503199009444538343151089737463687971293967
$\delta(6)$	9.296246832771370082834476566367457550306688756
$\alpha(7)$	-1.40511078831683179942567128926679825719406757
$\delta(7)$	10.22215952883488165524180132934744
$\alpha(8)$	-1.35801727913805034548737633310626140065806
$\delta(8)$	10.948624265941590425534207900712234803
$\alpha(9)$	-1.32118575980525276678233264501112163344
$\delta(9)$	11.76833363955408532268157502
$\alpha(10)$	-1.291516867262344569625592342901483728
$\delta(10)$	12.341409045349293839697630423331
$\alpha(11)$	-1.267061407902472463290059733681368673
$\delta(11)$	13.07654580565116239270558
$\alpha(12)$	-1.2465277517207492954398065872519312
$\delta(12)$	13.5350756661702764957005633538

Krzywe krytyczne (*supertracks*)



Krzywe krytyczne (*supertracks*)



Krzywe krytyczne (*supertracks*)

Niech $v_r = f_r(0.5)$ będzie punktem krytycznym; $f_r(x) = rx(1 - x)$.
Krzywe krytyczne to wielomiany $Q(n, r)$ stopnia $(2^n - 1)$, pokazujące zależność $f_r^n(v_r)$ od r :

¹¹Neidinger & Annen, Am Math Mon 103(8), 640-653 (1996);
oraz Peitgen, Jürgens, Saupe, Chaos and Fractals. New Frontiers of Science; oraz
Oblow, Phys. Lett. A, 128(8), 406-412 (1988); oraz Barabasi, Nitsch, Dorobantu, Phys.
Lett. A, 139(1,2), 53-56 (1989)

Krzywe krytyczne (*supertracks*)

Niech $v_r = f_r(0.5)$ będzie punktem krytycznym; $f_r(x) = rx(1 - x)$.
Krzywe krytyczne to wielomiany $Q(n, r)$ stopnia $(2^n - 1)$, pokazujące zależność $f_r^n(v_r)$ od r :

$$Q(1, r) = f_r(0.5) = 0.25r$$

$$Q(2, r) = f_r^2(0.5) = 0.25(1 - 0.25r)r^2$$

$$Q(3, r) = f_r^3(0.5) = 0.25(1 - 0.25r)[1 - 0.25(1 - 0.25r)r^2]r^3$$

etc.

¹¹Neidinger & Annen, Am Math Mon 103(8), 640-653 (1996);
oraz Peitgen, Jürgens, Saupe, Chaos and Fractals. New Frontiers of Science; oraz
Oblow, Phys. Lett. A, 128(8), 406-412 (1988); oraz Barabasi, Nitsch, Dorobantu, Phys.
Lett. A, 139(1,2), 53-56 (1989)

Krzywe krytyczne (*supertracks*)

Niech $v_r = f_r(0.5)$ będzie punktem krytycznym; $f_r(x) = rx(1 - x)$.
Krzywe krytyczne to wielomiany $Q(n, r)$ stopnia $(2^n - 1)$, pokazujące zależność $f_r^n(v_r)$ od r :

$$Q(1, r) = f_r(0.5) = 0.25r$$

$$Q(2, r) = f_r^2(0.5) = 0.25(1 - 0.25r)r^2$$

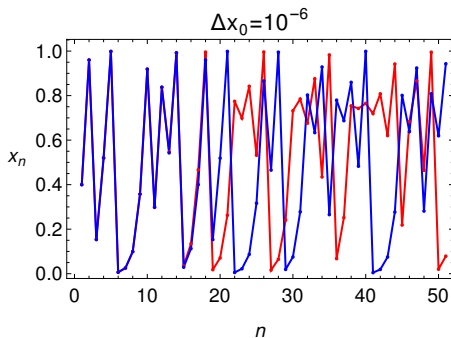
$$Q(3, r) = f_r^3(0.5) = 0.25(1 - 0.25r)[1 - 0.25(1 - 0.25r)r^2]r^3$$

etc.

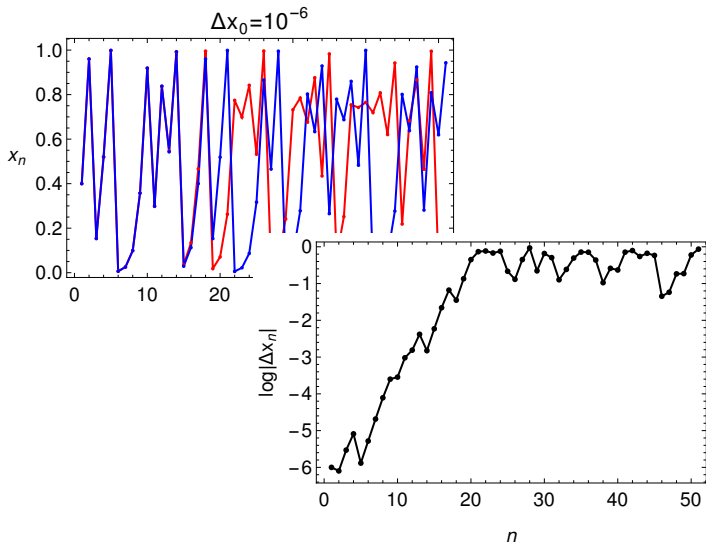
*The Road to Chaos is Filled with Polynomial Curves.*¹¹

¹¹Neidinger & Annen, Am Math Mon 103(8), 640-653 (1996);
oraz Peitgen, Jürgens, Saupe, Chaos and Fractals. New Frontiers of Science; oraz
Oblow, Phys. Lett. A, 128(8), 406-412 (1988); oraz Barabasi, Nitsch, Dorobantu, Phys.
Lett. A, 139(1,2), 53-56 (1989)

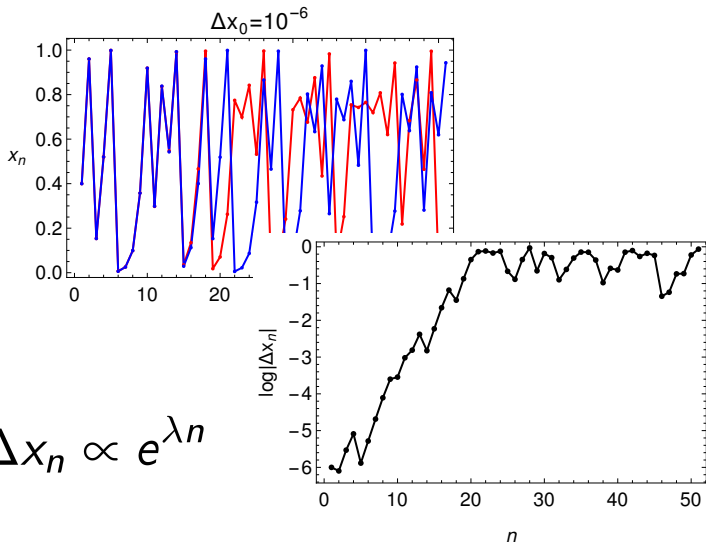
Chaos: wrażliwość na warunki początkowe



Chaos: wrażliwość na warunki początkowe



Chaos: wrażliwość na warunki początkowe



Chaos: wykładniki Lapunowa

$\Delta x_n \propto e^{\lambda n} \rightarrow \lambda$ — wykładnik Lapunowa:

- $\lambda > 0$ — układ jest chaotyczny
- $\lambda \leq 0$ — dynamika regularna (periodyczna, quasiperiodyczna, ...)

Chaos: wykładniki Lapunowa

$\Delta x_n \propto e^{\lambda n} \rightarrow \lambda$ — wykładnik Lapunowa:

- $\lambda > 0$ — układ jest chaotyczny
- $\lambda \leq 0$ — dynamika regularna (periodyczna, quasiperiodyczna, ...)

Indykator chaosu.

Interpretacja: średnia eksponencjalna rozbieżność (lub zbieżność) początkowo bliskich sobie orbit.

Chaos: wykładniki Lapunowa

$\Delta x_n \propto e^{\lambda n} \rightarrow \lambda$ — wykładnik Lapunowa:

- $\lambda > 0$ — układ jest chaotyczny
- $\lambda \leq 0$ — dynamika regularna (periodyczna, quasiperiodyczna, ...)

Indykator chaosu.

Interpretacja: średnia eksponencjalna rozbieżność (lub zbieżność) początkowo bliskich sobie orbit.

- 1 $\Delta_t = \Delta_0 e^{\lambda t}$
- 2 a = tolerancja
- 3 $\Delta_t > a$ — rozbieżność zauważalna/nietolerowalna
- 4 $t \approx \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{a}{\Delta_0} \right)$
- 5 $1/\lambda$ — czas Lapunowa
- 6 nie da się przewyciężyć logarytmu — $t \rightarrow 10t$ wymaga $\Delta_0 \rightarrow 10^{10} \Delta_0$
- 7 to jest właśnie istota *nieprzewidywalności* chaosu

Chaos: wykładniki Lapunowa

$\Delta x_n \propto e^{\lambda n} \rightarrow \lambda$ — wykładnik Lapunowa:

- $\lambda > 0$ — układ jest chaotyczny
- $\lambda \leq 0$ — dynamika regularna (periodyczna, quasiperiodyczna, ...)

Indykator chaosu.

Interpretacja: średnia eksponencjalna rozbieżność (lub zbieżność) początkowo bliskich sobie orbit.

- 1 $\Delta_t = \Delta_0 e^{\lambda t}$
- 2 a = tolerancja
- 3 $\Delta_t > a$ — rozbieżność zauważalna/nietolerowalna
- 4 $t \approx \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{a}{\Delta_0} \right)$
- 5 $1/\lambda$ — czas Lapunowa
- 6 nie da się przewyciężyć logarytmu — $t \rightarrow 10t$ wymaga $\Delta_0 \rightarrow 10^{10} \Delta_0$
- 7 to jest właśnie istota *nieprzewidywalności* chaosu

Chaos: wykładniki Lapunowa

$\Delta x_n \propto e^{\lambda n} \rightarrow \lambda$ — wykładnik Lapunowa:

- $\lambda > 0$ — układ jest chaotyczny
- $\lambda \leq 0$ — dynamika regularna (periodyczna, quasiperiodyczna, ...)

Indykator chaosu.

Interpretacja: średnia eksponencjalna rozbieżność (lub zbieżność) początkowo bliskich sobie orbit.

- 1 $\Delta_t = \Delta_0 e^{\lambda t}$
- 2 a = tolerancja
- 3 $\Delta_t > a$ — rozbieżność zauważalna/nietolerowalna
- 4 $t \approx \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{a}{\Delta_0} \right)$
- 5 $1/\lambda$ — czas Lapunowa
- 6 nie da się przewyciężyć logarytmu — $t \rightarrow 10t$ wymaga $\Delta_0 \rightarrow 10^{10} \Delta_0$
- 7 to jest właśnie istota *nieprzewidywalności* chaosu

Chaos: wykładniki Lapunowa

$\Delta x_n \propto e^{\lambda n} \rightarrow \lambda$ — wykładnik Lapunowa:

- $\lambda > 0$ — układ jest chaotyczny
- $\lambda \leq 0$ — dynamika regularna (periodyczna, quasiperiodyczna, ...)

Indykator chaosu.

Interpretacja: średnia eksponencjalna rozbieżność (lub zbieżność) początkowo bliskich sobie orbit.

- 1 $\Delta_t = \Delta_0 e^{\lambda t}$
- 2 a = tolerancja
- 3 $\Delta_t > a$ — rozbieżność zauważalna/nietolerowalna
- 4 $t \approx \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{a}{\Delta_0} \right)$
- 5 $1/\lambda$ — czas Lapunowa
- 6 nie da się przewyżnić logarytmu — $t \rightarrow 10t$ wymaga $\Delta_0 \rightarrow 10^{10} \Delta_0$
- 7 to jest właśnie istota *nieprzewidywalności* chaosu

Chaos: wykładniki Lapunowa

$\Delta x_n \propto e^{\lambda n} \rightarrow \lambda$ — wykładnik Lapunowa:

- $\lambda > 0$ — układ jest chaotyczny
- $\lambda \leq 0$ — dynamika regularna (periodyczna, quasiperiodyczna, ...)

Indykator chaosu.

Interpretacja: średnia eksponencjalna rozbieżność (lub zbieżność) początkowo bliskich sobie orbit.

- 1 $\Delta_t = \Delta_0 e^{\lambda t}$
- 2 a = tolerancja
- 3 $\Delta_t > a$ — rozbieżność zauważalna/nietolerowalna
- 4 $t \approx \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{a}{\Delta_0} \right)$
- 5 $1/\lambda$ — czas Lapunowa
- 6 nie da się przewyciężyć logarytmu — $t \rightarrow 10t$ wymaga $\Delta_0 \rightarrow 10^{10} \Delta_0$
- 7 to jest właśnie istota *nieprzewidywalności* chaosu

Chaos: wykładniki Lapunowa

$\Delta x_n \propto e^{\lambda n} \rightarrow \lambda$ — wykładnik Lapunowa:

- $\lambda > 0$ — układ jest chaotyczny
- $\lambda \leq 0$ — dynamika regularna (periodyczna, quasiperiodyczna, ...)

Indykator chaosu.

Interpretacja: średnia eksponencjalna rozbieżność (lub zbieżność) początkowo bliskich sobie orbit.

- 1 $\Delta_t = \Delta_0 e^{\lambda t}$
- 2 a = tolerancja
- 3 $\Delta_t > a$ — rozbieżność zauważalna/nietolerowalna
- 4 $t \approx \frac{1}{\lambda} \ln \left(\frac{a}{\Delta_0} \right)$
- 5 $1/\lambda$ — czas Lapunowa
- 6 nie da się przewyżnić logarytmu — $t \rightarrow 10t$ wymaga $\Delta_0 \rightarrow 10^{10} \Delta_0$
- 7 to jest właśnie istota *nieprzewidywalności* chaosu

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Weźmy dwa infinitezymalnie bliskie warunki początkowe, x i y , takie, że $y = x + \varepsilon$. Po n iteracjach ich separacja wynosi

$$|f^n(x + \varepsilon) - f^n(x)| \approx \varepsilon e^{n\lambda}$$

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Weźmy dwa infimezymalnie bliskie warunki początkowe, x i y , takie, że $y = x + \varepsilon$. Po n iteracjach ich separacja wynosi

$$|f^n(x + \varepsilon) - f^n(x)| \approx \varepsilon e^{n\lambda}$$

Podzielmy obustronnie przez ε , weźmy granicę $\varepsilon \rightarrow 0$ i zlogarytmujemy:

$$\lambda \approx \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x)}{dx} \right|$$

$$x_{n+1} = f(x_n)$$

Weźmy dwa infinitezymalnie bliskie warunki początkowe, x i y , takie, że $y = x + \varepsilon$. Po n iteracjach ich separacja wynosi

$$|f^n(x + \varepsilon) - f^n(x)| \approx \varepsilon e^{n\lambda}$$

Podzielmy obustronnie przez ε , weźmy granicę $\varepsilon \rightarrow 0$ i zlogarytmujemy:

$$\lambda \approx \frac{1}{n} \ln \left| \frac{df^n(x)}{dx} \right|$$

Weźmy f^n jako funkcję złożoną, użyjmy reguły łańcuchowej (por. zad. [4.](#)) i weźmy granicę $n \rightarrow \infty$:

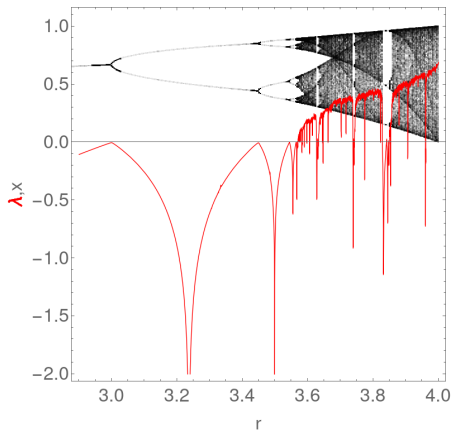
$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \left(\prod_{i=0}^{n-1} |f'(x_i)| \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |f'(x_i)| \stackrel{\text{logist.}}{=} \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |r(1-2x_i)|$$

Wykładnik Lapunowa: odwzorowanie logistyczne

$$\lambda \approx \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |r(1 - 2x_i)|$$

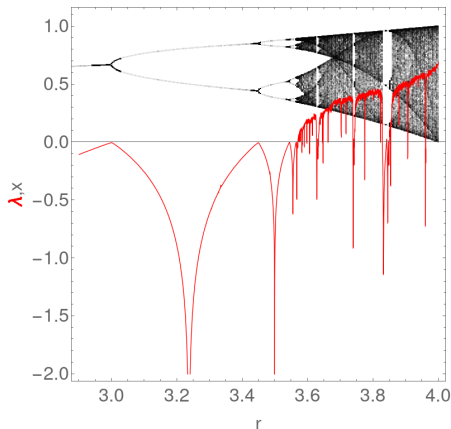
Wykładnik Lapunowa: odwzorowanie logistyczne

$$\lambda \approx \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |r(1 - 2x_i)|$$



Wykładnik Lapunowa: odwzorowanie logistyczne

$$\lambda \approx \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |r(1 - 2x_i)|$$



Zadanie 8

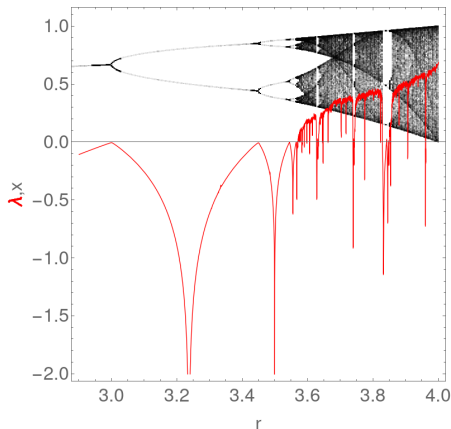
Policzyć analitycznie i narysować wykresy λ dla odwzorowania logistycznego w przedziałach:

- a $0 < r < 1$
- b $1 < r < 3$
- c $3 < r < 1 + \sqrt{6}$

Korzystając z tych postaci analitycznych, znaleźć położenia cykli superstabilnych.

Wykładnik Lapunowa: odwzorowanie logistyczne

$$\lambda \approx \frac{1}{n} \sum_{i=0}^{n-1} \ln |r(1 - 2x_i)|$$



Zadanie 8

Policzyć analitycznie i narysować wykresy λ dla odwzorowania logistycznego w przedziałach:

- a $0 < r < 1$
- b $1 < r < 3$
- c $3 < r < 1 + \sqrt{6}$

Korzystając z tych postaci analitycznych, znaleźć położenia cykli superstabilnych.

Zadanie 9

Obliczyć λ dla $f(x) = 6x(1-x)(1-2x+2x^2)$.
(Wskazówka: rozważyć stabilność punktów stałych.)

Topologiczne sprzężenie

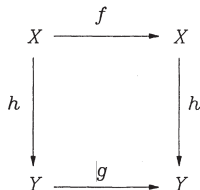
Odwzorowania

$$f : X \rightarrow X, \quad g : Y \rightarrow Y$$

nazywamy topologicznie sprzężonymi (*topologically conjugate*)¹², jeśli $\exists h : X \rightarrow Y$ (homeomorfizm) takie, że

$$h \circ f = g \circ h$$

(równoważnie: $g = h \circ f \circ h^{-1}$, skąd $g^n = h \circ f^n \circ h^{-1}$):



¹²Por. slajd [3](#).

Topologiczne sprzężenie

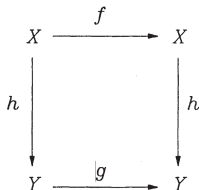
Odwzorowania

$$f : X \rightarrow X, \quad g : Y \rightarrow Y$$

nazywamy topologicznie sprzężonymi (*topologically conjugate*)¹², jeśli $\exists h : X \rightarrow Y$ (homeomorfizm) takie, że

$$h \circ f = g \circ h$$

(równoważnie: $g = h \circ f \circ h^{-1}$, skąd $g^n = h \circ f^n \circ h^{-1}$):



Zadanie 10

Znaleźć odpowiednie h i pokazać, że odwzorowanie logistyczne z $r = 4$ oraz odwzorowanie trójkątne z $\mu = 2$ są topologicznie sprzężone.

¹²Por. slajd [3](#).

$$h \circ f = g \circ h \Leftrightarrow h[f(x)] = g[h(x)] \Rightarrow h'[f(x)]f'(x) = g'[h(x)]h'(x)$$

$$h \circ f = g \circ h \Leftrightarrow h[f(x)] = g[h(x)] \Rightarrow h'[f(x)]f'(x) = g'[h(x)]h'(x)$$

zatem

$$\begin{aligned} f'(x_k) \cdots f'(x_2)f'(x_1) \\ = \frac{g'[h(x_k)]h'(x_k)}{h'(x_{k+1})} \cdots \frac{g'[h(x_2)]h'(x_2)}{h'(x_3)} \frac{g'[h(x_1)]h'(x_1)}{h'(x_2)} \end{aligned}$$

$$h \circ f = g \circ h \Leftrightarrow h[f(x)] = g[h(x)] \Rightarrow h'[f(x)]f'(x) = g'[h(x)]h'(x)$$

zatem

$$\begin{aligned} f'(x_k) \cdots f'(x_2)f'(x_1) \\ &= \frac{g'[h(x_k)]h'(x_k)}{h'(x_{k+1})} \cdots \frac{g'[h(x_2)]h'(x_2)}{h'(x_3)} \frac{g'[h(x_1)]h'(x_1)}{h'(x_2)} \\ &= g'[h(x_k)] \cdots g'[h(x_1)] \frac{h'(x_1)}{h'(x_{k+1})} \Rightarrow \end{aligned}$$

$$h \circ f = g \circ h \Leftrightarrow h[f(x)] = g[h(x)] \Rightarrow h'[f(x)]f'(x) = g'[h(x)]h'(x)$$

zatem

$$\begin{aligned} f'(x_k) \cdots f'(x_2)f'(x_1) &= \frac{g'[h(x_k)]h'(x_k)}{h'(x_{k+1})} \cdots \frac{g'[h(x_2)]h'(x_2)}{h'(x_3)} \frac{g'[h(x_1)]h'(x_1)}{h'(x_2)} \\ &= g'[h(x_k)] \cdots g'[h(x_1)] \frac{h'(x_1)}{h'(x_{k+1})} \Rightarrow \end{aligned}$$

czyli

$$\begin{aligned} \ln |f'(x_k) \cdots f'(x_2)f'(x_1)| &= \sum_{i=1}^k \ln |f'(x_i)| \\ &= \sum_{i=1}^k \ln |g'[h(x_i)]| + \ln |h'(x_1)| - \ln |h'(x_{k+1})| \end{aligned}$$

Topologiczne sprzężenie

Ponieważ $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln|h'(x_1)|}{k} = 0$ oraz można przyjąć¹³, że $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln|h'(x_{k+1})|}{k} = 0$,
to wtedy

$$\lambda_f = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln |f'(x_i)| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln |g'[h(x_i)]| = \lambda_g$$

czyli wykładniki Lapunowa (topologicznie sprzężonych) f i g są sobie równe
(h zapewnia relację jeden-do-jednego punktów orbit f i g , tj. $h(x) = y$).

¹³Alligood, Sauer, Yorke, Chaos. An Introduction to Dynamical Systems.

Topologiczne sprzężenie

Ponieważ $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln|h'(x_1)|}{k} = 0$ oraz można przyjąć¹³, że $\lim_{k \rightarrow \infty} \frac{\ln|h'(x_{k+1})|}{k} = 0$, to wtedy

$$\lambda_f = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln |f'(x_i)| = \lim_{k \rightarrow \infty} \frac{1}{k} \sum_{i=1}^k \ln |g'[h(x_i)]| = \lambda_g$$

czyli wykładniki Lapunowa (topologicznie sprzężonych) f i g są sobie równe (h zapewnia relację jeden-do-jednego punktów orbit f i g , tj. $h(x) = y$).

Zadanie 11

Obliczyć wykładnik Lapunowa dla odwzorowania logistycznego z $r = 4$.

¹³Alligood, Sauer, Yorke, Chaos. An Introduction to Dynamical Systems.

Rozkład niezmienniczy

Rozkład statystyczny punktu $\mathcal{D} \ni y \rightarrow f(y) \in \mathcal{D}$ po jednej iteracji:

$$\rho_1(x) = \delta [x - f(y)]$$

Rozkład niezmienniczy

Rozkład statystyczny punktu $\mathcal{D} \ni y \rightarrow f(y) \in \mathcal{D}$ po jednej iteracji:

$$\rho_1(x) = \delta [x - f(y)]$$

Jeśli zaczniemy od zbioru punktów o rozkładzie $\rho_0(y)$:

$$\rho_1(x) = (\dots) \delta [x - f(y)] \rho_0(y)$$

Rozkład niezmienniczy

Rozkład statystyczny punktu $\mathcal{D} \ni y \rightarrow f(y) \in \mathcal{D}$ po jednej iteracji:

$$\rho_1(x) = \delta [x - f(y)]$$

Jeśli zaczniemy od zbioru punktów o rozkładzie $\rho_0(y)$:

$$\rho_1(x) = \int_{\mathcal{D}} dy \delta [x - f(y)] \rho_0(y)$$

Rozkład niezmienniczy

Rozkład statystyczny punktu $\mathcal{D} \ni y \rightarrow f(y) \in \mathcal{D}$ po jednej iteracji:

$$\rho_1(x) = \delta [x - f(y)]$$

Jeśli zaczniemy od zbioru punktów o rozkładzie $\rho_0(y)$:

$$\rho_1(x) = \int_{\mathcal{D}} dy \delta [x - f(y)] \rho_0(y)$$

Po dwóch iteracjach:

$$\rho_2(x) = \int_{\mathcal{D}} dy \delta [x - f(y)] \rho_1(y)$$

Rozkład niezmienniczy

Rozkład statystyczny punktu $\mathcal{D} \ni y \rightarrow f(y) \in \mathcal{D}$ po jednej iteracji:

$$\rho_1(x) = \delta [x - f(y)]$$

Jeśli zaczniemy od zbioru punktów o rozkładzie $\rho_0(y)$:

$$\rho_1(x) = \int_{\mathcal{D}} dy \delta [x - f(y)] \rho_0(y)$$

Po dwóch iteracjach:

$$\begin{aligned} \rho_2(x) &= \int_{\mathcal{D}} dy \delta [x - f(y)] \rho_1(y) \\ &\equiv \int_{\mathcal{D}} dy \delta [x - f(y)] \int_{\mathcal{D}} dz \delta [y - f(z)] \rho_0(z) \end{aligned}$$

Rozkład niezmienniczy

Rozkład statystyczny punktu $\mathcal{D} \ni y \rightarrow f(y) \in \mathcal{D}$ po jednej iteracji:

$$\rho_1(x) = \delta [x - f(y)]$$

Jeśli zaczniemy od zbioru punktów o rozkładzie $\rho_0(y)$:

$$\rho_1(x) = \int_{\mathcal{D}} dy \delta [x - f(y)] \rho_0(y)$$

Po dwóch iteracjach:

$$\begin{aligned} \rho_2(x) &= \int_{\mathcal{D}} dy \delta [x - f(y)] \rho_1(y) \\ &\equiv \int_{\mathcal{D}} dy \delta [x - f(y)] \int_{\mathcal{D}} dz \delta [y - f(z)] \rho_0(z) \\ &\equiv \int_{\mathcal{D}} dy \delta [x - f^2(y)] \rho_0(y) \end{aligned}$$

Rozkład niezmienniczy

Uogólniając:

$$\rho_{n+1}(x) = \int_{\mathcal{D}} dy \delta[x - f(y)] \rho_n(y)$$

Rozkład niezmienniczy

Uogólniając:

$$\rho_{n+1}(x) = \int_{\mathcal{D}} dy \delta [x - f(y)] \rho_n(y)$$

W granicy:

$$\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(x)$$

Rozkład niezmienniczy

Uogólniając:

$$\rho_{n+1}(x) = \int_{\mathcal{D}} dy \delta [x - f(y)] \rho_n(y)$$

W granicy:

$$\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(x)$$

czyli rozkład niezmienniczy spełnia

$$\rho(x) = \int_{\mathcal{D}} dy \delta [x - f(y)] \rho(y)$$

Rozkład niezmienniczy

Uogólniając:

$$\rho_{n+1}(x) = \int_{\mathcal{D}} dy \delta [x - f(y)] \rho_n(y)$$

W granicy:

$$\rho(x) = \lim_{n \rightarrow \infty} \rho_n(x)$$

czyli rozkład niezmienniczy spełnia

$$\rho(x) = \int_{\mathcal{D}} dy \delta [x - f(y)] \rho(y)$$

Zatem ρ jest rozwiązaniem liniowego, jednorodnego równania całkowego (**równanie Perrona-Frobeniusa**) z osobliwym jądrem $k(x, y) = \delta [x - f(y)]$. Jest to zagadnienie własne operatora całkowego $\mathcal{K}$ z wartością własną równą 1 (w języku algebry liniowej, w pewnej przestrzeni funkcji):

$$\rho(x) = \mathcal{K}\rho(x)$$

Rozkład niezmienniczy

Aby ρ było rozkładem prawdopodobieństwa:

$$\rho(x) \geq 0 \quad \text{oraz} \quad \int_{\mathcal{D}} \rho(x) dx = 1$$

Rozkład niezmienniczy

Aby ρ było rozkładem prawdopodobieństwa:

$$\rho(x) \geq 0 \quad \text{oraz} \quad \int_{\mathcal{D}} \rho(x) dx = 1$$

Własności delty Diraca

- ❶ $\delta(y) = \begin{cases} 0 & y \neq 0 \\ \infty & y = 0 \end{cases}$
- ❷ $\int_{\mathbb{R}} \delta(y) dy = 1$
- ❸ $\int_{\mathbb{R}} \delta(y) f(y) dy = f(0)$
- ❹ $\delta[a(y - y_0)] = \frac{1}{|a|} \delta(y - y_0)$
- ❺ $\delta(y - y_0) = \delta(y_0 - y)$
- ❻ $\delta[\phi(y)] = \sum_i \frac{\delta(y - y_i)}{|\phi'(y_i)|}$,
gdzie $\phi(y_i) = 0$

Rozkład niezmienniczy

Aby ρ było rozkładem prawdopodobieństwa:

$$\rho(x) \geq 0 \quad \text{oraz} \quad \int_{\mathcal{D}} \rho(x) dx = 1$$

Własności delty Diraca

- ❶ $\delta(y) = \begin{cases} 0 & y \neq 0 \\ \infty & y = 0 \end{cases}$
- ❷ $\int_{\mathbb{R}} \delta(y) dy = 1$
- ❸ $\int_{\mathbb{R}} \delta(y) f(y) dy = f(0)$
- ❹ $\delta[a(y - y_0)] = \frac{1}{|a|} \delta(y - y_0)$
- ❺ $\delta(y - y_0) = \delta(y_0 - y)$
- ❻ $\delta[\phi(y)] = \sum_i \frac{\delta(y - y_i)}{|\phi'(y_i)|}$,
gdzie $\phi(y_i) = 0$

Rozkład niezmienniczy

Aby ρ było rozkładem prawdopodobieństwa:

$$\rho(x) \geq 0 \quad \text{oraz} \quad \int_{\mathcal{D}} \rho(x) dx = 1$$

Własności delty Diraca

- ❶ $\delta(y) = \begin{cases} 0 & y \neq 0 \\ \infty & y = 0 \end{cases}$
- ❷ $\int_{\mathbb{R}} \delta(y) dy = 1$
- ❸ $\int_{\mathbb{R}} \delta(y) f(y) dy = f(0)$
- ❹ $\delta[a(y - y_0)] = \frac{1}{|a|} \delta(y - y_0)$
- ❺ $\delta(y - y_0) = \delta(y_0 - y)$
- ❻ $\delta[\phi(y)] = \sum_i \frac{\delta(y - y_i)}{|\phi'(y_i)|}$,
gdzie $\phi(y_i) = 0$

Rozkład niezmienniczy

Aby ρ było rozkładem prawdopodobieństwa:

$$\rho(x) \geq 0 \quad \text{oraz} \quad \int_{\mathcal{D}} \rho(x) dx = 1$$

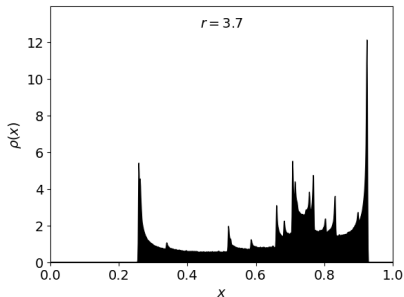
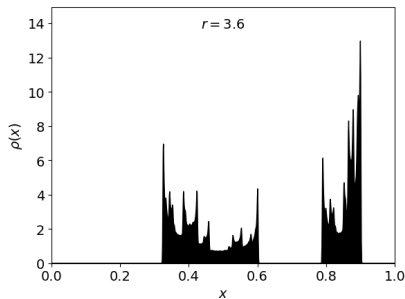
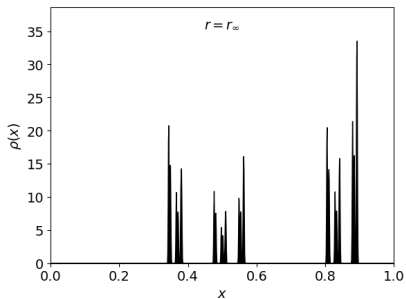
Własności delty Diraca

- ❶ $\delta(y) = \begin{cases} 0 & y \neq 0 \\ \infty & y = 0 \end{cases}$
- ❷ $\int_{\mathbb{R}} \delta(y) dy = 1$
- ❸ $\int_{\mathbb{R}} \delta(y) f(y) dy = f(0)$
- ❹ $\delta[a(y - y_0)] = \frac{1}{|a|} \delta(y - y_0)$
- ❺ $\delta(y - y_0) = \delta(y_0 - y)$
- ❻ $\delta[\phi(y)] = \sum_i \frac{\delta(y - y_i)}{|\phi'(y_i)|}$,
gdzie $\phi(y_i) = 0$

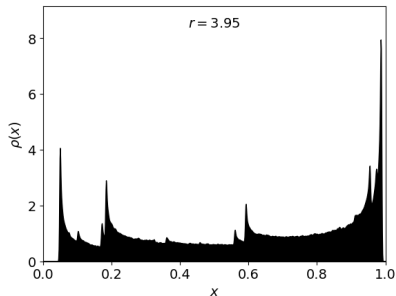
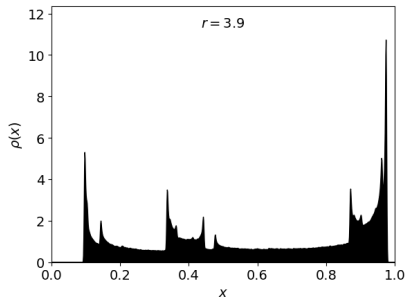
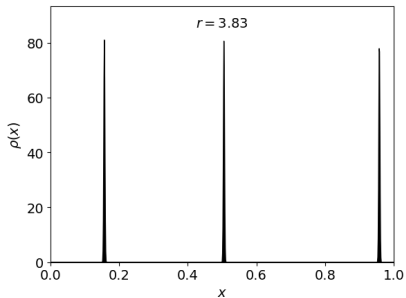
Zadanie 12

Ułożyć równanie Perrona-Frobeniusa dla odwzorowania trójkątnego z $\mu = 2$ oraz podać jego rozwiązanie.

Rozkład niezmienniczy (odwzorowanie logistyczne)



Rozkład niezmienniczy (odwzorowanie logistyczne)



$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |f'(x_i)|$$

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |f'(x_i)| = \int_{\mathcal{D}} dx \rho(x) \ln |f'(x)|$$

$$\lambda = \lim_{N \rightarrow \infty} \frac{1}{N} \sum_{i=0}^{N-1} \ln |f'(x_i)| = \int_{\mathcal{D}} dx \rho(x) \ln |f'(x)|$$

Zadanie 13

Obliczyć λ (korzystając z ρ) dla odwzorowania trójkątnego z $\mu = 2$.

Rozkład niezmienniczy a wykładnik Lapunowa

Gdy mamy zmianę zmiennych $y = h(x)$ (homeomorfizm) między topologicznie sprzężonymi odwzorowaniami $f : X \rightarrow X$, $g : Y \rightarrow Y$, to rozkłady prawdopodobieństwa spełniają $|\rho_Y(y)dy| = |\rho_X(x)dx|$ oraz podlegają transformacji wg

$$\rho_Y(y) = \rho_X[h^{-1}(y)] \left| \frac{d}{dy} [h^{-1}(y)] \right|,$$

Rozkład niezmienniczy a wykładnik Lapunowa

Gdy mamy zmianę zmiennych $y = h(x)$ (homeomorfizm) między topologicznie sprzężonymi odwzorowaniami $f : X \rightarrow X$, $g : Y \rightarrow Y$, to rozkłady prawdopodobieństwa spełniają $|\rho_Y(y)dy| = |\rho_X(x)dx|$ oraz podlegają transformacji wg

$$\rho_Y(y) = \rho_X[h^{-1}(y)] \left| \frac{d}{dy} [h^{-1}(y)] \right|,$$

zatem w szczególności dla odwzorowań logistycznego ($r = 4$) i trójkątnego ($\mu = 2$):

$$\rho_{\text{logistic},4}(y) = \rho_{\text{tent},2}[h^{-1}(y)] \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right|.$$

Rozkład niezmienniczy a wykładnik Lapunowa

Gdy mamy zmianę zmiennych $y = h(x)$ (homeomorfizm) między topologicznie sprzężonymi odwzorowaniami $f : X \rightarrow X$, $g : Y \rightarrow Y$, to rozkłady prawdopodobieństwa spełniają $|\rho_Y(y)dy| = |\rho_X(x)dx|$ oraz podlegają transformacji wg

$$\rho_Y(y) = \rho_X[h^{-1}(y)] \left| \frac{d}{dy} [h^{-1}(y)] \right|,$$

zatem w szczególności dla odwzorowań logistycznego ($r = 4$) i trójkątnego ($\mu = 2$):

$$\rho_{\text{logistic},4}(y) = \rho_{\text{tent},2}[h^{-1}(y)] \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right|.$$

Zadanie 14

Obliczyć rozkład niezmienniczy dla odwzorowania logistycznego z $r = 4$.

Rozkład niezmienniczy a wykładnik Lapunowa

Gdy mamy zmianę zmiennych $y = h(x)$ (homeomorfizm) między topologicznie sprzężonymi odwzorowaniami $f : X \rightarrow X$, $g : Y \rightarrow Y$, to rozkłady prawdopodobieństwa spełniają $|\rho_Y(y)dy| = |\rho_X(x)dx|$ oraz podlegają transformacji wg

$$\rho_Y(y) = \rho_X[h^{-1}(y)] \left| \frac{d}{dy} [h^{-1}(y)] \right|,$$

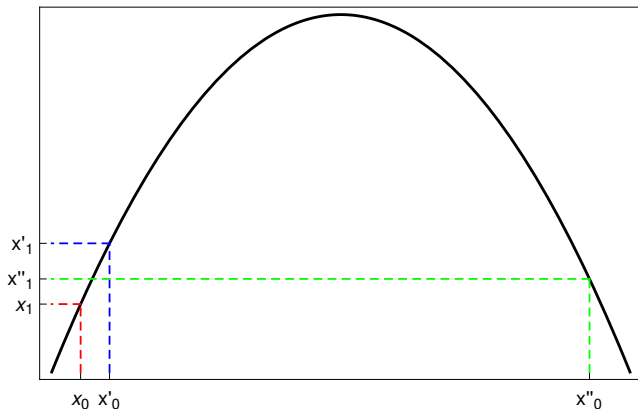
zatem w szczególności dla odwzorowań logistycznego ($r = 4$) i trójkątnego ($\mu = 2$):

$$\rho_{\text{logistic},4}(y) = \rho_{\text{tent},2}[h^{-1}(y)] \left| \frac{dh^{-1}(y)}{dy} \right|.$$

Zadanie 14

Obliczyć rozkład niezmienniczy dla odwzorowania logistycznego z $r = 4$. Jak można go wykorzystać do policzenia wykładnika Lapunowa?

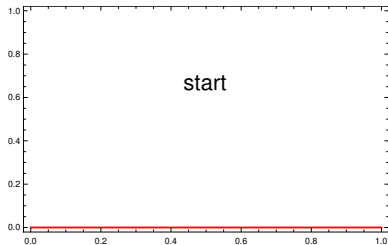
Składanie i rozciąganie (*stretching & folding*)



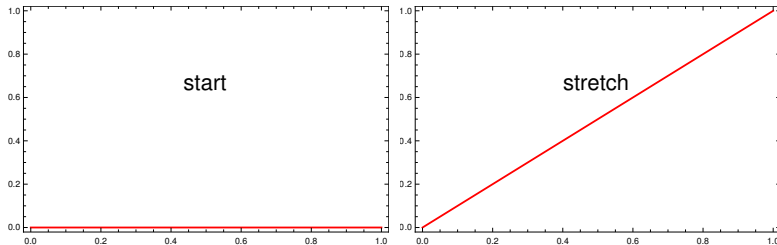
$|x_1 - x'_1| > |x_0 - x'_0|$ — rozciągnięcie

$|x_1 - x''_1| < |x_0 - x''_0|$ — złożenie (kontrakcja)

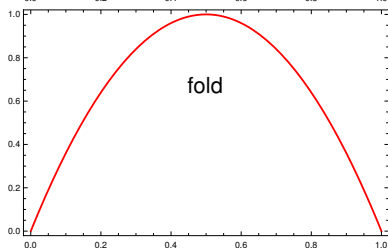
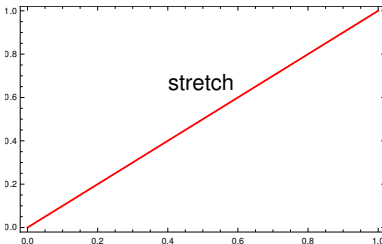
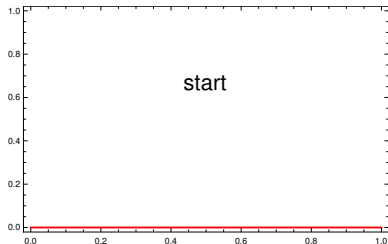
Składanie i rozciąganie (*stretching & folding*)



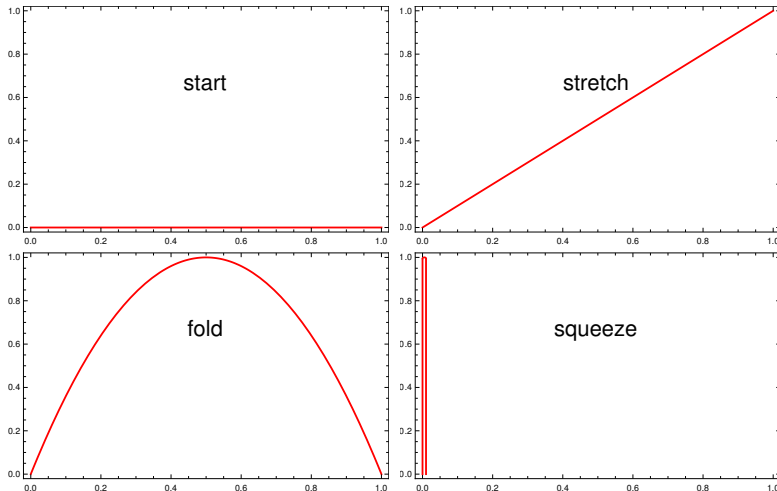
Składanie i rozciąganie (*stretching & folding*)



Składanie i rozciąganie (*stretching & folding*)

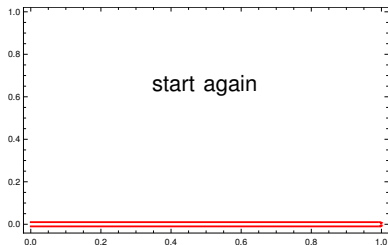


Składanie i rozciąganie (*stretching & folding*)



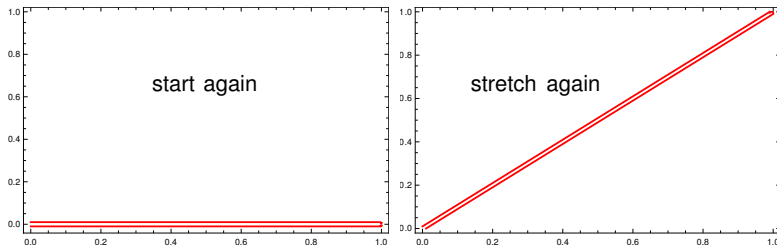
Składanie i rozciąganie (*stretching & folding*)

Powtórzyć:



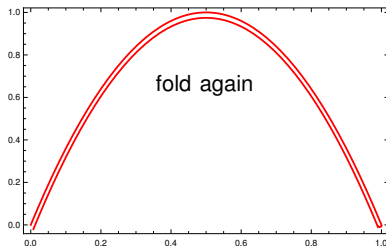
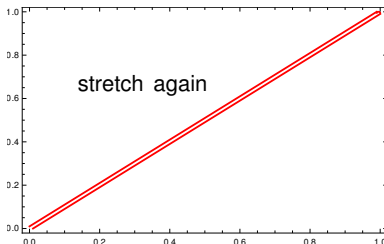
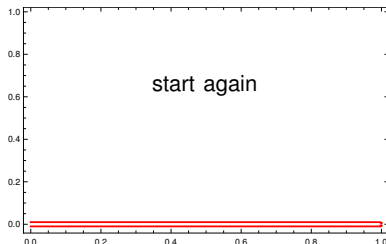
Składanie i rozciąganie (*stretching & folding*)

Powtórzyć:



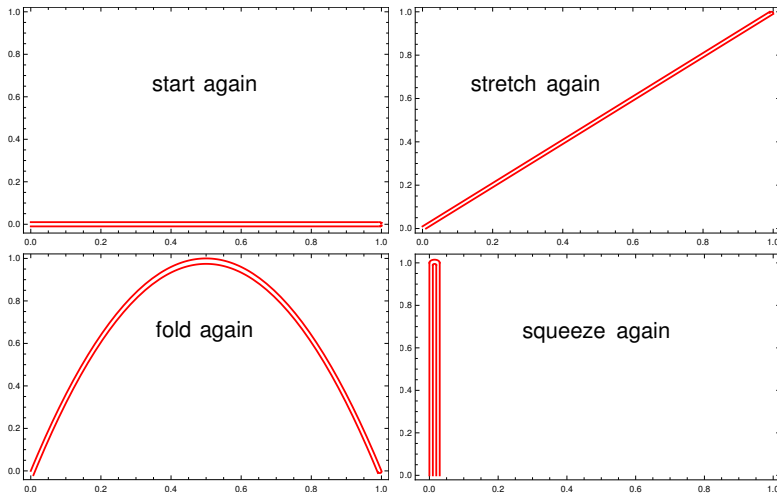
Składanie i rozciąganie (*stretching & folding*)

Powtórzyć:



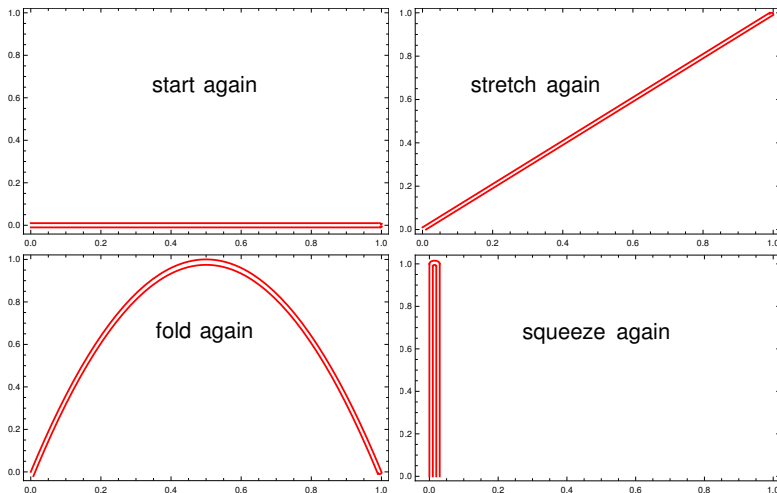
Składanie i rozciąganie (*stretching & folding*)

Powtórzyć:



Składanie i rozciąganie (*stretching & folding*)

Powtórzyć:



Następnie: powtórzyć, powtórzyć i powtarzać w nieskończoność...

Składanie i rozciąganie (*stretching & folding*)

Przykłady:

- <https://youtu.be/Z0j6WCOGPfg?t=103>
- <https://www.youtube.com/watch?v=SrJm6bkLuPs>

Chaos: definicja

Definicja robocza

Ograniczony układ dynamiczny jest chaotyczny jeśli jest aperiodyczny oraz wrażliwy na warunki początkowe (tj. $\lambda > 0$).

¹⁴Devaney, An Introduction to Chaotic Dynamical Systems

¹⁵Banks et al., Am. Math. Mon. 99(4), 332-334 (1992)

Chaos: definicja

Definicja robocza

Ograniczony układ dynamiczny jest chaotyczny jeśli jest aperiodyczny oraz wrażliwy na warunki początkowe (tj. $\lambda > 0$).

Zadanie 15

Obliczyć λ dla $x_{n+1} = 13x_n + 21$. Czy ten układ jest chaotyczny?

¹⁴Devaney, An Introduction to Chaotic Dynamical Systems

¹⁵Banks et al., Am. Math. Mon. 99(4), 332-334 (1992)

Chaos: definicja

Definicja robocza

Ograniczony układ dynamiczny jest chaotyczny jeśli jest aperiodyczny oraz wrażliwy na warunki początkowe (tj. $\lambda > 0$).

Zadanie 15

Obliczyć λ dla $x_{n+1} = 13x_n + 21$. Czy ten układ jest chaotyczny?

Chaos wg Devaney'a¹⁴

Niech (X, d) będzie zwartą przestrzenią metryczną. Odwzorowanie $f : X \rightarrow X$ jest chaotyczne jeśli

- 1 jest topologicznie tranzytywne (tj. $\forall U, V \subset X : \exists k : f^k(U) \cap V \neq \emptyset$),
- 2 punkty okresowe f są gęste w X ,
- 3 ~~f jest wrażliwe na warunki początkowe.~~

Trzeci warunek wynika z pozostałych dwóch.¹⁵

¹⁴Devaney, An Introduction to Chaotic Dynamical Systems

¹⁵Banks et al., Am. Math. Mon. 99(4), 332-334 (1992)

Okres-3 implikuje chaos: twierdzenie Szarkowskiego

Zwykłe uporządkowanie: $1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < \dots$

¹⁶Sharkovskii, Ukrainian Math. J. 16, 61–71 (1964); ang. tłumaczenie: J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 5, 1263-1273 (1995)

¹⁷Li & Yorke, Am. Math. Mon. 82(10), 985-992 (1975)

Okres-3 implikuje chaos: twierdzenie Szarkowskiego

Zwykłe uporządkowanie: $1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < \dots$

Uporządkowanie Szarkowskiego ($\triangleleft$ lub $\prec$):

$$3 \triangleleft 5 \triangleleft 7 \triangleleft 9 \triangleleft 11 \triangleleft \dots \triangleleft 2 \cdot 3 \triangleleft 2 \cdot 5 \triangleleft \dots \triangleleft 2^2 \cdot 3 \triangleleft 2^2 \cdot 5 \triangleleft \dots \triangleleft 2^3 \triangleleft 2^2 \triangleleft 2 \triangleleft 1$$

¹⁶Sharkovskii, Ukrainian Math. J. 16, 61–71 (1964); ang. tłumaczenie: J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 5, 1263-1273 (1995)

¹⁷Li & Yorke, Am. Math. Mon. 82(10), 985-992 (1975)

Okres-3 implikuje chaos: twierdzenie Szarkowskiego

Zwykłe uporządkowanie: $1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < \dots$

Uporządkowanie Szarkowskiego ($\triangleleft$ lub $\prec$):

$3 \triangleleft 5 \triangleleft 7 \triangleleft 9 \triangleleft 11 \triangleleft \dots \triangleleft 2 \cdot 3 \triangleleft 2 \cdot 5 \triangleleft \dots \triangleleft 2^2 \cdot 3 \triangleleft 2^2 \cdot 5 \triangleleft \dots \triangleleft 2^3 \triangleleft 2^2 \triangleleft 2 \triangleleft 1$

Zadanie 16

Uporządkować wg porządku Szarkowskiego: $\{452, 897, 802, 326\}$.

¹⁶Sharkovskii, Ukrainian Math. J. 16, 61–71 (1964); ang. tłumaczenie: J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 5, 1263-1273 (1995)

¹⁷Li & Yorke, Am. Math. Mon. 82(10), 985-992 (1975)

Okres-3 implikuje chaos: twierdzenie Szarkowskiego

Zwykłe uporządkowanie: $1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < \dots$

Uporządkowanie Szarkowskiego ($\triangleleft$ lub $\prec$):

$3 \triangleleft 5 \triangleleft 7 \triangleleft 9 \triangleleft 11 \triangleleft \dots \triangleleft 2 \cdot 3 \triangleleft 2 \cdot 5 \triangleleft \dots \triangleleft 2^2 \cdot 3 \triangleleft 2^2 \cdot 5 \triangleleft \dots \triangleleft 2^3 \triangleleft 2^2 \triangleleft 2 \triangleleft 1$

Zadanie 16

Uporządkować wg porządku Szarkowskiego: $\{452, 897, 802, 326\}$.

Twierdzenie Szarkowskiego¹⁶. Niech ciągła f ma orbitę o okresie- n .
Jeśli $n \triangleleft m$, to f ma też orbitę o okresie- m .

¹⁶Sharkovskii, Ukrainian Math. J. 16, 61–71 (1964); ang. tłumaczenie: J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 5, 1263-1273 (1995)

¹⁷Li & Yorke, Am. Math. Mon. 82(10), 985-992 (1975)

Okres-3 implikuje chaos: twierdzenie Szarkowskiego

Zwykłe uporządkowanie: $1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < \dots$

Uporządkowanie Szarkowskiego ($\triangleleft$ lub $\prec$):

$3 \triangleleft 5 \triangleleft 7 \triangleleft 9 \triangleleft 11 \triangleleft \dots \triangleleft 2 \cdot 3 \triangleleft 2 \cdot 5 \triangleleft \dots \triangleleft 2^2 \cdot 3 \triangleleft 2^2 \cdot 5 \triangleleft \dots \triangleleft 2^3 \triangleleft 2^2 \triangleleft 2 \triangleleft 1$

Zadanie 16

Uporządkować wg porządku Szarkowskiego: $\{452, 897, 802, 326\}$.

Twierdzenie Szarkowskiego¹⁶. Niech ciągła f ma orbitę o okresie- n .
Jeśli $n \triangleleft m$, to f ma też orbitę o okresie- m .

❶ Jeśli $n \neq 2^k$, to f ma nieskończenie wiele orbit.

¹⁶Sharkovskii, Ukrainian Math. J. 16, 61–71 (1964); ang. tłumaczenie: J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 5, 1263-1273 (1995)

¹⁷Li & Yorke, Am. Math. Mon. 82(10), 985-992 (1975)

Okres-3 implikuje chaos: twierdzenie Szarkowskiego

Zwykłe uporządkowanie: $1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < \dots$

Uporządkowanie Szarkowskiego ($\triangleleft$ lub $\prec$):

$3 \triangleleft 5 \triangleleft 7 \triangleleft 9 \triangleleft 11 \triangleleft \dots \triangleleft 2 \cdot 3 \triangleleft 2 \cdot 5 \triangleleft \dots \triangleleft 2^2 \cdot 3 \triangleleft 2^2 \cdot 5 \triangleleft \dots \triangleleft 2^3 \triangleleft 2^2 \triangleleft 2 \triangleleft 1$

Zadanie 16

Uporządkować wg porządku Szarkowskiego: $\{452, 897, 802, 326\}$.

Twierdzenie Szarkowskiego¹⁶. Niech ciągła f ma orbitę o okresie- n .
Jeśli $n \triangleleft m$, to f ma też orbitę o okresie- m .

- ❶ Jeśli $n \neq 2^k$, to f ma nieskończenie wiele orbit.
- ❷ Jeśli f ma orbitę o okresie-3, to ma wszystkie orbity.

¹⁶Sharkovskii, Ukrainian Math. J. 16, 61–71 (1964); ang. tłumaczenie: J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 5, 1263-1273 (1995)

¹⁷Li & Yorke, Am. Math. Mon. 82(10), 985-992 (1975)

Okres-3 implikuje chaos: twierdzenie Szarkowskiego

Zwykłe uporządkowanie: $1 < 2 < 3 < 4 < 5 < 6 < 7 < 8 < 9 < \dots$

Uporządkowanie Szarkowskiego ($\triangleleft$ lub $\prec$):

$3 \triangleleft 5 \triangleleft 7 \triangleleft 9 \triangleleft 11 \triangleleft \dots \triangleleft 2 \cdot 3 \triangleleft 2 \cdot 5 \triangleleft \dots \triangleleft 2^2 \cdot 3 \triangleleft 2^2 \cdot 5 \triangleleft \dots \triangleleft 2^3 \triangleleft 2^2 \triangleleft 2 \triangleleft 1$

Zadanie 16

Uporządkować wg porządku Szarkowskiego: $\{452, 897, 802, 326\}$.

Twierdzenie Szarkowskiego¹⁶. Niech ciągła f ma orbitę o okresie- n . Jeśli $n \triangleleft m$, to f ma też orbitę o okresie- m .

- ❶ Jeśli $n \neq 2^k$, to f ma nieskończenie wiele orbit.
- ❷ Jeśli f ma orbitę o okresie-3, to ma wszystkie orbity.
- ❸ Jeśli f ma orbitę o okresie-3, to istnieje nieprzeliczalny zbiór orbit nieokresowych — *period-3 implies chaos*¹⁷.

¹⁶Sharkovskii, Ukrainian Math. J. 16, 61–71 (1964); ang. tłumaczenie: J. Bifur. Chaos Appl. Sci. Engrg., 5, 1263-1273 (1995)

¹⁷Li & Yorke, Am. Math. Mon. 82(10), 985-992 (1975)

Zadanie 17

Pokazać, że odwzorowanie logistyczne z $r = 4$ ma orbity o okresie-3. Znaleźć je.

Zadanie 17

Pokazać, że odwzorowanie logistyczne z $r = 4$ ma orbity o okresie-3. Znaleźć je.

Chaos wg Li-Yorke'a

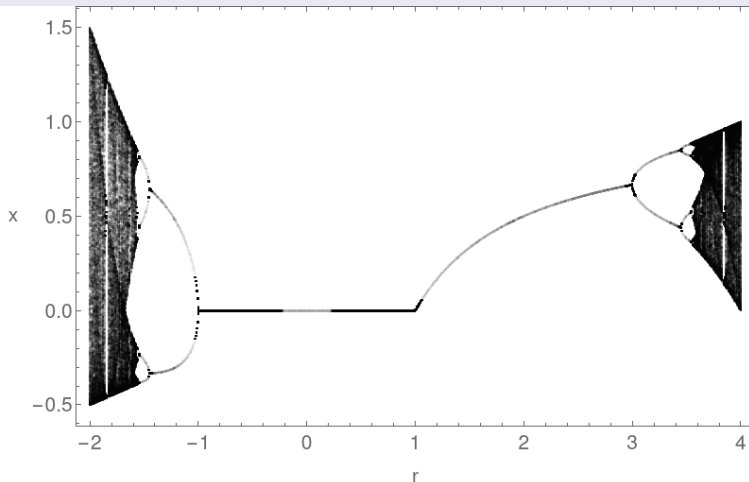
Niech (X, d) będzie zwartą przestrzenią metryczną.

Odwzorowanie $f : X \rightarrow X$ jest chaotyczne jeśli

$\exists S \subset X$ takie, że $\forall x, y \in S, x \neq y$:

- $\limsup_{k \rightarrow \infty} d(f^k(x), f^k(y)) > 0,$
- $\liminf_{k \rightarrow \infty} d(f^k(x), f^k(y)) = 0.$

Kompletny¹⁸ diagram bifurkacyjny¹⁹



¹⁸Dla $r > 4$ (a zatem też $r < -2$), odwzorowanie logistyczne jest chaotyczne na zbiorze Cantora (zob. wykład 6, slajd 19).

¹⁹Tsuchiya & Yamagishi, Z. Naturforsch. 52a, 513-516 (1997)