

Wprowadzenie do teorii chaosu

Wykład 1: teoria chaosu

Mariusz Tarnopolski

Instytut Astronomii UMK

Chaos ©2022



Sprawy organizacyjne

- <http://www.home.umk.pl/~mariusz.tarnopolski/home/students/chaos/>
- 45 godz. konwersatorium = wykład + ćwiczenia + dyskusje
- Zaliczenie: kolokwium
 - [0,15) punktów: 2.0
 - [15,18) punktów: 3.0
 - [18,21) punktów: 3.5
 - [21,24) punktów: 4.0
 - [24,27) punktów: 4.5
 - [27,30] punktów: 5.0
- Konsultacje — formalnie we wt 12⁰⁰-13⁰⁰, pok. AA 15 w Piwnicach; proszę się umawiać przez maila: **mariusz.tarnopolski@umk.pl**
- Wymagania wstępne:
 - algebra liniowa (w szczególności zagadnienie własne)
 - analiza matematyczna (całki, podstawy równań różniczkowych)
 - podstawy rachunku prawdopodobieństwa

Sprawy organizacyjne

- <http://www.home.umk.pl/~mariusz.tarnopolski/home/students/chaos/>
- 45 godz. konwersatorium = wykład + ćwiczenia + dyskusje
- Zaliczenie: kolokwium
 - [0,15) punktów: 2.0
 - [15,18) punktów: 3.0
 - [18,21) punktów: 3.5
 - [21,24) punktów: 4.0
 - [24,27) punktów: 4.5
 - [27,30] punktów: 5.0
- Konsultacje — formalnie we wt 12⁰⁰-13⁰⁰, pok. AA 15 w Piwnicach; proszę się umawiać przez maila: **mariusz.tarnopolski@umk.pl**
- Wymagania wstępne:
 - algebra liniowa (w szczególności zagadnienie własne)
 - analiza matematyczna (całki, podstawy równań różniczkowych)
 - podstawy rachunku prawdopodobieństwa

- <http://www.home.umk.pl/~mariusz.tarnopolski/home/students/chaos/>
- 45 godz. konwersatorium = wykład + ćwiczenia + dyskusje
- Zaliczenie: kolokwium
 - [0,15) punktów: 2.0
 - [15,18) punktów: 3.0
 - [18,21) punktów: 3.5
 - [21,24) punktów: 4.0
 - [24,27) punktów: 4.5
 - [27,30] punktów: 5.0
- Konsultacje — formalnie we wt 12⁰⁰-13⁰⁰, pok. AA 15 w Piwnicach; proszę się umawiać przez maila: mariusz.tarnopolski@umk.pl
- Wymagania wstępne:
 - algebra liniowa (w szczególności zagadnienie własne)
 - analiza matematyczna (całki, podstawy równań różniczkowych)
 - podstawy rachunku prawdopodobieństwa

- <http://www.home.umk.pl/~mariusz.tarnopolski/home/students/chaos/>
- 45 godz. konwersatorium = wykład + ćwiczenia + dyskusje
- Zaliczenie: kolokwium
 - [0,15) punktów: 2.0
 - [15,18) punktów: 3.0
 - [18,21) punktów: 3.5
 - [21,24) punktów: 4.0
 - [24,27) punktów: 4.5
 - [27,30] punktów: 5.0
- Konsultacje — formalnie we wt 12⁰⁰-13⁰⁰, pok. AA 15 w Piwnicach; proszę się umawiać przez maila: **mariusz.tarnopolski@umk.pl**
- Wymagania wstępne:
 - algebra liniowa (w szczególności zagadnienie własne)
 - analiza matematyczna (całki, podstawy równań różniczkowych)
 - podstawy rachunku prawdopodobieństwa

- <http://www.home.umk.pl/~mariusz.tarnopolski/home/students/chaos/>
- 45 godz. konwersatorium = wykład + ćwiczenia + dyskusje
- Zaliczenie: kolokwium
 - [0,15) punktów: 2.0
 - [15,18) punktów: 3.0
 - [18,21) punktów: 3.5
 - [21,24) punktów: 4.0
 - [24,27) punktów: 4.5
 - [27,30] punktów: 5.0
- Konsultacje — formalnie we wt 12⁰⁰-13⁰⁰, pok. AA 15 w Piwnicach; proszę się umawiać przez maila: **mariusz.tarnopolski@umk.pl**
- Wymagania wstępne:
 - algebra liniowa (w szczególności zagadnienie własne)
 - analiza matematyczna (całki, podstawy równań różniczkowych)
 - podstawy rachunku prawdopodobieństwa

- 1 **Odwzorowanie logistyczne**: iteracje; *cobweb*; diagram bifurkacyjny; podwajanie okresu; stałe Feigenbauma; uniwersalność; wykładniki Lapunowa; twierdzenie Szarkowskiego; rozkłady niezmiennicze
- 2 **Odwzorowania 2D**; układy dysypatywne i zachowawcze; związek z atraktorami
- 3 **Układ Lorenza** jako wprowadzenie do układów z czasem ciągłym
- 4 **Wahadła**: wahadło tłumione; układ Duffinga; wahadło podwójne; wahadło magnetyczne itp.
- 5 **Fraktale**; wymiary fraktalne; związek z chaosem; przykłady zastosowań i występowania
- 6 Analiza **szeregów czasowych** — dane eksperymentalne i obserwacyjne
- 7 **Astrofizyka**; kosmos; Wszechświat
- 8 Bilardy (?); kontrola chaosu (?); chaos kwantowy (?); ...

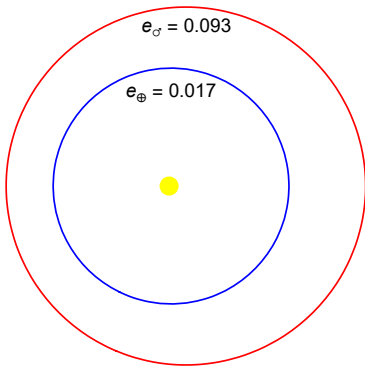
- ❶ *Czy Bóg gra w kości? Nowa matematyka chaosu/Does God Play Dice? The New Mathematics of Chaos*, Ian Stewart
- ❷ *Chaos. Narodziny nowej nauki/Chaos. Making a new science*, James Gleick
- ❸ *Wstęp do Dynamiki Układów Chaotycznych/Chaotic Dynamics. An Introduction*, G. L. Baker & J. P. Gollub
- ❹ *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Steven H. Strogatz
- ❺ *Chaos w Układach Dynamicznych/Chaos in Dynamical Systems*, Edward Ott
- ❻ *Regular and Chaotic Dynamics*, A. J. Lichtenberg & M. A. Liebermann
- ❼ *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, K. T. Aligood, T. D. Sauer & J. A. Yorke
- ❽ Dodatkowe materiały podane w trakcie zajęć

- ❶ *Czy Bóg gra w kości? Nowa matematyka chaosu/Does God Play Dice? The New Mathematics of Chaos*, Ian Stewart
- ❷ *Chaos. Narodziny nowej nauki/Chaos. Making a new science*, James Gleick
- ❸ *Wstęp do Dynamiki Układów Chaotycznych/Chaotic Dynamics. An Introduction*, G. L. Baker & J. P. Gollub
- ❹ *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Steven H. Strogatz
- ❺ *Chaos w Układach Dynamicznych/Chaos in Dynamical Systems*, Edward Ott
- ❻ *Regular and Chaotic Dynamics*, A. J. Lichtenberg & M. A. Liebermann
- ❼ *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, K. T. Aligood, T. D. Sauer & J. A. Yorke
- ❽ Dodatkowe materiały podane w trakcie zajęć

- ❶ *Czy Bóg gra w kości? Nowa matematyka chaosu/Does God Play Dice? The New Mathematics of Chaos*, Ian Stewart
- ❷ *Chaos. Narodziny nowej nauki/Chaos. Making a new science*, James Gleick
- ❸ *Wstęp do Dynamiki Układów Chaotycznych/Chaotic Dynamics. An Introduction*, G. L. Baker & J. P. Gollub
- ❹ *Nonlinear Dynamics and Chaos*, Steven H. Strogatz
- ❺ *Chaos w Układach Dynamicznych/Chaos in Dynamical Systems*, Edward Ott
- ❻ *Regular and Chaotic Dynamics*, A. J. Lichtenberg & M. A. Liebermann
- ❼ *Chaos: An Introduction to Dynamical Systems*, K. T. Aligood, T. D. Sauer & J. A. Yorke
- ❽ Dodatkowe materiały podane w trakcie zajęć

Na początku był porządek...

- Johannes Kepler: prawa ruchu (1609)
 - Obserwacje Tychona Brahe
 - Szczęśliwy traf — orbita Ziemi $\oplus$ kołista, orbita Marsa $\mars$ wysoce eliptyczna
 - Jeszcze szczęśliwszy traf — ruch każdej z planet to (w przybliżeniu) zagadnienie dwóch ciał (Słońce $\odot$ plus planeta)



Na początku był porządek...

- Isaac Newton: prawa dynamiki — prawo odwrotności kwadratów (1687)

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

- Zagadnienie dwóch ciał, $\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(M+m)}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$, jest całkowalne dając elipsę ($0 \leq e < 1$) jako kształt orbity — w układzie biegunowym:

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$$

- XVIII-XIX w. — rozkwit analizy matematycznej, mechaniki klasycznej, sukcesy astronomii (Uran ♄, William Herschel, 1781; Neptun ♆, Gottfried Galle, 1846)
- Układy liniowe — *suma części składowych*: trzon fizyki (np. równania Maxwella, równanie Schrödingera itp.)

Na początku był porządek...

- Isaac Newton: prawa dynamiki — prawo odwrotności kwadratów (1687)

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

- Zagadnienie dwóch ciał, $\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(M+m)}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$, jest całkowalne dając elipsę ($0 \leq e < 1$) jako kształt orbity — w układzie biegunowym:

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$$

- XVIII-XIX w. — rozkwit analizy matematycznej, mechaniki klasycznej, sukcesy astronomii (Uran ♄, William Herschel, 1781; Neptun ♆, Gottfried Galle, 1846)
- Układy liniowe — *suma części składowych*: trzon fizyki (np. równania Maxwella, równanie Schrödingera itp.)

Na początku był porządek...

- Isaac Newton: prawa dynamiki — prawo odwrotności kwadratów (1687)

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

- Zagadnienie dwóch ciał, $\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(M+m)}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$, jest całkowne dając elipsę ($0 \leq e < 1$) jako kształt orbity — w układzie biegunowym:

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$$

- XVIII-XIX w. — rozkwit analizy matematycznej, mechaniki klasycznej, sukcesy astronomii (Uran ♄, William Herschel, 1781; Neptun ♆, Gottfried Galle, 1846)
- Układy liniowe — *suma części składowych*: trzon fizyki (np. równania Maxwella, równanie Schrödingera itp.)

Na początku był porządek...

- Isaac Newton: prawa dynamiki — prawo odwrotności kwadratów (1687)

$$F = \frac{GMm}{r^2}$$

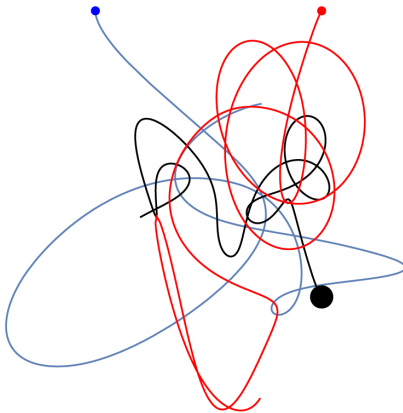
- Zagadnienie dwóch ciał, $\ddot{\mathbf{r}} = -\frac{G(M+m)}{r^2}\hat{\mathbf{r}}$, jest całkowne dając elipsę ($0 \leq e < 1$) jako kształt orbity — w układzie biegunowym:

$$r(\theta) = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \theta}$$

- XVIII-XIX w. — rozkwit analizy matematycznej, mechaniki klasycznej, sukcesy astronomii (Uran ♄, William Herschel, 1781; Neptun ♆, Gottfried Galle, 1846)
- Układy liniowe — *suma części składowych*: trzon fizyki (np. równania Maxwella, równanie Schrödingera itp.)

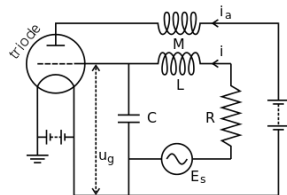
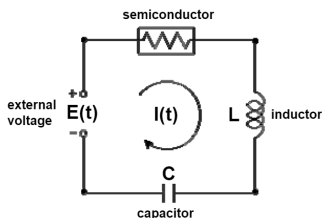
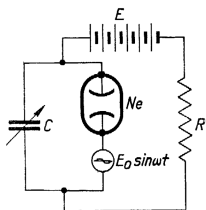
...a potem zapanował chaos

- Henri Poincaré: *dziadek* chaosu (1890-91) — zagadnienie trzech ciał: „homokliniczna płatanina, której nawet nie próbuję narysować”;
wrażliwość na warunki początkowe



...a potem zapanował chaos

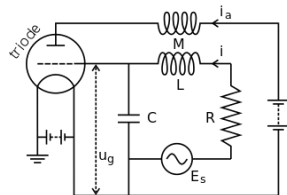
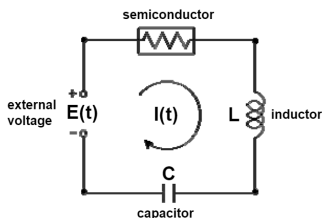
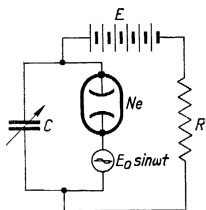
- 1. poł. XX w. — oscylatory nieliniowe, np. Balthasar van der Pol (1927)



- złożone zachowania układów hamiltonowskich (KAM)
- Boris Chirikow, *wujek chaosu* (1959) — plazma w pułapce magnetycznej; kryterium powstawania chaosu
- Edward Lorenz, *ojciec chaosu* (1963) — *efekt motyla*
- lata 70'-80' XX w. — boom na chaos: w mechanice, astronomii, biologii, medycynie, elektronice, laserach; turbulencje, fraktale (Benoît Mandelbrot), dziwne atraktory; chaos kwantowy

...a potem zapanował chaos

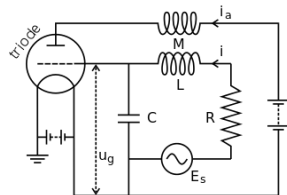
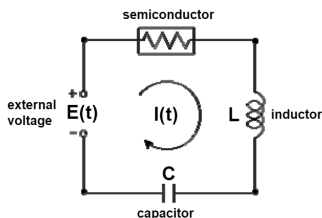
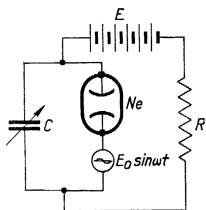
- 1. poł. XX w. — oscylatory nieliniowe, np. Balthasar van der Pol (1927)



- złożone zachowania układów hamiltonowskich (KAM)
- Boris Chirikow, *wujek chaosu* (1959) — plazma w pułapce magnetycznej; kryterium powstawania chaosu
- Edward Lorenz, *ojciec chaosu* (1963) — *efekt motyla*
- lata 70'-80' XX w. — boom na chaos: w mechanice, astronomii, biologii, medycynie, elektronice, laserach; turbulencje, fraktale (Benoît Mandelbrot), dziwne atraktory; chaos kwantowy

...a potem zapanował chaos

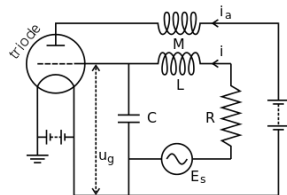
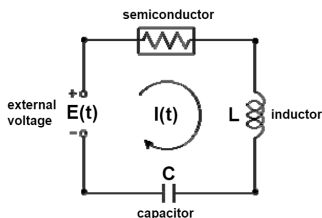
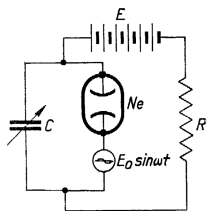
- 1. poł. XX w. — oscylatory nieliniowe, np. Balthasar van der Pol (1927)



- złożone zachowania układów hamiltonowskich (KAM)
- Boris Chirikow, *wujek chaosu* (1959) — plazma w pułapce magnetycznej; kryterium powstawania chaosu
- Edward Lorenz, *ojciec chaosu* (1963) — *efekt motyla*
- lata 70'-80' XX w. — boom na chaos: w mechanice, astronomii, biologii, medycynie, elektronice, laserach; turbulencje, fraktale (Benoît Mandelbrot), dziwne atraktory; chaos kwantowy

...a potem zapanował chaos

- 1. poł. XX w. — oscylatory nieliniowe, np. Balthasar van der Pol (1927)



- złożone zachowania układów hamiltonowskich (KAM)
- Boris Chirikow, *wujek chaosu* (1959) — plazma w pułapce magnetycznej; kryterium powstawania chaosu
- Edward Lorenz, *ojciec chaosu* (1963) — *efekt motyla*
- lata 70'-80' XX w. — boom na chaos: w mechanice, astronomii, biologii, medycynie, elektronice, laserach; turbulencje, fraktale (Benoît Mandelbrot), dziwne atraktory; chaos kwantowy

Nagroda Nobla z fizyki (2021)



- S. Manabe & K. Hasselmann „za fizyczne modelowanie klimatu Ziemi, ilościowe określanie zmienności i wiarygodne przewidywanie globalnego ocieplenia”
- G. Parisi „za odkrycie wzajemnego oddziaływania nieporządku i fluktuacji w układach fizycznych od skali atomowej do planetarnej”
- Oba osiągnięcia dotyczą układów chaotycznych — tego jak wielka liczba zmiennych oraz niewielkie zaburzenie mogą prowadzić do kolosalnych zmian w układzie. Laureaci dążyli do zrozumienia tego typu układów oraz ich długofalowych przewidywań.

Nagroda Nobla z fizyki (2021)



- S. Manabe & K. Hasselmann „za fizyczne modelowanie klimatu Ziemi, ilościowe określanie zmienności i wiarygodne przewidywanie globalnego ocieplenia”
- G. Parisi „za odkrycie wzajemnego oddziaływania nieporządku i fluktuacji w układach fizycznych od skali atomowej do planetarnej”
- Oba osiągnięcia dotyczą układów chaotycznych — tego jak wielka liczba zmiennych oraz niewielkie zaburzenie mogą prowadzić do kolosalnych zmian w układzie. Laureaci dążyli do zrozumienia tego typu układów oraz ich długofalowych przewidywań.

Czym chaos NIE jest

Ważne

Chaos $\neq$ losowość, ale
jest porządek w chaosie;
a teoria chaosu nie jest teorią.

Chaos cechuje się **wrażliwością na warunki początkowe**, tj. bardzo mała zmiana w układzie powoduje *nieproporcjonalnie* wielką zmianę zachowania w przyszłości. Warunkiem koniecznym (ale nie wystarczającym!) dla zaistnienia chaosu jest **nieliniowość**.

Gdybyśmy znali wszystkie parametry układu z nieskończoną dokładnością, układ byłby całkowicie przewidywalny. Chaos powoduje, że dowolnie mała niepewność pomiaru urasta do gargantuicznych rozmiarów.

Czym chaos NIE jest

Ważne

Chaos $\neq$ losowość, ale
jest porządek w chaosie;
a teoria chaosu nie jest teorią.

Chaos cechuje się **wrażliwością na warunki początkowe**, tj. bardzo mała zmiana w układzie powoduje *nieproporcjonalnie* wielką zmianę zachowania w przyszłości. Warunkiem koniecznym (ale nie wystarczającym!) dla zaistnienia chaosu jest **nieliniowość**.

Gdybyśmy znali wszystkie parametry układu z nieskończoną dokładnością, układ byłby całkowicie przewidywalny. Chaos powoduje, że dowolnie mała niepewność pomiaru urasta do gargantuicznych rozmiarów.

Czym chaos NIE jest

Ważne

Chaos $\neq$ losowość, ale
jest porządek w chaosie;
a teoria chaosu nie jest teorią.

Chaos cechuje się **wrażliwością na warunki początkowe**, tj. bardzo mała zmiana w układzie powoduje *nieproporcjonalnie* wielką zmianę zachowania w przyszłości. Warunkiem koniecznym (ale nie wystarczającym!) dla zaistnienia chaosu jest **nieliniowość**.

Gdybyśmy znali wszystkie parametry układu z nieskończoną dokładnością, układ byłby całkowicie przewidywalny. Chaos powoduje, że dowolnie mała niepewność pomiaru urasta do gargantuicznych rozmiarów.

Powtórka z algebry

Macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Zagadnienie własne:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - \mathbf{1}\lambda)\mathbf{v} = 0. \quad (*)$$

Warunek istnienia rozwiązań nietrywialnych (równanie charakterystyczne na wartości własne λ):

$$\det(\mathbf{A} - \mathbf{1}\lambda) = 0.$$

Dla każdej λ_i , $i = 1, \dots, n$ (zasadnicze twierdzenie algebry), rozwiązujemy (*) otrzymując wektory własne $\mathbf{v}_i$.

Powtórka z algebry

Macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Zagadnienie własne:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - \mathbf{1}\lambda)\mathbf{v} = 0. \quad (*)$$

Warunek istnienia rozwiązań nietrywialnych (równanie charakterystyczne na wartości własne λ):

$$\det(\mathbf{A} - \mathbf{1}\lambda) = 0.$$

Dla każdej λ_i , $i = 1, \dots, n$ (zasadnicze twierdzenie algebry), rozwiązujemy (*) otrzymując wektory własne $\mathbf{v}_i$.

Istnieje macierz $\mathbf{J}$ podobna do $\mathbf{A}$, czyli taka, że

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1}$$

gdzie $\mathbf{J} = \text{diag}(\{\lambda_i\}_{i=1}^n)$, zaś kolumnami $\mathbf{P}$ są wektory własne; zatem $\mathbf{P}$ jest macierzą unitarną (ortogonalną jeśli $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$):

$$\mathbf{P}\mathbf{P}^\dagger = \mathbf{1}$$

Powtórka z algebry

Macierz $\mathbf{A} \in \mathbb{C}^{n \times n}$. Zagadnienie własne:

$$\mathbf{A}\mathbf{v} = \lambda\mathbf{v} \Leftrightarrow (\mathbf{A} - \mathbf{1}\lambda)\mathbf{v} = 0. \quad (*)$$

Warunek istnienia rozwiązań nietrywialnych (równanie charakterystyczne na wartości własne λ):

$$\det(\mathbf{A} - \mathbf{1}\lambda) = 0.$$

Dla każdej λ_i , $i = 1, \dots, n$ (zasadnicze twierdzenie algebry), rozwiązujemy (*) otrzymując wektory własne $\mathbf{v}_i$.

Istnieje macierz $\mathbf{J}$ podobna do $\mathbf{A}$, czyli taka, że

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1}$$

gdzie $\mathbf{J} = \text{diag}(\{\lambda_i\}_{i=1}^n)$, zaś kolumnami $\mathbf{P}$ są wektory własne; zatem $\mathbf{P}$ jest macierzą unitarną (ortogonalną jeśli $\mathbf{A} \in \mathbb{R}^{n \times n}$):

$$\mathbf{P}\mathbf{P}^\dagger = \mathbf{1}$$

Przykłady

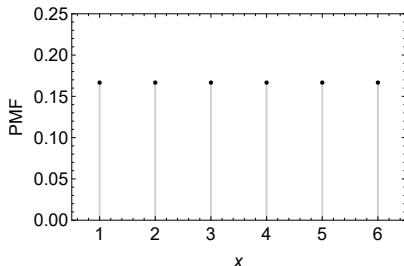
$$\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 & -1 \\ 1 & 3 \end{pmatrix},$$

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \\ 5 & 3 & 1 \end{pmatrix}$$

- Funkcja masy prawdopodobieństwa (*probability mass function*, PMF) – dla rozkładów dyskretnych.
- Funkcja gęstości prawdopodobieństwa (*probability density function*, PDF) – dla rozkładów ciągłych.
 - Rozkład gęstości prawdopodobieństwa (*probability distribution function* – nadal PDF), rozkład prawdopodobieństwa.
- Obie muszą być znormalizowane do 1.

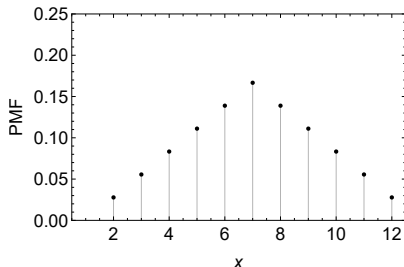
- Rzut jedną kostką:

$$p_1(x) = \frac{1}{6} \text{ dla } x \in \{1, \dots, 6\}$$



- Rzut dwiema kostkami:

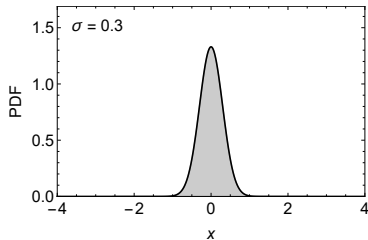
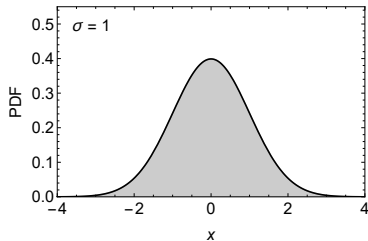
$$p_2(x) \text{ dla } x \in \{2, \dots, 12\}$$



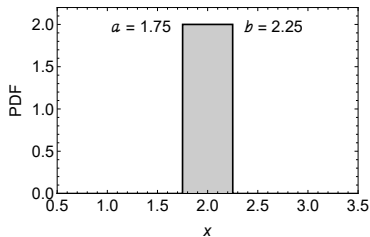
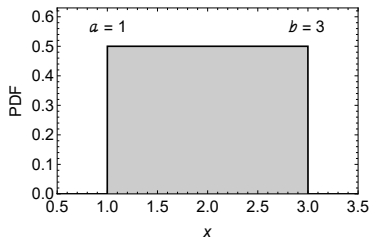
- $0 \leq p(x) \leq 1$ oraz $\sum_x p(x) = 1$

Rozkłady ciągłe

$$f^{(\mathcal{G})}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} \exp\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)$$



$$f^{(\mathcal{U})}(x) = \frac{1}{b-a}$$



$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1, \quad f(x) \geq 0, \quad P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

Rozkłady ciągłe

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(x)dx = 1, \quad f(x) \geq 0, \quad P(x_1 < X < x_2) = \int_{x_1}^{x_2} f(x)dx$$

