

Wprowadzenie do teorii chaosu

Lista zadań

©Mariusz Tarnopolski 2022

Wykład 2 – odwzorowanie logistyczne

1. (*Wspomagane komputerowo*) Zlokalizować pierwszą wartość r dla której bifurkacja styczeńowa odwzorowania logistycznego $f(x) = rx(1-x)$ prowadzi do orbity o okresie-5.

2. Określić typ maksimum odwzorowań:

(a) $f(x) = r(1 - (2x - 1)^4)$

(b) $g(x) = \frac{rx(1-x)}{1+x}$

gdzie $r > 0$ jest parametrem.

3. Niech będzie dane odwzorowanie trójkątne (*tent map*)¹

$$x_{n+1} = T(x_n) = \begin{cases} \mu x_n & x_n < 1/2 \\ \mu(1 - x_n) & x_n \geq 1/2 \end{cases}$$

gdzie $x \in [0, 1]$, $\mu \in [0, 2]$.

- (a) Zbadać stabilność punktów stałych $T(x)$ w zależności od parametru μ .
 - (b) Rozważyć $T^2(x)$. Jakie ma punkty stałe? Wskazać okres-2. Czy jest on stabilny?
 - (c) Przyjąć $\mu = 2$. Znaleźć orbity o okresie-3.
4. Udowodnić, że cykle superstabilne odwzorowań unimodalnych zawsze przechodzą przez x_m (tj. przez argument maksimum).
 5. Pokazać, że jeśli $g(x)$ spełnia równanie Feigenbauma-Cvitanovića, to $\mu g(x/\mu)$, gdzie $\mu \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$, również je spełnia.
 6. Założyć, że $g(x) = 1 + bx^2 + \mathcal{O}(x^4)$. Rozwiązać równanie Feigenbauma-Cvitanovića oraz obliczyć wartość stałej α . Ile wynosi błąd względny?
 7. Założyć, że $h(x) = h(0) + \mathcal{O}(x)$, $h(0) \neq 0$. Rozwiązać równanie własne (slajd 60) oraz obliczyć wartość stałej δ . Ile wynosi błąd względny?
 8. Policzyc analitycznie i narysować wykresy wykładnika Lapunowa $\lambda(r)$ dla odwzorowania logistycznego w przedziałach:
 - (a) $0 < r < 1$
 - (b) $1 < r < 3$
 - (c) $3 < r < 1 + \sqrt{6}$

Korzystając z tych postaci analitycznych, znaleźć położenia cykli superstabilnych.

¹Równoważne sformułowania: $x_{n+1} = \frac{\mu}{2} (1 - 2|x_n - 1/2|) \equiv \mu \min\{x_n, 1 - x_n\}$

-
9. Obliczyć wykładnik Lapunowa dla odwzorowania $f(x) = 6x(1-x)(1-2x+2x^2)$.
(*Wskazówka*: rozważyć stabilność punktów stałych.)
 10. Znaleźć odpowiedni homeomorfizm h i pokazać, że odwzorowanie logistyczne z $r = 4$ oraz odwzorowanie trójkątne z $\mu = 2$ są topologicznie sprzężone.
 11. Wykorzystując wynik zad. 10 obliczyć wykładnik Lapunowa dla odwzorowania logistycznego z $r = 4$.
 12. Ułożyć równanie Perrona-Frobeniusa dla odwzorowania trójkątnego z $\mu = 2$ oraz podać jego rozwiązanie.
 13. Wykorzystując rozkład niezmienniczy, obliczyć wykładnik Lapunowa dla odwzorowania trójkątnego z $\mu = 2$.
 14. Obliczyć rozkład niezmienniczy dla odwzorowania logistycznego z $r = 4$. Jak można go wykorzystać do policzenia wykładnika Lapunowa?
 15. Obliczyć wykładnik Lapunowa dla $x_{n+1} = 13x_n + 21$. Czy ten układ jest chaotyczny?
 16. Uporządkować wg porządku Szarkowskiego: $\{452, 897, 802, 326\}$.
 17. Pokazać², że odwzorowanie logistyczne z $r = 4$ ma orbity o okresie-3. Znaleźć je.

Wykład 3 – odwzorowania dwuwymiarowe

18. Obliczyć wykładniki Lapunowa dla odwzorowania Arnolda (*Arnold's cat map* lub *Anosov map*):

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \pmod{1}$$

Czy to odwzorowanie jest chaotyczne? Co gdyby pominąć $\pmod{1}$?

19. Zanalizować stabilność punktów stałych odwzorowania Hénona poprzez obliczenie wartości własnych ν jakobianu w tych punktach (przyjąć wartości kanoniczne dla parametrów a i b): jeśli $|\nu| < 1$, to punkt stały jest stabilny; jeśli co najmniej jeden $|\nu| > 1$, to istnieje jakiś rodzaj niestabilności.

Wykład 4 – układ Lorenza

20. Określić jakie zachodzą relacje między wartościami własnymi (λ_1, λ_2) w poszczególnych obszarach diagramu $(\text{Tr}\mathbf{A}, \det\mathbf{A})$.
21. Zlinearyzować układ

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + ax(x^2 + y^2) \\ \dot{y} &= x + ay(x^2 + y^2) \end{cases}$$

gdzie $a \neq 0$, oraz zbadać stabilność punktów stałych. Naszkicować portret fazowy oraz porównać z portretem układu nieliniowego³. Rozwiązać układ analitycznie.

²Jedno z możliwych rozwiązań może być wspomagane komputerowo.

³Np. <https://aeb019.hosted.uark.edu/ppplane.html>

-
22. Pokazać, że gdy $r = r_H$, to para wartości własnych punktów $C^\pm$ układu Lorenza jest urojona i sprzężona. Obliczyć trzecią wartość własną.
23. Rozważyć populacje królików i owiec, rywalizujących na ograniczonym obszarze o te same zasoby, opisanych układem dynamicznym

$$\begin{cases} \dot{x} &= x(3-x) - 2xy \\ \dot{y} &= y(2-y) - xy \end{cases}$$

Zbadać dynamikę tego modelu, tj. określić stabilność punktów stałych i naszkicować portret fazowy.

24. Przekształcić układ Sprotta

$$\ddot{x} + A\dot{x} - \dot{x}^2 + x = 0$$

do postaci układu dynamicznego i zbadać stabilność punktu stałego. Przyjąć, że $A > 0$.
(*Wskazówka:* skorzystać z twierdzenia Routha-Hurwitza.)

Wykład 5 – wahadła

25. Separatrysa wahadła Duffinga bez tłumienia i bez wymuszenia to krzywa w kształcie ósemki przechodząca przez punkt siodłowy. Wyprowadzić jej równanie oraz naszkicować wykres na portrecie fazowym.