Wprowadzenie do teorii chaosu

Cheat sheet 1

©Mariusz Tarnopolski 2022

Punkty stałe → jakobian → wartości własne → stabilność

Odwzorowania (układy dynamiczne z czasem dyskretnym) $$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{M}(\mathbf{x}_n)$$ mają punkty stałe $\mathbf{x}^*$ spełniające $$\boxed{\mathbf{M}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*}$$ Zatem odchylenie $\mathbf{w}_n$ od punktu $\mathbf{x}^*$, spełniające zlinearyzowane równanie $$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{DM}(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{w}_n,$$ będzie rosło z czasem n jeśli wartości własne λ jakobianu w punkcie $\mathbf{x}^*$ $$\mathbf{DM}(\mathbf{x}^*) = \left(\frac{\partial x_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}\Bigg\vert_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}$$ spełniają $\boxed{\lvert\lambda\rvert > 1}$	Układy dynamiczne z czasem ciągłym $$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$$ mają punkty stałe $\mathbf{x}^*$ spełniające $$\boxed{\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = 0}$$ Zatem odchylenie $\mathbf{w}(t)$ od punktu $\mathbf{x}^*$, spełniające zlinearyzowane równanie $$\dot{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{w}(t),$$ będzie rosło z czasem t jeśli wartości własne λ jakobianu w punkcie $\mathbf{x}^*$ $$\mathbf{J}(\mathbf{x}^*) = \left(\frac{\partial f_i}{\partial x_j}\right)_{i,j}\Bigg\vert_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}$$ spełniają $\boxed{\lambda > 0}$
Por. z przypadkiem 1D: $\lvert\delta_{n+1}\rvert \simeq \lvert f'(x^*)\rvert\,\lvert\delta_n\rvert \Rightarrow \delta_n$ będzie rosło jeśli $\lvert f'(x^*)\rvert > 1$.	Por. z przypadkiem 1D: $\dot{w} = Jw \Rightarrow w(t) \simeq \mathrm{e}^{Jt}$ będzie rosło jeśli $J > 0$.

Uwagi dot. notacji: jakobian odwzorowania $\mathbf{M}$ oznaczamy zarówno jako $\mathbf{DM}$, jak i $\mathbf{J}$, ponieważ najpierw przez $\mathbf{J}$ oznaczyliśmy macierz podobną (do pewnej $\mathbf{A}$), która nie jest jakobianem. W sytuacjach gdzie było jasne z kontekstu, używaliśmy ozn. $\mathbf{J}$ zarówno dla odwzorowań, jak i układów z czasem ciągłym. Podobny konflikt oznaczeń miewa miejsce w przypadku wartości własnych λ dowolnej macierzy oraz wykładników Lapunowa λ. Tutaj też było to zazwyczaj jasne z kontekstu.