



UNIWERSYTET
MIKOŁAJA KOPERNIKA
W TORUNIU

Wydział Fizyki, Astronomii
i Informatyki Stosowanej

Programowanie Robotów Mobilnych

Kinematyka prosta
I odwrotna

Rafał Szczepański
e-mail: [szczepi \(at\) umk.pl](mailto:szczepi(at)umk.pl)
www.umk.pl/~szczepi

28.03.2023



Plan prezentacji

- Model kinematyczny i model dynamiczny
- Kinematyka prosta i odwrotna:
 - Robota dwukołowego z podparciem
 - Robota czterokołowego
 - Robota trzykołowego z kołami szwedzkimi
 - Robota czterokołowego z kołami szwedzkimi



Model dynamiczny

- Model dynamiczny rozważa mechanizm ruchu robota uwzględniając siły i momenty obrotowe występujące w układzie.
- Pozwala on na opisanie zależności pozycji i orientacji robota w odniesieniu do przyłożonych sił i momentów obrotowych.
- Model dynamiczny jest kluczowy w przypadku konieczności rozważania dynamiki robota.
- Stosuje się go w celu: syntezy układów regulacji automatycznej, analizy układu mechanicznego, symulacji ruchów robota.
- Najpopularniejszymi metodami opisywania modelu dynamicznego go robotów są:
 - metoda Newton'a-Euler'a,
 - równania Euler'a-Lagrange'a.



Dynamika prosta

- Dynamika prosta rozwiązuje problem: jeżeli znam przyłożone siły i momenty obrotowe, jak również pozycje, prędkości i kątowne złączy to możemy obliczyć przyspieszenia złączy:

$$\ddot{q} = f(q, \dot{q}, \tau)$$

$$\dot{q} = \int \ddot{q} dt \qquad q = \int \dot{q} dt$$

$$\tau \in \mathbb{R}^m, q \in \mathbb{R}^m$$



Dynamika odwrotna

- Dynamika odwrotna rozwiązuje problem: jeżeli znam pozycje, prędkości i przyspieszenia złączy to możemy obliczyć odpowiadające im siły i momenty obrotowe.

$$\tau = g(q, \dot{q}, \ddot{q}) = f^{-1}(q, \dot{q}, \ddot{q})$$

$$\tau \in \mathbb{R}^n, q \in \mathbb{R}^m$$



Model kinematyczny

- Model kinematyczny rozważa mechanizm ruchu robota pomijając siły i momenty obrotowe występujące w układzie.
- Pozwala on na obliczenie pozycji i orientacji robota w odniesieniu do pozycji początkowej jako funkcja zależna od pozycji kątowej kół.
- Model kinematyczny jest podstawową metodą opisu pozycji robota mobilnego, orientacji jak również zmiennych ruchu wszystkich kół.
- Stosuje się go w celu sformułowania zależności pomiędzy układem odniesienia przestrzeni roboczej, a układem zmiennych ruchu kół.
- Najpopularniejszą metodą opisywania modelu kinematycznego robotów jest notacja Denavit'a-Hartenberg'a.



Kinematyka prosta

- Kinematyka prosta rozwiązuje problem: jeżeli znam pozycję, prędkości i przyspieszenia kątowe kół to możemy obliczyć aktualną pozycję, prędkości oraz przyspieszenia robota względem początkowej pozycji (tj. prędkość liniową oraz kątową).
- Kinematyk prosta jest zdefiniowana funkcją f przechodzącą z przestrzeni kół do przestrzeni do przestrzeni roboczej:

$$f: \mathbb{R}^n \rightarrow \mathbb{R}^m$$

$$x = f(q) \quad x \in \mathbb{R}^n, q \in \mathbb{R}^m$$



Kinematyka odwrotna

- Kinematyka odwrotna rozwiązuje problem: jeżeli znam pozycje, prędkości i przyspieszenia robota w przestrzeni roboczej to możemy obliczyć prędkości i przyspieszenia kątowe kół.
- Kinematyk prosta jest zdefiniowana funkcją g przechodzącą z przestrzeni roboczej do przestrzeni do przestrzeni kół:

$$g: \mathbb{R}^m \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$q = g(x) = f^{-1}(x) \quad x \in \mathbb{R}^n, q \in \mathbb{R}^m$$



Model dynamiczny

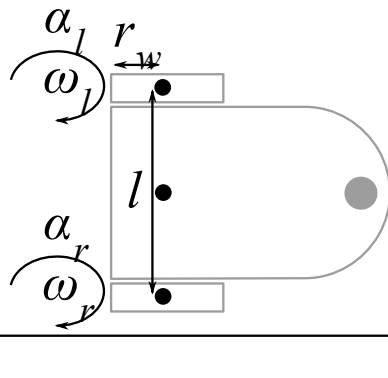
- Rozważa zależność pomiędzy siłami i momentami obrotowymi złączy, a ruchem robota,
- Kluczowe do analizy i syntezy dynamiki robota,
- metoda Newton'a-Euler'a,
- równania Euler'a-Lagrange'a.

Model kinematyczny

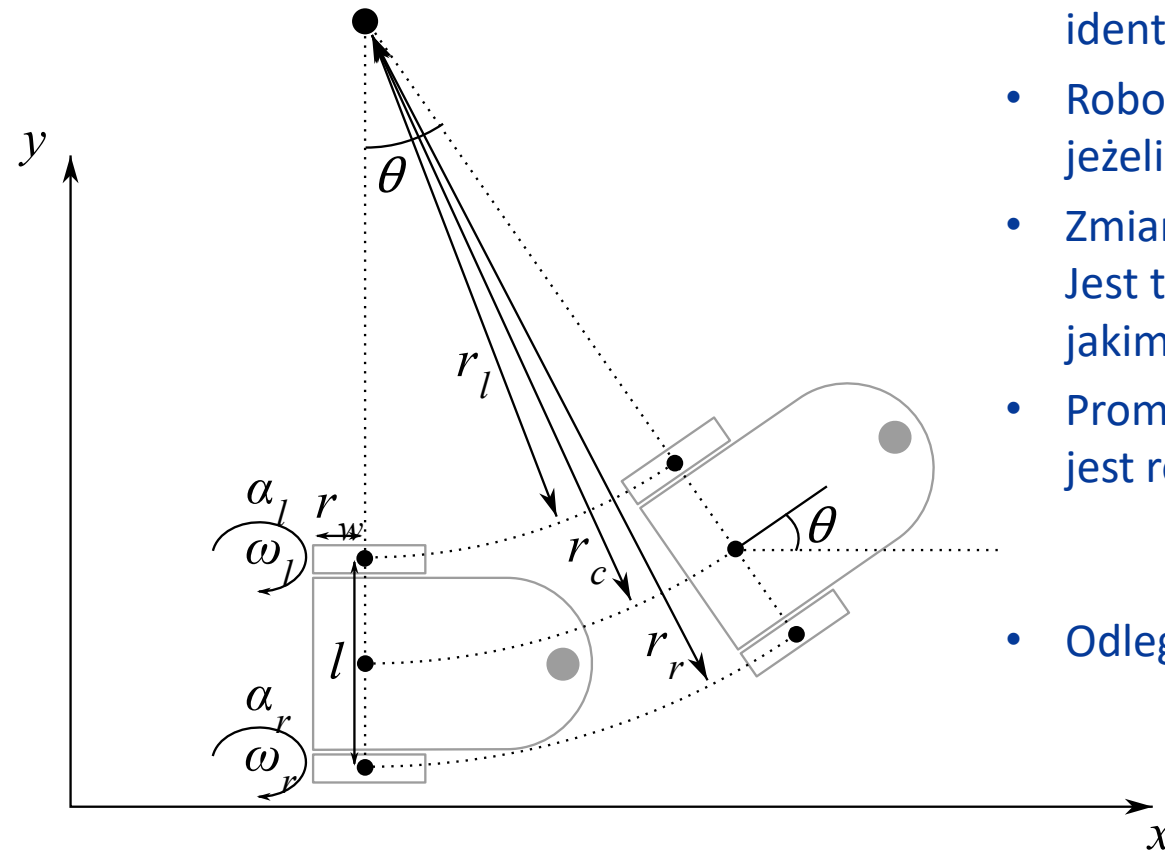
- Rozważa mechanizm ruchu robota pomijając siły i momenty obrotowe występujące w układzie,
- Pozwala na opis matematyczny pozycji/prędkości/przyśpieszeń robota w przestrzeni robota znając pozycji/prędkości/przyśpieszenia poszczególnych złączy,
- Notacja Denavit'a-Hartenberg'a.

Model kinematyczny robota dwukołowego z podparciem

- Dla zerowej robot skierowany jest wzdłuż osi x . A oś kół leży na osi y .
- Pozycja robota jest określana jako pozycja pośrodku osi kół.
- Promień koła oznaczamy r_w .
- Pozycję kątową koła lewego oznaczamy α_l .
- Pozycję kątową koła prawego oznaczamy α_r .
- Prędkości kątowe kół wynoszą odpowiednio: $\omega_l = \dot{\alpha}_l$ i $\omega_r = \dot{\alpha}_r$
- Odległość pomiędzy środkami kół wynosi l .



Model kinematyczny robota dwukołowego z podparciem



- Robot może poruszać się w linii prostej jeżeli prędkości kół są identyczne.
- Robot może poruszać się po okręgu jeżeli prędkości kół są różne.
- Zmiana orientacji robota wynosi θ . Jest to również promień łuku po jakim poruszał się robot.
- Promień po którym porusza się robot jest równy:

$$r_c = \frac{r_r + r_l}{2}$$

- Odległość między kołami wynosi:

$$l = r_r - r_l$$

Model kinematyczny robota dwukołowego z podparciem

- Długość przebytej drogi przez koła wynosi:

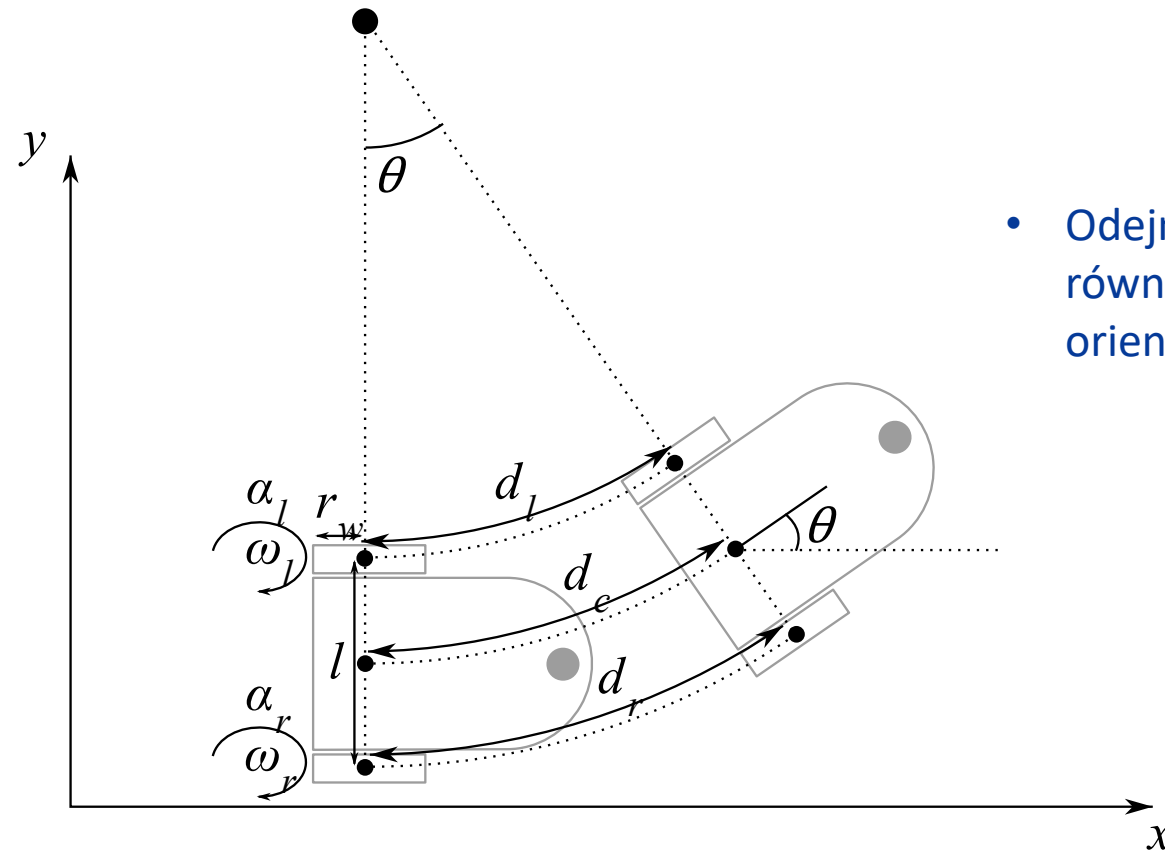
$$d_r = r_r \theta$$

$$d_l = r_l \theta$$

- Odejmując od siebie powyższe równania możemy wyznaczyć orientację robota:

$$d_r - d_l = r_r \theta - r_l \theta$$

$$\theta = \frac{d_r - d_l}{r_r - r_l} = \frac{d_r - d_l}{l}$$



Model kinematyczny robota dwukołowego z podparciem

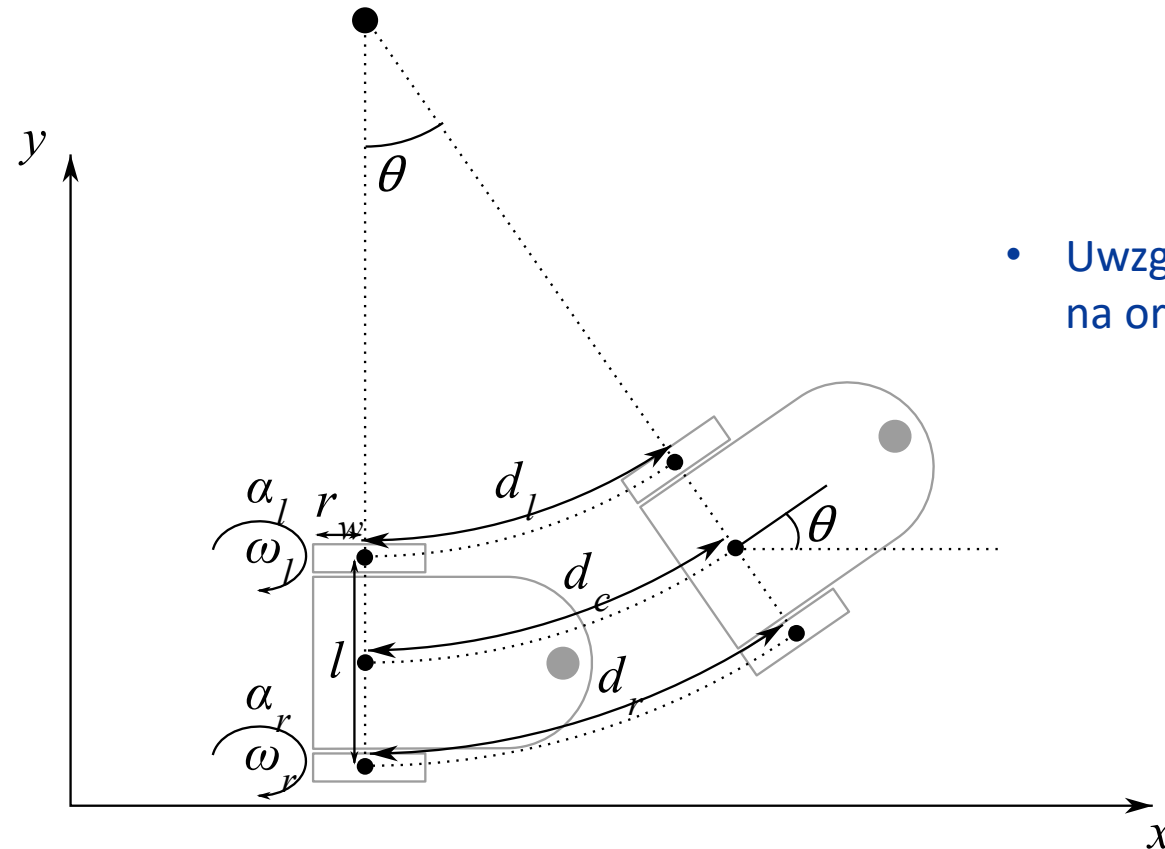
- Długości łuków możemy uzależnić od pozycji kątowej kół i promienia koła:

$$d_l = r_w \alpha_l$$

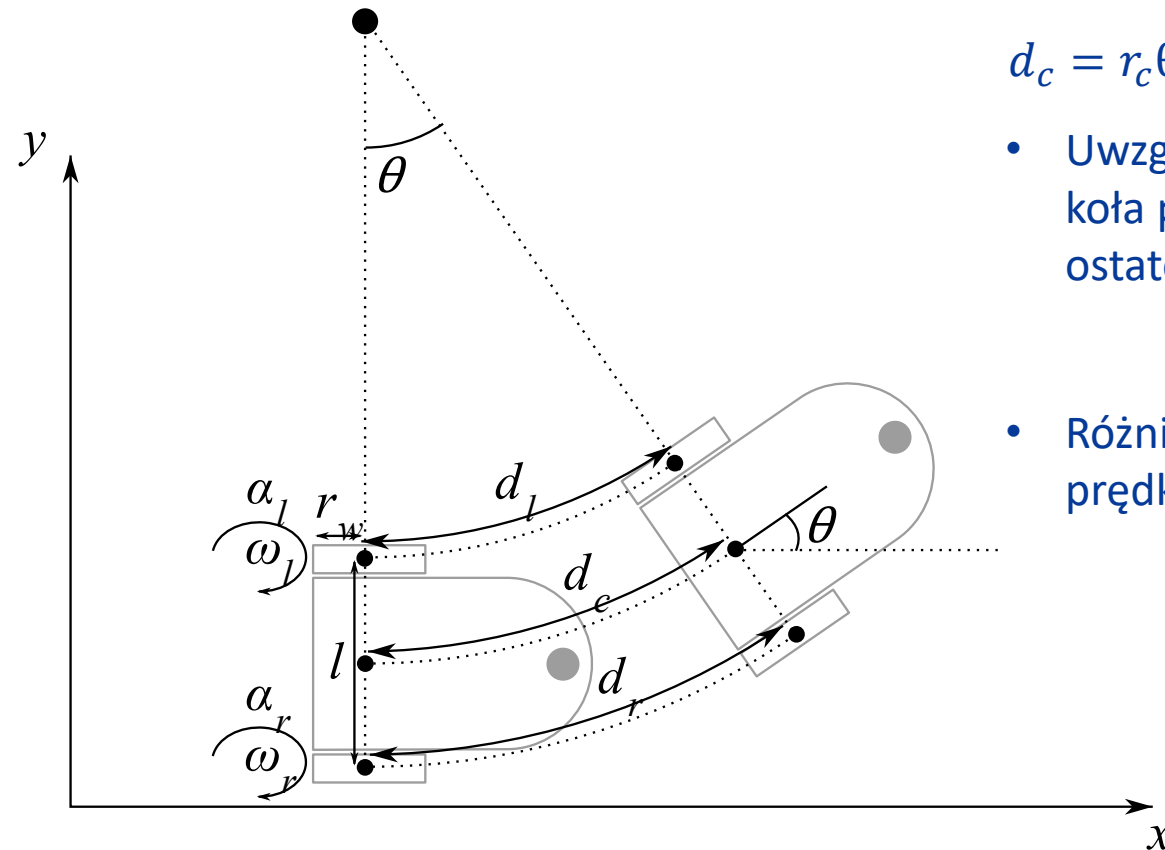
$$d_r = r_w \alpha_r$$

- Uwzględniając te zależności do wzoru na orientację otrzymujemy:

$$\theta = \frac{r_w}{l} (\alpha_r - \alpha_l)$$



Model kinematyczny robota dwukołowego z podparciem



- Rozważmy teraz ścieżkę przebytą przez robota (tj. punkt środkowy osi kół):

$$d_c = r_c \theta = \frac{r_r + r_l}{2} \theta = \frac{r_r \theta + r_l \theta}{2} = \frac{d_r + d_l}{2}$$
- Uwzględniając równania na długość łuku koła prawego i lewego otrzymujemy ostatecznie:

$$d_c = \frac{r_w}{2} (\alpha_r + \alpha_l)$$

- Różniczkując otrzymujemy równanie na prędkość styczną do toru ruchu:

$$v = \dot{d}_c = \frac{r_w}{2} (\omega_r + \omega_l)$$

Model kinematyczny robota dwukołowego z podparciem

- Rzutując prędkość ruchu na osie globalne x oraz y otrzymujemy:

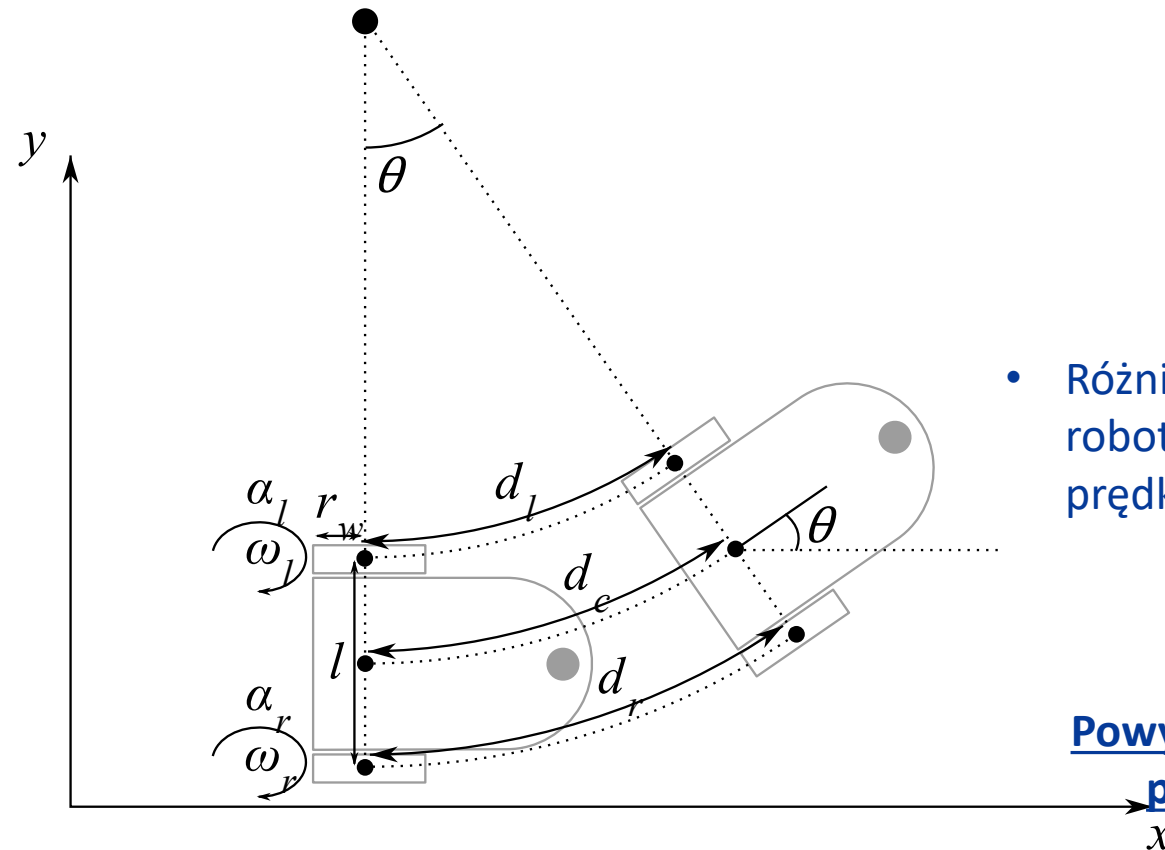
$$v_x = \frac{r_w}{2} (\omega_r + \omega_l) \cos \theta$$

$$v_y = \frac{r_w}{2} (\omega_r + \omega_l) \sin \theta$$

- Różniczkując równanie na orientację robota otrzymujemy równanie na prędkość kątową:

$$\omega = \frac{r_w}{l} (\omega_r - \omega_l)$$

Powyższe równania są rozwiązaniem problemu kinematyki prostej



Model kinematyczny robota dwukołowego z podparciem

Przekształcając równania poniższe równania opisujące kinematykę prostą względem układu współrzędnych związanego z robotem :

$$v = \dot{d}_c = \frac{r_w}{2} (\omega_r + \omega_l)$$

$$\omega = \frac{r_w}{l} (\omega_r - \omega_l)$$

Otrzymujemy równania kinematyki odwrotnej względem układu współrzędnych związanego z robotem :

$$\omega_l = \frac{v}{r_w} - \frac{l\omega}{2r_w}$$

$$\omega_r = \frac{v}{r_w} + \frac{l\omega}{2r_w}$$

Model kinematyczny robota dwukołowego z podparciem

Całkując prędkości liniowe oraz kątowe otrzymujemy następujące równanie będące odometrią, czyli równaniami opisującymi pozycję robota na bazie pozycji kół, które możemy mierzyć np. enkoderami:

$$x_r(t) = x_r(t - \Delta t) + \cos(\theta(t)) \frac{r_w}{2} \int_{t-\Delta t}^t (\omega_r(t) + \omega_l(t)) d\tau$$

$$y_r(t) = y_r(t - \Delta t) + \sin(\theta(t)) \frac{r_w}{2} \int_{t-\Delta t}^t (\omega_r(t) + \omega_l(t)) d\tau$$

$$\theta(t) = \theta(t - \Delta t) + \frac{r_w}{l} \int_{t-\Delta t}^t (\omega_r(t) - \omega_l(t)) d\tau$$

Model kinematyczny robota dwukołowego z podparciem

Sekwencja danych
wejściowych do kinematyki
odwrotnej:

$$v = [1, 0.5, 2, 1]; \text{ m/s}$$

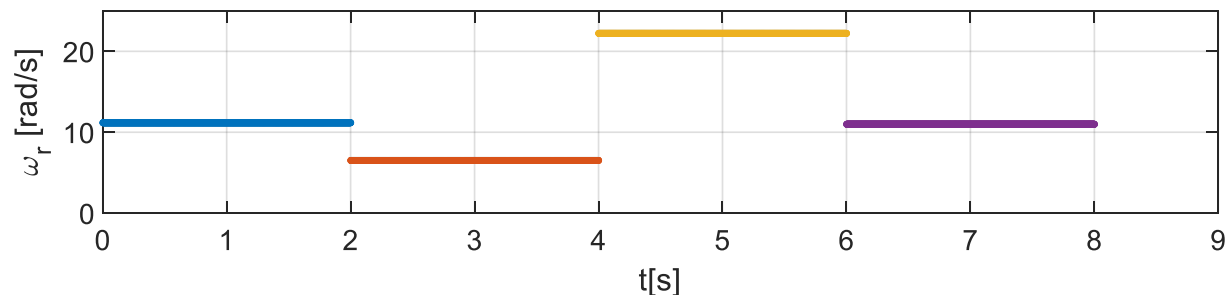
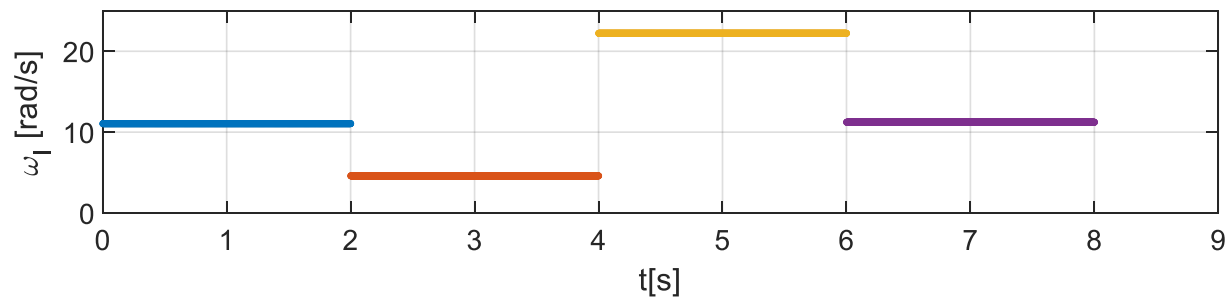
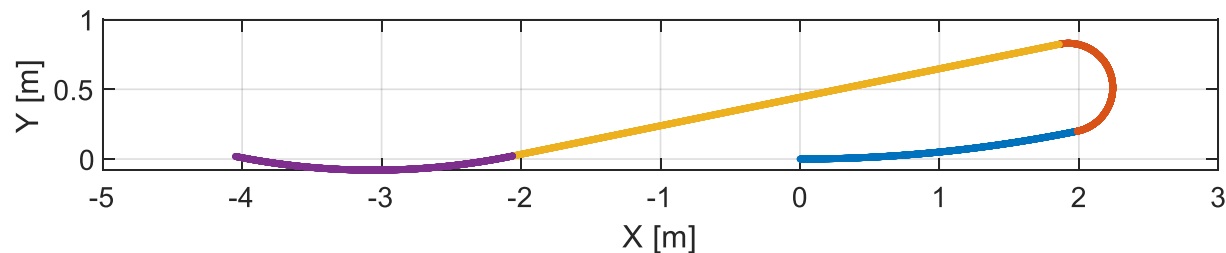
$$\omega = [0.1, \pi/2, 0, -0.2]; \text{ rad/s}$$

Wyniki kinematyki odwrotnej:

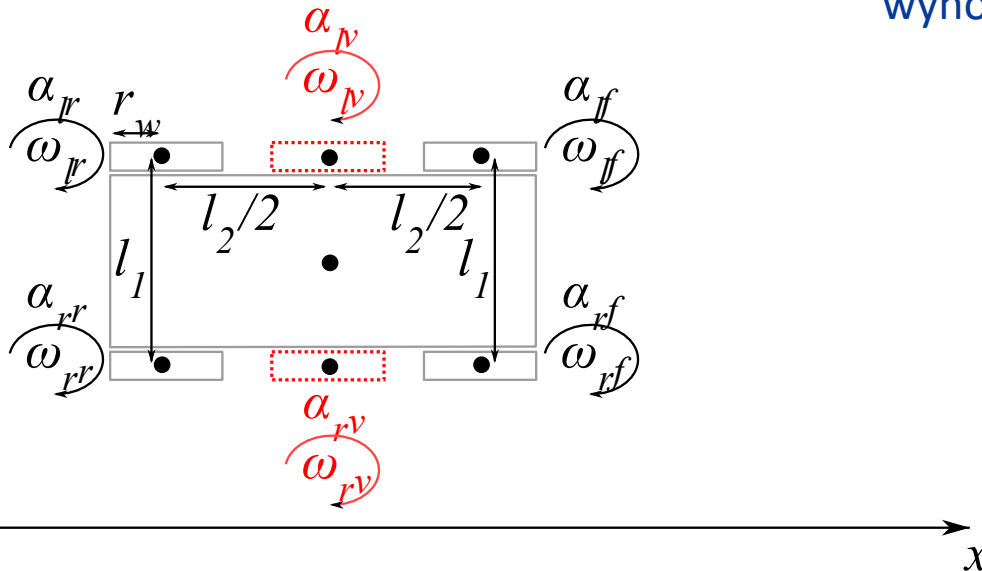
$$\omega_l = [11.5, 4.6, \\ 22.2, 11] \text{ rad/s}$$

$$\omega_r = [11.17, 6.5, \\ 22.2, 11.2] \text{ rad/s}$$

Wyniki kinematyki odwrotnej i
odometrii na wykresie.



- W robocie występują cztery niezależne napędy.
- Tworzymy wirtualne koła będące pośrodku kół fizycznych prawych oraz lewych.
- Prędkości i pozycje kół wirtualnych wynoszą odpowiednio:



$$\begin{aligned}\omega_{lv} &= \frac{\omega_{lr} + \omega_{lf}}{2} \\ \omega_{rv} &= \frac{\omega_{rr} + \omega_{rf}}{2} \\ \alpha_{lv} &= \frac{\alpha_{lr} + \alpha_{lf}}{2} \\ \alpha_{rv} &= \frac{\alpha_{rr} + \alpha_{rf}}{2}\end{aligned}$$



Model kinematyczny robota cztero kołowego o niezależnych napędach

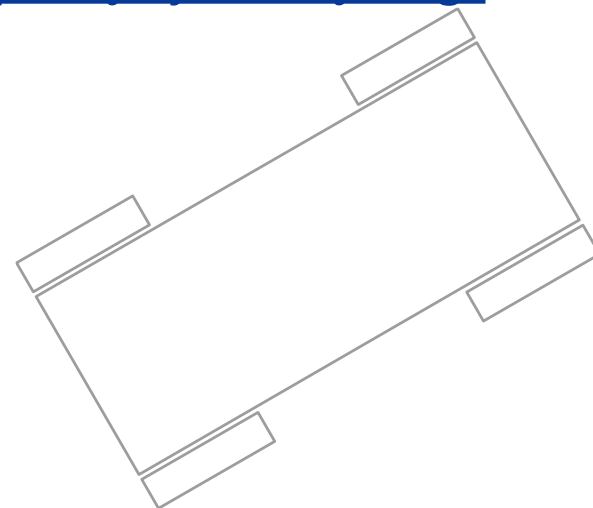
Dzięki wprowadzeniu wirtualnych kół otrzymujemy problem równoważny modelowi kinematycznemu robota dwukołowego z podparciem.

Rozwiązanie kinematyki prostej względem układu współrzędnych związanego z robotem jest następujące:

$$v = \dot{d}_c = \frac{r_w}{2} (\omega_{rv} + \omega_{lv})$$
$$\omega = \frac{r_w}{l_1} (\omega_{rv} - \omega_{lv})$$

Rozwiązanie kinematyki odwrotnej względem układu współrzędnych związanego z robotem jest następujące:

$$\omega_{lv} = \frac{v}{r_w} - \frac{l_1 \omega}{2r_w}$$
$$\omega_{rv} = \frac{v}{r_w} + \frac{l_1 \omega}{2r_w}$$



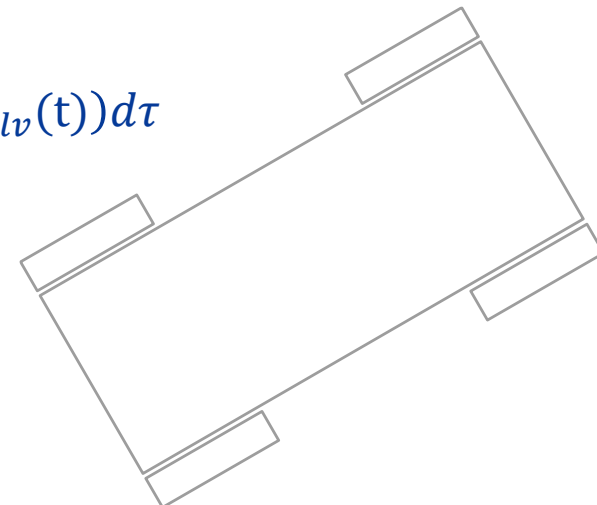
Model kinematyczny robota cztero kołowego o niezależnych napędach

Rozwiązanie odometrii jest następujące:

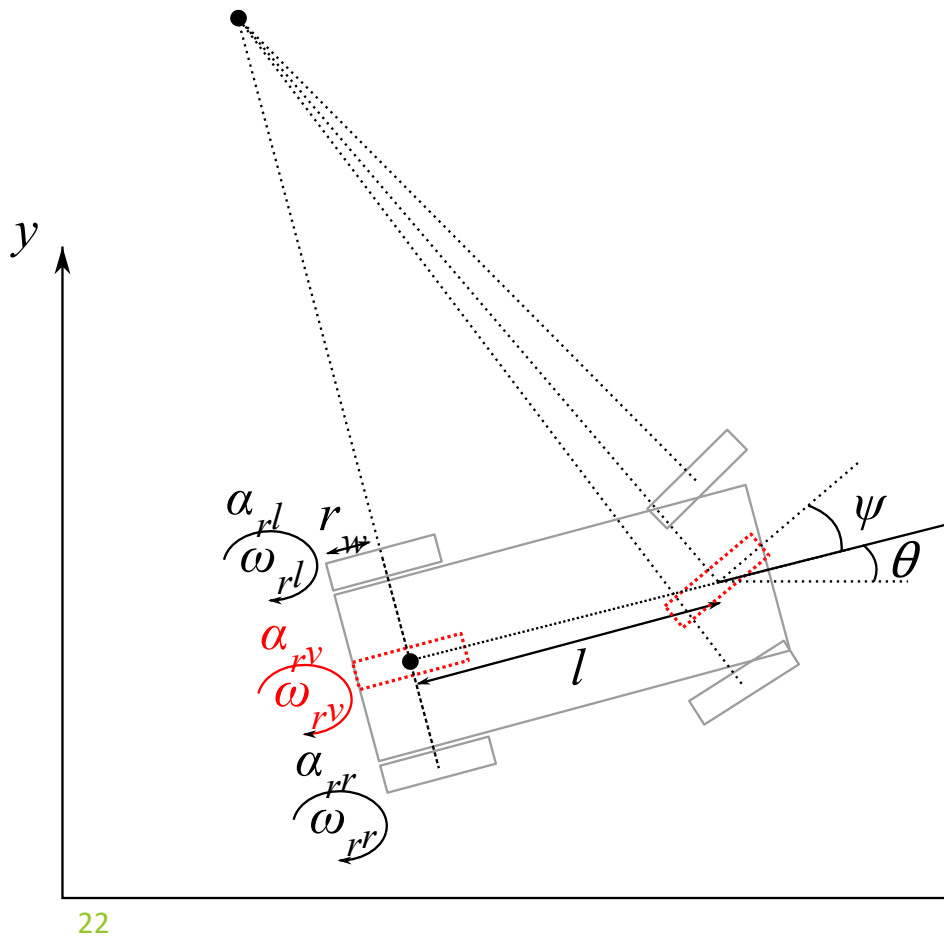
$$x_r(t) = x_r(t - \Delta t) + \cos(\theta(t)) \frac{r_w}{2} \int_{t-\Delta t}^t (\omega_{rv}(t) + \omega_{lv}(t)) d\tau$$

$$y_r(t) = y_r(t - \Delta t) + \sin(\theta(t)) \frac{r_w}{2} \int_{t-\Delta t}^t (\omega_{rv}(t) + \omega_{lv}(t)) d\tau$$

$$\theta(t) = \theta(t - \Delta t) + \frac{r_w}{l_1} \int_{t-\Delta t}^t (\omega_{rv}(t) - \omega_{lv}(t)) d\tau$$



Model kinematyczny robota cztero kołowego z więzami nieholonomicznymi (ang. *car-like*)



- W robocie występują dwa napędy: napęd kół tylnych oraz skręt kół przednich.
- Tworzymy wirtualne koła będące pośrodku kół fizycznych tylnych oraz przednich.
- Prędkości i pozycje kół wirtualnych wynoszą odpowiednio:

$$\omega_{rv} = \frac{\omega_{rr} + \omega_{rl}}{2}$$

$$\alpha_{rv} = \frac{\alpha_{rr} + \alpha_{rl}}{2}$$

$$\psi = \frac{\psi_{fr} + \psi_{fl}}{2}$$

- Sygnałami sterującymi jest prędkość tylnego koła wirtualnego (ω_{rv}) oraz pozycja kątowa układu sterowniczego (ϕ)



Model kinematyczny robota czterokołowego z więzami nieholonomicznymi (ang. *car-like*)

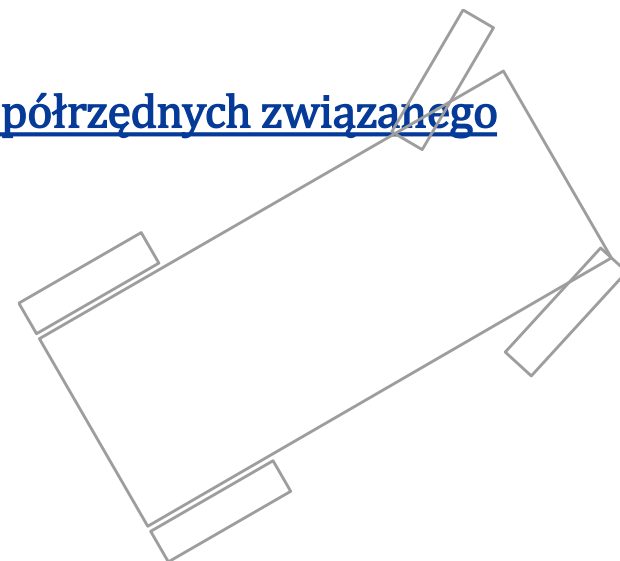
Dzięki wprowadzeniu wirtualnych kół otrzymujemy stosunkowo prosty problem. Koła tylne powodują ruch wzdłuż aktualnej orientacji robota, natomiast skręt kół przednich powoduje zmianę orientacji robota.

Rozwiązanie kinematyki prostej względem układu współrzędnych związanego z robotem jest następujące:

$$v = r_w \cdot \omega_{rv}$$
$$\dot{\theta} = \frac{\operatorname{tg} \psi}{l} \cdot r_w \cdot \omega_{rv}$$

Rozwiązanie kinematyki odwrotnej względem układu współrzędnych związanego z robotem jest następujące:

$$\omega_{rv} = \frac{v}{r_w}$$
$$\phi = \operatorname{arctg} \left(\frac{l \dot{\theta}}{v} \right)$$



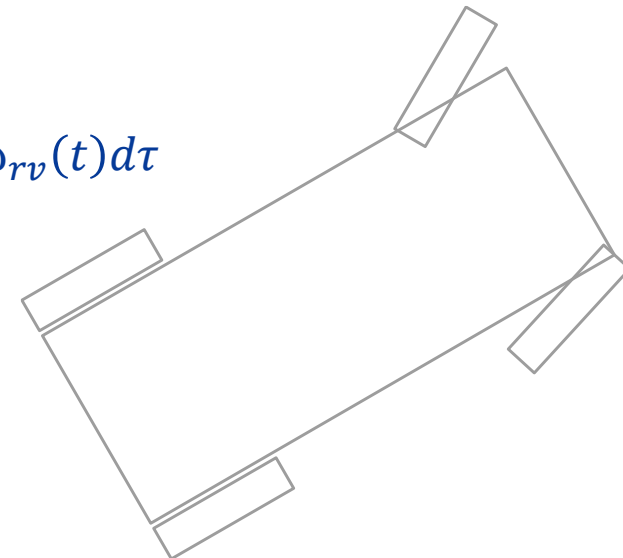
Model kinematyczny robota cztero kołowego z więzami nieholonomicznymi (ang. *car-like*)

Rozwiązanie odometrii jest następujące:

$$x_r(t) = x_r(t - \Delta t) + \cos(\theta(t)) r_w \int_{t-\Delta t}^t \omega_{rv}(t) d\tau$$

$$y_r(t) = y_r(t - \Delta t) + \sin(\theta(t)) r_w \int_{t-\Delta t}^t \omega_{rv}(t) d\tau$$

$$\theta(t) = \theta(t - \Delta t) + \operatorname{tg}(\psi(t)) \frac{r_w}{l} \int_{t-\Delta t}^t \omega_{rv}(t) d\tau$$



Model kinematyczny robota czteroślowego z więzami nieholonomicznymi (ang. *car-like*)

Sekwencja danych
wejściowych do kinematyki
odwrotnej:

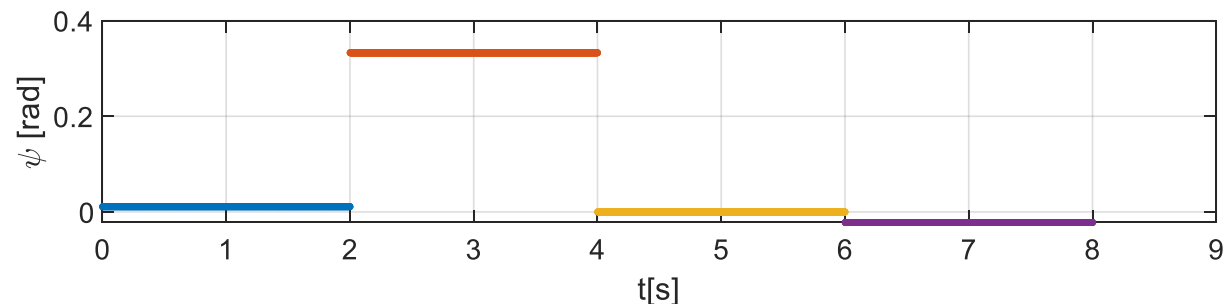
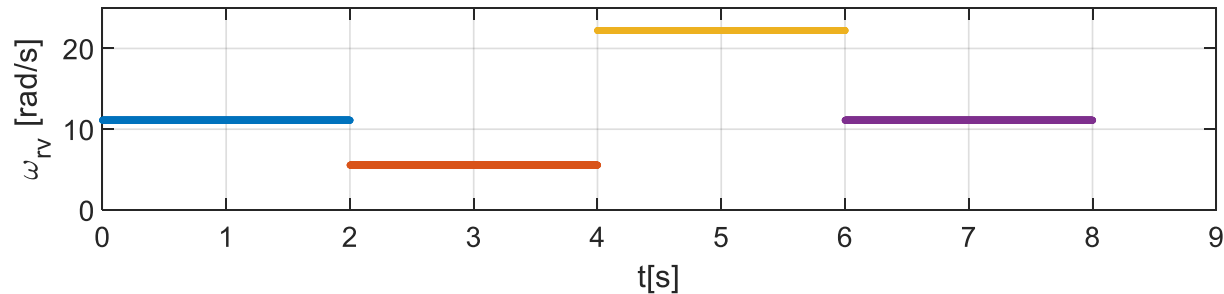
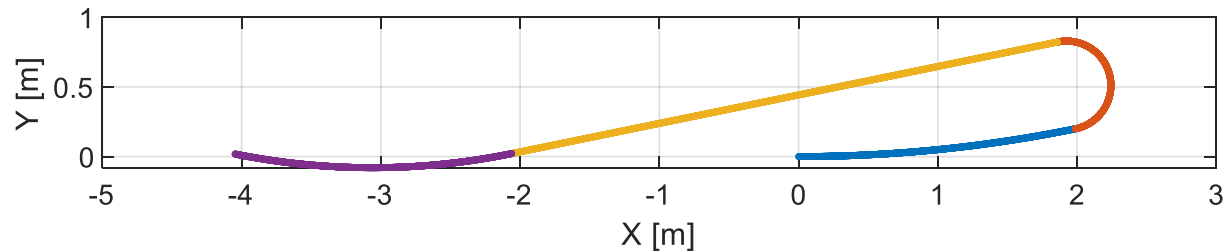
$$v = [1, 0.5, 2, 1]; \text{ m/s}$$

$$\dot{\theta} = [0.1, \pi/2, 0, -0.2]; \text{ rad/s}$$

Wyniki kinematyki odwrotnej:

$$\omega_{rv} = [11. (1), 5. (5), \\ 22. (2), 11. (1)] \text{ rad/s}$$
$$\psi = [0.011, 0.33, \\ 0, -0.022] \text{ rad}$$

Wyniki kinematyki odwrotnej i
odometrii na wykresie.



Model kinematyczny robota trzykołowego z kołami szwedzkimi

OMNI WHEEL



MECANUM WHEEL



OMNI WHEEL



**OMNI
WHEEL**



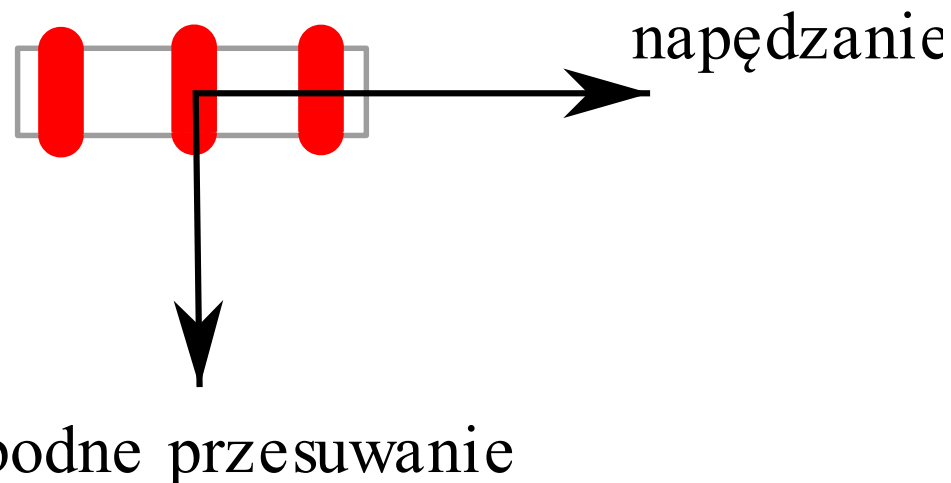
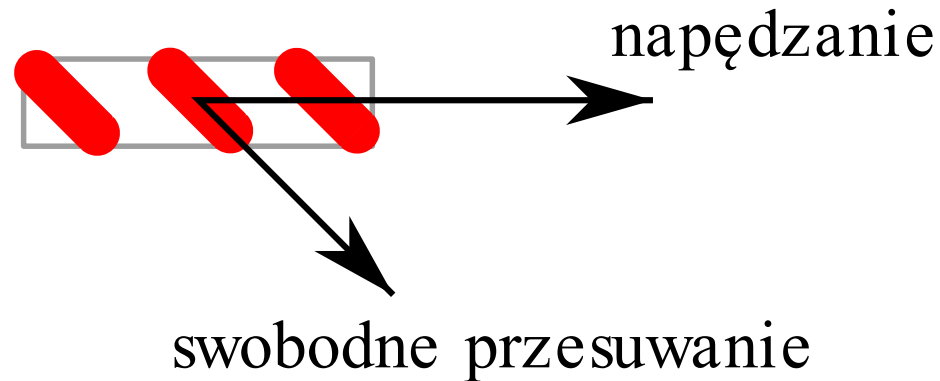
**MECANUM
WHEEL**



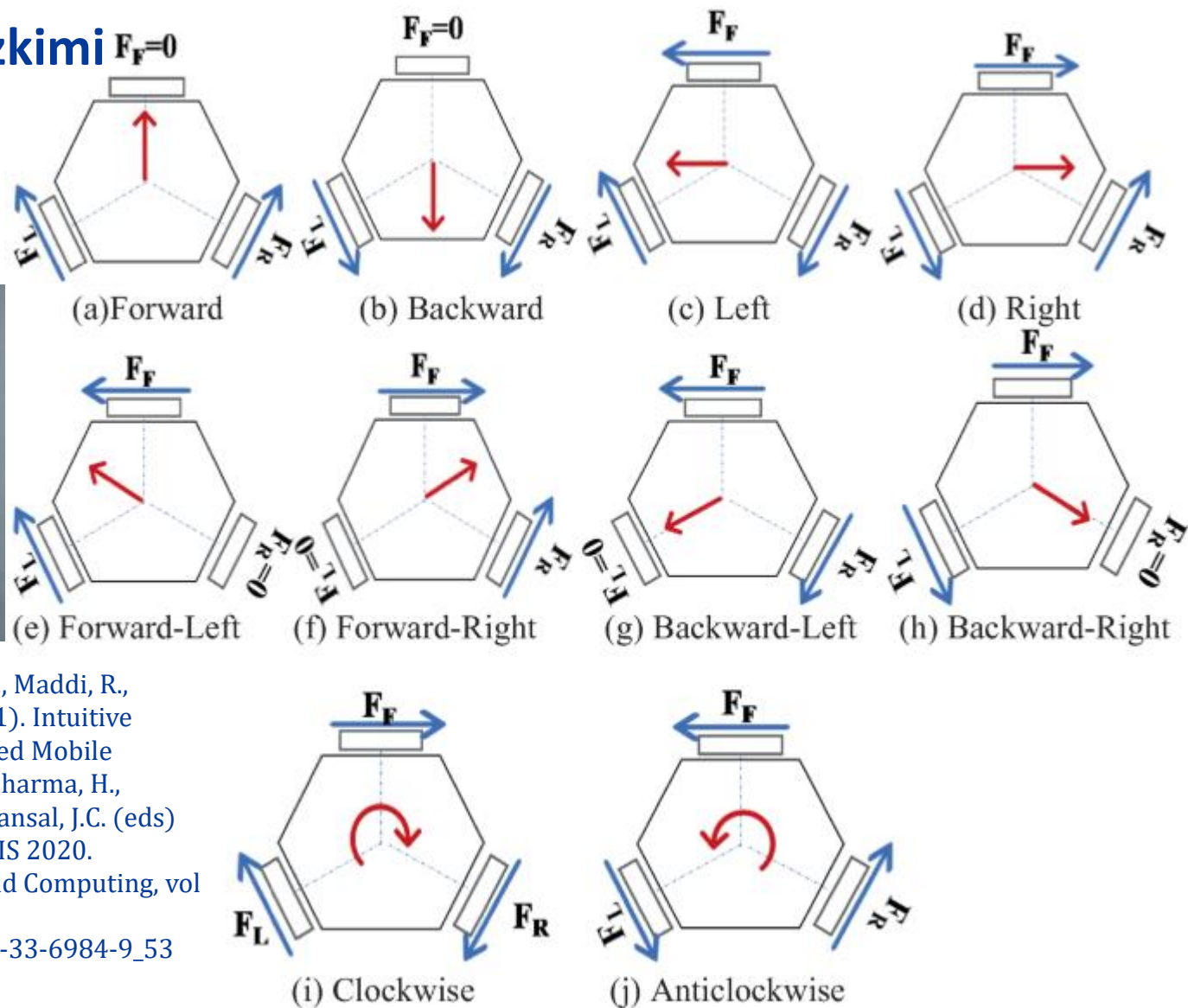
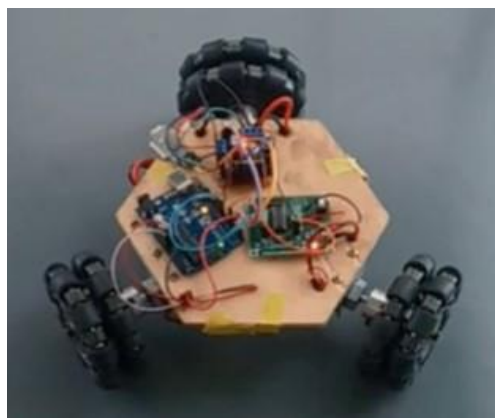
MECANUM WHEEL



Model kinematyczny robota trzykołowego z kołami szwedzkimi

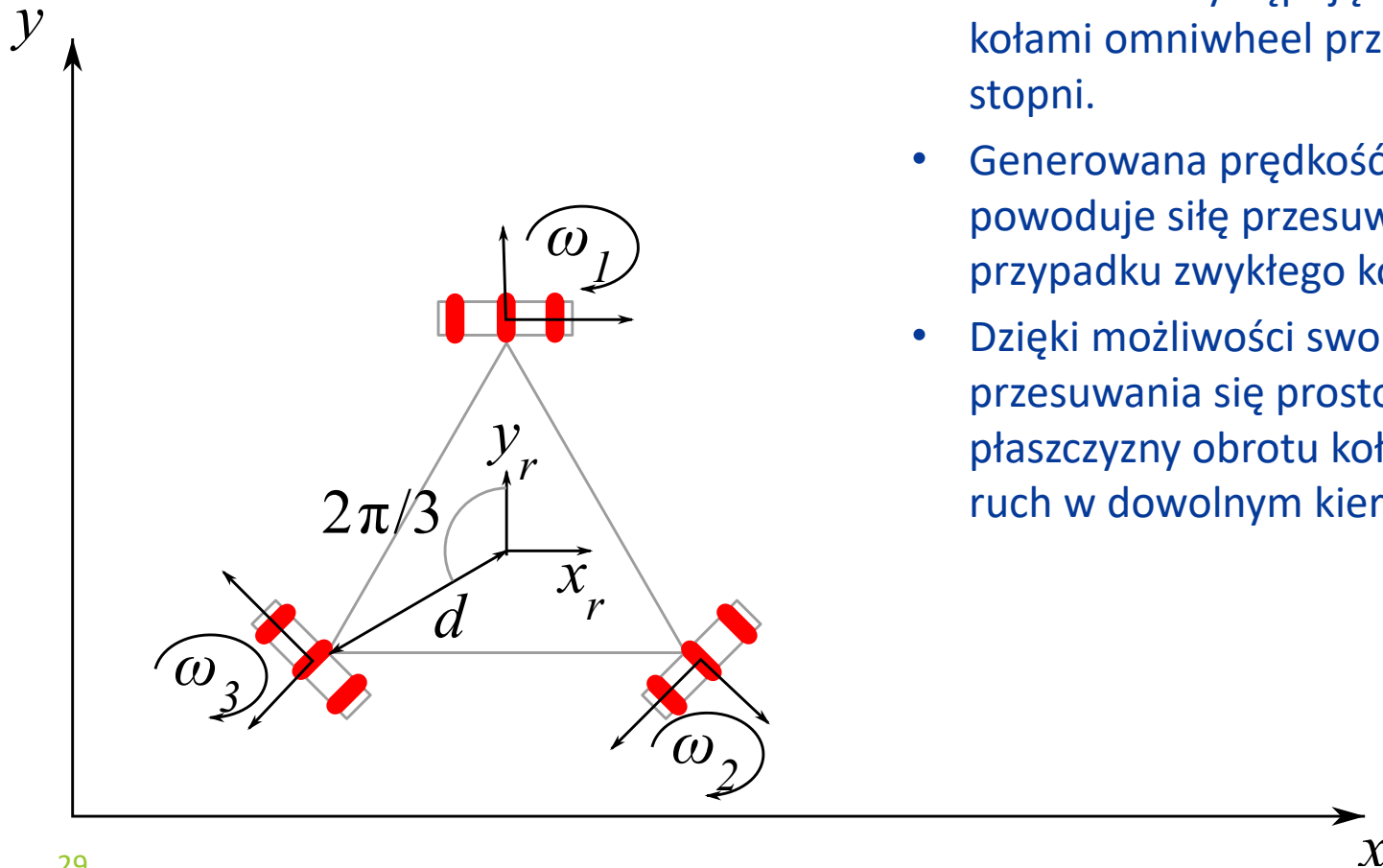


Model kinematyczny robota trzykołowego z kołami szwedzkimi



Źródło: Pasupuleti, D., Dannana, D., Maddi, R., Manne, U., Chittawadigi, R.G. (2021). Intuitive Control of Three Omni-Wheel-Based Mobile Platforms Using Leap Motion. In: Sharma, H., Saraswat, M., Yadav, A., Kim, J.H., Bansal, J.C. (eds) Congress on Intelligent Systems. CIS 2020. Advances in Intelligent Systems and Computing, vol 1335. Springer, Singapore.
https://doi.org/10.1007/978-981-33-6984-9_53

Model kinematyczny robota trzykołowego z kołami szwedzkimi



- W robocie występują trzy napędy z kołami omniwheel przesunięte o 120 stopni.
- Generowana prędkość kąтова koła powoduje siłę przesuwu jak w przypadku zwykłego koła.
- Dzięki możliwości swobodnemu przesuwania się prostopadle do płaszczyzny obrotu koła, możliwy jest ruch w dowolnym kierunku robota.

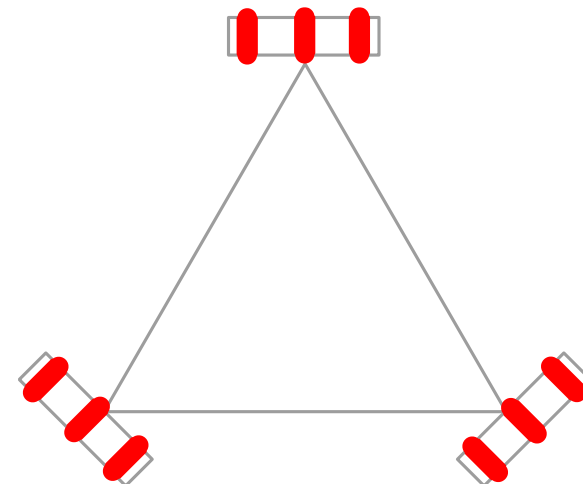
Model kinematyczny robota trzykołowego z kołami szwedzkimi

Rozwiązanie kinematyki prostej względem układu współrzędnych związanego z robotem jest następujące:

$$\begin{aligned}\omega &= \frac{r_w}{3d} (-\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \\ v_x &= \frac{r_w}{3} (2\omega_1 - \omega_2 - \omega_3) \\ v_y &= \frac{r_w}{2\sin(\pi/3)} (-\omega_2 + \omega_3)\end{aligned}$$

Rozwiązanie kinematyki odwrotnej względem układu współrzędnych związanego z robotem jest następujące:

$$\begin{aligned}\omega_1 &= -\frac{d}{r_w} \omega + \frac{v_x}{r_w} \\ \omega_2 &= -\frac{d}{r_w} \omega - \frac{v_x}{2r_w} - \frac{\sin(\pi/3)v_y}{r_w} \\ \omega_3 &= -\frac{d}{r_w} \omega - \frac{v_x}{2r_w} + \frac{\sin(\pi/3)v_y}{r_w}\end{aligned}$$



Model kinematyczny robota trzykołowego z kołami szwedzkimi

Rozwiązanie odometrii jest następujące:

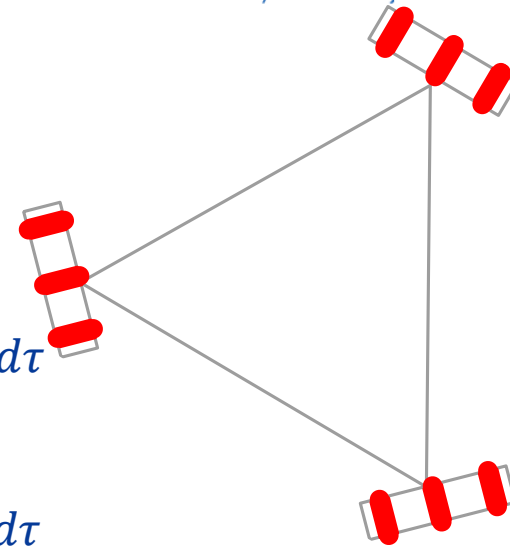
$$\Delta x_{omni} = \frac{r_w}{3} \int_{t-\Delta t}^t (2\omega_1(t) - \omega_2(t) - \omega_3(t)) d\tau$$

$$\Delta y_{omni} = \frac{r_w}{2\sin(\pi/3)} \int_{t-\Delta t}^t (-\omega_2(t) + \omega_3(t)) d\tau$$

$$x_r(t) = x_r(t - \Delta t) + \cos(\theta(t)) * \Delta x_{omni} - \sin(\theta(t)) * \Delta y_{omni}$$

$$y_r(t) = y_r(t - \Delta t) + \sin(\theta(t)) * \Delta x_{omni} + \cos(\theta(t)) * \Delta y_{omni}$$

$$\theta(t) = \theta(t - \Delta t) + \frac{r_w}{3d} \int_{t-\Delta t}^t (-\omega_1(t) - \omega_2(t) - \omega_3(t)) d\tau$$



Model kinematyczny robota trzykołowego z kołami szwedzkimi

Sekwencja danych wejściowych
do kinematyki odwrotnej:

$v_x = [1, 0.5, 0, 1]; \text{ m/s}$

$v_y = [0, 0, 0.5, 0]; \text{ m/s}$

$\dot{\theta} = [0.1, \pi/2, 0, -0.2]; \text{ rad/s}$

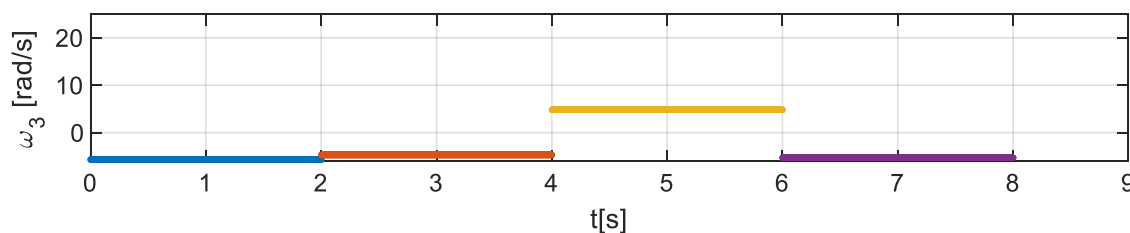
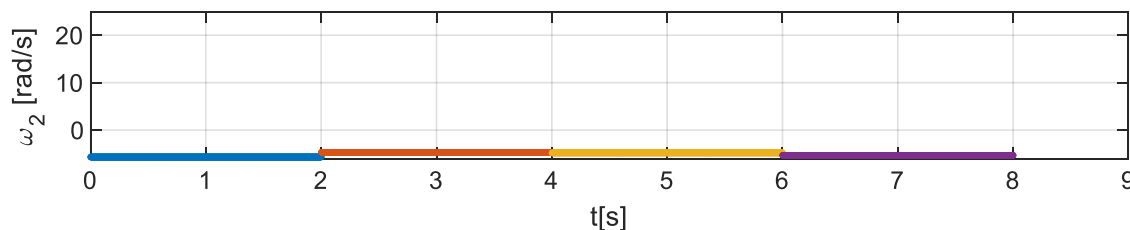
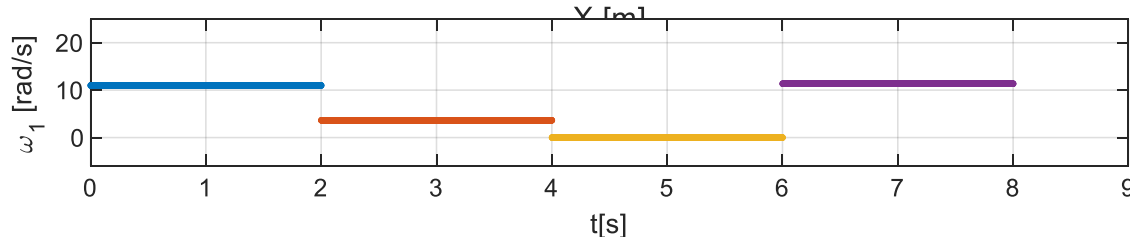
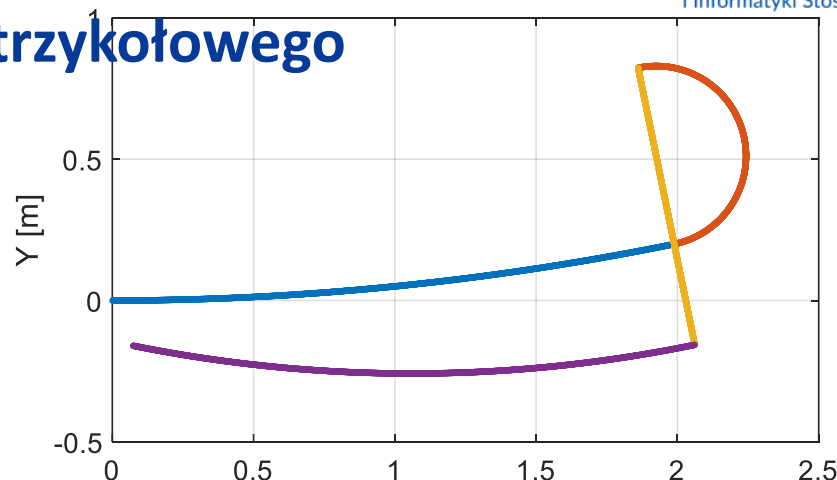
Wyniki kinematyki odwrotnej:

$\omega_1 = [11, 3.6, 0, 11.4] \text{ rad/s}$

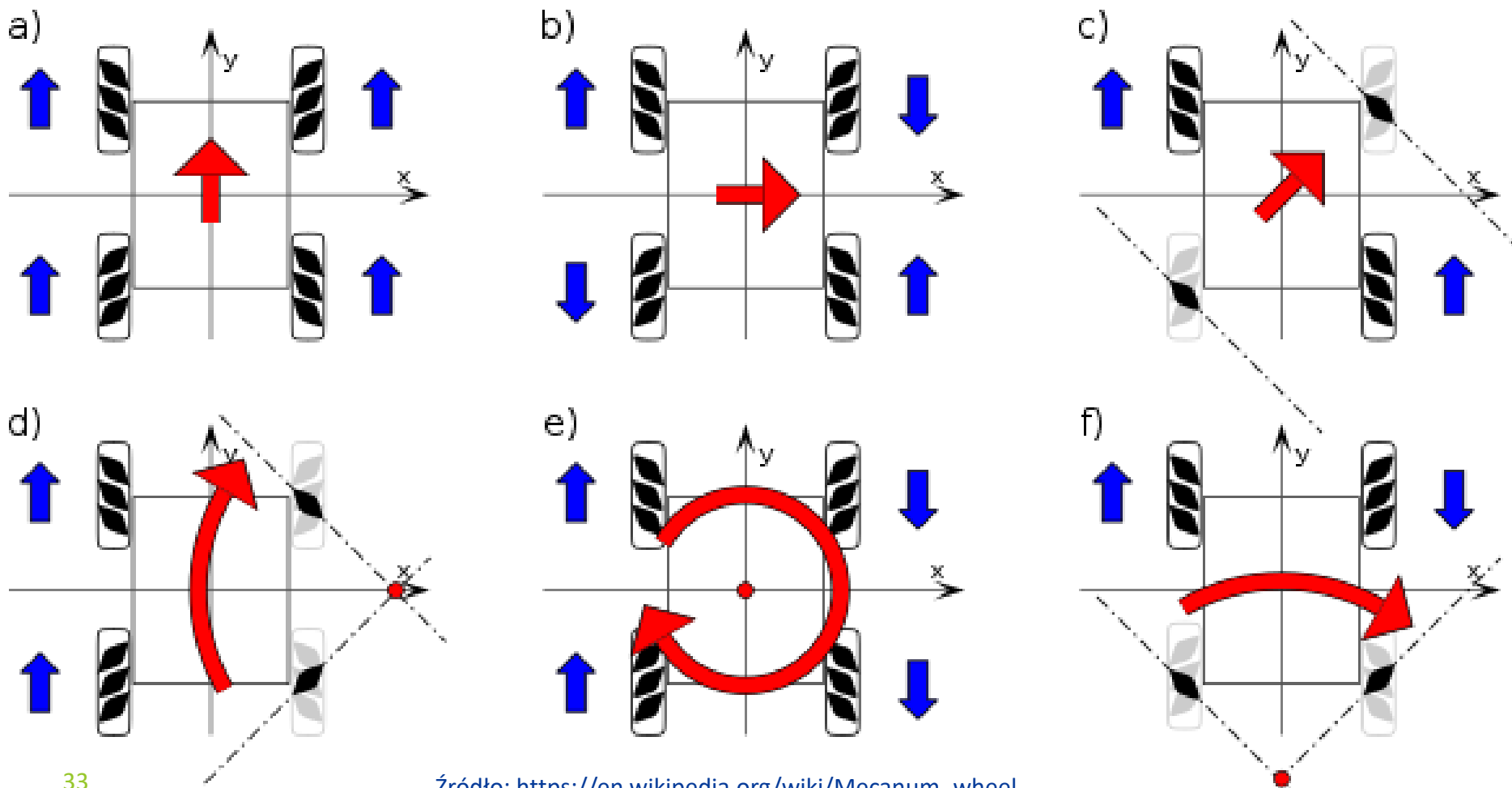
$\omega_2 = [-5.7, -4.7, -4.8, -5.3] \text{ rad/s}$

$\omega_3 = [-5.7, -4.7, 4.8, -5.3] \text{ rad/s}$

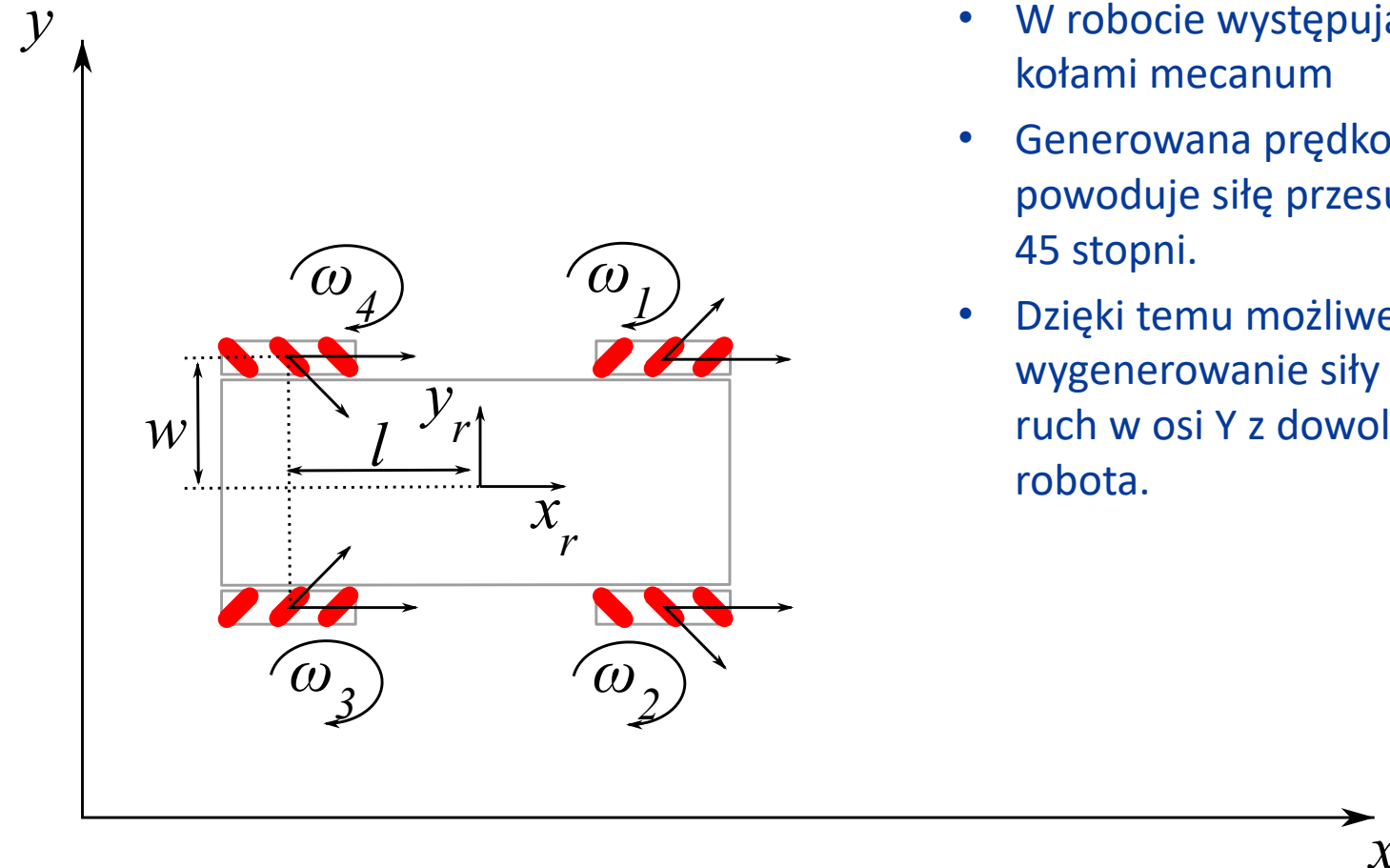
Wyniki kinematyki odwrotnej i
odometrii na wykresie.



Model kinematyczny robota czterokołowego z kołami szwedzkimi



Model kinematyczny robota czterokołowego z kołami szwedzkimi



- W robocie występują cztery napędy z kołami mecanum
- Generowana prędkość kątowna koła powoduje siłę przesuwu pod kątem 45 stopni.
- Dzięki temu możliwe jest wygenerowanie siły powodującej ruch w osi Y z dowolną orientacją robota.

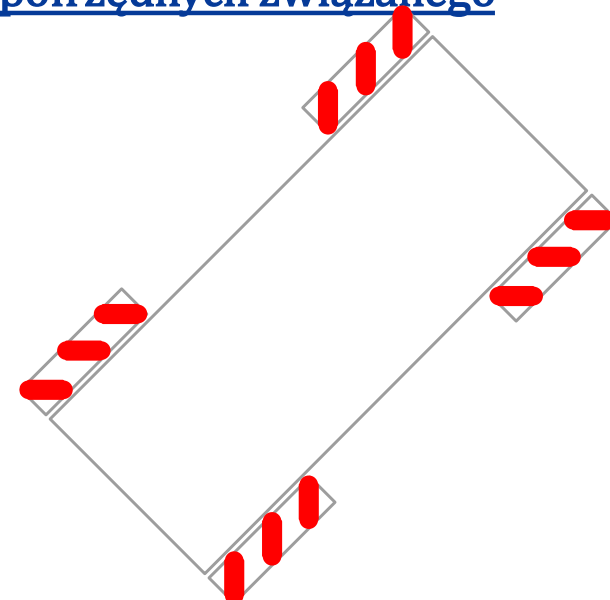
Model kinematyczny robota cztero kołowego z kołami szwedzkimi

Rozwiązanie kinematyki prostej względem układu współrzędnych związanego z robotem jest następujące:

$$\omega = \frac{r_w}{4(l+w)} (-\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 - \omega_4)$$
$$v_{x\ omni} = \frac{r_w}{4} (\omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4)$$
$$v_{y\ omni} = \frac{r_w}{4} (-\omega_1 + \omega_2 - \omega_3 + \omega_4)$$

Rozwiązanie kinematyki odwrotnej względem układu współrzędnych związanego z robotem jest następujące:

$$\omega_1 = \frac{-l-w}{r_w} \omega + \frac{v_x}{r_w} - \frac{v_y}{r_w}$$
$$\omega_2 = \frac{l+w}{r_w} \omega + \frac{v_x}{r_w} + \frac{v_y}{r_w}$$
$$\omega_3 = \frac{l+w}{r_w} \omega + \frac{v_x}{r_w} - \frac{v_y}{r_w}$$
$$\omega_4 = \frac{-l-w}{r_w} \omega + \frac{v_x}{r_w} + \frac{v_y}{r_w}$$



Model kinematyczny robota cztero kołowego z kołami szwedzkimi

Rozwiązanie odometrii jest następujące:

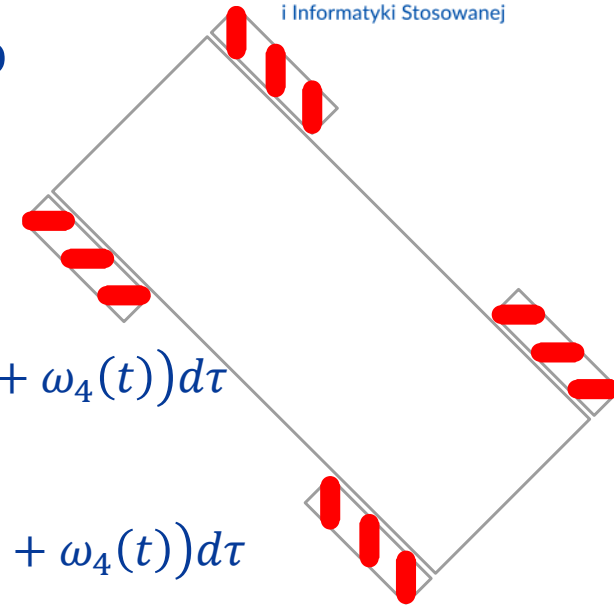
$$\Delta x_{omni} = \frac{r_w}{4} \int_{t-\Delta t}^t (\omega_1(t) + \omega_2(t) + \omega_3(t) + \omega_4(t)) d\tau$$

$$\Delta y_{omni} = \frac{r_w}{4} \int_{t-\Delta t}^t (-\omega_1(t) + \omega_2(t) - \omega_3(t) + \omega_4(t)) d\tau$$

$$x_r(t) = x_r(t - \Delta t) + \cos(\theta(t)) * \Delta x_{omni} - \sin(\theta(t)) * \Delta y_{omni}$$

$$y_r(t) = y_r(t - \Delta t) + \sin(\theta(t)) * \Delta x_{omni} + \cos(\theta(t)) * \Delta y_{omni}$$

$$\theta(t) = \theta(t - \Delta t) + \frac{r_w}{4(l + w)} \int_{t-\Delta t}^t (-\omega_1(t) + \omega_2(t) + \omega_3(t) - \omega_4(t)) d\tau$$



Model kinematyczny robota czterokołowego z kołami szwedzkimi

Sekwencja danych wejściowych
do kinematyki odwrotnej:

$v_x = [1, 0.5, 0, 1]; \text{ m/s}$

$v_y = [0, 0, 0.5, 0]; \text{ m/s}$

$\dot{\theta} = [0.1, \pi/2, 0, -0.2]; \text{ rad/s}$

Wyniki kinematyki odwrotnej:

$\omega_1 = [10.9, 1.7, -5.5, 11.6] \text{ rad/s}$

$\omega_2 = [11.3, 9.4, 5.5, 10.6] \text{ rad/s}$

$\omega_3 = [11.3, 9.4, -5.5, 10.6] \text{ rad/s}$

$\omega_4 = [10.9, 1.7, 5.5, 11.6] \text{ rad/s}$

Wyniki kinematyki odwrotnej i
odometrii na wykresie.

