



UNIWERSYTET
MIKOŁAJA KOPERNIKA
W TORUNIU

Wydział Fizyki, Astronomii
i Informatyki Stosowanej

Podstawy Automatyki

Sterowanie cyfrowe

dr inż. Rafał Szczepański

www.umk.pl/~szczepi

szczepi@umk.pl

23.01.2025



Plan prezentacji

Wprowadzenie

Podstawy teoretyczne

Dyskretyzacja



Sterowanie cyfrowe

Wprowadzenie

- Występują w nich sygnały w postaci cyfrowej
- Dominujące obecnie
- Zaawansowana elektronika wyparła urządzenia analogowe i elektromechaniczne
- Funkcje sterownika pełni układ mikroprocesorowy
- Układ realizuje w czasie rzeczywistym algorytm sterowania
- Cyfrowe urządzenia sterujące często są łączone poprzez sieci przesyłu danych z innymi urządzeniami (sterowanie rozproszone)



Sterowanie cyfrowe

Cechy systemów sterowania cyfrowego

- Pogranicze automatyki i informatyki (przemysłowej)
- Systemy informatyczne czasu rzeczywistego
- Występują sygnały ciągłe i dyskretne – konwersja A/C i C/A, próbkowanie
- Często środowiska rozproszone, wielowarstwowe, hierarchiczne
- Różne rozwiązania techniczne:
 - układy elektroniczne
 - mikroprocesory, sterowniki programowalne
 - procesory sygnałowe
 - komputery typu PC



Sterowanie cyfrowe

Czas rzeczywisty

- Zastosowane rozwiązanie techniczne musi gwarantować, że system sterowania będzie nadążał za zmianami zachodzącymi w procesie
- Sygnały nie mogą być pominięte (zintegrowane) z powodu zbyt wolnego działania sterownika
- Wymagana szybkość działania układu zależy od szybkości procesu
- Na szczęście algorytmy sterowania nie są zwykle kosztowne obliczeniowo



Sterowanie cyfrowe

Systemy rozproszone

- Współczesne systemy sterowania tworzą struktury hierarchiczne
- Poszczególne jednostki sterujące/nadzorujące są połączone poprzez komputerowe sieci przemysłowe
- Dzięki temu uzyskujemy:
 - koordynację działań
 - możliwości kontroli działania poszczególnych urządzeń
 - możliwości zbierania informacji
 - możliwości raportowania
 - itp.
- Dzięki zastosowaniu sieci sterownik może być oddalony od procesu i układów pomiarowych



Sterowanie cyfrowe

Zalety systemów cyfrowych

- Elastyczność – algorytmy działania są kodowane programowo, a nie sprzętowo. Łatwo możemy zmienić algorytm sterowania ładując nowy program. Uniwersalne interfejsy z innymi urządzeniami. Łatwość rozbudowy itp.
- Dokładność – cyfrowe przesyłanie sygnałów nie wprowadza szumów, podobnie cyfrowe urządzenia pomiarowe, możliwe przesyłanie sygnałów na większe odległości
- Koszt- coraz niższy (układy mikroprocesorowe jest coraz wydajniejsze



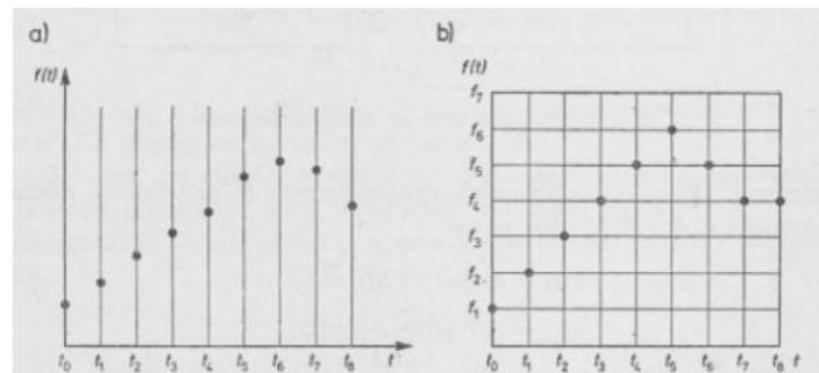
Układ dyskretny

Podstawowe pojęcia

- Układ nazywamy dyskretnym jeżeli przestrzeń czasu jest dyskretna
- Oznacza to, że składowe wektorów stanu, wymuszeń i odpowiedzi są funkcjami dyskretnymi
- Kwantowanie czasu i/lub wartości elementów wektorów stanu, wymuszenia i odpowiedzi

$$t = kT_s \quad k = 0, 1, 2, 3 \dots$$

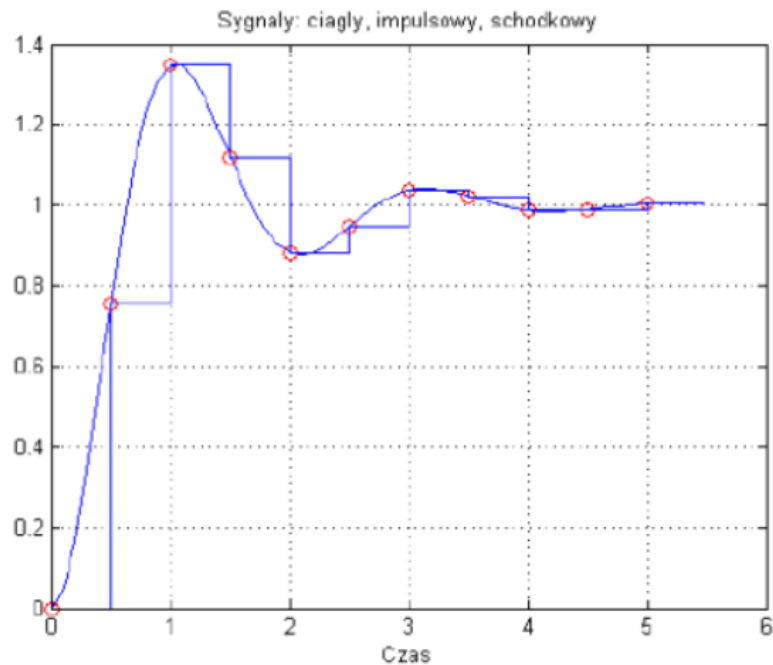
- Układy dyskretnie -> równanie różnicowe



Układ dyskretny

Sygnały

- Ciągły, impulsowy, schodkowy...





Układ dyskretny

Przekształcenie Z

- Wykorzystywane zamiast przekształcenia Laplace'a w analizie układów dyskretnych

$$\mathbf{Z}[f(k)] = F(z) = \sum_0^{\infty} f(k)z^{-k}$$

- $f(k) \rightarrow F(z)$, gdzie z jest zmienną zespoloną
- Operator z^{-1} odpowiada opóźnieniu o jedną próbkę czasu



Układ dyskretny

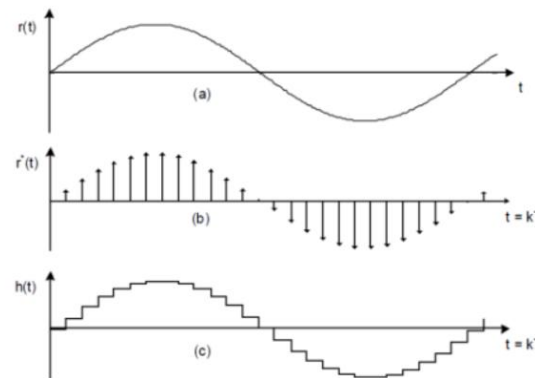
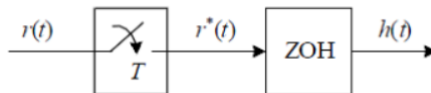
z czy z^{-1} ?

- Operator „wyprzedzenia” i „opóźnienia”
- Układy ciągłe – różniczkowanie – s
- Układy dyskretny
 - $f(k+1) = zf(k)$ - wyprzedzenie niemożliwe do realizacji (w chwili kT_s nie wiemy jaki będzie sygnał w chwili czasu $(k+1)T_s$)
 - ale zapisują to samo równanie „przesunięte” o jedną próbkę czasu wstecz otrzymujemy:
 $f(k-1) = z^{-1}f(k)$ – i to równanie jest realizowane fizycznie, bo mówi o poprzednich próbkach

Układ dyskretny

Ekstrapolator zerowego rzędu

- Ekstapolator odpowiada za wartość amplitudy sygnału pomiędzy chwilami próbkowania – konwersja C/A
- Ekstrapolator zerowego rzędu podtrzymuje wartość sygnału





Układ dyskretny

Model zmiennych stanu

- **Równaniem stanu modelu układu dyskretnego** opartego na zmiennych stanu nazywamy następujące **równanie różnicowe**:

$$x(k+1) = Ax(k) + Bu(k)$$

- **Równaniem wyjścia modelu układu dyskretnego** opartego na zmiennych stanu nazywamy następujące **równanie algebraiczne**:

$$y(k) = Cx(k) + Du(k)$$



Układ dyskretny

Transmitancja

- **Transmitancją dyskretną** nazywamy skutek transformaty Z odpowiedzi układu do transformaty Z wymuszenia przy zerowych warunkach początkowych

$$T(z) = \frac{Y(z)}{U(z)} = \frac{L(z)}{M(z)}$$

- Licznik i mianownik są wielomianami zmiennej z

$$L(z) = \sum_{i=0}^m b_i z^i \quad M(z) = \sum_{i=0}^n a_i z^i$$

- Pierwiastki licznika – zera
- Pierwiastki mianownika - bieguny

Układ dyskretny

Stabilność

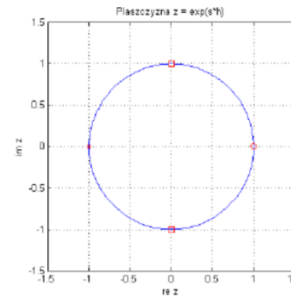
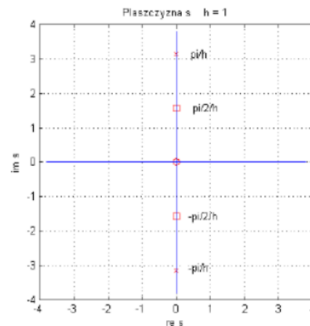
- Badanie stabilności sprowadza się do badania pierwiastków ($z_1, z_2, \dots, z_r$) równania charakterystycznego

$$M(z) = a_n z^n + \dots + a_1 z^1 + a_0 = 0$$

- Aby układ był stabilny asymptotycznie moduły wszystkich pierwiastków powinny być mniejsze od 1

$$|z_i| < 1 \quad i = 1, 2, \dots, r$$

- Tj. powinny znajdować się **wewnątrz okręgu jednostkowego na płaszczyźnie zmiennej zespolonej z**



$$z = e^{s h} \quad \text{odwzorowanie}$$



Układ dyskretny

Dyskretyzacja

Wyznaczanie transmitancji dyskretnego regulatora na podstawie transmitancji ciągłego może zostać wykonane poprzez podstawienie w miejsce zmiennej zespolonej s jednej z następujących przybliżonych zależności:

- **Metoda prostokątów w przód**

$$\frac{1}{s} = \frac{T_s}{z - 1}$$

- **Metoda prostokątów wstecz**

$$\frac{1}{s} = \frac{zT_s}{z - 1}$$

- **Metoda trapezów**

$$\frac{1}{s} = \frac{T_s}{2} \frac{z + 1}{z - 1}$$



Układ dyskretny

Dyskretyzacja - przykład

Wykorzystując metodę prostokątów wstecz ($\frac{1}{s} = \frac{zT_s}{z-1}$) dyskretyzujemy następującą transmitancję operatorową w dziedzinie s :

$$G(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{1}{s} \quad \rightarrow \quad Y(s) = \frac{U(s)}{s} \quad \rightarrow \quad y(z) = u(z) \cdot \frac{zT_s}{z-1}$$

$$y(z) = u(z) \frac{zT_s}{z-1} \quad / (z-1)$$

$$zy(z) - y(z) = u(z)zT_s \quad / z$$

$$y(z) - z^{-1}y(z) = u(z)T_s$$

$$y(z) = z^{-1}y(z) + u(z)T_s$$

Następnie przechodzimy na równanie różnicowe ($f(k-1) = z^{-1}f(k)$):

$$y(k) = y(k-1) + u(k)T_s$$