



UNIWERSYTET
MIKOŁAJA KOPERNIKA
W TORUNIU

Wydział Fizyki, Astronomii
i Informatyki Stosowanej

Podstawy Automatyki

Układy nieliniowe – podstawowe informacje

dr inż. Rafał Szczepański

www.umk.pl/~szczepi

szczepi@umk.pl

23.01.2025



Plan prezentacji

Wprowadzenie

Linearyzacja

Stabilność układów nieliniowych



Układy nieliniowe

Wprowadzenie

- Układ nieliniowy to taki, który nie spełnia zasady superpozycji
- Jest opisany nieliniowymi równaniami algebraicznymi (zwykłymi lub cząstkowymi), różnicowymi, całkowymi itp.
- Jest znacznie trudniejszy w analizie niż układ liniowy



Układy nieliniowe

Liniowość funkcji

Funkcję $f(x)$ nazywać będziemy **funkcją liniową** wtedy i tylko wtedy gdy

$$f(au + bv) = f(au) + f(bv) \quad (\text{zasada superpozycji})$$

gdzie: a i b są wielkościami skalarnymi, u i v należą do dziedziny funkcji $f(x)$

Niech $f(x) = x$, wtedy

$$f(au + bv) = au + bv$$

$$af(u) = au$$

$$bf(v) = bv$$

oraz

$$f(au + bv) = af(u) + bf(v)$$

Niech $f(x) = x^2$, wtedy

$$f(au + bv) = (au + bv)^2 = a^2u^2 + 2abuv + b^2v^2$$

$$af(u) = au^2$$

$$bf(v) = bv^2$$

oraz

$$f(au + bv) \neq af(u) + bf(v)$$



Układy nieliniowe

Układy rzeczywiste

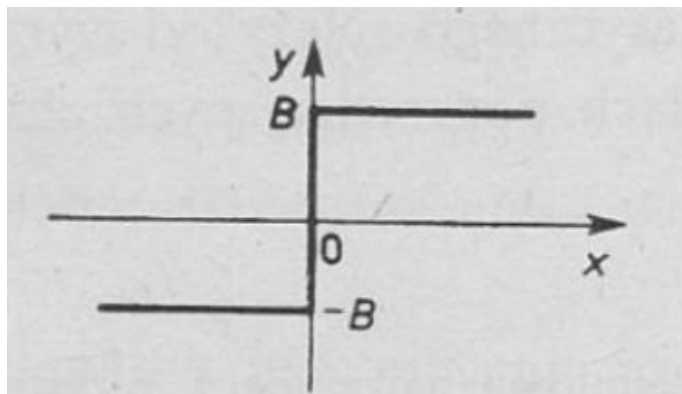
- Tak naprawdę wszystkie układy rzeczywiste są nieliniowe!
- Traktowanie niektórych z nich jako liniowe to wynik pewnej idealizacji procesów w nich zachodzących
- Taka idealizacja znacznie ułatwia analizę układów



Układy nieliniowe

Często spotykane człony nieliniowe

- Przekaznik dwupołożeniowy

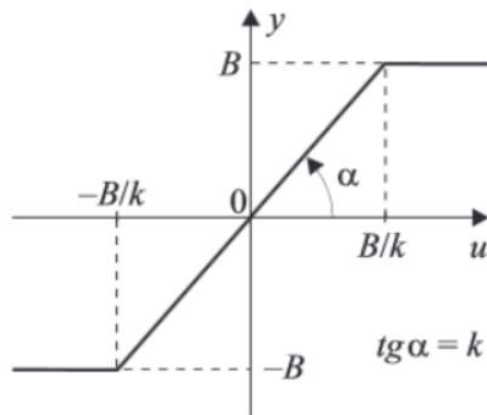




Układy nieliniowe

Często spotykane człony nieliniowe

- Nasycenie

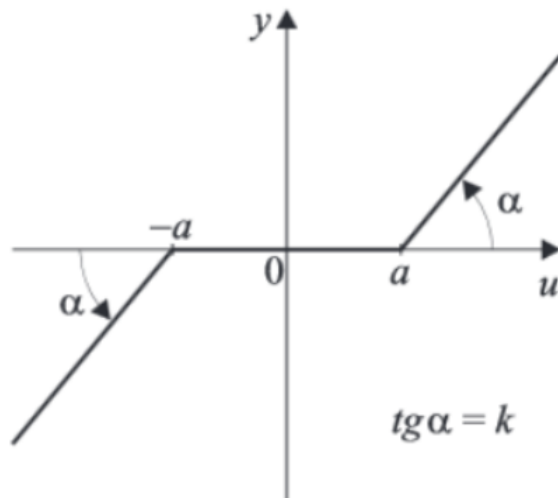




Układy nieliniowe

Często spotykane człony nieliniowe

- Strefa nieczułości

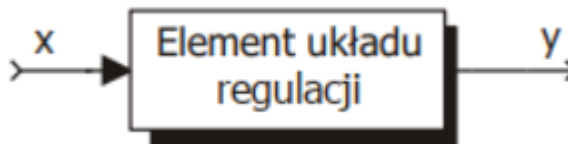




Układy nieliniowe

Linearyzacja

- Najczęściej każdy element układu regulacji automatycznej można opisać za pomocą równania (lub równań) wiążącego sygnał wejściowy z sygnałem wyjściowym tego układu



- Niestety, w ogromnej większości przypadków ta zależność jest **nieliniowa**

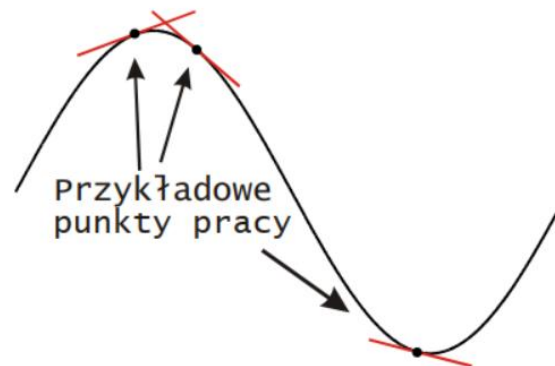


Układy nieliniowe

Linearyzacja

Linearyzacja jest procesem polegającym na znajdowaniu liniowego przybliżenia znanej zależności nieliniowej $f(x, y) = 0$ między sygnałem wejściowym x a sygnałem wyjściowym y w otoczeniu wybranego punktu pracy S

- Przybliżenie liniowe wyznacza się dla pewnego ustalonego punktu pracy S
- Przybliżenie liniowe uzyskane poprzez linearyzację ma **charakter lokalny**, tzw. Im dalej od punktu pracy S , tym przybliżenie jest mniej dokładne





Układy nieliniowe

Stabilność układów nieliniowych

- Układ nieliniowy:

$$\dot{x} = f(x)$$

- Punkt równowagi – wartość x , dla której $f(x) = 0$
- Układ nieliniowy może mieć dowolną liczbę punktów równowagi



Układy nieliniowe

Badanie stabilności układów nieliniowych

Wykorzystuje się teorię Lyapunova, a ściślej dwie metody:

- metodę **pośrednią**: polega na badaniu stabilności układu nieliniowego poprzez badanie odpowiadającego mu (aproksymowanego układu liniowego)
- metodę **bezpośrednią**: polega na uogólnieniu pojęcia energii układu mechanicznego i nie korzysta z aproksymacji układem liniowym



Układy nieliniowe

Metoda pośrednia Lyapunova

Wykorzystujemy linearyzację w punkcie równowagi $x = 0$. Jeżeli zlinearyzowany układ jest:

- **stabilny** to wtedy punkt równowagi układu nieliniowego jest **asymptotycznie stabilny lokalnie**
- **niestabilny** to punkt równowagi układu nieliniowego jest **niestabilny**
- **na granicy stabilności** to nie można nic wywnioskować z aproksymacji liniowej (punkt równowagi **może być zarówno stabilny jak i niestabilny**)