



UNIWERSYTET
MIKOŁAJA KOPERNIKA
W TORUNIU

Wydział Fizyki, Astronomii
i Informatyki Stosowanej

Podstawy Automatyki

Korekcja liniowych układów ciągłych

dr inż. Rafał Szczepański

www.umk.pl/~szczepi

szczepi@umk.pl

12.01.2025



Plan prezentacji

Istota korekcji

Regulator PID

Człony korekcyjne

Regulacja dwupołożeniowa

Regulacja od stanu



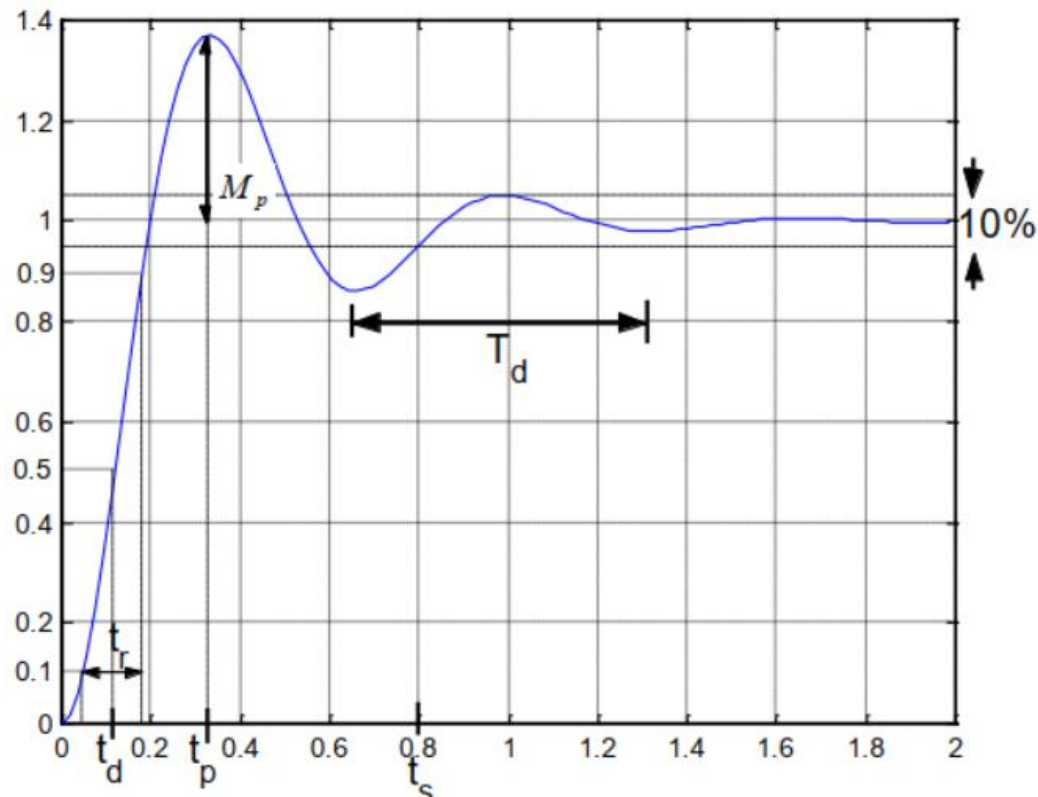
Istota korekcji

- Typowe zadanie automatyki: dany jest obiekt fizyczny – należy spowodować by zachowywał się w sposób zgodny z oczekiwaniami (założeniami)
- Bardziej precyzyjnie: dany jest obiekt o transmitancji $G(s)$, należy zaprojektować układ regulacji tak, by spełniał on wymagania dotyczące jakości regulacji
- Wymagania formułujemy odnosząc się do wybranych wskaźników czasowych lub częstotliwościowych
- Najczęściej rozwiązanie tego zadania polega na dobraniu odpowiedniego regulatora oraz na właściwym doborze jego parametrów, aby jakość regulacji była jak najwyższa
- **Korekcja** – wprowadzenie do układu nowych członów o tak dobranej strukturze i parametrach, by nowopowstały układ miał pożądane właściwości

Istota korekcji

Własność odpowiedzi skokowej

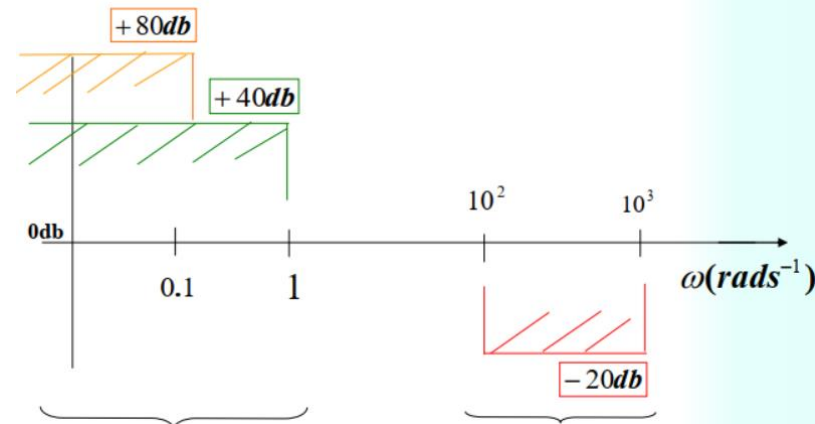
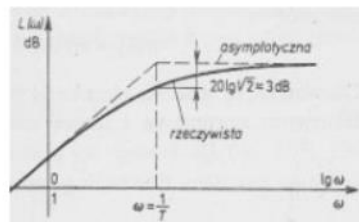
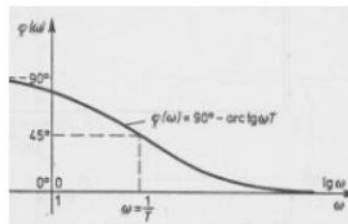
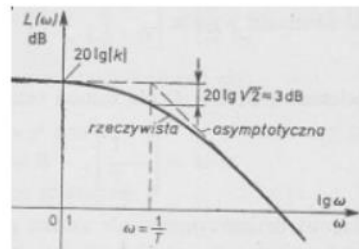
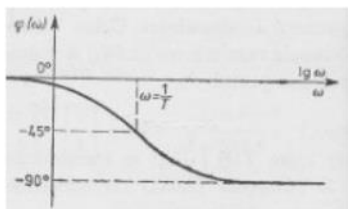
- t_p - czas piku (ang. *peak time*)
- t_r - czas narastania (ang. *rise time*)
- t_s - czas ustalania (ang. *settling time*)
- t_d - czas opóźnienia (ang. *delay time*)
- M_p - przeregulowanie (ang. *overshoot*)
- T_d - okres oscylacji tłumionych



Istota korekcji

Ograniczenia częstotliwościowe

- Ograniczenia wzmocnienia



- 5 Regulator dobierany jest w taki sposób, aby jego charakterystyka omijała obszary zabronione (wyznaczone na podstawie założeń projektowych)



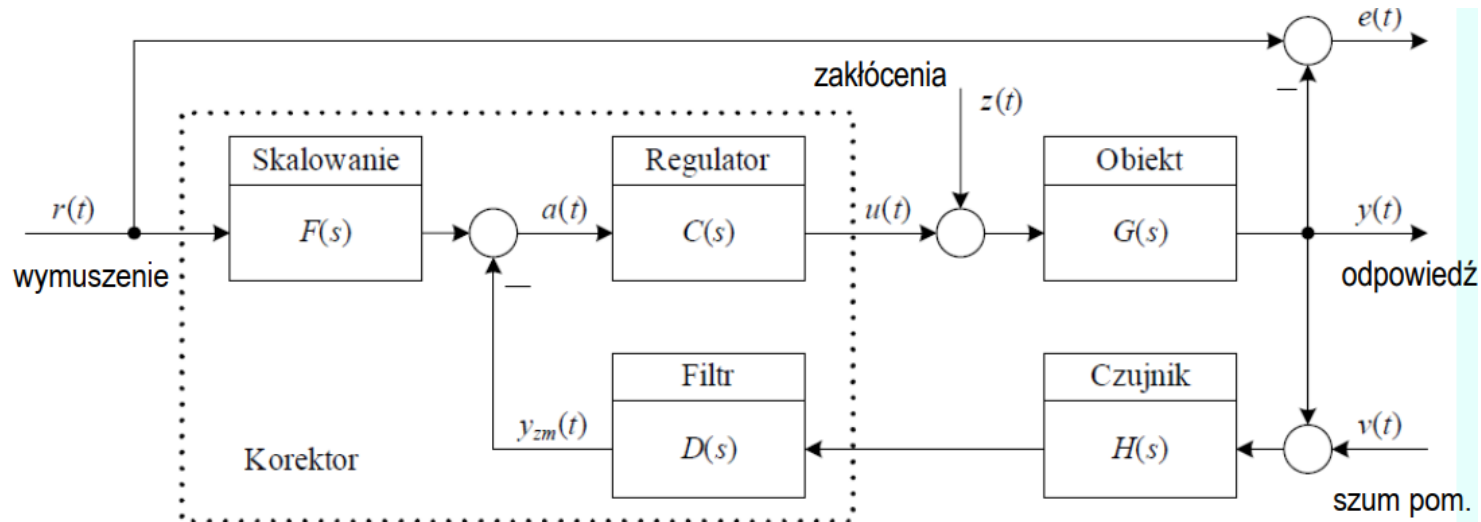
Istota korekcji

Procedura projektowania układu regulacji automatycznej

1. Analiza modelu obiektu (wraz z modelami przetworników pomiarowych i członów wykonawczych)
2. Analiza wymagań, które powinien spełniać układ regulacji
3. Wybór sposobu realizacji regulatora (analogowy, cyfrowy mieszany)
4. Decyzja o strukturze układu regulacji i postaci regulatora
5. Zastosowanie odpowiednich metod dla spełnienia celów projektowania (cele mogą być sprzeczne – konieczny kompromis)
6. Analiza otrzymanych rozwiązań (jeżeli niesatysfakcjonujące konieczny powrót do wcześniejszych punktów)

Istota korekcji

Ogólny schemat sterowania

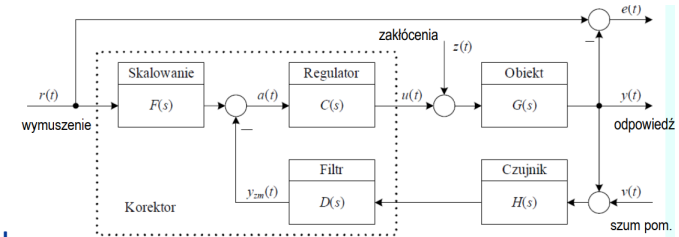




Istota korekcji

Ogólny schemat sterowania

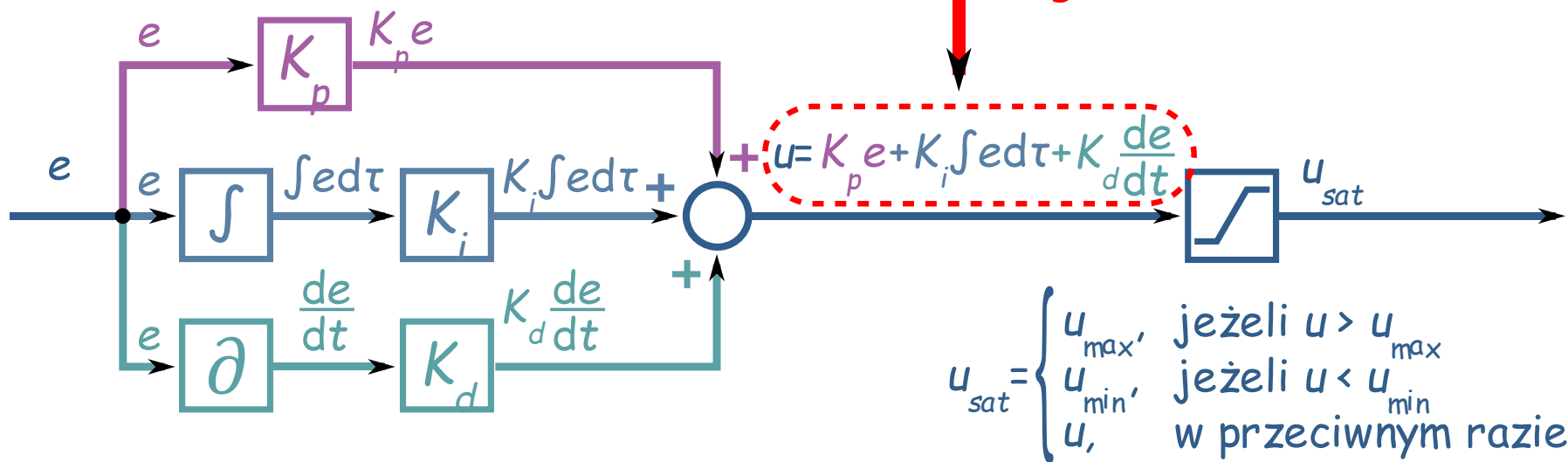
- Prefiltr formuje (łagodzi) skoki wartości zadanej
- Węzeł sumacyjny porównuje sygnały o tym samym znaczeniu
- Regulator minimalizuje uchyb
- Obiekt może być poddawany zakłóceniom zewnętrznym
- Wartość wyjściową obiektu mierzymy czujnikiem, który jest obciążony szumem pomiarowym, błędami kwantyzacji
- Zaszumione pomiary są filtrowane w celu polepszenia odpowiedzi, która jest uwzględniana w torze sprzężenia zwrotnego



Regulator PID

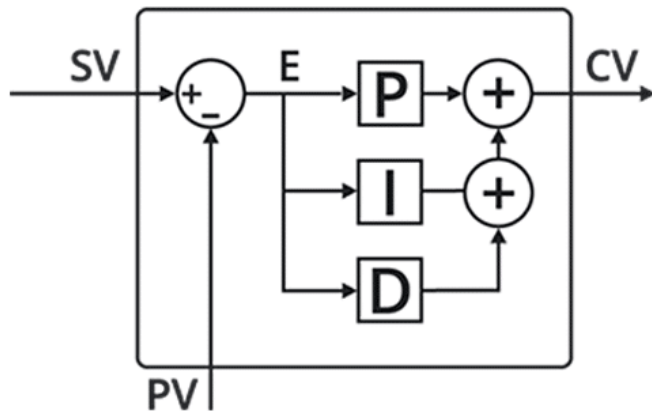
ang. *proportional-integral-derivative controller*

Prawo sterowania regulatora PID

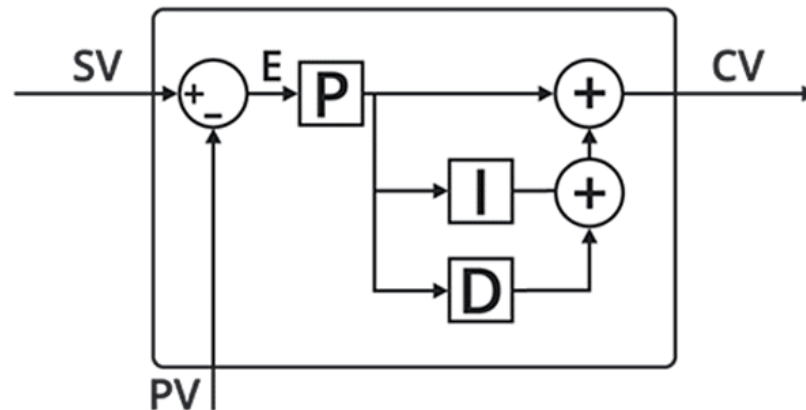


Regulator PID

Równoległy i szeregowo-równoległy (idealny) regulator PID



Parallel



Ideal



Regulator PID

Równoważność zapisów

Regulator równoległy:

$$u(t) = K_p e(t) + K_i \int e(\tau) d\tau + K_d \frac{d}{dt} e(t)$$

gdzie: K_p , K_i , K_d to wzmacnienie członu proporcjonalnego, całkującego i różniczkującego

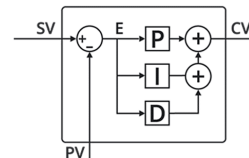
Regulator szeregowo-równoległy (idealny):

$$u(t) = k_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(\tau) d\tau + T_d \frac{d}{dt} e(t) \right]$$

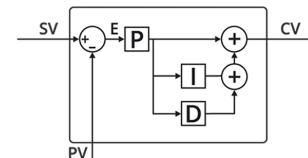
gdzie: k_p , T_i , T_d to wzmacnienie regulatora, czas zdwojenia i czas wyprzedzenia

Obie struktury są sobie równoważne:

$$K_p = k_p \quad K_i = \frac{k_p}{T_i} \quad K_d = k_p T_d$$



Parallel



Ideal

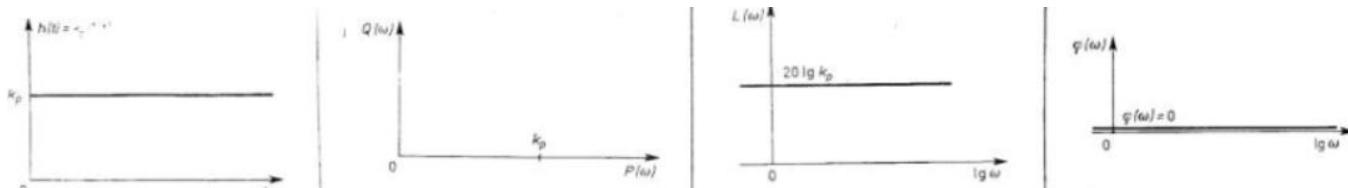


Regulator PID

Regulator typu P

- Tylko człon proporcjonalny
- Sygnał sterujący zależny liniowo od uchybu regulacji
- Szybka reakcja, niezbyt duża dokładność statyczna

$$R(s) = k_p \quad u(t) = k_p e(t)$$



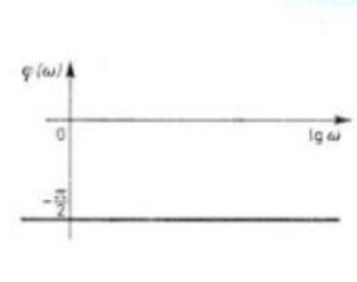
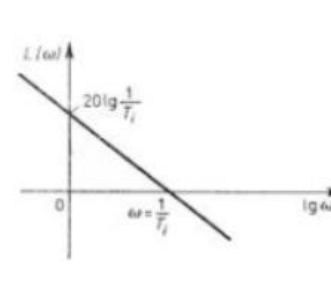
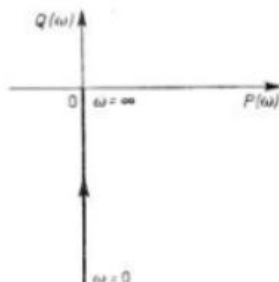
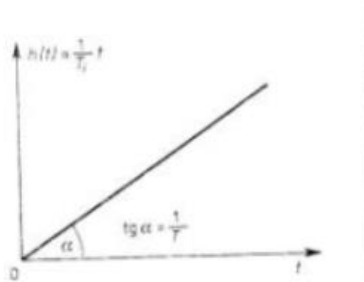


Regulator PID

Regulator typu I

- Tylko człon całkujący
- Sygnał sterujący proporcjonalny do całki uchybu regulacji
- Brak uchybu w stanie ustalonym
- Dłuższy czas regulacji

$$R(s) = \frac{1}{sT_i} \quad u(t) = \frac{1}{T_i} \int e(\tau) d\tau$$



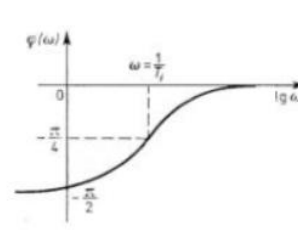
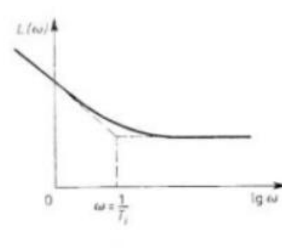
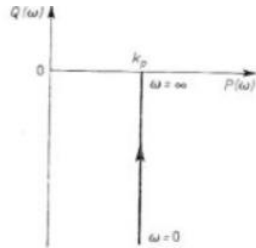
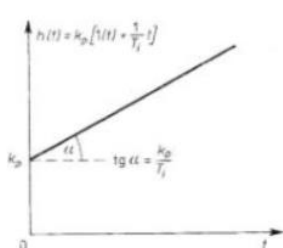


Regulator PID

Regulator typu PI

- Człon proporcjonalny i człon całkujący
- Brak uchybu w stanie ustalonym
- Krótszy czas regulacji w porównaniu z samym członem całkującym

$$R(s) = k_p \left[1 + \frac{1}{sT_i} \right] \quad u(t) = k_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(\tau) d\tau \right]$$



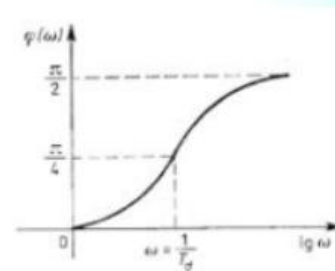
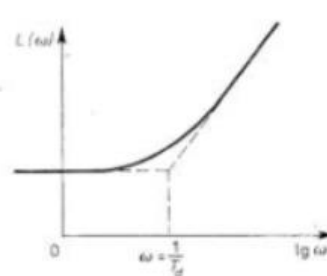
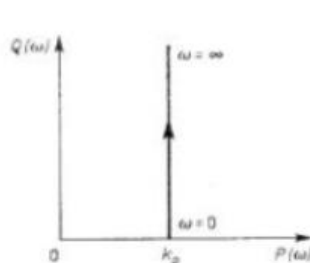
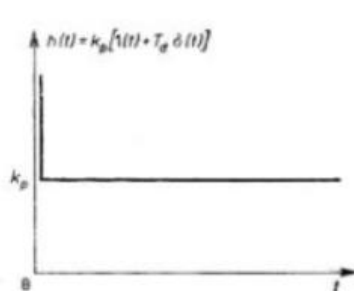


Regulator PID

Regulator typu PD

- Człon proporcjonalny i człon różniczkujący
- Brak uchybu w stanie ustalonym
- Bardzo szybka reakcja
- Poprawa stabilności

$$R(s) = k_p[1 + sT_d] \quad u(t) = k_p \left[e(t) + T_d \frac{d}{dt} e(t) \right]$$

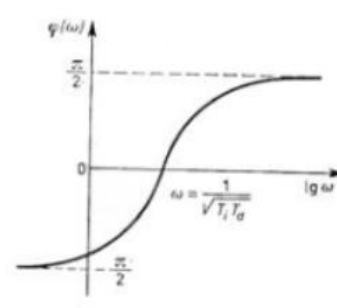
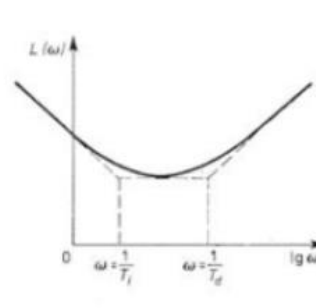
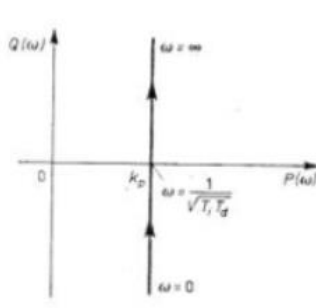
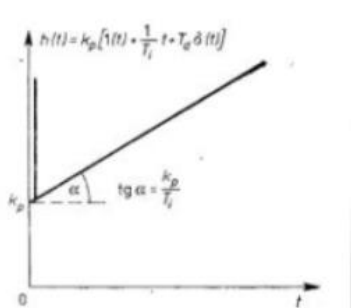


Regulator PID

Regulator typu PID

- Człon proporcjonalny, człon całkujący i człon różniczkujący
- Brak uchybu w stanie ustalonym
- Krótki czas regulacji
- Poprawa stabilności

$$R(s) = k_p \left[1 + \frac{1}{sT_i} + sT_d \right] \quad u(t) = k_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(\tau) d\tau + T_d \frac{d}{dt} e(\tau) \right]$$





Regulator PID

Rzeczywisty regulator typu PID

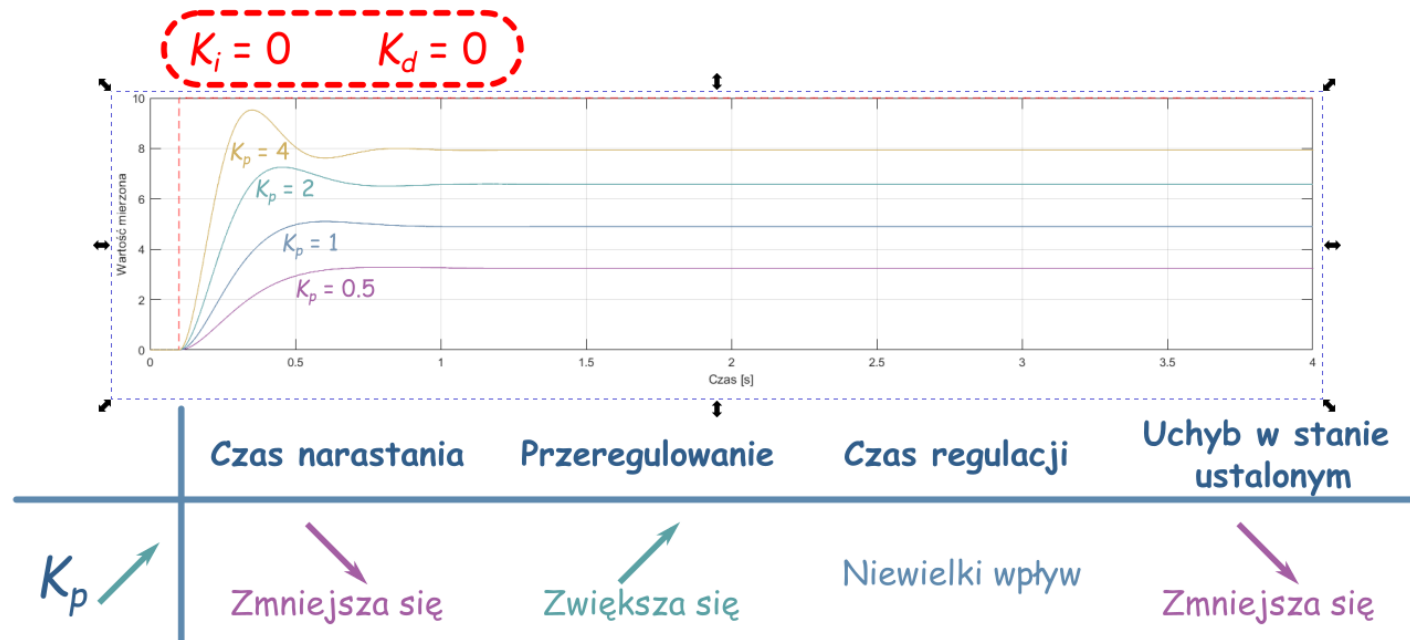
Zamiast członu różniczkującego idealnego – różniczkujący rzeczywisty

$$R(s) = k_p \left[1 + \frac{1}{sT_i} + \frac{sT_d}{\frac{T_d}{K_d}s + 1} \right]$$

gdzie: T_d - stała czasowa różniczkowania, K_d - współczynnik wzmocnienia członu

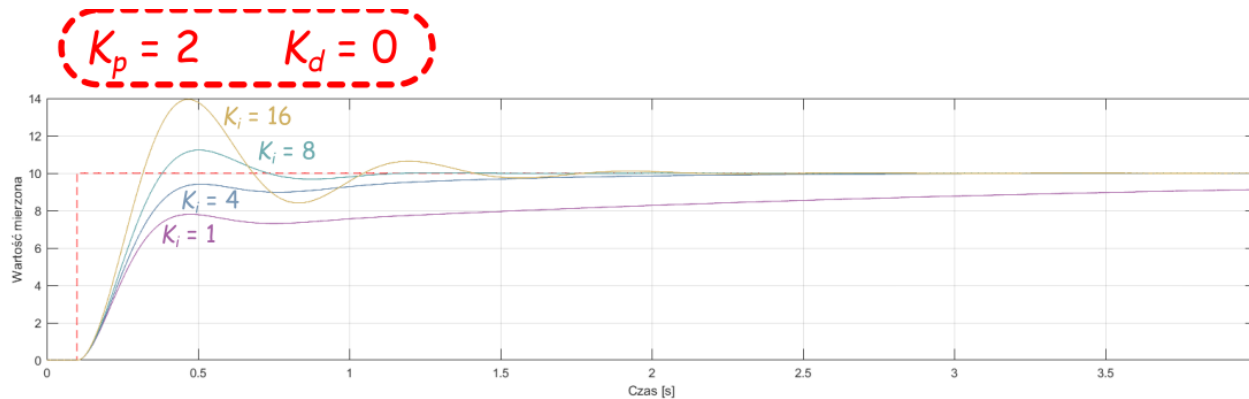
Regulator PID

Wpływ parametrów na odpowiedź układu



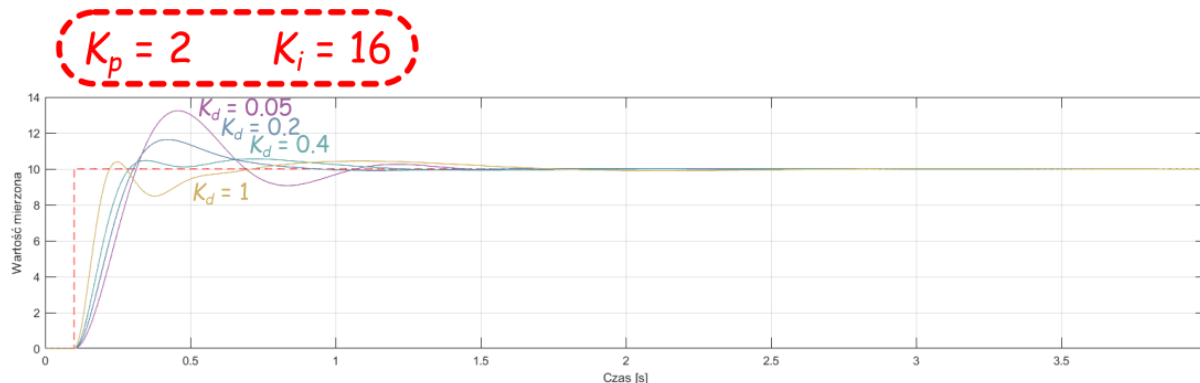
Regulator PID

Wpływ parametrów na odpowiedź układu



Regulator PID

Wpływ parametrów na odpowiedź układu



	Czas narastania	Przeregulowanie	Czas regulacji	Uchyb w stanie ustalonym
K_d ↗	Niewielki wpływ	Zmniejsza się ↘	Zmniejsza się ↘	Nie ma wpływu



Regulator PID

Wpływ parametrów na odpowiedź układu

	Czas narastania	Przeregulowanie	Czas regulacji	Uchyb w stanie ustalonym
K_p	Zmniejsza się	Zwiększa się	Niewielki wpływ	Zmniejsza się
K_i	Zmniejsza się	Zwiększa się	Zwiększa się	Eliminuje
K_d	Niewielki wpływ	Zmniejsza się	Zmniejsza się	Nie ma wpływu



Regulator PID

Ręczny dobór nastaw regulatora

1. Zamykamy pętlę sprzężenia zwrotnego (zaimplementowany regulator)
2. Ustawiamy K_i oraz K_d na 0
3. Zwiększamy K_p do uzyskania wartości z przedziału 0.6-0.9 wartości zadanej
4. Zwiększamy K_i do uzyskania oczekiwanej charakterystyki zerowania uchybu w stanie ustalonym (o ile nie doprowadzamy do utraty stabilności układu)
5. Zwiększamy K_d by zmniejszyć czas regulacji



Regulator PID

Metody Zieglera-Nicholsa

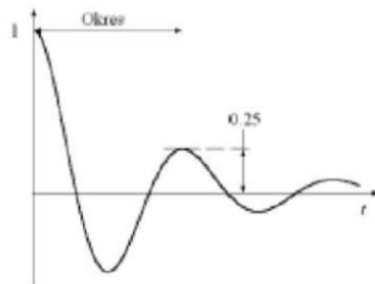
- Dwa warianty:
 - na podstawie odpowiedzi skokowej (otwarta pętla)
 - na podstawie wzmocnienia krytycznego (zamknięta pętla)
- Polegają na wyznaczeniu parametrów układu i na ich podstawie wyznaczenia parametrów regulatora PID
- Najlepsze efekty dla obiektów inercyjnych z opóźnieniem, czyli także dla obiektów inercyjnych wyższych rzędów.



Regulator PID

Metody Zieglera-Nicholsa

- Wyniki optymalne
- Kryterium: tłumienie oscylacji do 25% na okres





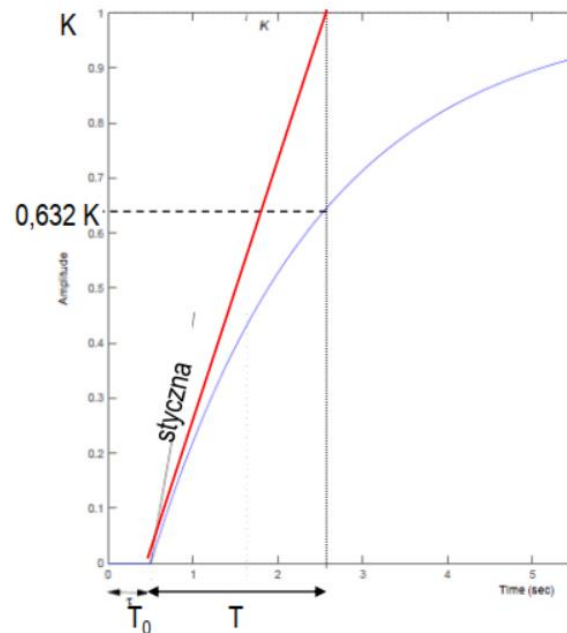
Regulator PID

Metoda Zieglera-Nicholsa I (bazująca na odpowiedzi skokowej)

Obserwujemy odpowiedź skokową i odczytujemy trzy wielkości:

- Wartość ustaloną odpowiedzi
- Czas opóźnienia
- Stałą czasową odpowiedzi

Dobre wyniki otrzymujemy dla warunku: $0.15 < \frac{T_0}{T} < 0.6$





Regulator PID

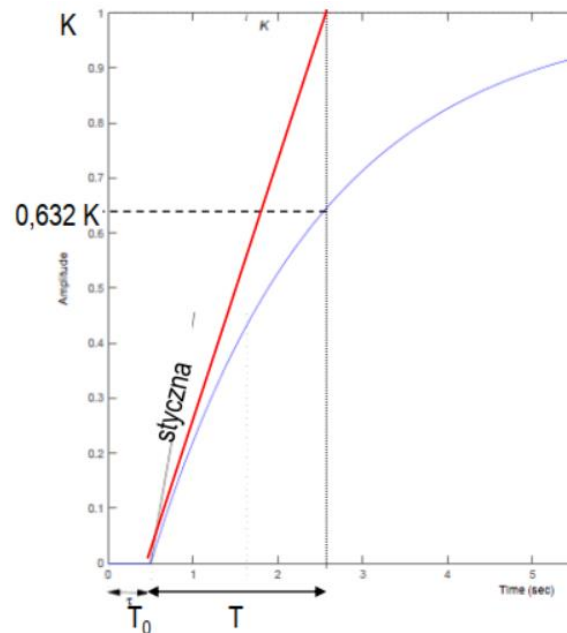
Metoda Zieglera-Nicholsa I (bazująca na odpowiedzi skokowej)

Przyjmujemy:

$$a = \frac{T_0}{T} K \quad u(t) = k_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(\tau) d\tau + T_d \frac{d}{dt} e(t) \right]$$

Parametry odczytujemy z tabeli:

	K_p	T_I	T_D
P	$1/a$	—	—
PI	$0.9/a$	$3T_0$	—
PID	$1.2/a$	$2T_0$	$0.5T_0$





Regulator PID

Metoda Zieglera-Nicholsa II (bazująca na wzmacnieniu krytycznym)

- Ustawiamy regulator w tryb proporcjonalny (człony całkujący i różniczkujący zerujemy)
- Wyznaczamy (liczymy lub odczytujemy) wzmacnienie krytyczne K_{kr} , czyli takie przy którym układ jest na granicy stabilności
- Wyznaczamy okres oscylacji T_{osc} w tym punkcie (dla wzmacnienia krytycznego na granicy stabilności)
- Parametry odczytujemy z tabeli:

	K_p	T_I	T_D
P	$0.5K_{kr}$	–	–
PI	$0.45K_{kr}$	$T_{osc}/1.2$	–
PID	$0.6K_{kr}$	$T_{osc}/2$	$T_{osc}/8$

$$u(t) = k_p \left[e(t) + \frac{1}{T_i} \int e(\tau) d\tau + T_d \frac{d}{dt} e(t) \right]$$



Regulator PID

Zjawisko wind-up (nawijania całkowania)

- Obiekt ma zawsze ograniczenia, które nie mogą być przekroczone
- Silnik – ograniczenia prędkości maksymalnej, ograniczenia napięcia zasilającego
- Układ grzewczy – maksymalna temperatura grzałki, ograniczenie napięcia zasilającego
- Po osiągnięciu wartości granicznej dalsza zmiana nie jest możliwa
- Może jednak zdarzyć się, że regulator wymusza dalszą zmianę, wówczas urządzenie wykonawcze na nią nie reaguje (pętla sprzężenia zwrotnego przestaje działać)
- Jeśli w regulatorze jest całkowanie to wymuszane zmiany są kumulowane dalej mimo braku reakcji – zjawisko nawijania wind-up



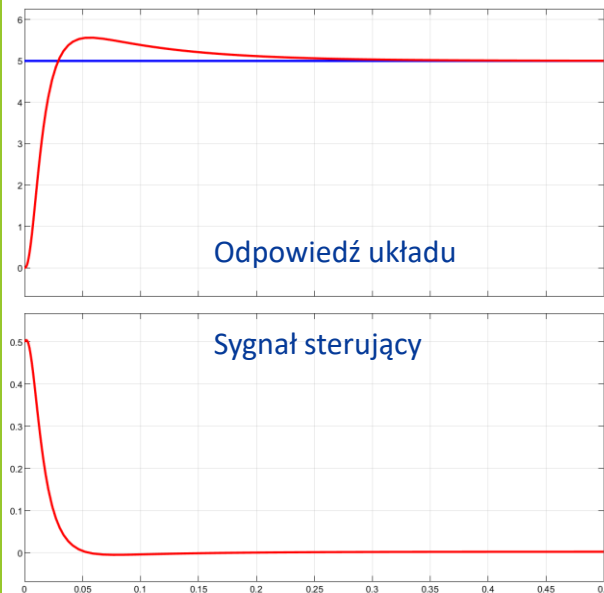
Regulator PID

Metody przeciwdziałania tzw. anty wind-up

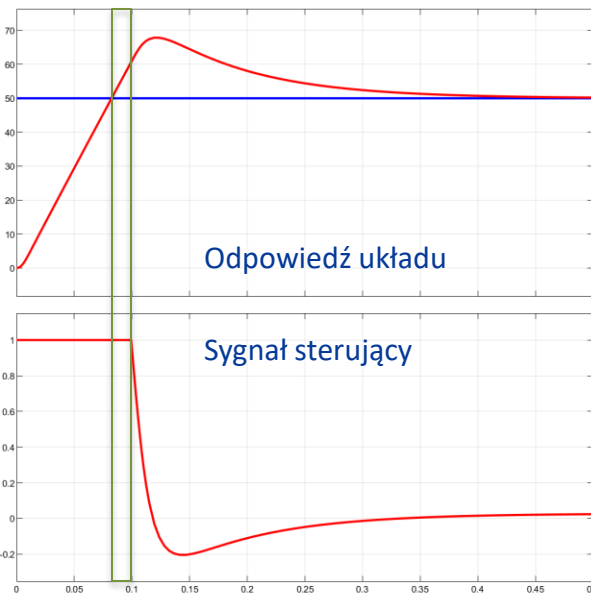
- Ograniczenia wartości całki (górne i dolne)
Jak wyznaczyć wartość progową ograniczenia?
- Zerowanie całki przy zmianie znaku uchybu
Skokowe zmiany sygnału sterującego przy dochodzeniu do wartości zadanej
- Wsteczna korekcja wartości całki uwzględniając saturację sygnału wyjściowego
Jak dobrać wzmacnienie toru anty-windup?

Regulator PID

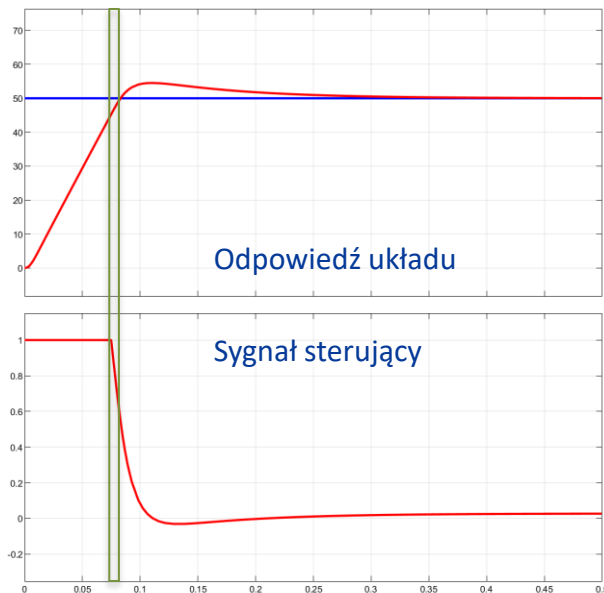
Zjawisko wind-up (nawijania całkowania)



Dobry regulator dla
niskosygnałowego sygnału
referencyjnego



Zwiększenie sygnału
referencyjnego – nasycenie
sygnału sterującego



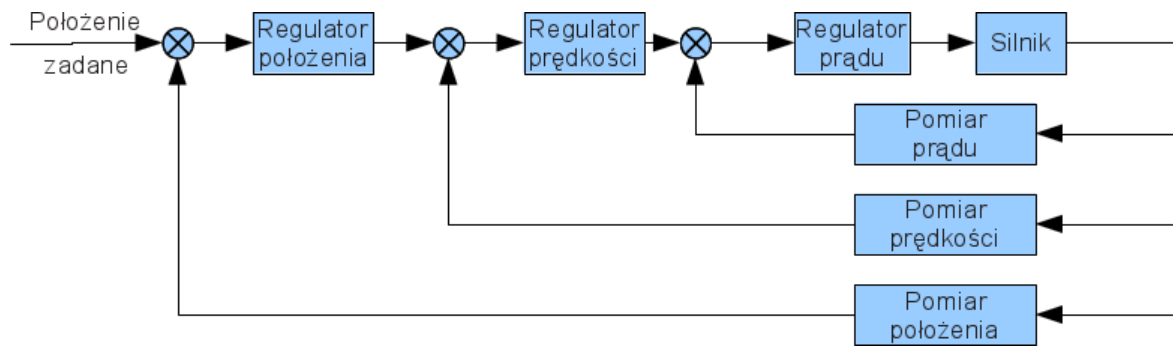
Zastosowanie metody
anty-windup



Regulator PID

Kaskada regulatorów PID

- Możliwość regulacji kilku zmiennych stanu w układzie
- Wyjściem regulatora nadrzędnego jest sygnał referencyjny dla regulatora podrzędnego
- Możliwość ograniczenia regulowanych zmiennych
- Dynamika regulatora nadrzędnego powinna być 6-7 razy mniejsza niż regulatora podrzędnego





Człony korekcyjne

Analiza częstotliwościowa

- Jedna z wielu metod projektowania regulatorów
- Jednymi z podstawowych wskaźników jakości regulacji są w tym przypadku: zapas wzmocnienia (amplitudy) i zapas fazy
- Dobór regulatora lub członu korekcyjnego wymaga analizy charakterystyk częstotliwościowych
 - Logarytmicznej charakterystyki amplitudowej
 - Logarytmicznej charakterystyki fazowej
- Metoda oparta na własności tych charakterystyk pozwalająca na ich łatwe składanie dla członów połączonych łańcuchowo



Człony korekcyjne

Składanie charakterystyk

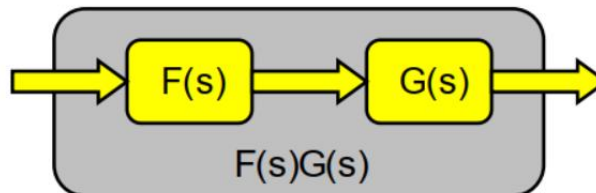
Z własności logarytmu mamy, że

$$\log(ab) = \log a + \log b$$

Stąd wniosek, że

$$\log|F(\omega)G(\omega)| = \log|F(\omega)| + \log|G(\omega)|$$

**czyli charakterystyki logarytmiczne modułu
układów liniowych połączonych szeregowo
sumują się.**





Człony korekcyjne

Składanie charakterystyk

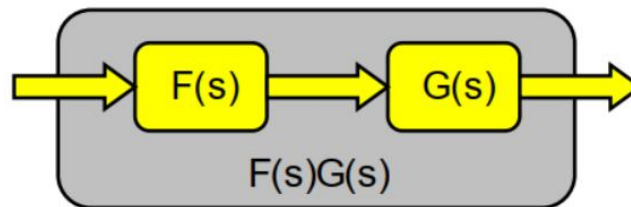
Z własności liczb zespolonych mamy, że

$$ab = |a|e^{j\arg(a)}|b|e^{j\arg(b)} = |a||b|e^{j(\arg(a)+\arg(b))}$$

Stąd wniosek, że

$$\arg(F(\omega)G(\omega)) = \arg(F(\omega)) + \arg(G(\omega))$$

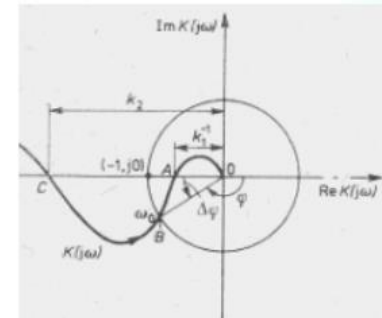
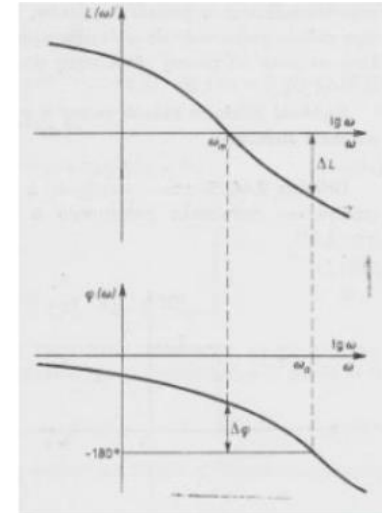
czyli charakterystyki fazowe układów liniowych połączonych szeregowo **sumują się.**



Człony korekcyjne

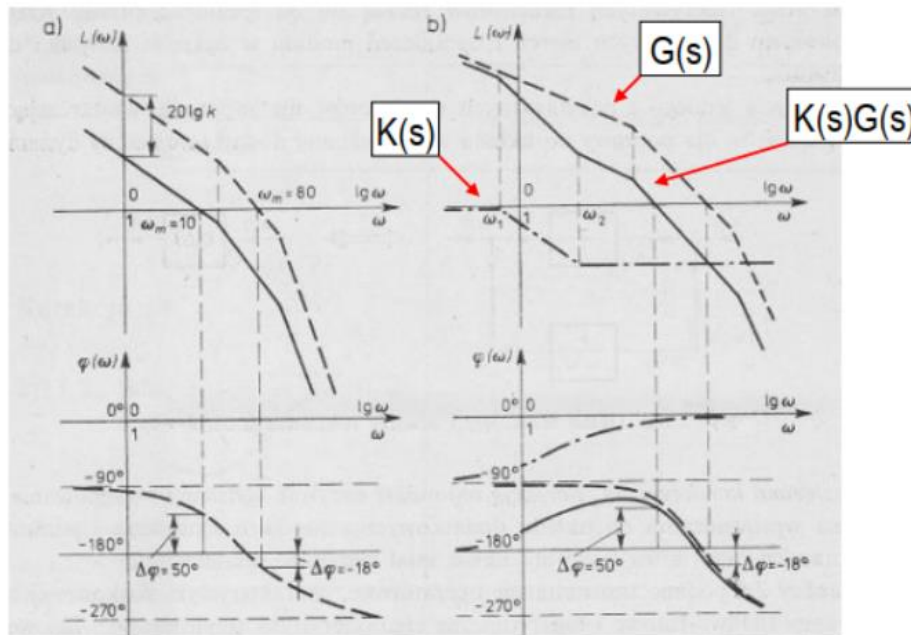
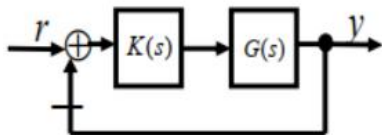
Zapas fazy

- Widoczny na charakterystykach: amplitudowo-fazowej, amplitudowej i fazowej **układu otwartego**
- Wyrażany w mierze kątowej (stopnie, radiany)
- Tym większy im większy jest kąt $\Delta\phi = 180^\circ - \phi$
- Kąt ϕ – argument transmitancji widmowej układu otwartego dla którego moduł tej transmitancji wynosi 1
- Dodatnie odchylenie logarytmicznej charakterystyki fazowej układu otwartego od wartości -180° dla pulsacji odcięcia dla której logarytmiczna charakterystyka amplitudowa przecina oś odciętych (0dB)
- Przyjmuje się zwykle od 30 do 60 stopni



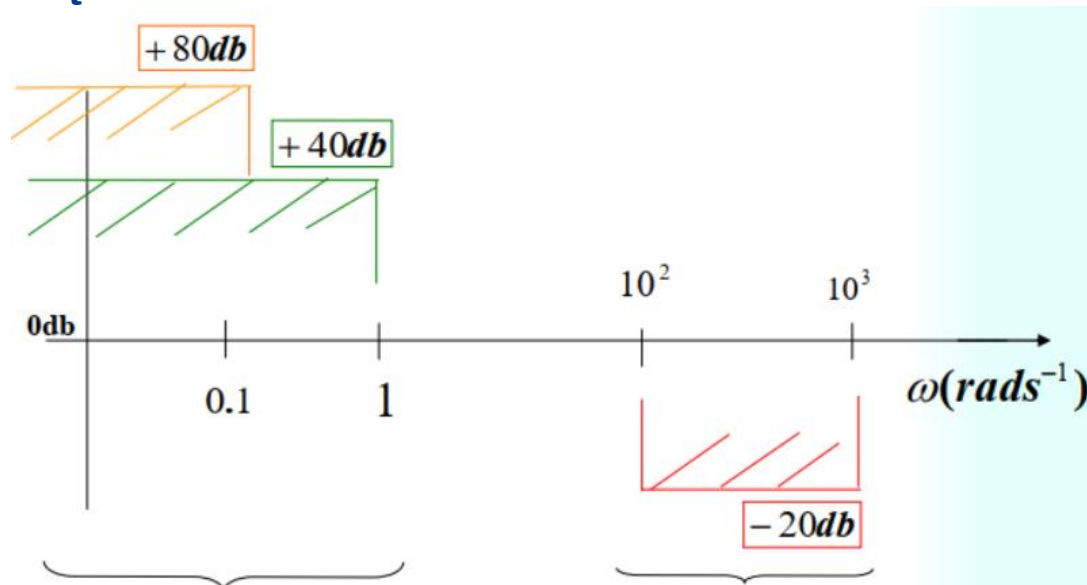
Człony korekcyjne

Charakterystyki logarytmiczne (dodawanie dla połączeń łańcuchowych)



Człony korekcyjne

Ograniczenia częstotliwościowe



Regulator dobierany jest w taki sposób, aby jego charakterystyka omijała obszary zabronione (wyznaczone na podstawie założeń projektowych)



Człony korekcyjne

Synteza sterowania

- Rozwiązaniem alternatywnym do struktury regulatora PID jest dodanie ściśle określonego zera jak i bieguna i utworzenie struktury o ogólnej postaci:

$$G_{Korekcja}(s) = K \frac{s + z}{s + p}$$

- Gdy zero ma większą (wartość co do modułu) niż biegun, wówczas taki regulator nazywamy wyprzedzającym fazę (ang. **lead controller**). W przeciwnym przypadku nazywamy go regulatorem opóźniającym fazę (ang. **lag controller**)



Człony korekcyjne

Synteza sterowania

- Jeżeli użycie jednego z członów podstawowych nie zapewnia wystarczającej jakości regulacji, dodaje się człony korekcyjne
- Człony korekcyjne są włączane równolegle lub łańcuchowo (szeregowo)
- Są uogólnieniem podstawowych regulatorów z większą elastycznością doboru parametrów

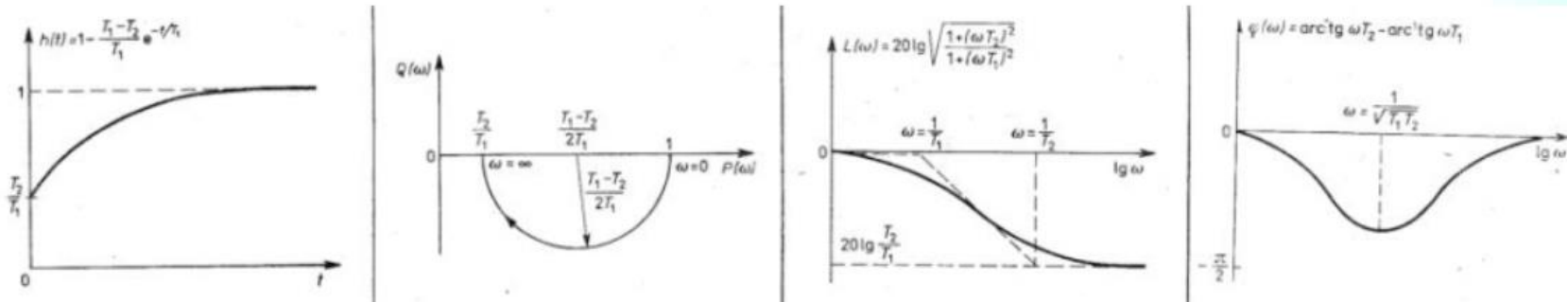
Człony korekcyjne

Opóźniający fazę

- Opóźnia fazę korekcji całkowitej:

$$G_{Korekcja}(s) = \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1} \quad T_1 > T_2$$

- zero > biegun
- Pozwala opóźnić moment (w skali pulsacji) zmiany fazy



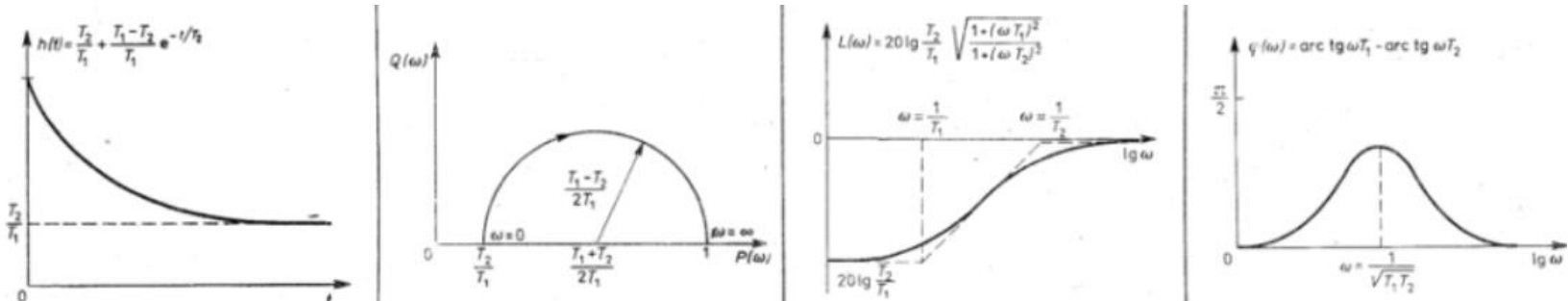
Człony korekcyjne

Przyspieszający fazę

- Przyspiesza fazę korekcji różniczkowej:

$$G_{Korekcja}(s) = \frac{T_2}{T_1} \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1} \quad T_2 > T_1$$

- biegun $>$ zero
- Pozwala przyspieszyć moment (w skali pulsacji) zmiany fazy



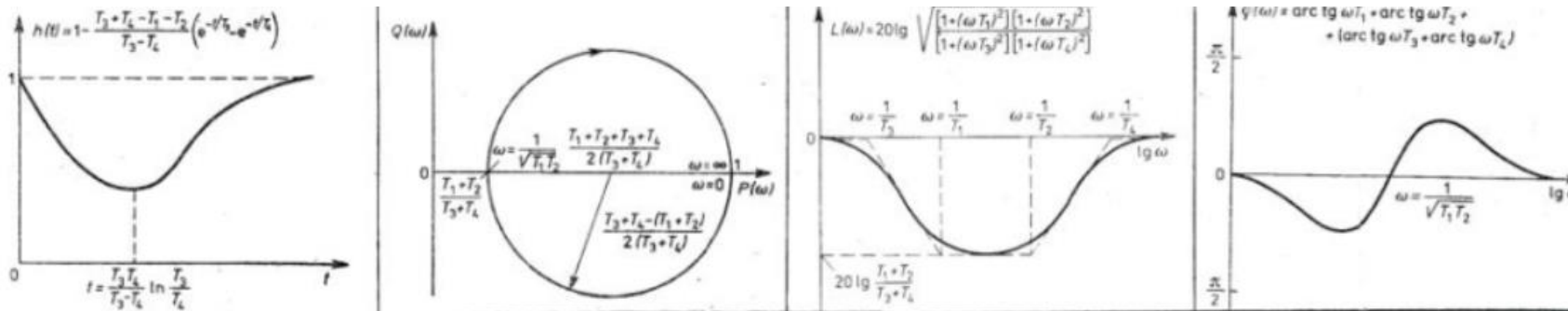
Człony korekcyjne

Opóźniająco-przyspieszający fazę

- Opóźnia fazę korekcji całkowej i przyspiesza fazę korekcji różniczkowej:

$$G_{Korekcja}(s) = \frac{(T_1s+1)(T_2s+1)}{(T_3s+1)(T_4s+1)}$$

- Jednoczesne opóźnianie i przyspieszanie





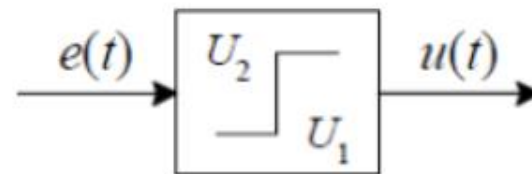
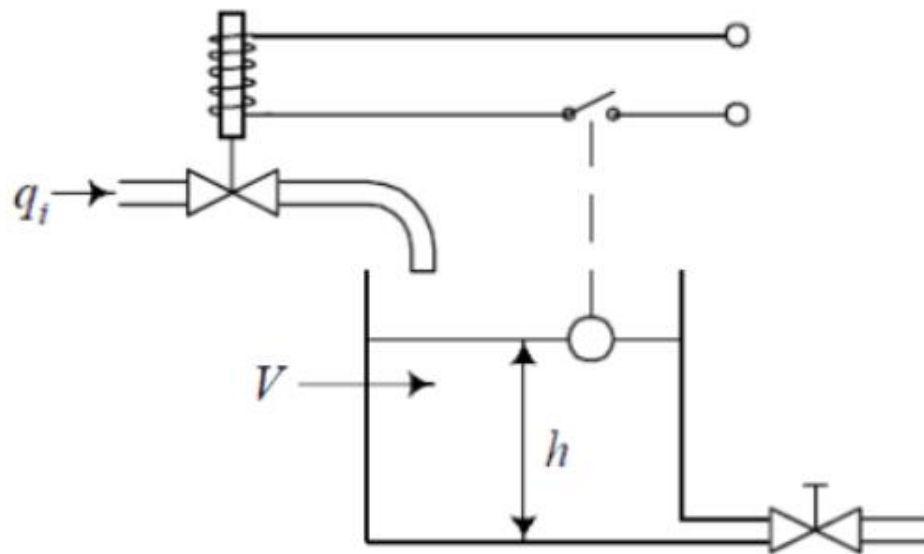
Regulacja dwupołożeniowa

Regulacja dwupołożeniowa

- Bardzo często spotykana metoda regulacji
- Spotykana wszędzie tam, gdzie możliwe jest jedynie włączenie i wyłączenie obiektu regulacji
- Sterowanie przy pomocy przełącznika - włącz/wyłącz
- Przełączniki dwu- i trójpółżeniowe z histerezą i bez
- Przełącznik jest elementem nieliniowym!
- **Regulator nieliniowy!**

Regulacja dwupołożeniowa

Przykład elektrycznego układu regulacji dwupołożeniowej bez histerezy

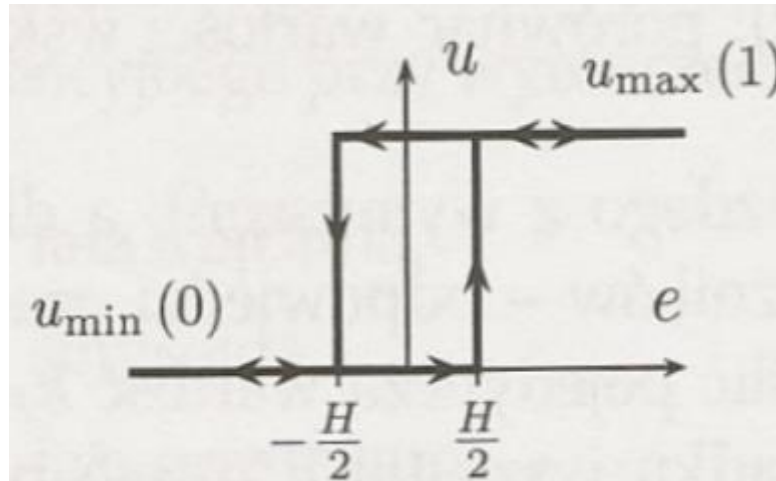


$$u(t) = \begin{cases} U_1 & \text{dla } e(t) < 0 \\ U_2 & \text{dla } e(t) > 0 \end{cases}$$

Regulacja dwupołożeniowa

Histereza

- Cecha charakterystyczna rzeczywistego przełącznika
- Przejście ze stanu wyłącznego w stan włączony zachodzi dla innej wartości wejściowej (większej niż przejście ze stanu włączonego w wyłączony)

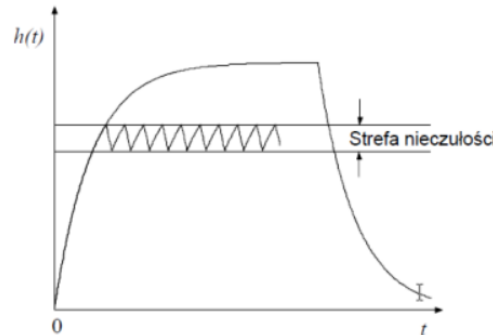
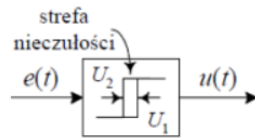




Regulacja dwupołożeniowa

Histereza

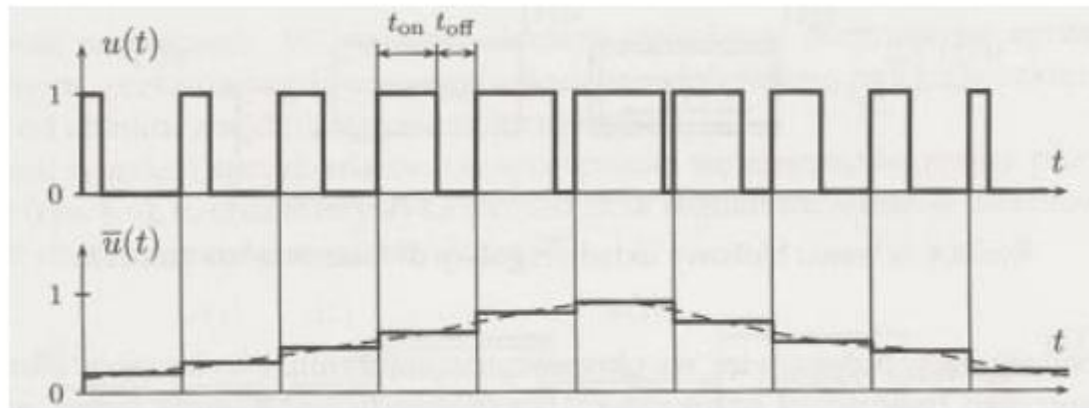
- Miejsce zmiany wartości sygnału może zależeć od kierunku przechodzenia – histereza
- Pojawia się wówczas strefa nieczułości (widoczna na charakterystyce skokowej)
- Zmniejszając strefę nieczułości zwiększamy częstotliwość przełączeń czyli zmniejszamy żywotność regulatora



Regulacja dwupołożeniowa

Regulacja temperatury

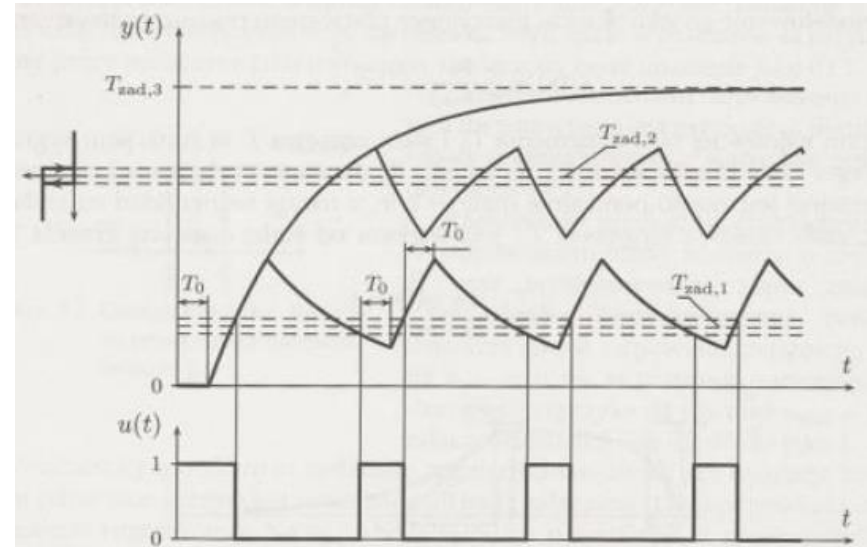
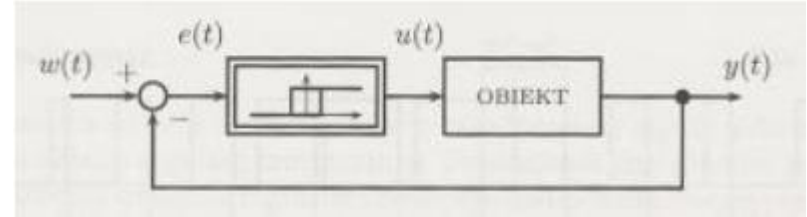
- Regulacja temperatury to typowy proces wolnozmienny z silnymi własnościami uśredniającymi
- Przy sterowaniu przełączniku dwupołożeniowym sygnał sterujący może przyjmować dwa stany, obiekt reaguje na wartość średnią sygnału sterującego



Regulacja dwupołożeniowa

Regulacja dwustanowa bez korekcji

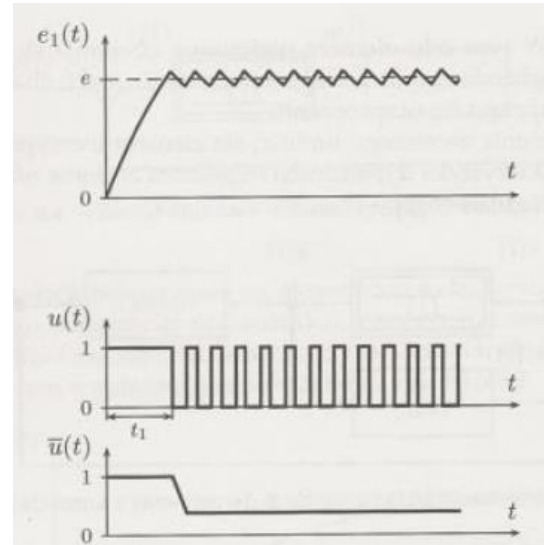
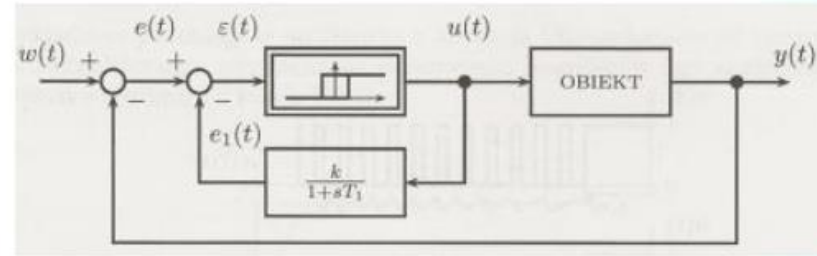
- Człon przekaźnika dwupołożeniowego występuje samodzielnie
- Częstotliwość przełączeń zależy od zadanej wartości referencyjnej, własności dynamicznych obiektu, i charakterystyki statycznej regulatora
- Istotne parametry – amplituda i częstotliwość drgań oscylacji ustalonych, wartość średnia sygnału
- Duża amplituda oscylacji ustalonych



Regulacja dwupołożeniowa

Regulacja dwustanowa z korekcją PD

- Korekcja PD pozwala na zmniejszenie amplitudy oscylacji ustalonych
- Obiekt nieliniowy (przełącznik) obejmuje sprzężenie zwrotne z elementem inercyjnym (przyjmuje się, że obiekt nieliniowy jest wzmocnieniem statycznym o bardzo dużym wzmocnieniu)
- Dzięki temu charakterystyka regulatora (przełącznik ze sprzężeniem zwrotnym) będzie zbliżona do charakterystyki regulatora PD

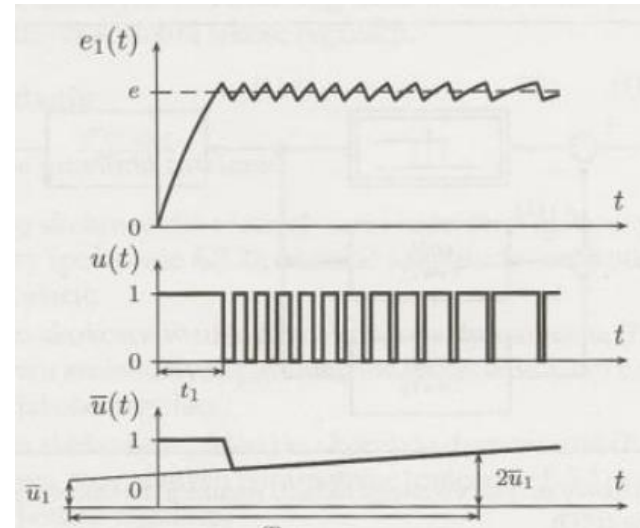
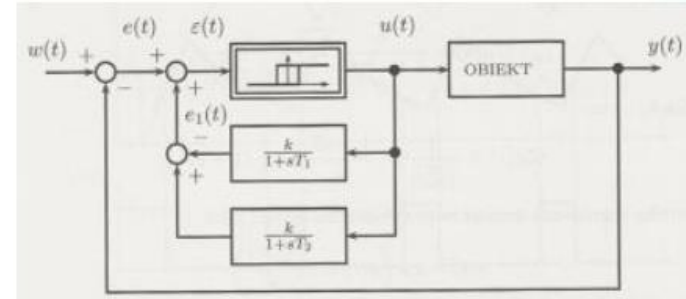


$$G_R(s) = \frac{k_r}{1 + \frac{k_r k}{1 + sT_1}} = \frac{1}{\frac{1}{k_r} + \frac{k}{1 + sT_1}} \underset{k_r \rightarrow \infty}{=} \frac{1}{\frac{k}{1 + sT_1}} = \frac{1}{k} (1 + sT_1)$$

Regulacja dwupołożeniowa

Regulacja dwustanowa z korekcją PID

- Umieszczając równoległe dwa człony inercyjne, to odpowiednio je sumując otrzymujemy regulator PID
- Inny przebieg regulacji
- Zmiana częstotliwości przełączeń
- Dzięki wysokiej częstotliwości uzyskuje się przebieg regulacji zbliżony do regulatora ciągłego
- Stało się to możliwe dzięki objęciu przekaźnika pętlą sprzężenia zwrotnego uzyskując „prawie” regulator PID

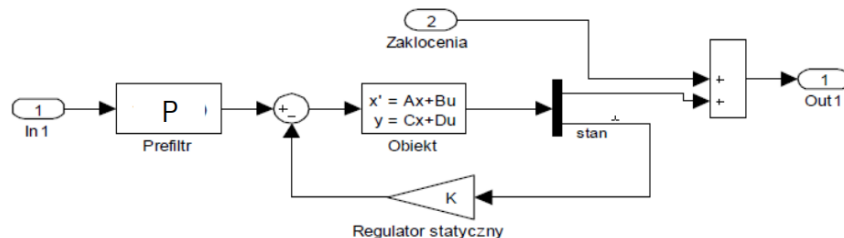




Regulacja stanu

Regulator ze sprzężeniem zwrotnym od wektora zmiennych stanu

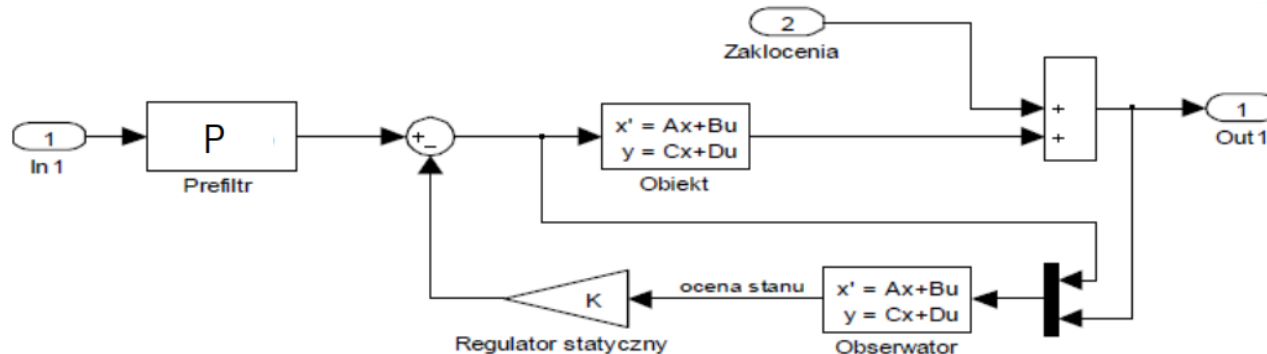
- Stan musi być dostępny (obserwowalność układu) i powinniśmy mieć na niego pełen wpływ (sterowalność układu)
- Pętla ma wzmocnienie statyczne różne od jedności
- Prefiltr kompensuje wzmocnienie pętli, łagodzi skoki wartości zadanej
- Typowe metody doboru wzmocnienia statycznego: metoda optymalizacji liniowo-kwadratowej (LQ), przesuwanie biegunów
- Uchyby, gdy obiekt rzeczywisty różni się od modelu



Regulacja stanu

Regulator ze sprzężeniem zwrotnym od wektora zmiennych stanu z obserwatorem

- Założenie o dostępności stanu jest często niespełnione. Wówczas, stosuje się dodatkowo obserwator stanu
- Typowe metody doboru nastaw wzmocnienia statycznego oraz nastaw obserwatora: LQ z obserwatorem, przesuwanie biegunów z obserwatorem





Regulacja stanu

Metoda przesuwania biegunów (ang. *pole placement*)

- Stosowana do liniowych układów SISO i MIMO, układów ciągłych i dyskretnych. Zakłada dostępność stanu obiektu (pełna informacja o obiekcie)
- Dane: równanie stanu obiektu (macierz stanu A i macierz sterowania B)
- Cel: znalezienie statystycznej macierzy regulatora od stanu, takiej by bieguny układu zamkniętego znalazły się w zadanym (przez projektanta) położeniu. Położenie biegunów ma zapewnić pożądane właściwości układu regulacji



Regulacja stanu

Metoda przesuwania biegunów (ang. *pole placement*)

- Metoda pozwala na umieszczenie biegunów w dowolnym miejscu lewej półpłaszczyzny płaszczyzny zmiennej zespolonej s pod dwoma warunkami:
 1. Para macierzy A i B jest sterowalna
 2. Dostępny jest pełen wektor stanu (jeżeli nie to obserwator należy wykorzystać)
- Wymagania dotyczące wynikowego układu możemy sprowadzić do odpowiedniego „idealnego” modelu i parametrów układu regulacji
- Położenie biegunów może być zmienione poprzez zastosowanie statycznego sprzężenia zwrotnego od stanu i odpowiedni dobór macierzy sprzężenia
- Obliczamy macierz K na podstawie modelu zmiennych stanu układu oraz docelowego położenia biegunów (**formuła Ackermana**)



Regulacja stanu

Metoda przesuwania biegunów (ang. *pole placement*)

Ogólny zapis układu – macierze A, B, C, D

$$\begin{aligned}\dot{x} &= Ax + Bu \\ y &= Cx + Du\end{aligned}$$

Bieguny to pierwiastki równania charakterystycznego : $\det(Is - A)$

Zakładając brak wymuszeni: $u = -Kx$

Po podstawieniu otrzymujemy:

$$\begin{aligned}\dot{x} &= (A - BK)x \\ y &= (C - DK)x\end{aligned}$$

A więc bieguny możemy otrzymać: $\det[Is - (A - BK)]$



Regulacja stanu

Metoda optymalizacji liniowo-kwadratowej (ang. *linear-quadratic*)

- Projektowanie regulatora od stanu dla układu liniowego z kwadratowym wskaźnikiem jakości.
- Metoda powstała w latach 60. XX w.
- Daje bardzo dobre rezultaty w przypadku, gdy występują mało intensywne zakłócenia
- Stosuje się do układów ciągłych i dyskretnych
- Przez odpowiedni dobór specyfikacji projektowej można wpływać na każdy ze stanów obiektu (ważna cecha)



Regulacja stanu

Metoda optymalizacji liniowo-kwadratowej (ang. *linear-quadratic*)

- Liniowy układ $\dot{x} = Ax + Bu$
- Wskaźnik jakości:

$$J = \frac{1}{2}x^T(t_1)F(t_1)x(t_1) + \int_{t_0}^{t_1} (x^T Q x + u^T R u) dt,$$

- Sprzężenie zwrotne: $u = -Kx$
- Żeby rozwiązać problem i znaleźć macierz K należy rozwiązać **równanie Riccatiego**

$$A^T P(t) + P(t)A - P(t)BR^{-1}B^T P(t) + Q = \dot{P}(t)$$

$$K = R^{-1}B^T P(t).$$



Regulacja stanu

Metoda optymalizacji liniowo-kwadratowej (ang. *linear-quadratic*)

- Liniowy układ $\dot{x} = Ax + Bu$
- Wskaźnik jakości:

$$J = \int_0^{\infty} (x^T Q x + u^T R u) dt$$

- Sprzężenie zwrotne: $u = -Kx$
- Żeby rozwiązać problem i znaleźć macierz K należy rozwiązać **równanie Riccatiego**

$$A^T P + P A - P B R^{-1} B^T P + Q = 0$$

$$K = R^{-1} B^T P,$$