



UNIWERSYTET
MIKOŁAJA KOPERNIKA
W TORUNIU

Wydział Fizyki, Astronomii
i Informatyki Stosowanej

Podstawy Automatyki

Stabilność liniowych ciągłych układów
dynamicznych

dr inż. Rafał Szczepański

www.umk.pl/~szczepi

szczepi@umk.pl

12.01.2025



Plan prezentacji

Pojęcie stabilności

Warunki stabilności

Algebraiczne kryteria stabilności

Kryteria Hurwitza

Kryterium Routha

Stabilność w dziedzinie częstotliwości

Kryterium stabilności Nyquista

Zapas wzmocnienia i zapas fazy



Pojęcie stabilności

Stabilność

- Stabilność jest podstawową własnością jaką powinny się charakteryzować zamknięte układy sterowania
- Jest to zdolność do powrotu do stanu równowagi po ustaniu zakłócenia
- Układ może być stabilny, niestabilny lub na granicy stabilności



niestabilny



stabilny



na granicy stabilności



Pojęcie stabilności

Stabilność w zagadnieniach inżynierskich

- Jedna z najważniejszych cech układów dynamicznych wszelkiego rodzaju
 - Określenie „stabilności” jest charakterystyczne dla automatyki sterowania
 - Inne określenia tej samej właściwości: stateczność (mechanika konstrukcji, dynamiczka ruchu samolotu, statku, itp.)
-
- Most wiszący Tacoma Narrows na skutek
 - drgań rezonansowych spowodowanych
 - silnym wiatrem zawalił się 7.11.1940 r.





Pojęcie stabilności

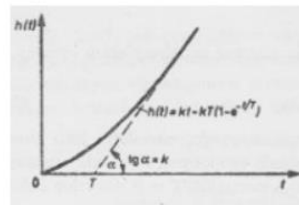
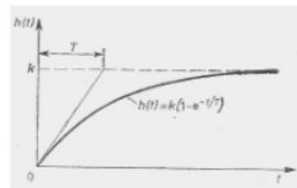
Definicja stabilności (1)

- Stabilność BIBO (ograniczone wejście, ograniczone wyjście (ang. Bounded Input Bounded Output))
- Układ stabilny to układ o ograniczonej odpowiedzi na ograniczone wymuszenie

- Trywialne przykłady:

Stabilny – człon inercyjny 1-go rzędu

Niestabilny – człon całkujący





Pojęcie stabilności

Punkt równowagi

- Układ liniowy bez wymuszeń ($u = 0$)

$$\dot{x} = f(x) = Ax$$

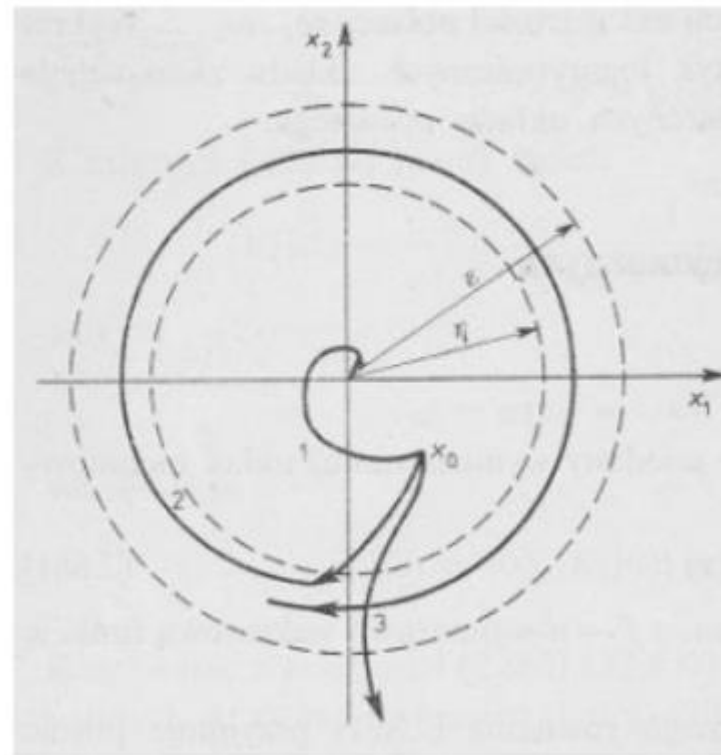
- Punkt równowagi – wartość x dla której $f(x) = 0$
- Jeżeli $\det(A) \neq 0$ to istnieje dokładnie jeden punkt równowagi (wówczas równanie $Ax = 0$ ma dokładnie jedno rozwiązanie)
- Jeżeli punkt równowagi $x \neq 0$ to zawsze można poprzez przekształcenie zmiennych stanu sprowadzić go do 0 ($x = 0$)



Pojęcie stabilności

Stabilność punktu równowagi

- Załóżmy, że układ został wytrącony ze stanu równowagi i w chwili początkowej t_0 znajduje się w punkcie x_0
- Punkt równowagi $x = 0$ jest **stabilny** (w sensie definicji Lapunowa) jeżeli dla każdej liczby dodatniej ϵ można dobrać taką liczbę η (zależną zwykle od ϵ), że trajektoria rozpoczynająca się w x_0 leżącym wewnątrz kuli o promieniu η pozostanie wewnątrz kuli o promieniu ϵ dla dowolnej chwili $t > 0$

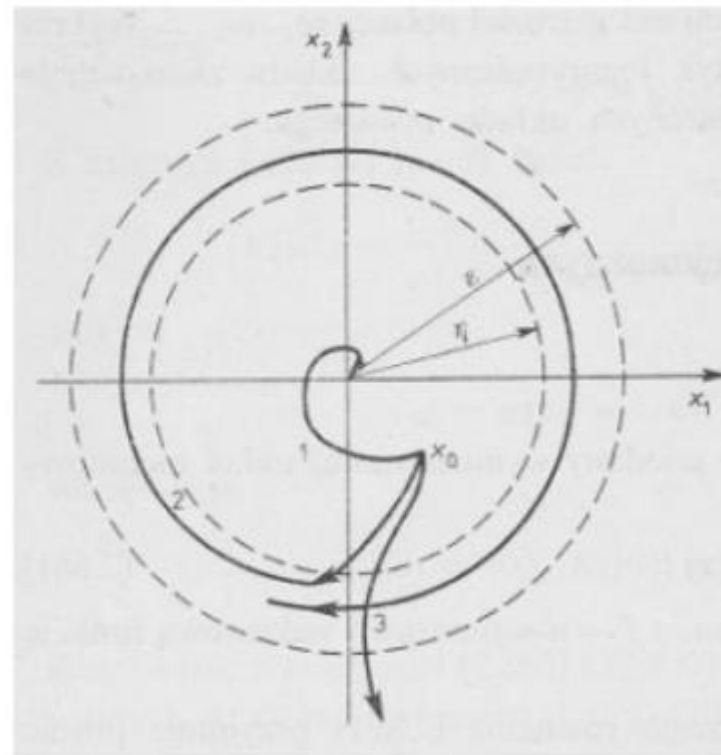




Pojęcie stabilności

Stabilność asymptotyczna

- Punkt równowagi $x = 0$ jest **stabilny asymptotycznie** jeżeli:
 - x jest stabilny
 - jest spełniony warunek: $\lim_{t \rightarrow \infty} x(t) = 0$





Pojęcie stabilności

Definicja stabilności (2)

- Układ liniowy bez wymuszeń ($u = 0$)

$$\dot{x} = Ax$$

- Jest **stabilny** (asymptotycznie stabilny) jeżeli punkt równowagi $x = 0$ jest **stabilny** (asymptotycznie stabilny)
- W zależności od możliwych położen x_0 stabilność dzielimy na:
 - lokalną – x_0 w małym otoczeniu $x = 0$
 - globalną - x_0 w dowolnie dużym otoczeniu $x = 0$
- Najczęściej w układach sterowania zależy nam na globalnej stabilności asymptotycznej.



Pojęcie stabilności

Stabilność bezwzględna i względna

- Pojęcie **stabilności bezwzględnej** dzieli układy na stabilne i niestabilne
- Jeszcze ważniejsze pojęcie **stabilności względnej** dla układów stabilnych mówi nam w jakim stopniu układ jest stabilny
- Idea pochodzi z pionierskich lat rozwoju lotnictwa i projektowania pierwszych samolotów: jak dalece stabilny powinien być samolot? Istnieje kompromis pomiędzy stabilnością i manewrowością:

bardziej stabilny -> mniej zwrotny
- Myśliwiec jest bardzo zwrotny ale niezbyt stabilny. Sterowanie w układzie zamkniętym jest niezbędne do pilotowania.



Warunki stabilności

Równanie charakterystyczne

- Dla układu opisanego modelem czasowym (macierze A, B, C, D) **wielomianem charakterystycznym** nazywamy wielomian:

$$\Delta(s) = \det(Is - A)$$

- Równaniem charakterystycznym** nazywamy równanie:

$$\Delta(s) = \det(Is - A) = 0$$

- Rozwiązania tego równania to wartości własne macierzy A.



Warunki stabilności

Równanie charakterystyczne

- Wielomian charakterystyczny układu opisanego transmitancją:

$$T(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{a_1 s^m + a_2 s^{m-1} + \dots + a_{m-1} s + a_m}{s^n + b_1 s^{n-1} + \dots + b_{n-1} s + b_n}$$

(przy założeniu, że $L(s)$ i $M(s)$ nie mają wspólnych czynników – nie można wykonać skrócenia)

jest to wielomian znajdujący się w mianowniku $M(s)$:

$$\Delta(s) = M(s)$$

- Pierwiastki równania charakterystycznego są więc tożsame biegunom układu
- Sposób wyznaczanie równania charakterystycznego zależy od modelu jakim dysponujemy



Warunki stabilności

Warunki stabilności

- Układ jest **stabilny** wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego mają niedodatnie części rzeczywiste, a każdy pierwiastek o zerowej części rzeczywistej jest jednokrotny (co najwyżej jeden pierwiastek na osi urojonej)
- Układ jest **stabilny asymptotycznie** wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie pierwiastki równania charakterystycznego mają ujemne części rzeczywiste



Warunki stabilności

Stopień stabilności

- Stabilność układów liniowych (ciągłych) wiąże się z biegunami układu
- **Warunek konieczny i wystarczający stabilności:**

Liniowy układ dynamiczny jest stabilny asymptotycznie wtedy i tylko wtedy gdy wszystkie bieguny układu leżą w lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny zmiennej zespolonej s

Stopień stabilności związany jest z tym jak daleko w lewo od osi urojonej znajdują się bieguny

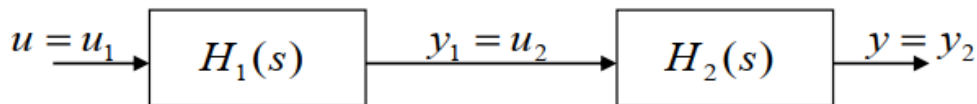
(bieguny = pierwiastki równania charakterystycznego)



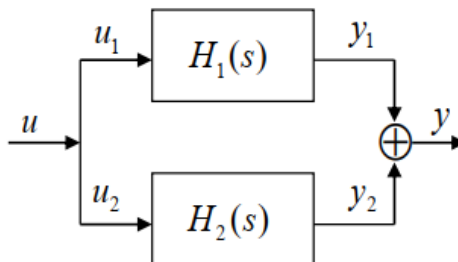
Warunki stabilności

Stabilność układów złożonych

- Układ składający się z członków **połączonych łańcuchowo** (kaskadowo) jest stabilny (stabilny asymptotycznie) jeżeli **każdy** z członów składowych jest stabilny (stabilny asymptotycznie)



- Układ składający się z członków **połączonych równolegle** jest stabilny (stabilny asymptotycznie) jeżeli **każdy** z członów składowych jest stabilny (stabilny asymptotycznie)





Warunki stabilności

Stabilność układu ze sprzężeniem zwrotnym

Transmitancja układu z zamkniętą ujemną pętlą sprzężenia zwrotnego:

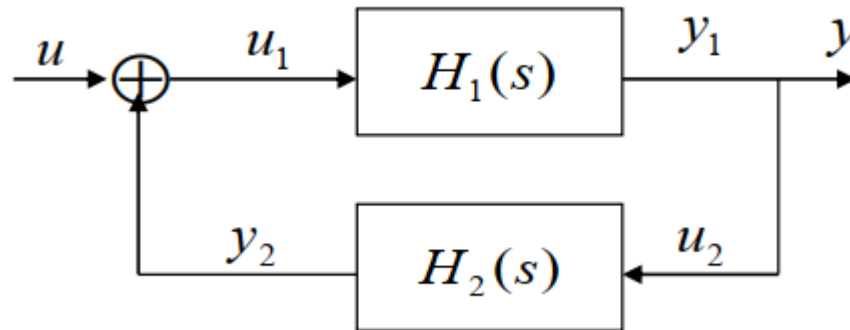
$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{H_1(s)}{1 + H_1(s)H_2(s)}$$

Pierwiastki równania charakterystycznego układu zamkniętego:

$$1 + H_1(s)H_2(s) = 0$$

$$1 + \frac{L(s)}{M(s)} = 0$$

$$M(s) + L(s) = 0$$





Warunki stabilności

Pierwiastki równania charakterystycznego

- Rozważmy układ rzędu n -tego o równaniu charakterystycznym:

$$\Delta(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

- Pierwiastki równania charakterystycznego:

$$\Delta(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

- Rozwiązanie analityczne tylko dla $n < 5$
- Możliwe rozwiązanie numeryczne
- Istnieją także kryteria stabilności



Warunki stabilności

Kryteria stabilności

- Pozwalają na określenie położenia pierwiastków równania charakterystycznego w zakresie istotnym z punktu widzenia stabilności
- Dzięki nim nie jest konieczne wyznaczanie pierwiastków równania charakterystycznego (analityczne lub numeryczne)
- Kryteria sprawdzają czy pierwiastki znajdują się w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej (tj. czy mają ujemne części rzeczywiste)
- Taka informacja jest niezbędna dla projektanta układu sterowania



Warunki stabilności

Warunek konieczny stabilności

- Równanie charakterystyczne:

$$\Delta(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0 = 0$$

- Jeżeli $\Delta(s)$ jest zapisany w postaci iloczynowej (r_i , dla $i = 1, \dots, n$ są pierwiastkami $\Delta(s)$)

$$\Delta(s) = a_n (s - r_1)(s - r_2) \dots (s - r_n)$$

Po przemnożeniu otrzymujemy:

$$\Delta(s) = a_n [s^n - (r_1 + r_2 + \dots + r_n) s^{n-1} + (r_1 r_2 + r_2 r_3 + \dots) s^{n-2} - (r_1 r_2 r_3 + r_1 r_2 r_4 + \dots) s^{n-3} + \dots + (-1)^n r_1 r_2 r_3 \dots r_n] = 0$$



Warunki stabilności

Warunek konieczny stabilności

- Otrzymujemy więc:
- Wynik:** Jeżeli wszystkie pierwiastki są w Lewej Półpłaszczyźnie:
 - Wszystkie współczynniki wielomianu muszą być tego samego znaku
 - Wszystkie współczynniki wielomianu muszą być różne od zera
- Praktycznie:** Wszystkie współczynniki muszą być większe od zera
- Jest to warunek **konieczny** stabilności ale **niewystarczający**!
- Przykład:

$$s^2 + 5 = 0 \rightarrow \text{niestabilny, drugi warunek nie jest spełniony}$$

$$s^3 + s^2 + 2s + 8 = 0 \rightarrow \text{nic nie można powiedzieć, warunki spełnione}$$



Algebraiczne kryteria stabilności

Kryterium Hurwitza

- Równanie charakterystyczne

$$\Delta(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

- Warunek wystarczający stabilności
- Analizujemy tzw. Wyznacznik Hurwitza

$$\begin{vmatrix} a_{n-1} & a_n & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ a_{n-3} & a_{n-2} & a_{n-1} & a_n & 0 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & a_0 \end{vmatrix}$$

- Wyznacznik główny i wszystkie minory główne muszą być większe od zera!



Algebraiczne kryteria stabilności

Kryterium Hurwitza – przykład dla układu 5-go rzędu

- Równanie charakterystyczne

$$\Delta(s) = a_5 s^5 + a_4 s^4 + a_3 s^3 + a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

- Warunek konieczny stabilności: $a_i > 0$, dla $i = 0, \dots, 5$
- Warunki wystarczające:

$$\begin{vmatrix} a_4 & a_5 & 0 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 & 0 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 & a_4 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 & a_2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & a_0 \end{vmatrix} > 0 \quad \begin{vmatrix} a_4 & a_5 & 0 & 0 \\ a_2 & a_3 & a_4 & a_5 \\ a_0 & a_1 & a_2 & a_3 \\ 0 & 0 & a_0 & a_1 \end{vmatrix} > 0 \quad \begin{vmatrix} a_4 & a_5 & 0 \\ a_2 & a_3 & a_4 \\ a_0 & a_1 & a_2 \end{vmatrix} > 0 \quad \begin{vmatrix} a_4 & a_5 \\ a_2 & a_3 \end{vmatrix} > 0$$



Algebraiczne kryteria stabilności

Kryterium Hurwitza – przykład dla układu 5-go rzędu

- Równanie charakterystyczne

$$\Delta(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 5s^2 + 11s + 10$$

- Warunek konieczny stabilności ($a_i > 0$, dla $i = 0, \dots, 5$) jest spełniony.
- Warunki wystarczające:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 10 & 11 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 11 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} > 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \\ 10 & 11 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 11 \end{vmatrix} > 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 2 \\ 10 & 11 & 5 \end{vmatrix} > 0 \quad \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} > 0$$



Algebraiczne kryteria stabilności

Kryterium Hurwitza – przykład dla układu 5-go rzędu

- Równanie charakterystyczne

$$\Delta(s) = s^5 + 2s^4 + 2s^3 + 5s^2 + 11s + 10$$

- Warunek konieczny stabilności ($a_i > 0$, dla $i = 0, \dots, 5$) jest spełniony.
- Warunki wystarczające:

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 2 & 1 & 0 \\ 10 & 11 & 5 & 2 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 11 & 5 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 10 \end{vmatrix} > 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 & 0 \\ 5 & 2 & 2 & 1 \\ 10 & 11 & 5 & 2 \\ 0 & 0 & 10 & 11 \end{vmatrix} > 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 2 \\ 10 & 11 & 5 \end{vmatrix} > 0$$

$$\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 5 & 2 \end{vmatrix} > 0$$



Algebraiczne kryteria stabilności

Kryterium Routha

- Równanie charakterystyczne

$$\Delta(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

- Warunek wystarczający stabilności

- Krok 1:** Uporządkuj współczynniki równania charakterystycznego w tabelę:

$$\begin{array}{c|cccc} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \dots \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \dots \end{array}$$

- Krok 2:** Uzupełnij tabelę:

$$\begin{array}{c|cccc} s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & \\ s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & \\ s^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} & \\ s^{n-3} & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} & \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \\ s^0 & h_{n-1} & & & \end{array}$$

$$b_{n-1} = \frac{a_{n-1}a_{n-2} - a_n a_{n-3}}{a_{n-1}} = \frac{-1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-2} \\ a_{n-1} & a_{n-3} \end{vmatrix}$$

$$b_{n-3} = -\frac{1}{a_{n-1}} \begin{vmatrix} a_n & a_{n-4} \\ a_{n-1} & a_{n-5} \end{vmatrix}$$

$$c_{n-1} = -\frac{1}{b_{n-1}} \begin{vmatrix} a_{n-1} & a_{n-3} \\ b_{n-1} & b_{n-3} \end{vmatrix}$$



Algebraiczne kryteria stabilności

Kryterium Routha

- Krok 3:** Liczba pierwiastków o dodatniej części rzeczywistej jest równa liczbie zmian znaku w pierwszej kolumnie tablicy Routha. Dla układu stabilnego nie powinno być zmian znaku. Jest to warunek konieczny i wystarczający stabilności.

$$\begin{array}{c|ccc}
 s^n & a_n & a_{n-2} & a_{n-4} \\
 s^{n-1} & a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} \\
 s^{n-2} & b_{n-1} & b_{n-3} & b_{n-5} \\
 s^{n-3} & c_{n-1} & c_{n-3} & c_{n-5} \\
 \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\
 s^0 & h_{n-1} & &
 \end{array}$$



Algebraiczne kryteria stabilności

Kryterium Routha – przykład 1

- Wielomian charakterystyczny układu 2-go rzędu jest następujący:

$$\Delta(s) = a_2 s^2 + a_1 s + a_0$$

- Tablica Routha ma postać:

$$\begin{array}{c|cc} s^2 & a_2 & a_0 \\ s^1 & a_1 & 0 \\ s^0 & b_1 & \end{array}$$

gdzie:

$$b_1 = -\frac{1}{a_1} \begin{vmatrix} a_2 & a_0 \\ a_1 & 0 \end{vmatrix} = -\frac{1}{a_1} (-a_1 a_0) = a_0$$

Wynik: Warunek konieczny i wystarczający stabilności układu 2go rzędu – wszystkie współczynniki są tego samego znaku.



Algebraiczne kryteria stabilności

Kryterium Routha – przykład 3

- Wielomian charakterystyczny układu 3-go rzędu jest następujący:

$$\Delta(s) = s^3 + s^2 + 2s + 24$$

(bieguny układu: $1 \pm \sqrt{7}$, -3)

- Tablica Routha ma postać:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 2 \\ s^2 & 1 & 24 \\ s^1 & -22 & \\ s^0 & 24 & \end{array}$$

Wynik: Warunek konieczny spełniony. Dwie zmiany znaku w pierwszej kolumnie implikują dwa pierwiastki prawej półpłaszczyźnie płaszczyzny zmiennej zespolonej s . Układ **niestabilny**.



Algebraiczne kryteria stabilności

Kryterium Routha – przykład 4

- Wielomian charakterystyczny układu 3-go rzędu jest następujący:

$$\Delta(s) = s^3 + 2s^2 + 4s + K$$

Tablica Routha ma postać:

$$\begin{array}{c|cc} s^3 & 1 & 4 \\ s^2 & 2 & K \\ s^1 & 8-K & \\ s^0 & 2 & \\ & K & \end{array}$$

Wynik: $K > 0$ oraz $8 - K > 0 \rightarrow K < 8$

Układ będzie stabilny dla $K \in (0, 8)$



Algebraiczne kryteria stabilności

Stabilność względna

- Stabilność układów liniowych ciągłych wymaga aby wszystkie bieguny leżały w lewej półpłaszczyźnie płaszczyzny s . Stopień stabilności mówi jak daleko w lewej półpłaszczyźnie leżą bieguny.
- Aby użyć kryterium Routha/Hurwitza do wyznaczenia stabilności względnej, wystarczy zmienić zmienne tak, aby przesunąć oś urojoną w lewo.

- Przykład:** Rozważmy wielomian charakterystyczny

$$\Delta(s) = s^3 + 4s^2 + 6s + 4$$

- Chcąc sprawdzić, czy odległość biegunów od osi urojonej jest większa od 1 dokonujemy zmiany zmiennych: $s_2 = s + 1$ i sprawdzamy ponownie stabilność dla zmodyfikowanego wielomianu

$$\Delta(s_2) = (s_2 - 1)^3 + 4(s_2 - 1)^2 + 6(s_2 - 1) + 4 = s_2^3 + s_2^2 + s_2 + 1$$



Algebraiczne kryteria stabilności

Stabilność względna

$$\Delta(s_2) = s_2^3 + s_2^2 + s_2 + 1$$

s_2^3	1	1
s_2^2	1	1
s_2^1	0	0
s_2^0	1	0

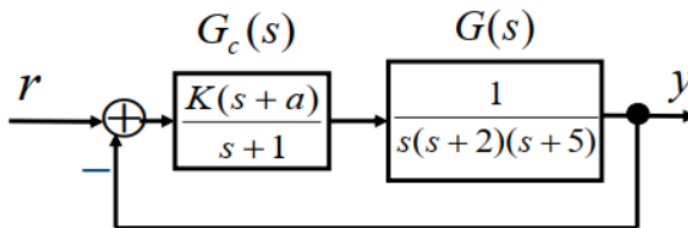
Jeden pierwiastek na lewo od przesuniętej osi i dwa pierwiastki na przesuniętej osi.



Algebraiczne kryteria stabilności

Przykład

- Wybierz K i a tak aby układ był stabilny



$$s(s+1)(s+2)(s+5) + K(s+a) = 0 \Leftrightarrow$$
$$s^4 + 8s^3 + 17s^2 + (K+10)s + Ka = 0$$

$$1 + G_c(s)G(s) = 0$$

$$1 + \frac{K(s+a)}{s(s+1)(s+2)(s+5)} = 0$$



Algebraiczne kryteria stabilności

Przykład

- Tablica Routha:

s^4	1	17	Ka
s^3	8	$K+10$	0
s^2	b_3	Ka	
s^1	c_3		
s^0	Ka		

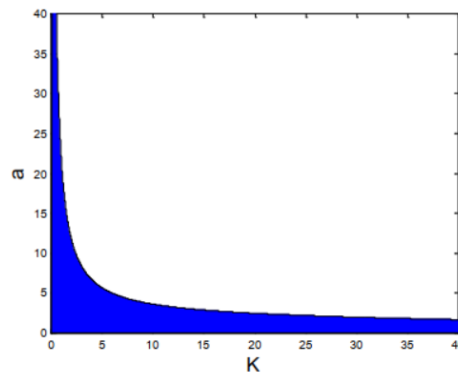
$$b_3 = \frac{126 - K}{8}, \quad c_3 = \frac{b_3(K + 10) - 8Ka}{b_3}$$

- Warunki stabilności:

$$K < 126$$

$$Ka > 0$$

$$a < \frac{(K + 10)(126 - K)}{64K}$$





Stabilność w dziedzinie częstotliwości

Kryterium stabilności Nyquista

- Znając charakterystyki częstotliwościowe układu można je wykorzystać do odpowiedzi na pytanie:

Jak można zbadać stabilność przy pomocy charakterystyk częstotliwościowych?

- Do badania stabilności w dziedzinie częstotliwości służy metoda zwana kryterium Nyquista podana przez H. Nyquista z Bell Labs w roku 1932 przy okazji budowy długodystansowych linii telekomunikacyjnych
- Będziemy wykorzystywać własności konturów na płaszczyźnie zmiennej zespolonej s . Potrzebujemy do tego zasady argumentu Cauchy'ego



Stabilność w dziedzinie częstotliwości

Kryterium stabilności Nyquista

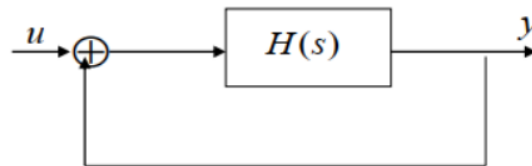
- Pozwala na badanie stabilności układu zamkniętego (sprzężenie zwrotne) na podstawie charakterystyk układu otwartego (z otwartą pętlą sprzężenia zwrotnego)
- Dzięki niemu możemy określić jakie będzie zachowanie układu po zamknięciu pętli sprzężenia zwrotnego (czy będzie stabilny)
- W szczególności pozwala na stwierdzenie czy układ niestabilny stanie się stabilny po zamknięciu pętli sprzężenia zwrotnego
- Badamy charakterystykę amplitudowo-fazową układu otwartego



Stabilność w dziedzinie częstotliwości

Układ otwarty->układ zamknięty

- Transmitancja układu otwartego: $H(s)$



- Transmitancja operatorowa i widmowa układu zamkniętego z ujemnym sprzężeniem zwrotnym:

$$\frac{H(s)}{1 + H(s)} = \frac{H(j\omega)}{1 + H(j\omega)}$$

- Równanie charakterystyczne układu zamkniętego:

$$1 + H(s) = 0 \quad \rightarrow \quad 1 + H(j\omega) = 0$$



Stabilność w dziedzinie częstotliwości

Charakterystyka amplitudowo-fazowa

$$T(s) = \frac{1}{s+1} \xrightarrow{s=j\omega} \frac{1}{j\omega+1} = \frac{1-j\omega}{\omega^2+1}$$

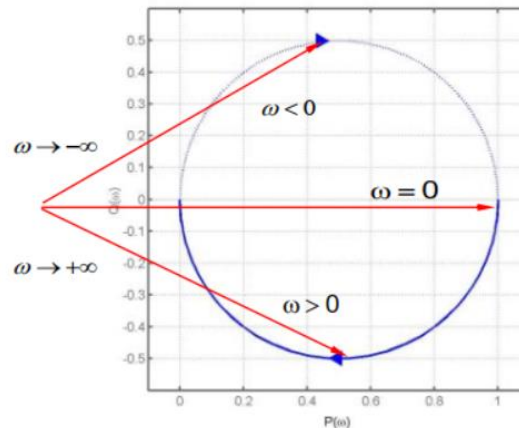
$$\begin{aligned} F_{af}(\omega) &= \frac{1-j\omega}{\omega^2+1} = \\ &= \frac{1}{\omega^2+1} + j \frac{-\omega}{\omega^2+1} = \\ &= P(\omega) + jQ(\omega) \end{aligned}$$

Część charakterystyki dla $\omega < 0$

Jest symetrycznym odbiciem części $\omega > 0$

Względem osi rzeczywistej

(ujemne pulsacje odwracają fazę)





Stabilność w dziedzinie częstotliwości

Kryterium Nyquista

- Równanie charakterystyczne układu zamkniętego ma wszystkie pierwiastki w lewej półpłaszczyźnie zmiennej zespolonej s ...
- ... przy założeniu, że równanie charakterystyczne układu otwartego o transmitancji $H(j\omega)$ ma k pierwiastków w prawej półpłaszczyźnie (a zatem $n - k$ w lewej półpłaszczyźnie)...
- ... wtedy i tylko wtedy gdy ...
- ... przyrost argumentu wyrażenia $1 + H(j\omega)$ wynosi:
 - $k\pi$ przy zmianie ω od 0 do $+\infty$
 - $2k\pi$ przy zmianie ω od $-\infty$ do $+\infty$

Argument liczby zespolonej – miara kąta skierowanego między wektorem reprezentującym liczbę zespoloną na płaszczyźnie zespolonej, a osią rzeczywistą.



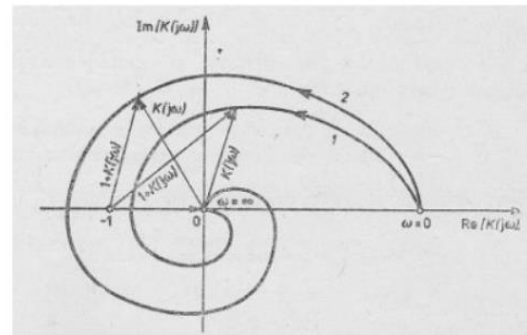
Stabilność w dziedzinie częstotliwości

Kryterium Nyquista

- Układ zamknięty jest stabilny...
- ... przy założeniu, że równanie charakterystyczne układu otwartego ma k pierwiastków w prawej półpłaszczyźnie...
- ...wtedy i tylko wtedy gdy ...
- Charakterystyka amplitudowo-fazowa układu otwartego $H(j\omega)$ obejmuje w kierunku dodatnim punkt $(-1, j0)$:

$\frac{k}{2}$ razy przy zmianie ω od 0 do $+\infty$

k razy przy zmianie ω od $-\infty$ do $+\infty$



1. nie obejmuje $(-1, j0)$

2. 1 x obejmuje $(-1, j0)$



Stabilność w dziedzinie częstotliwości

Kryterium Nyquista

- Jeżeli chcemy wiedzieć ile zer $1 + KG(s)$ jest w prawej półpłaszczyźnie płaszczyzny s , weź funkcję $F(j\omega) = 1 + KG(j\omega)$ i kontur A obejmujący całą prawą półpłaszczyznę.

- Użyj $N = Z - P$

gdzie:

P jest dane: liczba biegunów $G(s)$

Narysuj $F(j\omega)$ i policz liczbę okrążeń N zgodnych z ruchem wskazówek zegara punktu $(0, 0)$

Liczba biegunów układu zamkniętego leżących w prawej półpłaszczyźnie wynosi $Z = N + P$

Stabilność w dziedzinie częstotliwości

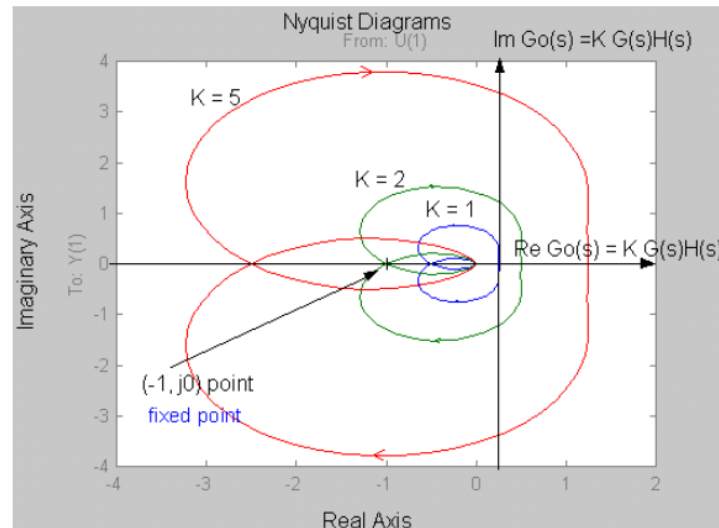
Kryterium Nyquista - Przykład

$$G(s) = \frac{1}{s^3 + 2s^2 + 3s + 4}$$

$$Q(s) = s^3 + 2s^2 + 3s + 4 = 0$$

s^3	1	3
s^2	2	4
s^1	1	0
s^0	4	0

$$P = 0.$$



$$2 > K > 0$$

układ stabilny

$$K \geq 2$$

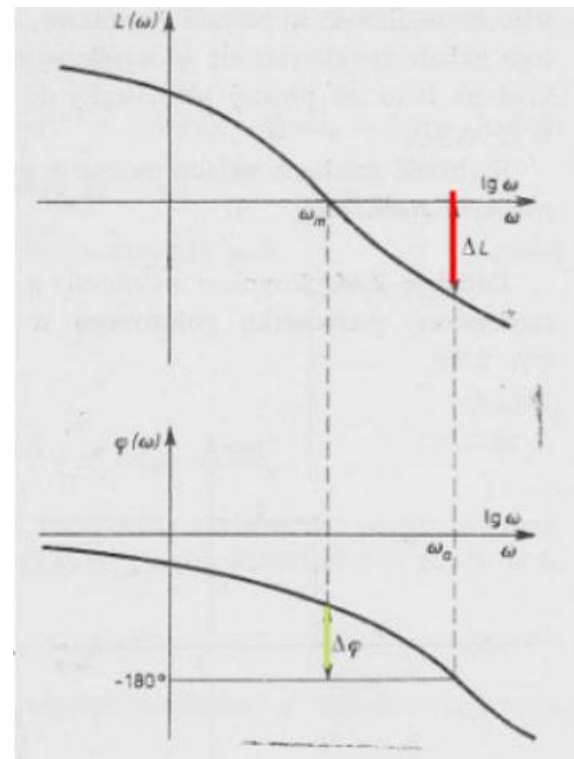
układ niestabilny

$$0 > K > -4$$

układ stabilny

Zapas wzmocnienia i zapas fazy

- Wzrost wzmocnienia, który powoduje, że układ znajduje się na granicy stabilności nazywamy **zapasem wzmocnienia** układu (ang. **gain margin**). Można go odczytać z wykresu Bode'go
- Drugą miarą stabilności względnej jest gaza, którą należy dodać w punkcie i wzmocnieniu jednostkowym na wykresie Nyquista aby obrócić go do $(-1,0j)$. Nazywa się – **zapas fazy** (ang. **phase margin**)



Zapas wzmocnienia i zapas fazy

- Zapasy wzmocnienia (amplitudy) i fazy pozwalają na określenie jak wiele brakuje układowi do znalezienia się na granicy stabilności

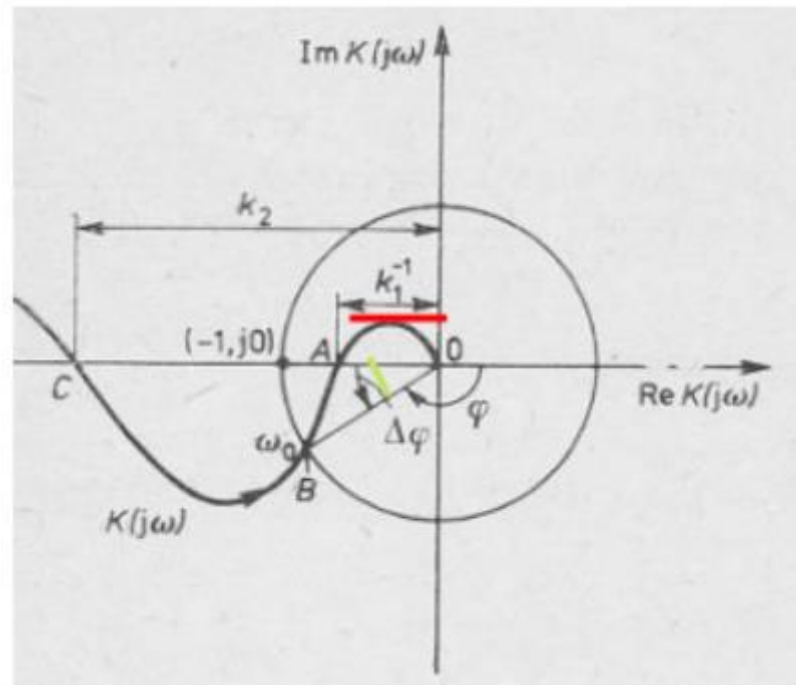
- Mogą być odczytane z wykresu Nyquista lub wykresów Bode'go układu otwartego

- Zapas wzmocnienia:

$$\Delta L_1 = 20 \ln k_1 \quad \Delta L_2 = 20 \ln k_2$$

- Zapas fazy:

Kąt zawarty między osią liczb rzeczywistych a półprostą łączącą początek układu współrzędnych z punktem przecięcia charakterystyki amplitudowo-fazowej układu otwartego z okręgiem o promieniu 1





Zapas wzmocnienia i zapas fazy

Uwagi

- Pojęcie zapasu wzmocnienia i fazy mają sens tylko dla układów, które nie mają biegunów wewnątrz konturu Nyquista – stabilnych
- Dla stabilnych układów rzędu pierwszego i drugiego wykres Nyquista nigdy nie przecina ujemnej półosi rzeczywistej i zapas wzmocnienia jest nieskończony
- Dla układów rzędów wyższych niż drugi może być więcej niż jedno przecięcie z ujemną półosią rzeczywistą. Taki układ ma więcej niż jeden zapas wzmocnienia

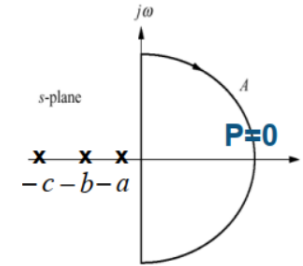
Zapas wzmocnienia i zapas fazy

Przykład

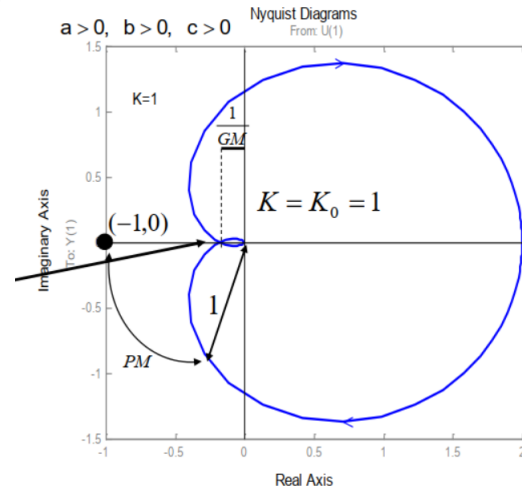
- Rozważmy następujący przypadek:

$$KG(s) = \frac{K}{(s+a)(s+b)(s+c)}$$

- Jakie wzmocnienie przesunie ten punkt do $(1,0j)$? Czyli spowoduje, że układ zamknięty będzie na granicy stabilności?



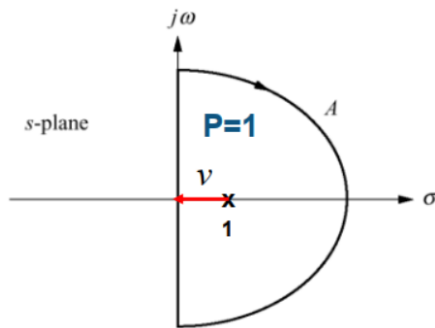
- $K = K_0 * GM$





Zapas wzmocnienia i zapas fazy

Przykład – układ niestabilny



$$|KG(j0)| = \frac{K}{|v|} = K, \quad \angle KG(j0) = -\pi$$

$$Z = N + P = -1 + 1 = 0 \text{ dla } K > 1$$

$$1 + KG(s) = 0 \Leftrightarrow s - 1 + K = 0$$

$$K - 1 > 0 \Leftrightarrow K > 1 \text{ stabilny}$$

