



UNIWERSYTET
MIKOŁAJA KOPERNIKA
W TORUNIU

Wydział Fizyki, Astronomii
i Informatyki Stosowanej

Podstawy Automatyki

Podstawowe człony układów dynamicznych

dr inż. Rafał Szczepański

www.umk.pl/~szczepi

szczepi@umk.pl

12.01.2025



Plan prezentacji

Zależności wielomianowe

Podstawowe człony dynamiczne

Schematy i grafy

Schematy blokowe

Grafy przeływu



Zależności wielomianowe

Rozkład wielomianu

- Dowolny wielomian:

$$a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \dots + a_1 s + a_0$$

- Może zostać rozłożony na czynniki:

$$a_n (s - r_1)(s - r_2) \dots (s - r_n)$$

- Czynniki r_i , $i = 1, \dots, n$ są pierwiastkami wielomianu
- Pierwiastków jest dokładnie n – rzeczywistych i zespolonych



Zależności wielomianowe

Pierwiastki wielomianu

- Pierwiastki wielomianu o współczynnikach rzeczywistych mogą być:

Zerowe

Rzeczywiste

Zespolone sprzężone

- Każdemu rodzajowi odpowiada czynnik rozkładu odpowiednio:

s

$(s - r)$ lub $(Ts - 1)$

$[s - \text{Re}(r) + j\text{Im}(r)][s - \text{Re}(r) - j\text{Im}(r)] = (T^2s^2 + 2\zeta Ts + 1)$



Zależności wielomianowe

Rozkład transmitancji

- Rozkładając wielomiany licznika i mianownika transmitancji na czynniki otrzymujemy

$$G(s) = \frac{L(s)}{M(s)} = \frac{\sum_{i=0}^m b_i s^i}{\sum_{j=0}^n a_j s^j} = k \frac{\prod_{i=1}^m (s - z_i)}{\prod_{j=1}^n (s - z_j)}, \quad z_i - \text{zera układu}; z_j - \text{bieguny układu}$$

- Opis układu przez wzmocnienie, zero i bieguny jest stosowany jako równoważny transmitancji



Zależności wielomianowe

Rozkład transmitancji

- Uwzględniając charakter zer/biegunów (zerowe/rzeczywiste/zespolone) otrzymujemy:

$$G(s) = k \frac{\prod_{i=1}^{m_1} (T_i s - 1) \prod_{i=1}^{m_2} (T_i^2 s^2 + 2\zeta_i T_i s + 1)}{s^{n_0} \prod_{j=1}^{n_1} (T_j s - 1) \prod_{j=1}^{n_2} (T_j^2 s^2 + 2\zeta_j T_j s + 1)}$$

gdzie:

m_1 – liczba zer rzeczywistych

m_2 – liczba zer zespolonych

n_0 – liczba biegunów zerowych

n_1 – liczba biegunów rzeczywistych

n_2 – liczba biegunów zespolonych



Zależności wielomianowe

Rozkład transmitancji

- Czyli każdy układ zapisany w postaci transmitancji możemy przestawić w postać pewnej kombinacji układów prostszych co najwyżej drugiego rzędu
- Dzięki rozkładowi transmitancji możemy m.in. łatwo wyznaczyć charakterystyki logarytmiczne układów złożonych na podstawie charakterystyk układów prostszych
- Te prostsze układy klasyfikujemy jako **podstawowe człony dynamiczne**



Podstawowe człony dynamiczne

- Proporcjonalny (bezinercyjny)
- **Inercyjny pierwszego rzędu**
- **Całkujący** (całkujący idealny)
- Całkujący z inercją (całkujący rzeczywisty)
- **Różniczkujący** (różniczkujący idealny)
- Różniczkujący z inercją
- **Inercyjny drugiego i wyższych rzędów**
- **Oscylacyjny**
- **Opóźniający**



Podstawowe człony dynamiczne

Proporcjonalny - definicja

- Opis w dziedzinie czasu:

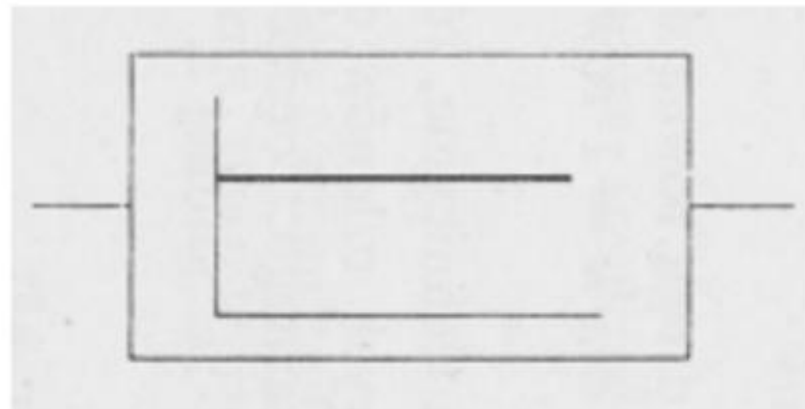
$$y = ku$$

k – współczynnik wzmocnienia – od niego zależy wzmocnienie sygnału wyjściowego w stanie ustalonym

Brak zmiennych stanu, bieżąca wartość odpowiedzi zależy tylko i wyłącznie od bieżącego wymuszenia

Transmitancja:

$$G(s) = k$$



$$A = [0], B = [0]$$

$$C = [0], D = [k]$$

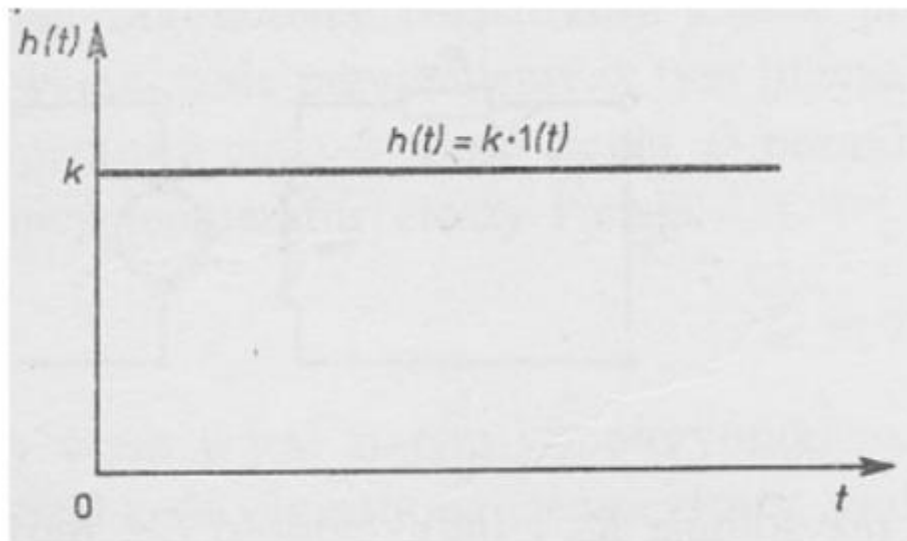


Podstawowe człony dynamiczne

Proporcjonalny – charakterystyka skokowa

$$h(t) = |k|1(t)$$

Ujemne wzmocnienie powoduje zmianę fazy o 180 stopni.

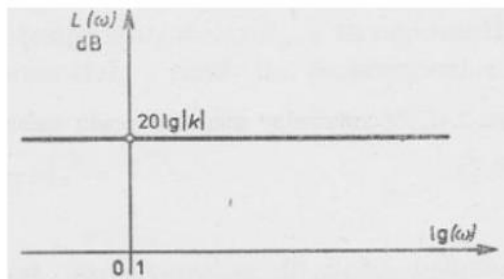




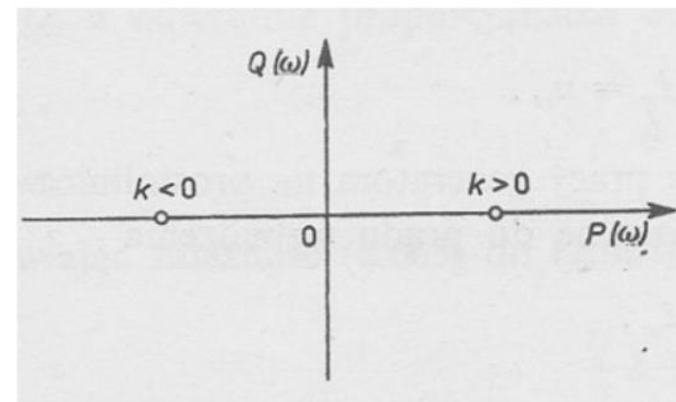
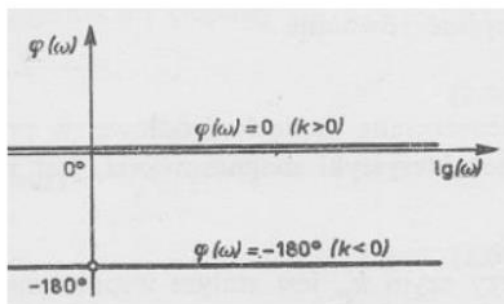
Podstawowe człony dynamiczne

Proporcjonalny – charakterystyki częstotliwościowe

amplitudowa



fazowa



amplitudowo-fazowa

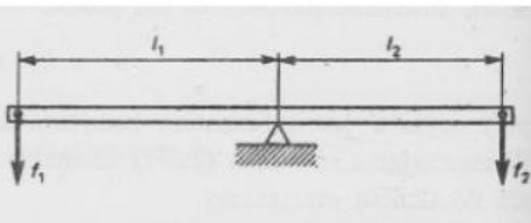
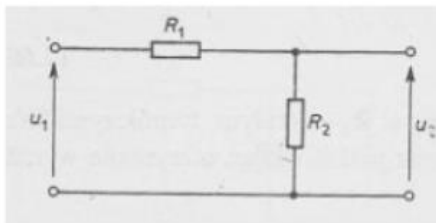
Podstawowe człony dynamiczne

Proporcjonalny – przykłady

- Rezystancyjny dzielnik napięcia (wymuszenie i odpowiedź – napięcie)

$$u_2 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} u_1$$

- Dźwignia dwuramienna (wymuszenie i odpowiedź – siła)



$$f_2 = \frac{l_1}{l_2} f_1$$



Podstawowe człony dynamiczne

Inercyjny 1-go rzędu - definicja

- Opis w dziedzinie czasu:

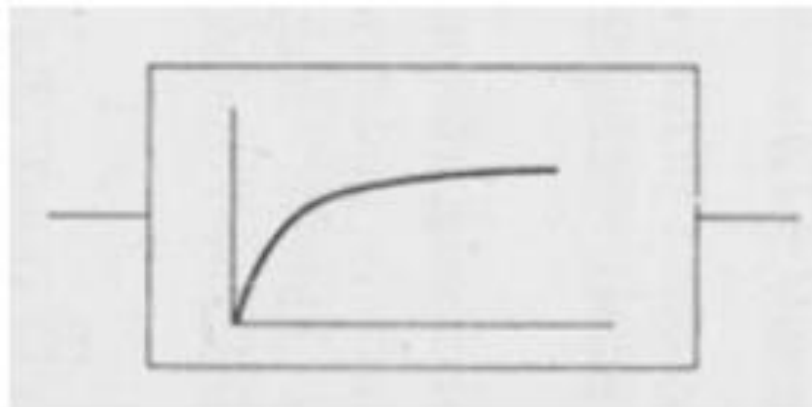
$$T\dot{y} + y = ku$$

k – współczynnik wzmocnienia

T – stała czasowa

Transmitancja:

$$G(s) = \frac{k}{Ts + 1}$$



$$A = \left[-\frac{1}{T}\right], B = \left[\frac{k}{T}\right]$$
$$C = [1], D = [0]$$

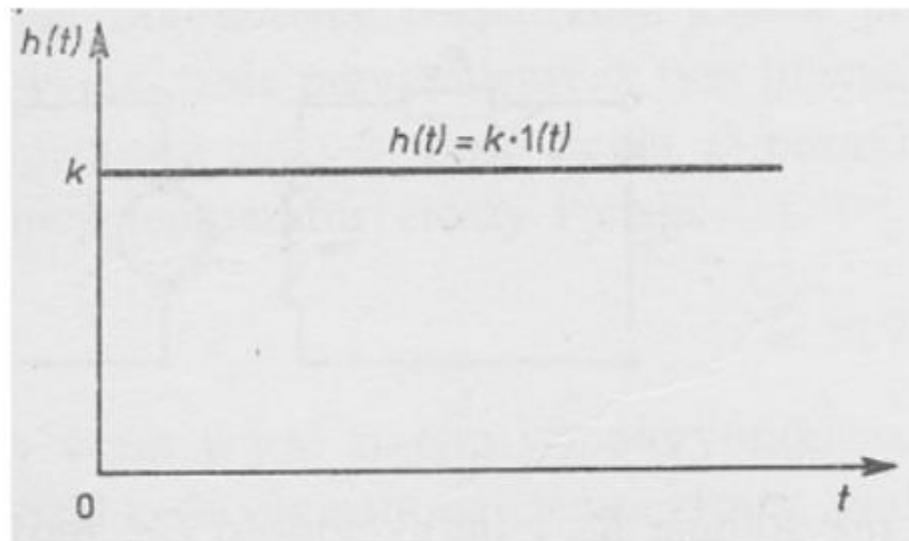


Podstawowe człony dynamiczne

Inercyjny 1-go rzędu – charakterystyka skokowa

$$h(t) = k(1 - e^{-\frac{t}{T}})$$

- Stała czasowa T określa szybkość dochodzenia do stanu ustalonego
- Im jest mniejsza tym dochodzenie szybsze
- Od niej zależy inercja członu



Podstawowe człony dynamiczne

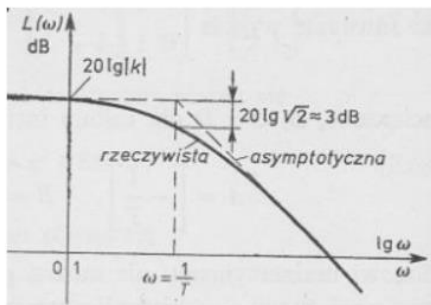
Inercyjny 1-go rzędu – charakterystyki częstotliwościowe

► Filtr dolnoprzepustowy !

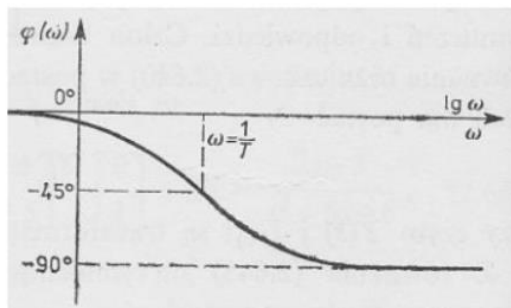
$$G(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T}$$

$$L(\omega) = 20 \lg |G(j\omega)| = 20 \lg \frac{|k|}{\sqrt{1 + (\omega T)^2}}$$

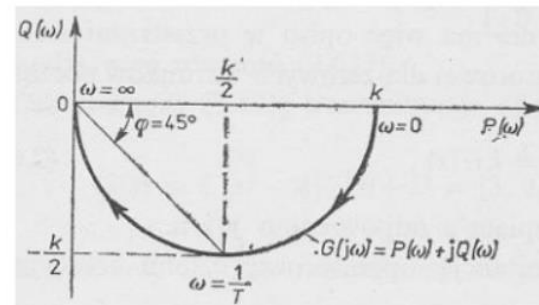
$$L(\omega) = \begin{cases} 20 \lg |k| & \text{dla } \omega < \frac{1}{T} \\ 20 \lg \frac{|k|}{T} - 20 \lg \omega & \text{dla } \omega \geq \frac{1}{T} \end{cases}$$



amplitudowa



fazowa



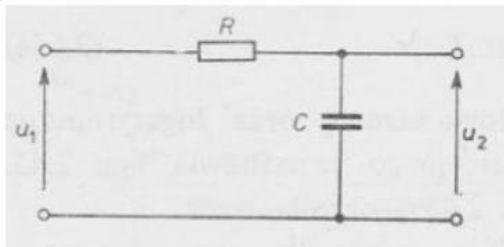
amplitudowo-fazowa



Podstawowe człony dynamiczne

Inercyjny 1-go rzędu – przykłady

- Czwórnik RC



$$G(j\omega) = \frac{k}{1 + j\omega T}$$

$$RC\dot{u}_2 + u_2 = u_1$$

Ile wynosi T i k ?

- Obcowzbudny generator prądu stałego (wymuszenia i odpowiedź – napięcia)
- Proces grzania ciała zanurzonego w cieczy (wymuszenie - temperatura cieczy, odpowiedź – temperatura ciała)



Podstawowe człony dynamiczne

Całkujący idealny- definicja

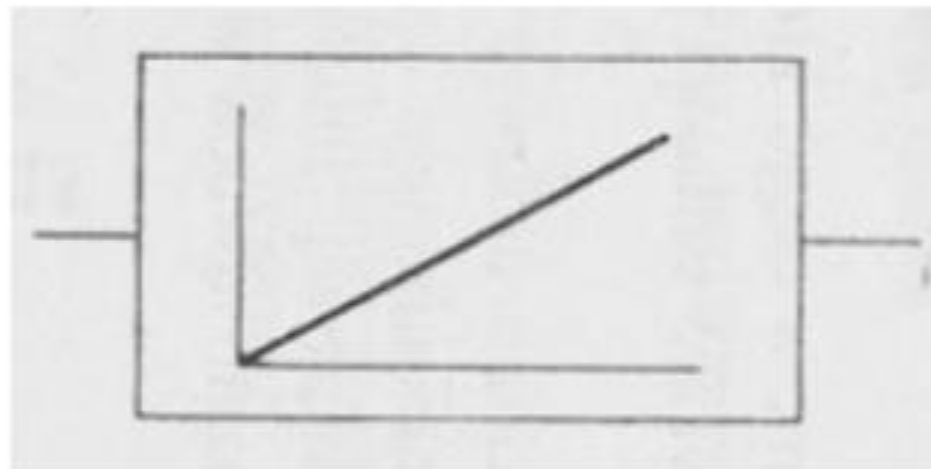
- Opis w dziedzinie czasu:

$$\dot{y} = ku$$

k – współczynnik wzmocnienia

Transmitancja:

$$G(s) = \frac{k}{s}$$



$$A = [0], B = [k]$$

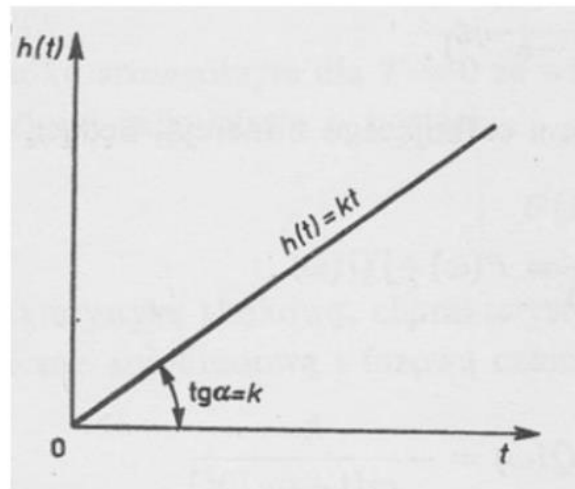
$$C = [1], D = [0]$$



Podstawowe człony dynamiczne

Całkujący idealny- charakterystyka skokowa

- Całkowanie sygnału wejściowego
- Liniowe narastanie. Prędkość narastania zależy od wzmocnienia prędkościowego k



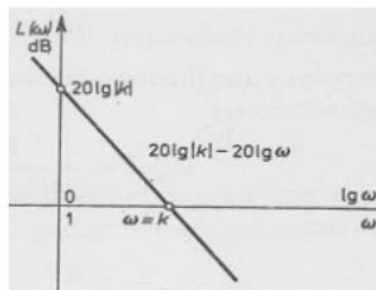
$$h(t) = kt$$



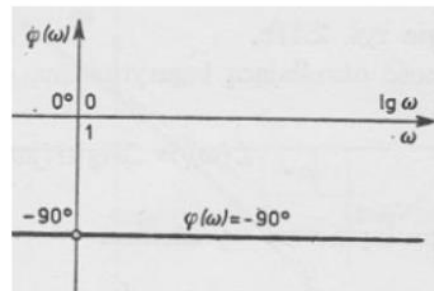
Podstawowe człony dynamiczne

Całkujący idealny- charakterystyki częstotliwościowe

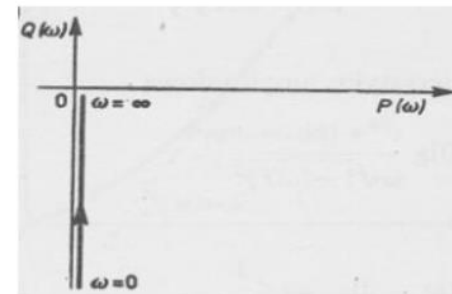
$$G(j\omega) = \frac{k}{j\omega}$$



amplitudowa



fazowa



amplitudowo-fazowa



Podstawowe człony dynamiczne

Całkujący idealny – przykłady

- Idealny kondensator dla wymuszania prądowego (odpowiedzią jest napięcie):

$$i = C \frac{du}{dt} \quad \frac{du}{dt} = \frac{1}{C} i$$

- Idealna cewka dla wymuszenia napięciowego (odpowiedzią jest prąd):

$$u = L \frac{di}{dt} \quad \frac{di}{dt} = \frac{1}{L} u$$



Podstawowe człony dynamiczne

Całkujący idealny – przykłady

- Pomiar pozycji (wymuszenia – prędkość kątowa koła pojazdu – przebyta droga pojazdu)
- Zbiornik bez odpływu
- Zbiornik z regulatorem odpływu (stały odpływ)
- Siłownik hydrauliczny



Podstawowe człony dynamiczne

Całkujący rzeczywisty - definicja

- Opis w dziedzinie czasu:

$$T\ddot{y} + \dot{y} = ku$$

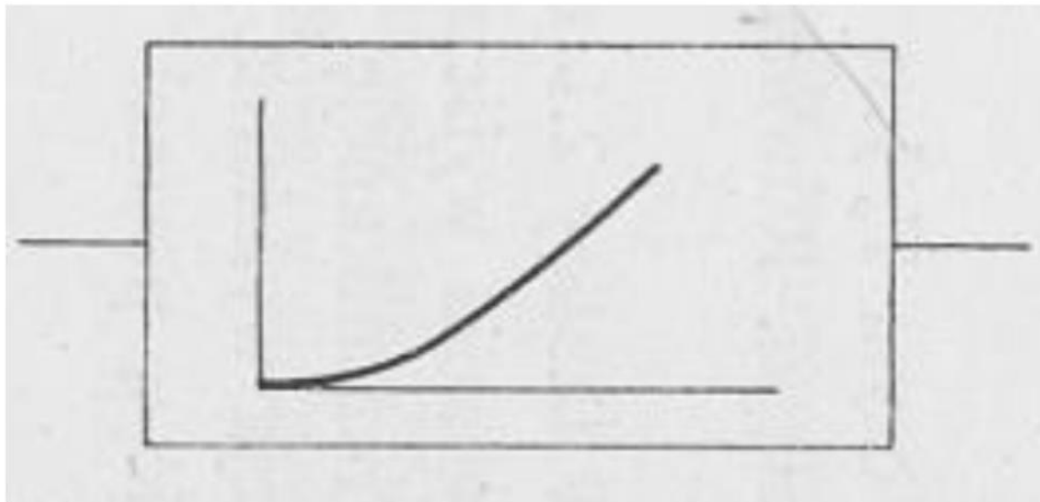
k – współczynnik wzmocnienia –
stosunek pochodnej odpowiedzi do
wymuszenia w stanie ustalonym

T – stała czasowa

Transmitancja:

$$G(s) = \frac{k}{s(1 + sT)}$$

- Kaskadowe połączenie członu
całkującego idealnego i inercyjnego
1-go rzędu



$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & -\frac{1}{T} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{k}{T} \end{bmatrix}$$

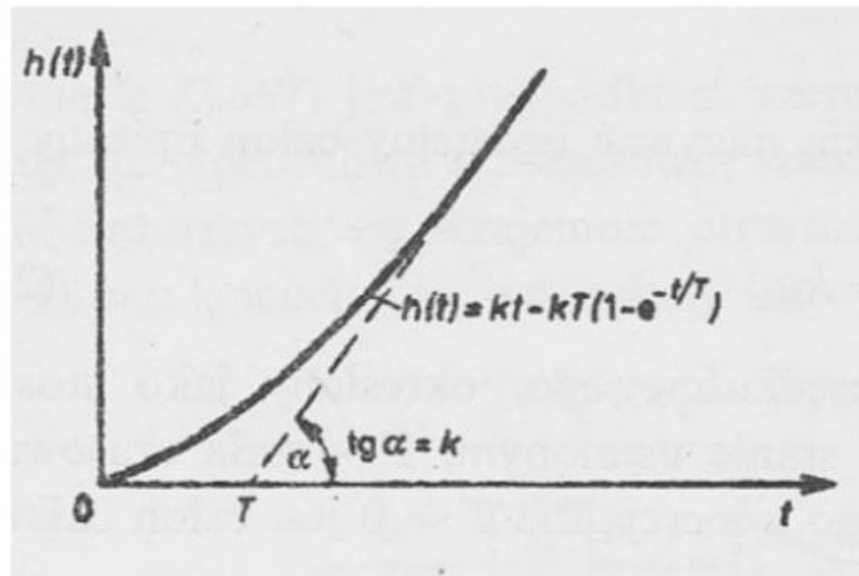
$$C = [1 \quad 0], D = [0]$$



Podstawowe człony dynamiczne

Całkujący rzeczywisty – charakterystyka skokowa

- Narastanie uzyskuje odpowiednią prędkość dopiero po pewnym czasie – zależnym od stałej czasowej T



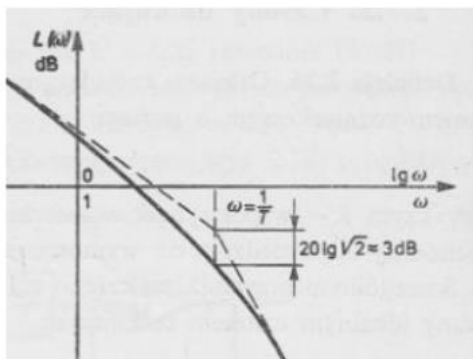
Podstawowe człony dynamiczne

Całkujący rzeczywisty - charakterystyki częstotliwościowe

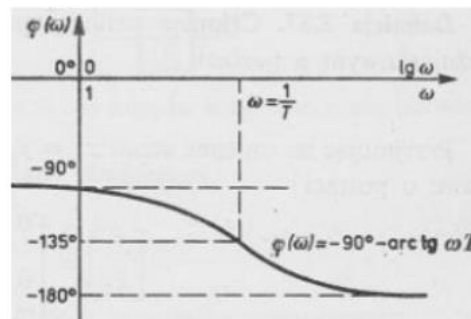
$$G(j\omega) = \frac{k}{j\omega(1+j\omega T)}$$

$$L(\omega) = 20\lg|G(j\omega)| = 20\lg \frac{|k|}{\omega\sqrt{1+(\omega T)^2}}$$

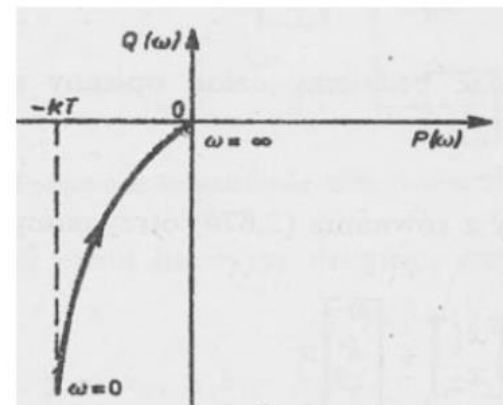
$$L(\omega) = \begin{cases} 20\lg|k| - 20\lg\omega & \text{dla } \omega < \frac{1}{T} \\ 20\lg\frac{|k|}{T} - 40\lg\omega & \text{dla } \omega \geq \frac{1}{T} \end{cases}$$



amplitudowa



fazowa



amplitudowo-fazowa



Podstawowe człony dynamiczne

Różniczkujący idealny - definicja

- Opis w dziedzinie czasu:

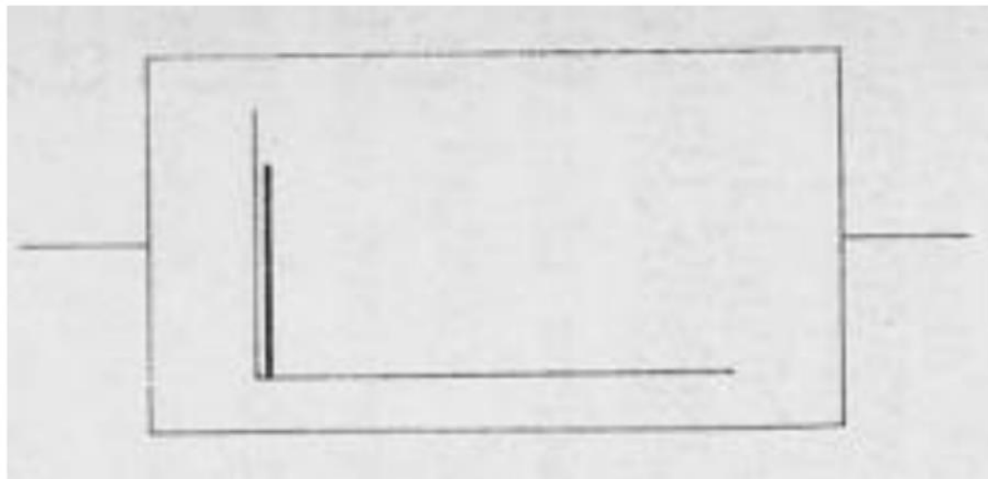
$$y = k\dot{u}$$

k – współczynnik wzmocnienia –
stosunek odpowiedzi do pochodnej
wymuszenia w stanie ustalonym

Nie można przypisać stanu – brak opisu
w przestrzeni stanu

Transmitancja:

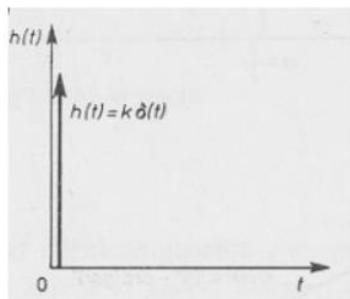
$$G(s) = k \cdot s$$



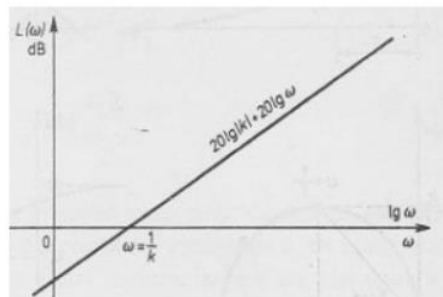


Podstawowe człony dynamiczne

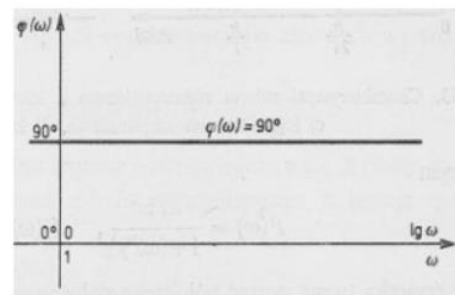
Różniczkujący idealny – charakterystyki



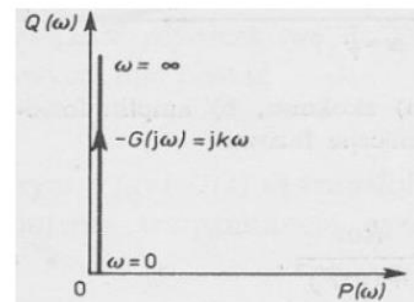
skokowa



amplitudowa



fazowa



amplitudowo-fazowa



Podstawowe człony dynamiczne

Różniczkujący idealny – przykłady

- Idealny kondensator (wymuszenie – napięcie, odpowiedź natężenie prądu)
- Idealna sprężyna (wymuszenie – siła, odpowiedź prędkość ruchomego końca)



Podstawowe człony dynamiczne

Różniczkujący rzeczywisty - definicja

- Opis w dziedzinie czasu:

$$T\dot{y} + y = k\dot{u}$$

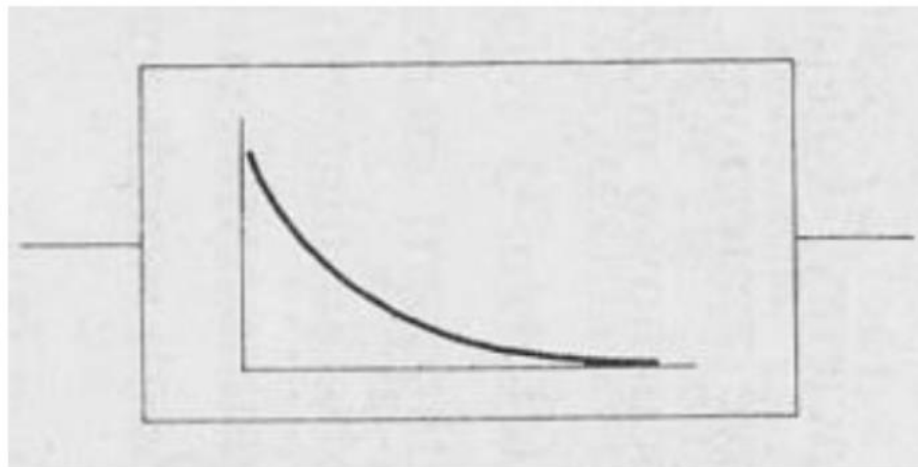
k – współczynnik wzmocnienia –
stosunek odpowiedzi do pochodnej
wymuszenia w stanie ustalonym

T – stała czasowa

Transmitancja:

$$G(s) = \frac{k \cdot s}{Ts + 1}$$

Kaskadowe połączenie członu
różniczkującego idealnego oraz
inercyjnego



$$A = \left[-\frac{1}{T}\right], B = \left[-\frac{k}{T^2}\right]$$

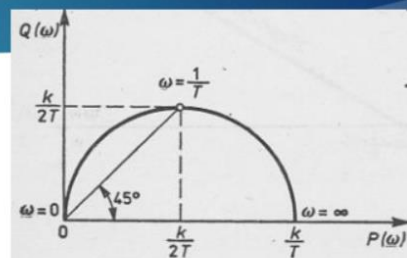
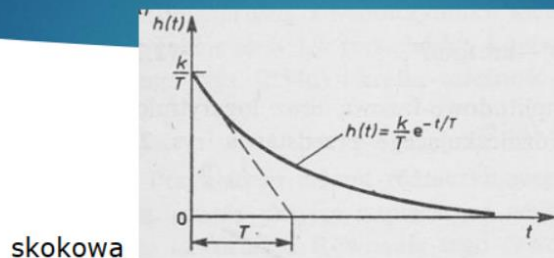
$$C = [1], D = \left[\frac{k}{T}\right]$$

$$\text{Zmienna stanu: } x = y - \frac{k}{T}u$$

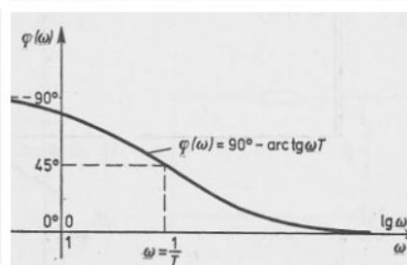
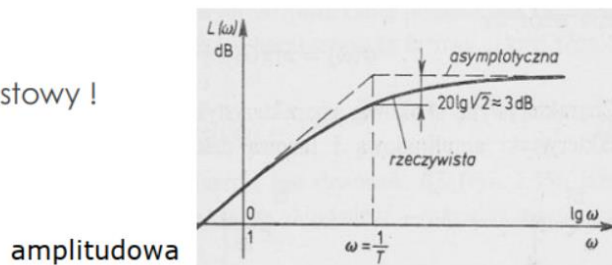


Podstawowe człony dynamiczne

Różniczkujący rzeczywisty – charakterystyki



► Filtr górnoprzepustowy !



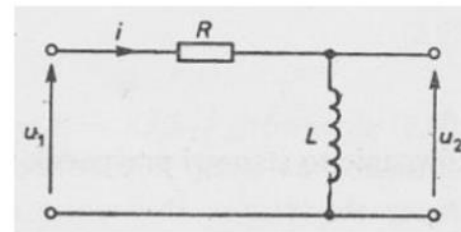
Podstawowe człony dynamiczne

Różniczkujący rzeczywisty– przykłady

- Czwórnik RL

$$u_1 = Ri + u_2 ; u_2 = L \frac{di}{dt}$$

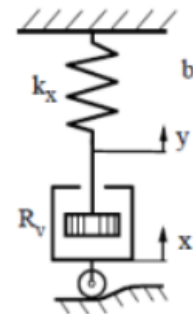
$$\frac{L}{R} \dot{u}_2 + u_2 = \frac{L}{R} \dot{u}_1 \quad T(s) = \frac{\frac{L}{R} s}{\left(\frac{L}{R} s + 1\right)}$$



- Amortyzator olejowy

$$R_v \frac{d(x-y)}{dt} = k_x y$$

$$G(s) = \frac{y(s)}{x(s)} = \frac{Ts}{Ts + 1} \quad T = \frac{R_v}{k_x}$$



Podstawowe człony dynamiczne

Inercyjny 2-go rzędu - definicja

- Opis w dziedzinie czasu:

$$T_1 \dot{x}_1 + x_1 = k_1 u$$

$$T_2 \dot{x}_2 + x_2 = k_2 x_1$$

$$T_1 T_2 \ddot{y} + (T_1 + T_2) \dot{y} + y = k_1 k_2 u$$

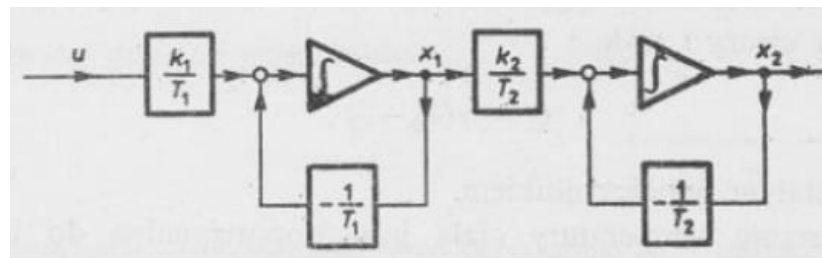
Transmitancja:

$$G(s) = \frac{k_1}{T_1 s + 1} \cdot \frac{k_2}{T_2 s + 1} = \frac{k_1 k_2}{(T_1 s + 1)(T_2 s + 1)}$$

Często przyjmuje się $k = k_1 k_2$

Jeżeli $T = T_1 = T_2$

$$G(s) = \frac{k}{(Ts + 1)^2}$$



$$A = \begin{bmatrix} -\frac{1}{T_1} & 0 \\ \frac{k_2}{T_2} & -\frac{1}{T_2} \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} \frac{k_1}{T_1} \\ 0 \end{bmatrix}$$

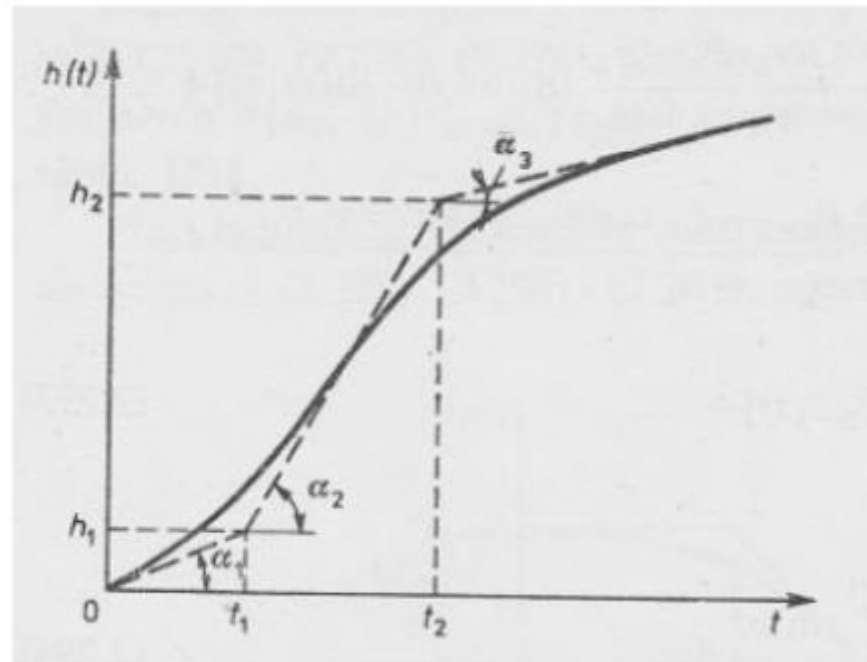
$$C = [0 \quad 1], D = [0]$$

Podstawowe człony dynamiczne

Inercyjny 2-go rzędu – charakterystyka skokowa

- Charakterystyka skokowa składa się z dwóch części, których przebieg zależy od stałych czasowych
- Stałe czasowe określają szybkość dochodzenia do stanu ustalonego

$$h(t) = k \left(1 - \frac{T_1}{T_1 - T_2} e^{-t/T_1} + \frac{T_2}{T_1 - T_2} e^{-t/T_2} \right)$$

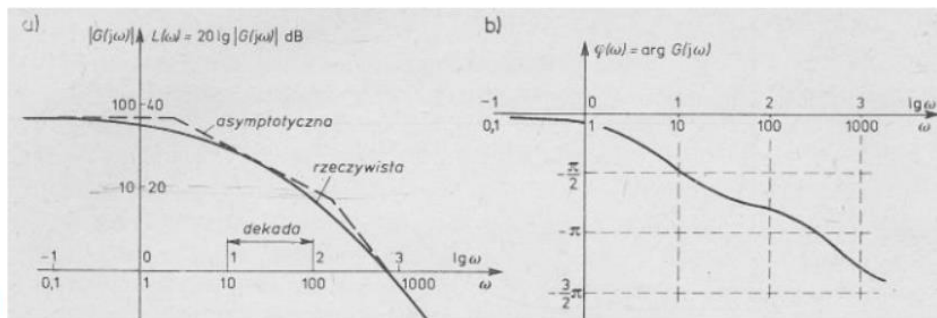


Podstawowe człony dynamiczne

Inercyjny 2-go rzędu – charakterystyki częstotliwościowe

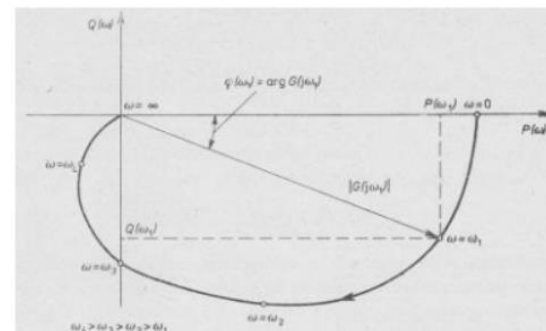
$$G(j\omega) = \frac{k}{(1 + j\omega T_1)(1 + j\omega T_2)}$$

► Podwójne załamanie !



amplitudowa

fazowa

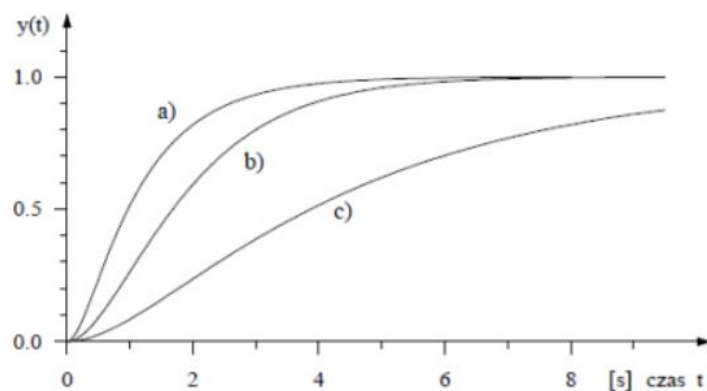


amplitudowo
-fazowa

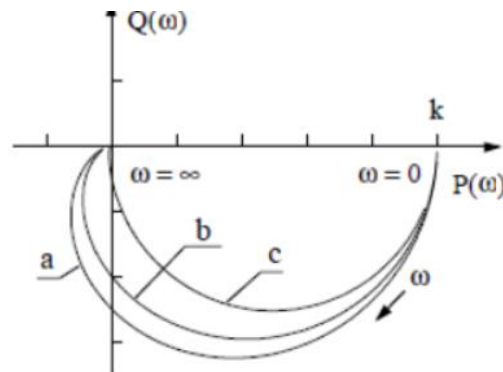


Podstawowe człony dynamiczne

Inercyjny 2-go rzędu – charakterystyki w przykładach



- a) $T_1 = 0,25$ [s], $T_2 = 1$ [s], b) $T_1 = T_2 = T = 1$ [s],
c) $T_1 = 4$ [s], $T_2 = 1$ [s], $k=1$, $x_0 = 1$



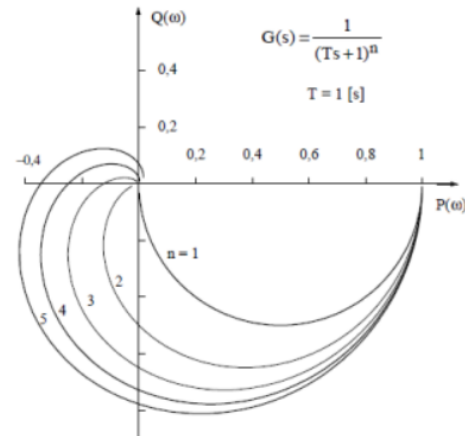
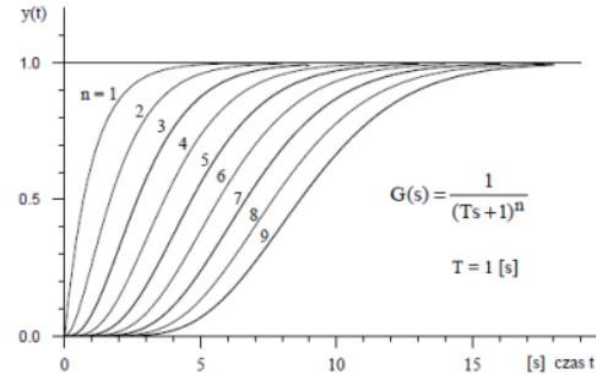
- a) $T_1 = T_2 = T = 1$ [s],
b) $T_1 = 1$ [s], $T_2 = 4$ [s],
c) $T_1 = 1$ [s], $T_2 = 100$ [s].



Podstawowe człony dynamiczne

Człony inercyjne wyższych rzędów

- Człon inercyjny n -tego rzędu powstaje przez kaskadowe (łańcuchowe, szeregowo) połączenie n członów inercyjnych pierwszego rzędu.



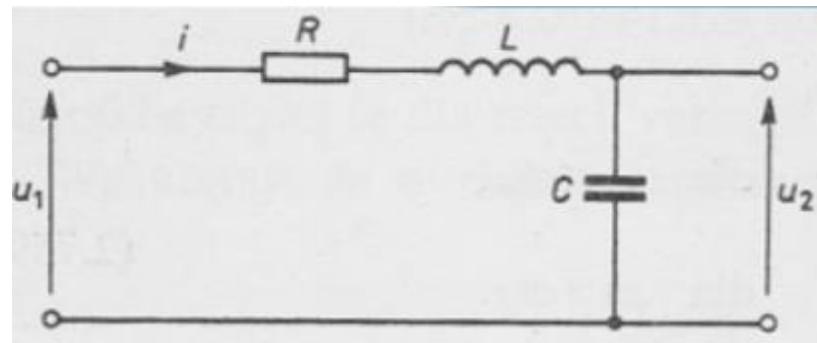
Podstawowe człony dynamiczne

Inercyjny 2-go rzędu – przykłady

- Czwórnik RLC
- Czy czwórnik RLC jest zawsze członem inercyjnym drugiego rzędu niezależnie od wartości R , L , C ?
- Nie, jest nim jeżeli mianownik transmitancji (równanie kwadratowe zmiennej s) ma pierwiastki rzeczywiste

$$T(s) = \frac{U_2}{U_1} = \frac{1}{LCs^2 + RCs + 1} \quad R > 2\sqrt{\frac{L}{C}}$$

- Jeżeli warunek nie jest jednak spełniony to jest to człon oscylacyjny



$$u_1 = Ri + L \frac{di}{dt} + u_2 ; i = C \frac{du_2}{dt}$$

$$\frac{d^2 u_2}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_2}{dt} + \frac{1}{LC} u_2 = \frac{1}{LC} u_1$$

$$LC \frac{d^2 u_2}{dt^2} + RC \frac{du_2}{dt} + u_2 = u_1$$



Podstawowe człony dynamiczne

Oscylacyjny- definicja

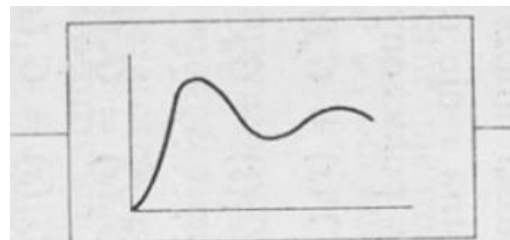
- Opis w dziedzinie czasu:

$$\ddot{y} + 2\zeta\omega_n\dot{y} + \omega_n^2 y = k\omega_n^2 u \quad \text{lub} \quad T_n\ddot{y} + 2\zeta T_n\dot{y} + y = ku$$

T_n – okres drgań własnych nietłumionych

ω_n – pulsacja drgań własnych nietłumionych

ζ – względny współczynnik tłumienia



Transmitancja:

$$G(s) = \frac{k\omega_n^2}{s^2 + 2\zeta\omega_n s + \omega_n^2} = \frac{k}{T_n s^2 + 2\zeta T_n s + 1}$$

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ \omega_n^2 & -2\zeta\omega_n \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 \\ k\omega_n^2 \end{bmatrix}$$

$$C = [1 \quad 0], D = [0]$$

$$x_1 = y, x_2 = \dot{y}$$

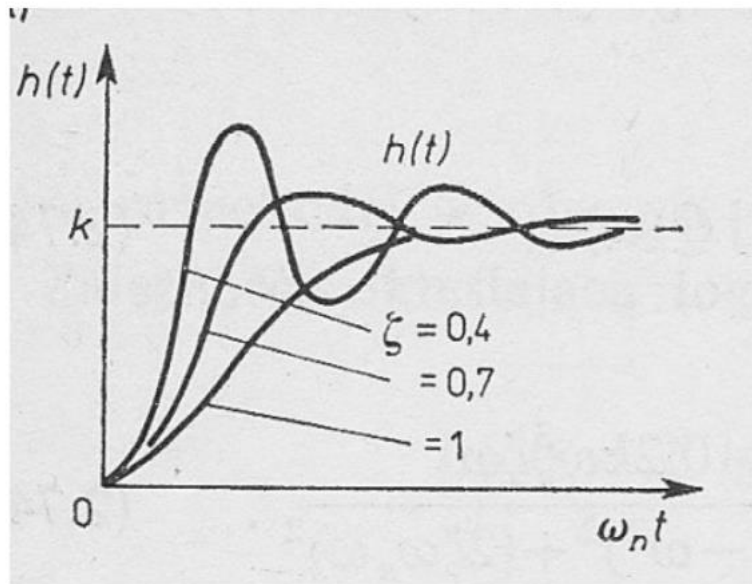
Współczynnik tłumienia:

- $0 < \zeta < 1$ – bieguny transmitancji są zespolone sprzężone (oscylacje)
- $\zeta \geq 1$ – bieguny są rzeczywiste – człon staje się inercyjnym drugiego rzędu



Podstawowe człony dynamiczne

Oscylacyjny- charakterystyka skokowa



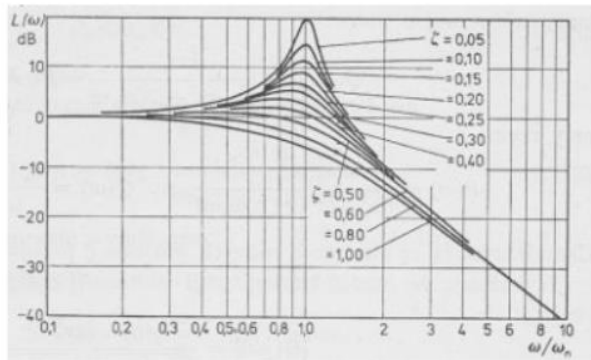
$$h(t) = k \left[1 - \frac{e^{-\varpi_w t}}{\sqrt{1-\zeta^2}} \sin(\varpi_w t + \varphi) \right]$$

$$\varpi_w = \sqrt{1-\zeta^2} \quad \text{pulsacja drgań własnych tłumionych}$$

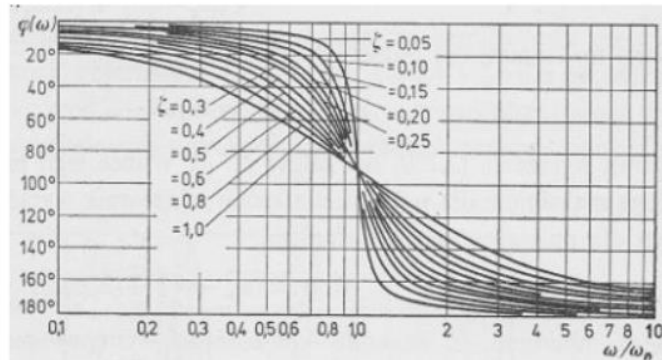
$$\varphi = \arctg \left(\frac{\sqrt{1-\zeta^2}}{\zeta} \right)$$

Podstawowe człony dynamiczne

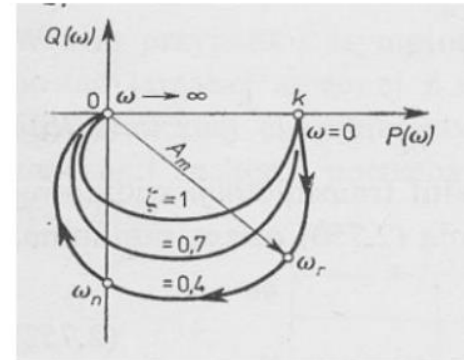
Oscylacyjny- charakterystyki częstotliwościowe



amplitudowa



fazowa

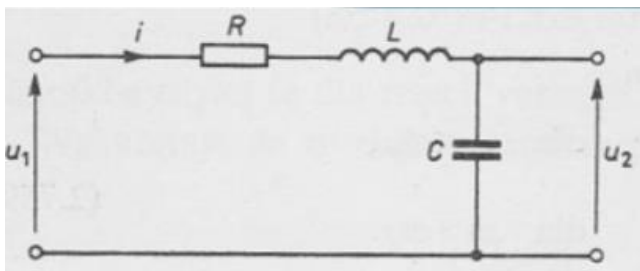


amplitudowo-fazowa

Podstawowe człony dynamiczne

Oscylacyjny– przykłady

- Czwórnik RLC



$$u_1 = Ri + L \frac{di}{dt} + u_2 ; i = C \frac{du_2}{dt}$$

$$\frac{d^2 u_2}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_2}{dt} + \frac{1}{LC} u_2 = \frac{1}{LC} u_1$$

$$\omega_n = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \zeta = \frac{R}{C} \sqrt{\frac{C}{L}} \quad k=1$$

- Zawór membranowy
- Sejsmograf



Podstawowe człony dynamiczne

Opóźniający - definicja

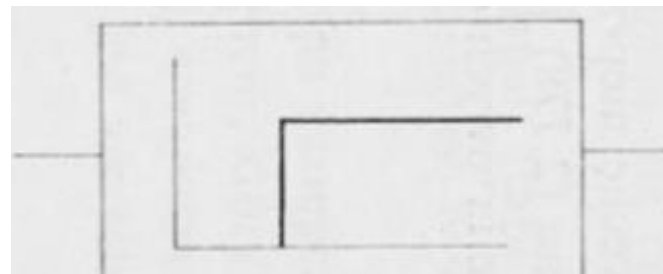
- Opis w dziedzinie czasu:

$$y(t) = ku(t - T_0)$$

Opis w przestrzeni stanu wymaga wprowadzenie wektora stanu o nieskończonej liczbie współrzędnych.

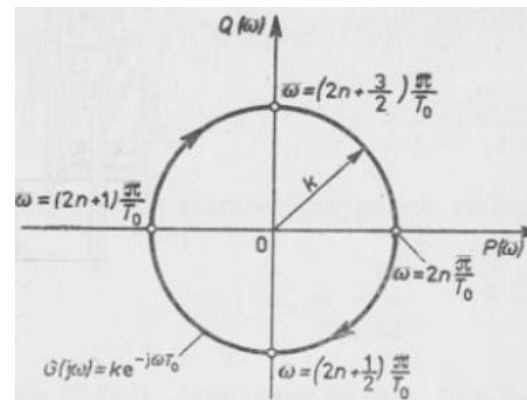
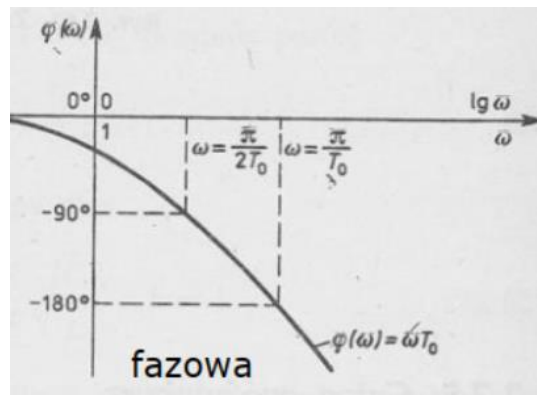
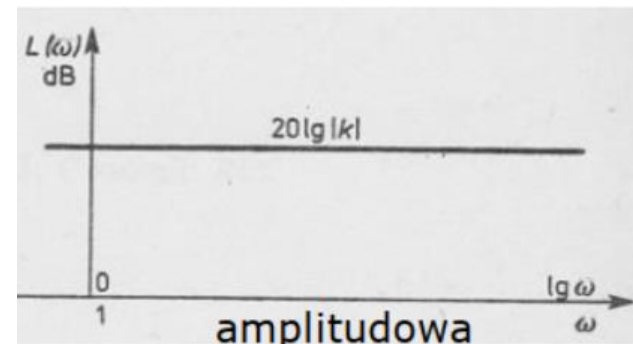
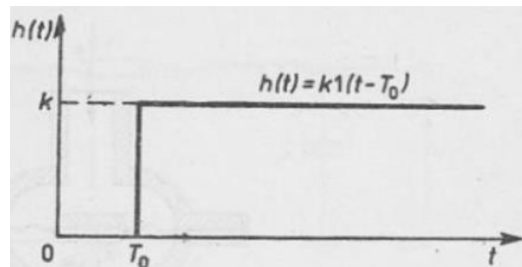
Transmitancja:

$$G(s) = ke^{-sT_0}$$



Podstawowe człony dynamiczne

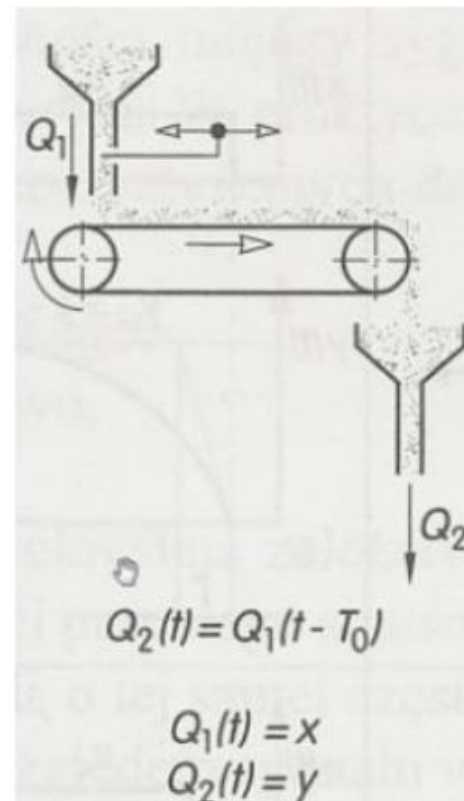
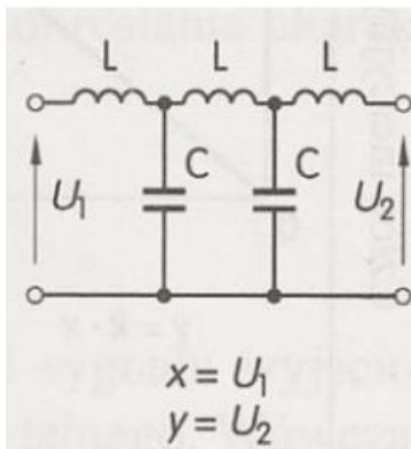
Opóźniający - charakterystyki



Podstawowe człony dynamiczne

Opóźniający – przykłady

- Transporter taśmowy
- Linia długa bez strat

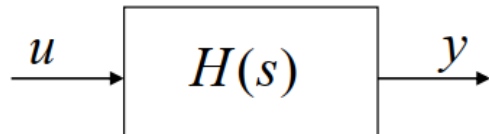




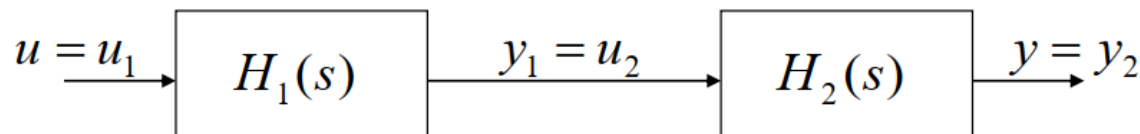
Schematy blokowe i grafy przepływu

Schematy blokowe

- Układ dynamiczny można przedstawić za pomocą schematu blokowego (ang. *block diagram*)



- Reguła #1: połączenie kaskadowe lub szeregowe (ang. *series connection*)



$$Y(s) = Y_2(s) = H_2(s)U_2(s) = H_2(s)Y_1(s) = H_2(s)H_1(s)U_1(s) = H_2(s)H_1(s)U(s)$$

czyli

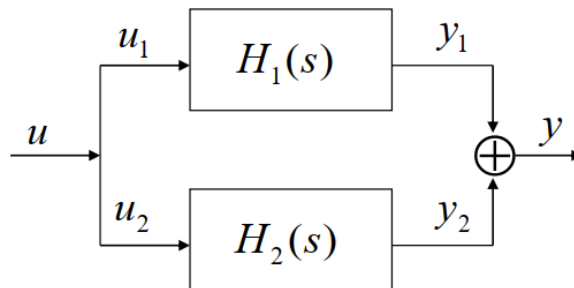
$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = H_1(s)H_2(s)$$



Schematy blokowe i grafy przepływu

Schematy blokowe

- Reguła #2: połączenie równoległe (ang. *parallel connection*)



$$Y(s) = Y_1(s) + Y_2(s) = H_1(s)U_1(s) + H_2(s)U_2(s) = H_1(s)U(s) + H_2(s)U(s)$$

czyli

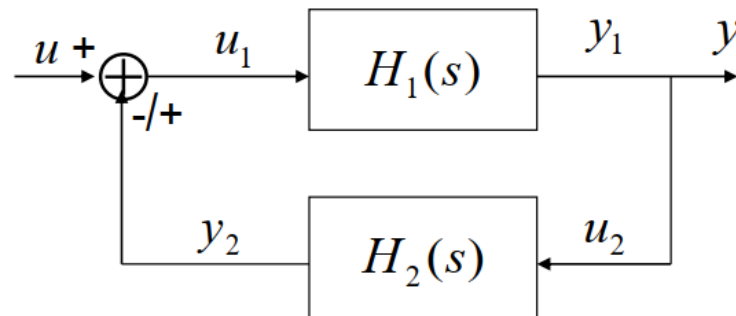
$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = H_1(s) + H_2(s)$$



Schematy blokowe i grafy przepływu

Schematy blokowe

- Reguła #3: sprzężenie zwrotne (ang. *feedback*)



$$Y(s) = H_1(s)U_1(s) = H_1(s)(U(s) \mp Y_2(s)) = H_1(s)(U(s) \mp H_2(s)Y(s))$$

$$Y(s) = H_1(s)U(s) \mp H_1(s)H_2(s)Y(s)$$

$$Y(s) \pm H_1(s)H_2(s)Y(s) = H_1(s)U(s)$$

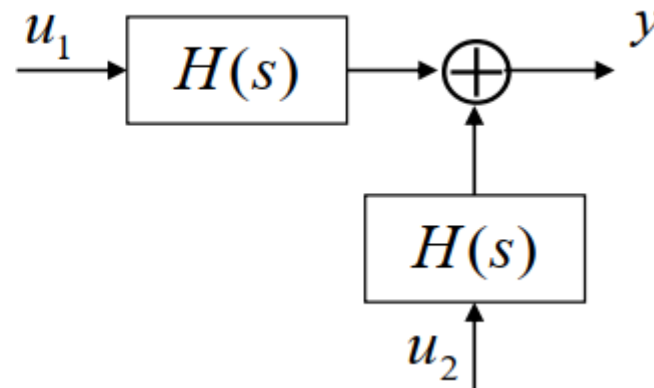
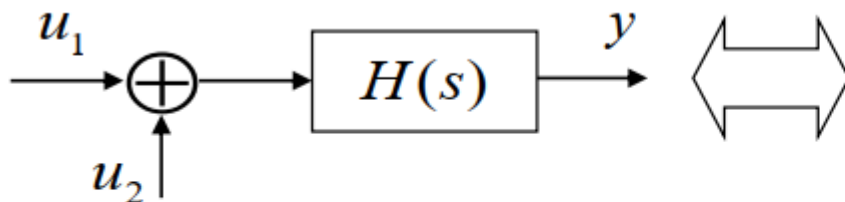
czyli

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{H_1(s)}{1 \pm H_1(s)H_2(s)}$$



Schematy blokowe i grafy przepływu

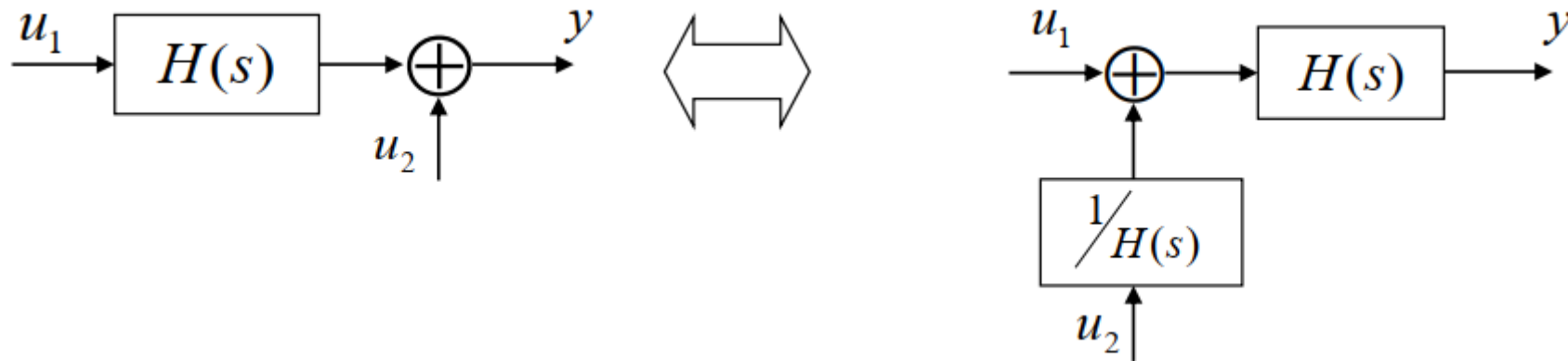
Schematy blokowe – pozostałe reguły upraszczania





Schematy blokowe i grafy przepływu

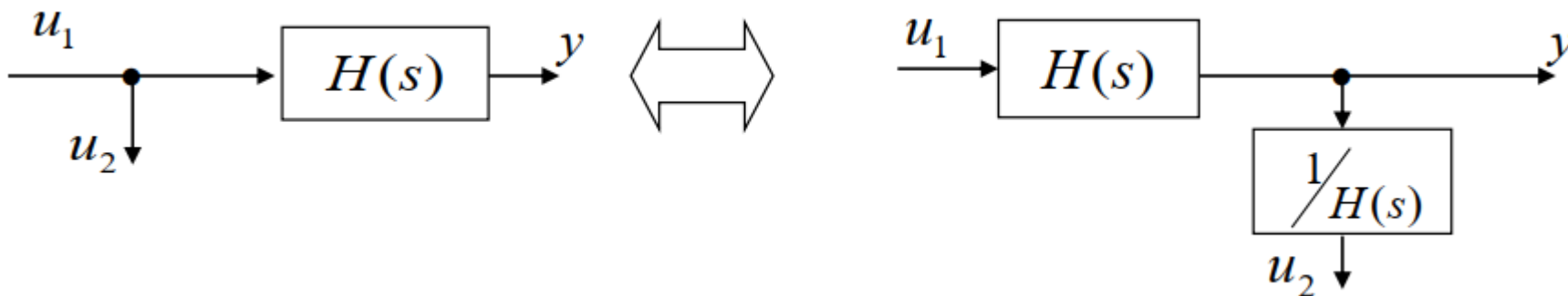
Schematy blokowe – pozostałe reguły upraszczania





Schematy blokowe i grafy przepływu

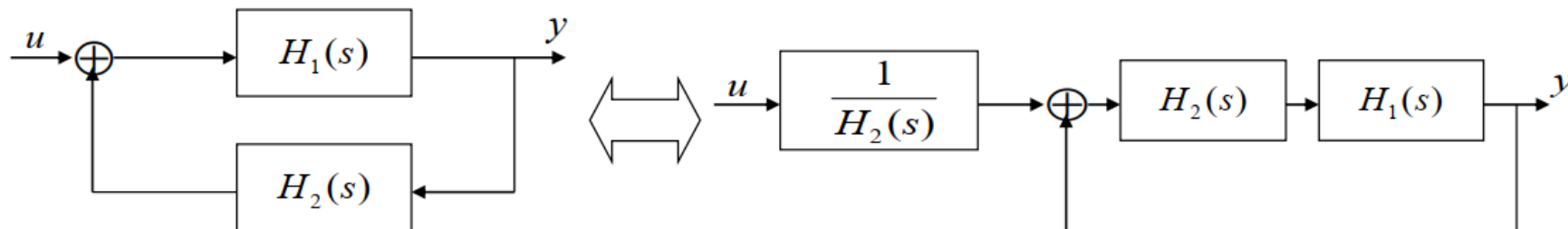
Schematy blokowe – pozostałe reguły upraszczania





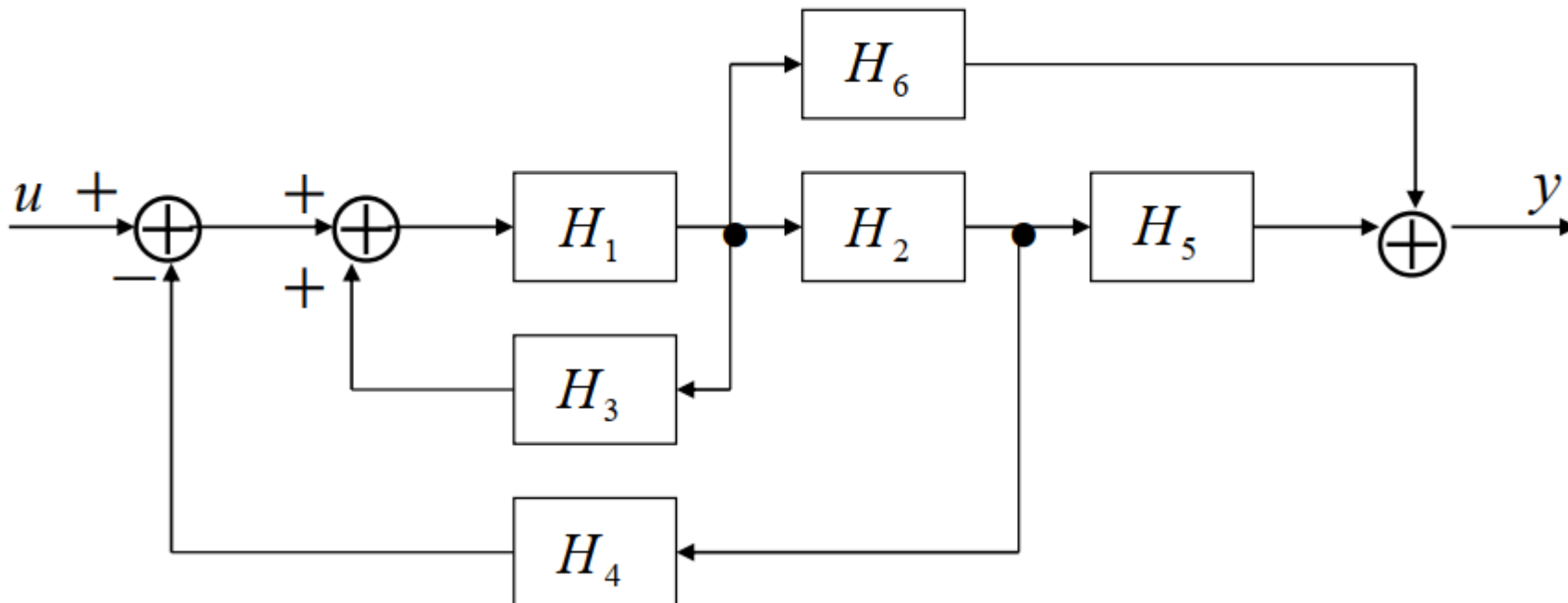
Schematy blokowe i grafy przepływu

Schematy blokowe – pozostałe reguły upraszczania



Schematy blokowe i grafy przepływu

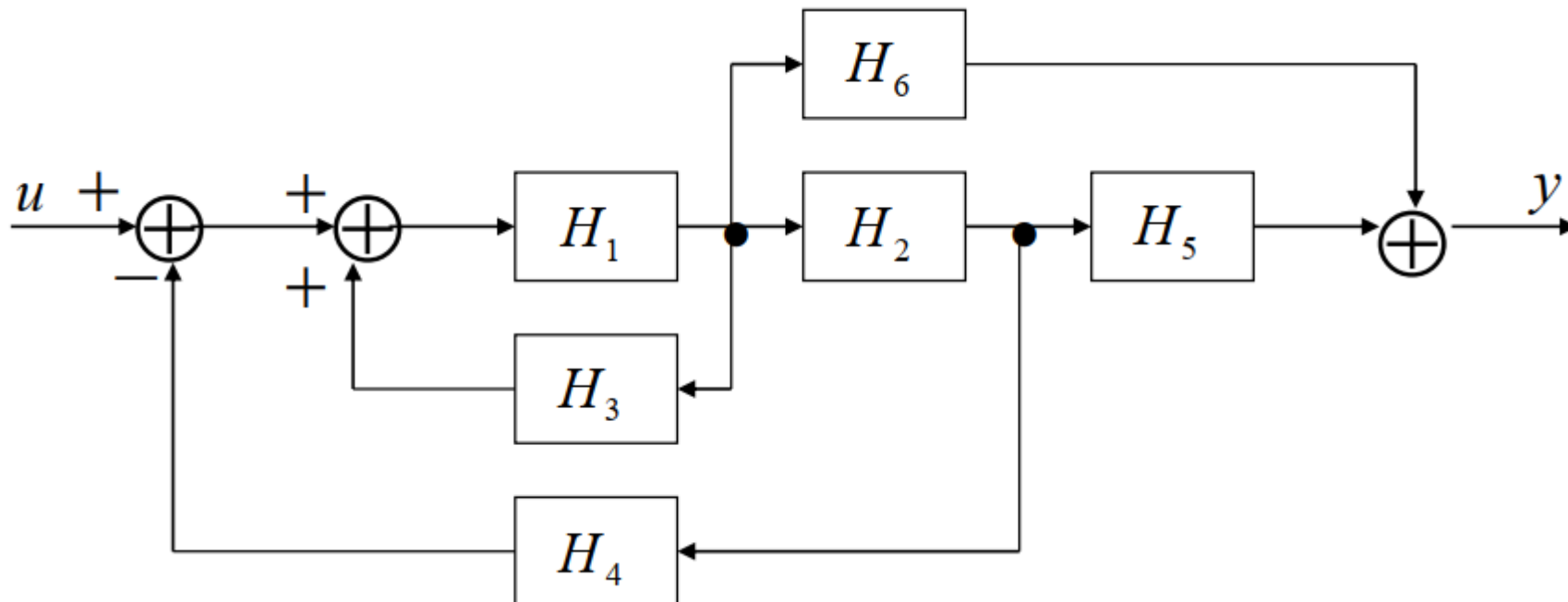
Schematy blokowe – przykład #1



Schematy blokowe i grafy przepływu

Schematy blokowe – przykład #1

$$H(s) = \frac{Y(s)}{U(s)} = \frac{H_1(s)H_2(s)H_5(s) + H_1(s)H_6(s)}{1 - H_1(s)H_3(s) + H_1(s)H_2(s)H_4(s)}$$

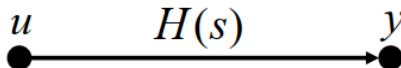




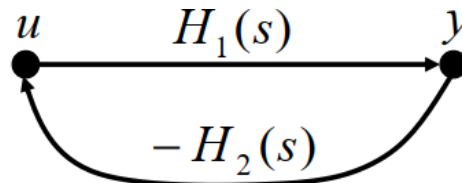
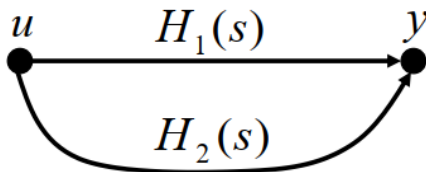
Schematy blokowe i grafy przepływu

Graf przepływu

- Transmitancja układu może być przedstawiona jako **gałąź skierowana** łącząca dwa węzły



- Relacja wejście-wyjście jest reprezentowana przez tzw. wzmocnienie gałęzi $H(s)$
- Razem otrzymujemy graf przepływu sygnału (ang. *Signal flow graph*)
- Możemy mieć również pętle w przód (połączenie równoległe) oraz pętlę sprzężenia zwrotnego:





Schematy blokowe i grafy przepływu

Reguła Masona

- Aby otrzymać transmitancję zastępczą układu wystarczy zastosować **regułę Masona** – nie ma potrzeby upraszczania grafu.
- Reguła opiera się na **metodzie Cramera** rozwiązywania układów równań liniowych



Schematy blokowe i grafy przepływu

Reguła Masona

$$G = \frac{y_{\text{out}}}{y_{\text{in}}} = \frac{\sum_{k=1}^N G_k \Delta_k}{\Delta},$$

$$\Delta = 1 - \sum L_i + \sum L_i L_j - \sum L_i L_j L_k + \dots + (-1)^m \sum \dots + \dots,$$

gdzie:

- G = całkowite wzmocnienie pomiędzy y_{in} i y_{out}
- y_{out} = zmienna węzła wyjściowego
- y_{in} = zmienna węzła wejściowego
- N = całkowita liczba ścieżek w przód pomiędzy y_{in} i y_{out}
- G_k = wzmocnienie k -tej ścieżki w przód pomiędzy y_{in} i y_{out}
- Δ_k = współczynnik wartości Δ dla k -tej ścieżki do przodu, z usuniętymi pętlami stykającymi się z k -tą ścieżką w przód – to znaczy: usuwamy te części grafów, które tworzą pętle, pozostawiając części potrzebne dla ścieżki w przód.
- Δ = wyznacznik grafu
- L_i = wzmocnienie pętli każdej z zamkniętych pętli w układzie
- $L_i L_j$ = iloczyn wzmocnień pętli każdych dwóch (wszystkich zbiorów) niestykających się pętli (niemających wspólnych węzłów)
- $L_i L_j L_k$ = iloczyn wzmocnień pętli każdych trzech niestykających się pętli



Schematy blokowe i grafy przepływu

Reguła Masona - Procedura

- Przygotować listę wszystkich ścieżek w przód i oznakować je G_k (dla k -tej ścieżki)
- Przygotować listę wszystkich pętli i ich wzmocnień i oznakować je L_i (dla i -tej pętli)
- Przygotować listę wszystkich par niestykających się pętli oraz iloczynów ich wzmocnień ($L_i L_j$)
- Przygotować listę wszystkich trójek niestykających się pętli oraz iloczynów ich wzmocnień ($L_i L_j L_k$)
- itd. aż już nie ma nic do wzięcia
- Obliczyć współczynnik Δ oraz Δ_k
- Zastosować wzór:

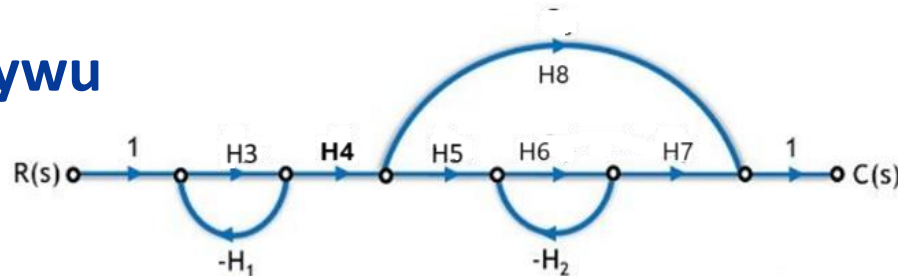
$$G = \frac{y_{\text{out}}}{y_{\text{in}}} = \frac{\sum_{k=1}^N G_k \Delta_k}{\Delta},$$

$$\Delta = 1 - \sum L_i + \sum L_i L_j - \sum L_i L_j L_k + \dots + (-1)^m \sum \dots + \dots,$$



Schematy blokowe i grafy przepływu

Reguła Masona – Przykład #1



- Przygotować listę wszystkich ścieżek w przód:

$$G_1 = H_3 H_4 H_5 H_6 H_7$$

$$G_2 = H_3 H_4 H_8$$

- Przygotować listę wszystkich pętli i ich wzmocnień i oznakować jest L_i (dla i -tej pętli):

$$L_1 = -H_3 H_1$$

$$L_2 = -H_6 H_2$$

- Przygotować listę wszystkich par niestykających się pętli oraz iloczynów ich wzmocnień ($L_i L_j$)

$L_1 L_2$ - tylko jedna para

- Przygotować listę wszystkich trójek niestykających się pętli oraz iloczynów ich wzmocnień ($L_i L_j L_k$)

Brak.

- Obliczyć współczynnik Δ oraz Δ_k

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2) + L_1 L_2$$

$$\Delta_1 = 1 - 0 \quad (\text{wyznacznik pętli nie dotykający ścieżki } G_1)$$

$$\Delta_2 = 1 - L_2 \quad (\text{wyznacznik pętli nie dotykający ścieżki } G_2)$$

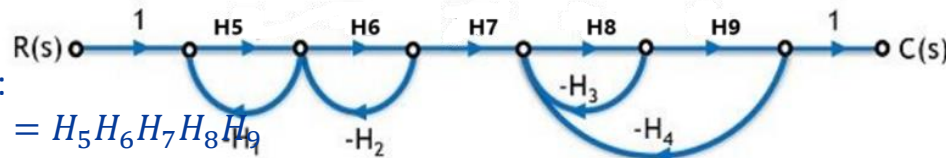
- Zastosować wzór:

$$H = \frac{G_1 \Delta_1 + G_2 \Delta_2}{1 - (L_1 + L_2) + L_1 L_2} = \frac{H_3 H_4 H_5 H_6 H_7 + H_3 H_4 H_8 + H_2 H_3 H_4 H_6 H_8}{1 + H_1 H_3 + H_2 H_6 + H_1 H_2 H_3 H_6}$$



Schematy blokowe i grafy przepływu

Reguła Masona – Przykład #2



- Przygotować listę wszystkich ścieżek w przód:

$$G_1 = H_5 H_6 H_7 H_8 H_9$$

- Przygotować listę wszystkich pętli i ich wzmocnień i oznakować je L_i (dla i -tej pętli):

$$L_1 = -H_5 H_1$$

$$L_2 = -H_6 H_2$$

$$L_3 = -H_8 H_3$$

$$L_4 = -H_9 H_4$$

- Przygotować listę wszystkich par niestykających się pętli oraz iloczynów ich wzmocnień ($L_i L_j$)

$$L_1 L_3 \quad L_1 L_4$$

$$L_2 L_3 \quad L_2 L_4$$

- Przygotować listę wszystkich trójek niestykających się pętli oraz iloczynów ich wzmocnień ($L_i L_j L_k$)

Brak.

- Obliczyć współczynnik Δ oraz Δ_k

$$\Delta = 1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1 L_2 + L_1 L_4 + L_2 L_3 + L_2 L_4)$$

$$\Delta_1 = 1 - 0 \quad (\text{wyznacznik pętli nie dotykający ścieżki } G_1)$$

- Zastosować wzór:

$$H = \frac{G_1 \Delta_1}{1 - (L_1 + L_2 + L_3 + L_4) + (L_1 L_2 + L_1 L_4 + L_2 L_3 + L_2 L_4)}$$