

**MODELE KLASY GARCH W EMPIRYCZNYCH  
BADANIACH FINANSOWYCH**



Uniwersytet Mikołaja Kopernika  

---

Rozprawa habilitacyjna

PIOTR FISZEDER

**MODELE KLASY GARCH  
W EMPIRYCZNYCH  
BADANIACH FINANSOWYCH**



WYDAWNICTWO NAUKOWE  
UNIwersYTETU MIKOŁAJA KOPERNIKA

Toruń 2009

Recenzenci  
*Jacek Osiewalski*  
*Magdalena Osińska*

Projekt okładki  
*Michał Ciesielski*

Opracowanie wydawnicze  
*Magdalena Mordawska*

ISBN 978-83-231-2337-8

Printed in Poland  
© Copyright by Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika  
Toruń 2009

**Wydawnictwo Naukowe Uniwersytetu Mikołaja Kopernika**  
ul. Gagarina 5, 87-100 Toruń  
Redakcja: tel. 056 611 42 95, fax 056 611 47 05, e-mail: [dwyd@umk.pl](mailto:dwyd@umk.pl)  
Dystrybucja: ul. Reja 25, 87-100 Toruń  
tel./fax 056 611 42 38, e-mail: [books@umk.pl](mailto:books@umk.pl)  
**[www.wydawnictwoumk.pl](http://www.wydawnictwoumk.pl)**

Wydanie I

Łamanie: *Jan Ciesielski*

Druk: Drukarnia Cyfrowa UMK  
ul. Gagarina 5, 87-100 Toruń

*Pracę poświęcam pamięci mojego Taty*



# SPIS TREŚCI

Wstęp .....	11
Rozdział I. Jednorównaniowe modele GARCH jako narzędzie analizy zmienności procesów finansowych .....	21
1.1. Stopy zwrotu i ich własności .....	22
1.2. Specyfikacje jednorównaniowych modeli GARCH stosowane do opisu finansowych szeregów czasowych .....	24
1.3. Estymacja parametrów i testy diagnostyczne .....	32
1.3.1. Estymacja parametrów za pomocą MNW .....	32
1.3.2. Testy diagnostyczne i wybór modelu .....	40
1.4. Miejsce i rola modeli GARCH w naukach ekonomicznych .....	45
1.5. Modelowanie procesów finansowych z długą pamięcią – zastosowanie modeli ARFIMA-FIGARCH .....	49
1.6. Efekty kalendarzowe .....	57
1.6.1. Modele GARCH opisujące wahania okresowe .....	59
1.6.2. Analiza efektu dnia tygodnia oraz wahań sezonowych dla GPW w Warszawie .....	61
Rozdział II. Wielorównaniowe modele GARCH w analizie zależności między procesami finansowymi .....	66
2.1. Postacie wielorównaniowych modeli GARCH stosowane do opisu wielowymiarowych finansowych szeregów czasowych .....	68
2.1.1. Model VECH .....	69
2.1.2. Model BEKK .....	72
2.1.3. Model stałych warunkowych współczynników korelacji .....	74
2.1.4. Modele DCC .....	75
2.1.5. Modele czynnikowe .....	79
2.1.6. Model GARCH-M .....	83
2.1.7. Grube ogony warunkowego rozkładu wielowymiarowego .....	84
2.1.8. Inne postacie modeli GARCH .....	85
2.2. Uwagi o wielorównaniowych parametryzacjach modeli GARCH .....	88

2.3. Estymacja parametrów za pomocą MNW .....	93
2.4. Testy diagnostyczne.....	103
2.4.1. Wielowymiarowe testy na występowanie efektu ARCH.....	106
2.4.2. Testy stałości współczynników korelacji w wielorównaniowym modelu GARCH.....	107
2.4.3. Testy przyczynowości dla wariancji.....	113
2.5. Zależności między rynkami akcji na świecie .....	116
2.5.1. Analiza powiązań między indeksem WIG a wybranymi indeksami rynków akcji na świecie.....	119
2.6. Efekt zarażania .....	128
2.6.1. Stałość współczynników korelacji .....	130
2.6.2. Analiza efektu zarażania dla indeksu WIG.....	134
 Rozdział III. Prognozowanie procesów finansowych.....	138
3.1. Prognozowanie poziomu procesu.....	141
3.2. Prognozowanie zmienności .....	143
3.2.1. Pomiar zmienności .....	144
3.2.2. Modele zmienności i metody prognozowania zmienności.....	152
3.2.3. Metody oceny trafności prognoz zmienności.....	165
3.2.4. Trafność metod prognozowania zmienności na podstawie modeli GARCH w świetle badań empirycznych .....	172
3.2.5. Prognozowanie zmienności stóp zwrotu dla GPW w Warszawie.....	175
3.3. Prognozowanie macierzy kowariancji stóp zwrotu.....	210
 Rozdział IV. Analiza ryzyka rynkowego – wybrane zagadnienia.....	219
4.1. Wprowadzenie .....	222
4.2. Prognozowanie wartości zagrożonej.....	226
4.2.1. Podstawowe metody prognozowania VaR oraz oceny ich trafności .....	227
4.2.2. Estymacja VaR z zastosowaniem modeli GARCH.....	234
4.2.3. Prognozowanie VaR dla portfela akcji notowanych na GPW w Warszawie .....	241
4.3. Estymacja współczynników beta na podstawie dwurównaniowego modelu GARCH .....	251
4.3.1. Zastosowanie modelu VAR-GARCH.....	253
4.3.2. Uproszczenie budowy portfela .....	255
4.4. Oczekiwana stopa zwrotu a ryzyko .....	259
4.4.1. Zależność między oczekiwaną stopą zwrotu a warunkową wariancją .....	260



---

4.4.2. Analiza zależności pomiędzy oczekiwaną stopą zwrotu a ryzykiem dla wybranych spółek i indeksów notowanych na GPW w Warszawie .....	266
Rozdział V. Teoria portfela i modele rynku kapitałowego .....	278
5.1. Model Markowitza dla portfela akcji .....	282
5.1.1. Dynamiczny proces budowy portfela z zastosowaniem modeli GARCH .....	283
5.1.2. Ocena efektywności konstrukcji portfeli dla trzech spółek .....	285
5.1.3. Ocena efektywności konstrukcji portfeli dla dwudziestu spółek .....	295
5.2. Model CAMP .....	303
5.2.1. Testy modelu CAMP z zastosowaniem wielorównaniowych modeli GARCH .....	304
5.2.2. Weryfikacja modelu CAMP dla GWP w Warszawie .....	312
5.3. Model APT .....	325
5.3.1. Specyfikacja modelu APT z czynnikiem modelem GARCH .....	326
5.3.2. Weryfikacja modelu APT dla GPW w Warszawie .....	336
Rozdział VI. Instrumenty pochodne – wycena opcji i hedging kontraktami futures .....	349
6.1. Wycena opcji wystawionych na akcje i indeksy akcji .....	353
6.1.1. Wycena opcji na podstawie modelu Blacka i Scholesa i jej obciążenia .....	353
6.1.2. Wycena opcji dla procesów GARCH .....	357
6.1.3. Wycena opcji wystawionych na indeks WIG20 .....	363
6.2. Dynamiczne zabezpieczanie portfela przed ryzykiem za pomocą kontraktów terminowych .....	376
6.2.1. Metody estymacji współczynnika zabezpieczenia .....	378
6.2.2. Ocena efektywności zabezpieczenia dla wybranych portfeli .....	381
6.2.3. Analiza własności badanych szeregów a skuteczność zabezpieczania .....	393
6.2.4. Zastosowanie danych intraday do oceny efektywności zabezpieczania .....	398
Zakończenie .....	402
Literatura .....	408
Summary .....	443



# WSTĘP

W 1982 roku Robert Engle wprowadził model ARCH pozwalający opisać zmienną w czasie wariancję warunkową. W kolejnych latach powstało wiele prac dotyczących zagadnień teoretycznych, jak i zastosowań empirycznych modeli GARCH. Potwierdzeniem ważności tych zagadnień była przyznana Robertowi Engle w 2003 roku Nagroda Nobla w dziedzinie nauk ekonomicznych. Zmienność warunkowych wariancji i kowariancji procesów finansowych jest już faktem powszechnie przyjmowanym. Prosta i czytelna konstrukcja modelu GARCH, łatwość jego rozbudowywania w celu uwzględnienia charakterystycznych własności empirycznych stóp zwrotu oraz łatwość estymacji parametrów jednorównaniowych specyfikacji modeli GARCH spowodowała, że modele tej klasy są najczęściej stosowanymi modelami zmienności procesów finansowych. Wielorównaniowe modele GARCH pozwalają opisać nie tylko zmienne wariancje, ale także kowariancje, odpowiadające za opis wzajemnych relacji między badanymi zjawiskami. Wnioskowanie dotyczące warunkowych wariancji i kowariancji wzbogaca analizy prowadzone dla warunkowych średnich, ale także umożliwia uchwycenie relacji równoczesnych w sytuacji, gdy brak zależności od poprzednich realizacji badanych zmiennych.

W niniejszej pracy przedstawiono wybrane zastosowania modeli GARCH w empirycznych analizach finansowych. Omówiono zarówno zagadnienia należące do podstawowych zagadnień współczesnych finansów, jak np. wyceńa opcji na akcje i indeksy akcji, zabezpieczanie przed ryzykiem za pomocą kontraktów terminowych, analiza portfelowa, modele CAPM i APT czy szacowanie VaR, jak i mniej popularne zastosowania, jak np. modelowanie efektów kalendarzowych. Nie są to oczywiście wszystkie zastosowania modeli GARCH w finansach, pominięto bowiem, na przykład, aplikacje dotyczące kursów walutowych czy stóp procentowych.

W światowej literaturze przedmiotu można wyróżnić dwa nurty (patrz Osińska, 2006). Pierwszy z nich, reprezentowany m.in. przez prace Millsa

(1993), Gouriéroux (1997) i Tsaya (2005), skupia się na omówieniu narzędzi ekonometrycznych wykorzystywanych w analizach finansowych, w tym zwłaszcza w analizie finansowych szeregów czasowych. Przykłady empiryczne mają w tych pracach charakter ilustracji, pozwalających na przybliżenie praktycznego zastosowania omawianych metod. W drugim nurcie, reprezentowanym m.in. przez prace Cuthbertsona (1996), Campbella, Lo i MacKinlaya (1997) oraz Alexander (2001), mamy do czynienia z prezentacją i analizą zagadnień finansowych przeprowadzoną zazwyczaj za pomocą modeli ekonometrycznych oraz matematycznych. Niniejsza praca wpisuje się w drugi nurt badań. Konkurencyjne parametryzacje modeli GARCH zastosowane do badania wielu koncepcji z zakresu finansów pozwalają zaliczyć pracę do empirycznych finansów (ang. *empirical finance*).

Jednym z najważniejszych zastosowań modeli GARCH jest opis i prognozowanie zmienności, rozumianej jako miara niepewności co do stóp zwrotu instrumentu finansowego. W przypadku modeli GARCH taką miarą niepewności jest warunkowa wariancja lub warunkowe odchylenie standardowe. Zmienność jest jednym z ważniejszych pojęć współczesnych finansów. Znaczenie zmienności wynika zarówno z teorii finansów, jak i z zastosowań praktycznych. Główną cechą, która odróżnia procesy finansowe od innych procesów ekonomicznych jest właśnie relatywnie duże znaczenie zmienności. Prognozy zmienności odgrywają ważną rolę nie tylko w zastosowaniach bezpośrednio związanych z inwestowaniem, ale także w zastosowaniach makroekonomicznych, które dotyczą całej gospodarki, na przykład polityka pieniężna państwa. Większość organów odpowiedzialnych za politykę monetarną przy podejmowaniu decyzji bierze pod uwagę zmienność na rynkach finansowych związaną z akcjami, instrumentami rynku pieniężnego, kursami walut czy też cenami surowców (patrz np. Zarząd Rezerwy Federalnej), niektóre organy nawet publicznie bezpośrednio odnoszą się do sytuacji rynkowej (np. Bank Anglii). Zmienność jest już nie tylko miarą niepewności, istotną dla wielu analiz finansowych, ale może być traktowana jako nowe aktywo finansowe.

Najbardziej znaną i jedną z najczęściej stosowanych miar zmienności stóp zwrotu jest odchylenie standardowe. I z tego właśnie względu procesy GARCH mogą służyć ekonometrycznemu modelowaniu ryzyka rynkowego. Wariancja warunkowa, szacowana na podstawie modelu GARCH, może być traktowana jako miara ryzyka. Podobnie jak prognozy konstruowane na podstawie warunkowej średniej mogą być trafniejsze od prognoz konstruowanych na podstawie bezwarunkowej średniej, ponieważ efektywniej wyko-

rzystywana jest informacja o ostatnich wartościach zmiennej, tak samo przy konstrukcji prognoz zmienności na podstawie wariancji warunkowej, efektywniej wykorzystuje się informacje o ostatnich obserwacjach.

Pomimo wielu prac, jakie powstały na temat modeli GARCH i ich zastosowań, nie wiadomo, po pierwsze, w jakich zastosowaniach modele GARCH mają przewagę nad innymi modelami, po drugie, które postacie modeli GARCH są najbardziej użyteczne w konkretnych zastosowaniach. Po trzecie, nie jest jasne, dla jakich własności szeregów czasowych modele GARCH są bardziej przydatne od innych modeli. W wielu zastosowaniach praktycznych proste modele okazują się bardziej skuteczne od relatywnie zaawansowanych i skomplikowanych matematycznie postaci modeli GARCH czy stochastycznej zmienności. Z tego względu głównymi celami pracy są: określenie, w jakich zastosowaniach modele klasy GARCH są bardziej użyteczne od innych najczęściej stosowanych metod szacowania zmienności oraz porównanie użyteczności różnych postaci modeli GARCH w aplikacjach finansowych. We wszystkich analizach porównawczych starano się powiązać uzyskane wyniki z analizą własności badanych szeregów czasowych. Celami szczegółowymi pracy są między innymi:

- ocena trafności prognoz zmienności konstruowanych na podstawie różnych postaci modeli, szczególnie modeli GARCH rozszerzonych o dodatkowe informacje;
- ocena trafności prognoz VaR konstruowanych na podstawie różnych specyfikacji modeli GARCH, w tym przede wszystkim modeli wielorównaniowych dla portfela aktywów;
- systematyzacja wyników badań dotyczących trafności prognoz zmienności oraz VaR konstruowanych na podstawie jednorównaniowych modeli GARCH;
- dynamiczna analiza zależności między oczekiwaną stopą zwrotu a warunkową wariancją;
- ocena skuteczności różnych metod tworzenia portfeli, w tym przede wszystkim z wykorzystaniem wielorównaniowych modeli GARCH;
- weryfikacja modeli CAPM i APT dla Giełdy Papierów Wartościowych (GPW) w Warszawie z zastosowaniem wielorównaniowych modeli GARCH;
- konstrukcja nowych modeli pozwalających lepiej opisać zależności między oczekiwanymi stopami zwrotu a warunkowymi wariancjami i kowariancjami;
- ocena trafności wycen opcji konstruowanych na podstawie różnych

jednorównaniowych parametryzacji modeli GARCH;

- ocena skuteczności różnych strategii zabezpieczających z zastosowaniem kontraktów terminowych.

Głównym przedmiotem badań przedstawionych w pracy były spółki (lub portfele spółek), indeksy oraz instrumenty pochodne, notowane na GPW w Warszawie. Dodatkowo analizowano również inne procesy finansowe, takie jak indeksy rynku akcji na świecie, kursy walut oraz ceny surowców naturalnych. W większości badań stosowano dzienne bądź tygodniowe stopy zwrotu. Jest to stosunkowo wysoka częstotliwość danych, jak na procesy ekonomiczne, ale relatywnie niska, jak na procesy finansowe, dla których analizuje się już nawet wszystkie dostępne obserwacje. W analizach stosowano również dane o bardzo wysokiej częstotliwości, np. dane 5-minutowe czy 15-minutowe, jednakże wykorzystywano je tylko do oceny trafności prognoz zmienności lub oceny skuteczności strategii zabezpieczających. Modelowanie takich danych i zagadnienia dotyczące mikrostruktury rynku nie były tematem pracy. Zastosowane dane dotyczą różnych okresów, ponieważ wyniki zamieszczone w pracy są rezultatem kilkuletnich badań. W kolejnych analizach przyjmowano najczęściej najbardziej aktualne dane.

Na temat modeli GARCH powstało już wiele prac, zarówno w literaturze światowej, np. Bollerslev, Chou i Kroner (1992), Bera i Higgins (1993), Bollerslev, Engle i Nelson (1994), Gouriéroux (1997), Osiewalski i Pipień (2004a, b), Tsay (2005), Bauwens, Laurent i Rombouts (2006), jak i w literaturze polskiej, np. Brzeszczyński i Kelm (2002), Doman i Doman (2004), Osińska (2006), Pipień (2006). Większość zastosowań analizowanych w niniejszym opracowaniu nie była przedmiotem badań w powyższych pracach. Nawet jeżeli pewne zastosowania były wcześniej analizowane, jak np. ważne z praktycznego punktu widzenia prognozowanie zmienności czy prognozowanie VaR, to zawsze różniły się znacząco ze względu na przyjętą metodologię badań oraz stosowane modele. Dzięki temu możliwe było uzyskanie wyników i sformułowanie wniosków nie publikowanych w innych pracach. We wszystkich zastosowaniach, w których porównywano skuteczność różnych parametryzacji modeli GARCH, dodatkowo badano również inne wybrane metody, w tym zawsze metody stosowane przez praktyków rynku. Warto podkreślić, że estymacja parametrów wielu spośród analizowanych w pracy postaci modeli nie jest możliwa w dostępnych pakietach ekonometrycznych. Do zdecydowanej większości poruszanych problemów badawczych napisane zostały kody źródłowe w języku programowania Gauss.

Większy niż w innych pracach nacisk położono na analizę własności ba-

danych szeregów czasowych i powiązanie ich z uzyskanymi wynikami dotyczącymi konkretnych aplikacji modeli GARCH. W innych badaniach empirycznych ten aspekt jest często pomijany, co utrudnia znalezienie przyczyn różnicowanej skuteczności różnych metod i modeli. W pracy pokazano, że wybór postaci modelu GARCH zależy przede wszystkim od rodzaju zastosowania modeli, miary, na podstawie której dokonuje się oceny i własności badanych szeregów finansowych. Niemożliwe jest zatem jednoznaczne rekomendowanie postaci modeli do konkretnych zastosowań. W kolejnych rozdziałach dotyczących: prognozowania zmienności, prognozowania VaR, konstrukcji portfeli efektywnych i zabezpieczania przed ryzykiem starano się pokazać, że można na podstawie analizy wewnątrz próby dla tej samej miary, na podstawie której dokonuje się oceny poza próbą, wskazać postacie modeli, które prawdopodobnie będą się lepiej zachowywały w wybranych aplikacjach. Takie badanie wewnątrz próby ma większe szanse na wybór najlepszych parametryzacji niż analiza statystycznych własności szeregów czasowych i kryteriów informacyjnych.

Praca składa się z sześciu rozdziałów i zakończenia. Rozdział 1 poświęcono jednorównaniowym modelom GARCH. W podrozdziale 1.1 wymieniono własności stóp zwrotu, których znajomość jest kluczowa przy wyborze odpowiedniej parametryzacji modelu. Podrozdział 1.2 zawiera krótką prezentację jednorównaniowych postaci modeli GARCH stosowanych w dalszej części pracy. Omawiając poszczególne specyfikacje modeli, starano się wyjaśnić, jakie były przesłanki do wprowadzenia i stosowania kolejnych parametryzacji. W podrozdziale 1.3 omówiono estymację parametrów modelu GARCH za pomocą MNW, metody wyboru modeli GARCH oraz podstawowe testy diagnostyczne do oceny ich jakości. W podrozdziale 1.4 zawarto ogólne uwagi na temat zastosowań modeli GARCH w naukach ekonomicznych. W ostatnich dwóch podrozdziałach zaprezentowano aplikacje jednorównaniowych modeli GARCH w przykładowych, mniej typowych zastosowaniach dotyczących modelowania finansowych szeregów czasowych. W podrozdziale 1.5 zastosowano modele ARFIMA-FIGARCH do opisu długiej pamięci w średniej i wariancji. W ostatniej części rozdziału rozszerzone parametryzacje modeli GARCH wykorzystano do opisu wahań sezonowych, efektu tygodnia oraz efektu związanego z okresami świątecznymi.

Rozdział 2 obejmuje najważniejsze zagadnienia dotyczące wielorównaniowych modeli GARCH. W podrozdziale 2.1 przedstawiono postacie wielorównaniowych modeli GARCH ważne z punktu widzenia zastosowań empirycznych oraz dokonano ich systematyzacji. Podrozdział 2.2 zawiera ogólne

uwagi na temat wielorównaniowych parametryzacji modeli GARCH. Przedstawiono szereg klasyfikacji tych modeli oraz metody wyboru odpowiedniej specyfikacji. W podrozdziale 2.3 omówiono estymację parametrów wielorównaniowych modeli GARCH za pomocą MNW. Podrozdział 2.4 przedstawia podstawowe testy diagnostyczne do oceny jakości modeli GARCH, w tym przede wszystkim testy stałości współczynników korelacji oraz testy tzw. przyczynowości w wariancji. W podrozdziale 2.5 przeprowadzono analizę powiązań między indeksem WIG a wybranymi indeksami rynków akcji na świecie. W podrozdziale 2.6 zaproponowano test efektu zarażania (ang. *contagion*) konstruowany na podstawie modelu VAR i testu Tse (2000) na stałość warunkowych współczynników korelacji w wielorównaniowym modelu GARCH, a następnie zastosowano go do badania zależności pomiędzy indeksem WIG a indeksami wybranych rynków akcji na świecie.

W rozdziale 3 przedstawiono zagadnienia związane z prognozowaniem procesów finansowych. Podrozdział 3.1 zawiera omówienie wpływu efektu ARCH na konstrukcję prognoz dla średniej warunkowej procesu. W podrozdziale 3.2 zaprezentowano zagadnienia związane z pomiarem zmienności oraz przedstawiono najczęściej stosowane do prognozowania zmienności modele. Zaproponowano również nowy sposób wykorzystania informacji o maksymalnych i minimalnych cenach do estymacji parametrów modelu GARCH. W tej części pracy spróbowano również wyciągnąć szersze wnioski z dotychczas przeprowadzonych badań empirycznych dotyczących prognozowania zmienności na podstawie modeli GARCH. Część dotycząca prognozowania zmienności zamyka badanie empiryczne, przeprowadzone dla GPW w Warszawie, dotyczące prognozowania zmienności dziennych i tygodniowych stóp zwrotu. Przeprowadzone badanie jest jednym z najszerzych w literaturze ze względu na modele GARCH rozszerzone o dodatkowe informacje. W podrozdziale 3.3 przedstawiono modele i metody najczęściej wykorzystywane do prognozowania macierzy kowariancji stóp zwrotu.

W rozdziale 4 zawarto zagadnienia bezpośrednio związane z analizą ryzyka rynkowego. W podrozdziale 4.1 przedstawiono podstawowe zagadnienia dotyczące miar ryzyka. Podrozdział 4.2 dotyczy najczęściej stosowanej przez instytucje finansowe miary zagrożenia, czyli wartości zagrożonej (VaR, ang. *Value at Risk*). Przedstawiono tu podstawowe metody prognozowania VaR, oceny ich trafności oraz problemy związane z interpretacją wymogów kapitałowych. Najwięcej miejsca poświęcono zastosowaniom modeli GARCH. Spróbowano również sformułować bardziej ogólne wnioski dotyczące trafności prognoz wartości zagrożonej konstruowanych na podstawie



modeli GARCH.

Większość badań dotyczących zastosowania modeli GARCH do konstrukcji prognoz VaR dotyczy pojedynczych aktywów. Jest bardzo mało prac, w których ocenia się trafność prognoz VaR konstruowanych z zastosowaniem wielorównaniowych modeli GARCH dla większej liczby aktywów. W pracy przedstawiono metody konstrukcji prognoz VaR dla portfela aktywów i dokonano oceny trafności prognoz wartości zagrożonej konstruowanych na podstawie wielorównaniowych modeli GARCH dla dwudziestu spółek notowanych na GPW w Warszawie.

W podrozdziale 4.3 przedstawiono estymację współczynników beta na podstawie dwurównaniowego modelu VAR-GARCH. Najczęściej wykorzystywany do estymacji współczynników beta model Sharpe'a nie uwzględnia niektórych empirycznych własności finansowych szeregów czasowych, co może prowadzić do pogorszenia własności estymatorów oraz znacząco wpływać na wyniki aplikacji modelu. Rozwiązaniem tego problemu jest zastosowanie modelu VAR-GARCH. W przykładzie empirycznym model ten zastosowano do konstrukcji portfela o minimalnej wariancji.

Podrozdział 4.4 porusza jedno z fundamentalnych zagadnień w teorii finansów, mianowicie zależność między dochodem a ryzykiem. Rozważana jest w nim dynamiczna zależność między warunkową wartością oczekiwaną stóp zwrotu instrumentów finansowych a ich warunkową wariancją. Wyniki badań w literaturze światowej są niejednoznaczne. Rozbieżność wyników była jedną z przyczyn podjęcia badań dla wybranych spółek i indeksów giełdowych, notowanych na GPW w Warszawie. Poza klasycznym modelem GARCH-M w badaniu zastosowano dwie modyfikacje tego modelu, mianowicie model GARCH-M ze zmiennym parametrem oraz model GARCH z progowym efektem GARCH-M. Druga parametryzacja modelu jest propozycją autora. Oba rozszerzenia modelu pozwalają w odmienny sposób wyjaśnić rozbieżność wyników prowadzonych dotychczas analiz, dotyczących zależności pomiędzy oczekiwaną stopą zwrotu a warunkową wariancją, przeprowadzonych z wykorzystaniem modelu GARCH-M ze stałym parametrem.

Rozdział 5 poświęcono zagadnieniom związanym z teorią portfela i modelami rynku kapitałowego. W podrozdziale 5.1 przedstawiono dynamiczne podejście do wyznaczania portfeli efektywnych, wykorzystujące prognozy wariancji i kowariancji stóp zwrotu konstruowane na podstawie wielorównaniowych modeli GARCH. Głównym celem badań przeprowadzonych w tej części pracy była ocena skuteczności różnych metod tworzenia portfeli, w tym przede wszystkim z wykorzystaniem różnych specyfikacji wielorów-

naniowych modeli GARCH. W literaturze światowej jest bardzo mało takich badań, szczególnie dotyczących większej liczby aktywów. Analizę przeprowadzono osobno dla trzech oraz dla dwudziestu wybranych spółek o największej kapitalizacji na GPW w Warszawie. W badaniu dla dwudziestu aktywów zastosowano osiem specyfikacji wielorównaniowego modelu GARCH, natomiast dla trzech spółek analizowano dwanaście specyfikacji wielorównaniowego modelu GARCH.

W podrozdziale 5.2 przedstawiono testy modelu CAPM z zastosowaniem wielorównaniowych modeli GARCH-M. Zaproponowano dwie nowe postaci wielorównaniowego modelu GARCH-M: model, w którym rynkowa cena ryzyka jest opisana za pomocą procesu błędzenia przypadkowego oraz wielorównaniowy model z progowym efektem GARCH-M. Obie postaci mogą w odmienny sposób tłumaczyć brak istotności parametru rynkowej ceny ryzyka w modelu CAPM z wielorównaniowym procesem GARCH-M. W dalszej części pracy przeprowadzono weryfikację modelu CAPM na podstawie sektorów notowanych na GPW w Warszawie. Była to pierwsza tego typu analiza dotycząca GPW w Warszawie z zastosowaniem wielorównaniowych modeli GARCH. W badaniu testowano osiem różnych parametryzacji modelu.

W podrozdziale 5.3 zaprezentowano model APT z czynnikiem modelem GARCH. Zaproponowano również dwie modyfikacje procedury budowy modelu APT z czynnikiem modelem GARCH. Pierwsza, to rozszerzona postać modelu, która pozwala uwzględnić niewyjaśnioną zmienność warunkowych wariancji i kowariancji stóp zwrotu aktywów. Druga modyfikacja polega na tym, aby w pierwszym kroku premie za ryzyko i wariancje warunkowe czynników były szacowane na podstawie modelu z progowym efektem GARCH-M, zamiast na podstawie klasycznego modelu GARCH-M. W dalszej części pracy przeprowadzono weryfikację modelu APT na podstawie sektorów notowanych na GPW w Warszawie. Było to pierwsze tego typu badanie dotyczące GPW w Warszawie z zastosowaniem wielorównaniowych modeli GARCH.

W rozdziale 6 przedstawiono wybrane zastosowania związane z instrumentami pochodnymi. W podrozdziale 6.1 przedstawiono metody wyceny opcji dla różnych parametryzacji procesów GARCH. Przedstawiono również wyniki analizy empirycznej dla opcji wystawianych na indeks WIG20. Była to pierwsza analiza dotycząca rynku instrumentów opcyjnych w Polsce, w której rozważano trafność wycen konstruowanych na podstawie różnych specyfikacji jednorównaniowych modeli GARCH.

W podrozdziale 6.2 modele GARCH wykorzystano do zabezpieczania

przed ryzykiem. Dokonano oceny skuteczności strategii zabezpieczających za pomocą kontraktów terminowych dla portfeli notowanych na GPW w Warszawie. Do szacowania współczynnika zabezpieczenia zastosowano siedem parametryzacji dwurównaniowego modelu GARCH. Badano również różne parametryzacje warunkowych średnich oraz inne metody i modele, na podstawie których estymowano współczynnik zabezpieczenia. Zaproponowano również sposób wyznaczania stałej wygładzania i parametru wygasania w metodach ruchomej macierzy kowariancji oraz wyrównywania wykładniczego dla wariancji, który daje lepsze wyniki przy zabezpieczaniu portfeli. W pracy zaproponowano także metodę oceny efektywności strategii zabezpieczającej z wykorzystaniem danych o wysokiej częstotliwości.

Autor pracy zajmuje się tematyką modeli GARCH już od 1999 roku. Początkowo jego zainteresowania dotyczyły własności procesów GARCH oraz modelowania finansowych szeregów czasowych. Opublikował na ten temat szereg artykułów oraz napisał pracę doktorską (Fiszeder, 2001a) pod kierunkiem prof. dr. hab. Zygmunta Zielińskiego. Nieopublikowana praca doktorska obejmowała przede wszystkim analizę własności wariancji warunkowych stóp zwrotu spółek i indeksów notowanych na GPW w Warszawie. Pokazano w niej także istnienie wielu różnic we własnościach dotyczących wariancji pomiędzy procesami obserwowanymi na rynkach rozwiniętych a procesami zachodzącymi na rynkach rozwijających się (na przykład wpływ zjawisk szokowych na wariancje jest znacznie trwalszy na rynkach rozwiniętych niż na rynkach rozwijających się). W tamtej pracy badano również zależności między GPW w Warszawie a innymi rynkami akcji na świecie. O ile modelowanie finansowych szeregów czasowych jest interesujące z ekonometrycznego punktu widzenia, o tyle z praktycznego punktu widzenia ważne są zastosowania modeli w konkretnych analizach finansowych. Właśnie temu tematowi poświęcona jest duża część tej pracy.

Prezentowana praca jest podsumowaniem kilkuletnich badań autora dotyczących modeli GARCH. Zasadnicze wyniki zawarte w pracy powstały w trakcie realizacji projektów badawczych. Większość badań przedstawionych w podrozdziale 4.4 oraz część badań zaprezentowanych w podrozdziale 6.2 została wykonana w ramach grantu UMK nr 419-E. Większość analiz dotyczących prognozowania zmienności (rozdział 3), analizy portfelowej i modeli rynku kapitałowego (rozdział 5) oraz instrumentów pochodnych (rozdział 6) została przygotowana w ramach projektu badawczego nr 1 H02B 033 29, finansowanego przez Ministerstwo Nauki i Szkolnictwa Wyższego (grant KBN).

W pracy wykorzystano nowoczesne metody ekonometryczne w prak-

tycznych zagadnieniach finansowych, dlatego też wyniki przeprowadzonych badań mogą być interesujące nie tylko z punktu widzenia naukowego, ale również przydatne dla inwestorów, praktyków rynku kapitałowego oraz decydentów gospodarczych. Uzyskane wyniki mogą okazać się użyteczne przy podejmowaniu decyzji o wyborze odpowiednich narzędzi do prognozowania zmienności, szacowania VaR, konstrukcji portfeli, wyceny opcji czy szacowania współczynnika zabezpieczenia.

Prezentowana praca mogła powstać dzięki życzliwości wielu osób. Pragnę podziękować wszystkim osobom, z którymi prowadziłem ciekawe dyskusje metodologiczne, szczególnie podczas licznych konferencji naukowych, za okazaną pomoc i wszelkie inspirujące uwagi. Szczególną wdzięczność winien jestem niedawno zmarłemu Panu prof. dr. hab. Zygmuntowi Zielińskiemu za ciągłe kształtowanie mojej postawy naukowej, już od momentu pisania pracy dyplomowej w roku 1995, oraz cenne uwagi dotyczące niniejszej pracy. Dziękuję również Koleżankom i Kolegom z Katedry Ekonometrii i Statystyki na Wydziale Nauk Ekonomicznych i Zarządzania UMK za życzliwość i pomoc.

Szczególne podziękowania kieruję do Recenzentów pracy, Pani dr hab. Magdaleny Osińskiej, prof. UMK oraz Pana prof. dr. hab. Jacka Osiewalskiego za wnikliwe recenzje i bardzo pomocne uwagi, które miały znaczący wpływ na ostateczny kształt pracy.

## Rozdział I

# JEDNORÓWNANIOWE MODELE GARCH JAKO NARZĘDZIE ANALIZY ZMIENNOŚCI PROCESÓW FINANSOWYCH

Modele GARCH są najczęściej stosowanymi modelami zmienności instrumentów finansowych. Wynika to przede wszystkim z faktu, że pozwalają one opisać większość empirycznych własności finansowych szeregów czasowych. Ważną rolę odgrywa również łatwość rozszerzania modeli oraz łatwość estymacji ich parametrów. Zaproponowano dziesiątki różnych modyfikacji i rozszerzeń modelu GARCH. Liczba uogólnień jest tak duża, że znalezienie modelu, który najlepiej opisuje badany szereg czasowy, jest zadaniem bardzo trudnym, a w wielu zastosowaniach praktycznych niecelowym. Wydaje się, że lepszym rozwiązaniem jest analizowanie wybranych modeli GARCH, które pozwalają uwzględnić określone charakterystyki szeregów czasowych, istotne w danym zastosowaniu modelu.

W podrozdziale 1.1 wymieniono własności stóp zwrotu, których zmienność jest kluczowa przy wyborze odpowiedniej parametryzacji modelu. W podrozdziale 1.2 przedstawiono jednorównaniowe postacie modeli GARCH stosowane w dalszej części pracy. Zaproponowano również pewną modyfikację modelu GARCH-M, mianowicie model GARCH z progowym efektem GARCH-M, pozwalający wyjaśnić obserwowany w przypadku większości procesów finansowych brak zależności pomiędzy oczekiwaną stopą zwrotu a warunkową wariancją. Podrozdział 1.3 zawiera opis estymacji parametrów modelu GARCH za pomocą najczęściej stosowanej i najprostszej metody, mianowicie MNW. Metoda największej wiarygodności oraz metoda quasi-największej wiarygodności były stosowane do estymacji parametrów modeli GARCH w niniejszej pracy. W podrozdziale 1.3 przedstawiono również opis metod wyboru modeli GARCH oraz podstawowych testów diagnostycznych do oceny ich jakości. Podrozdział 1.4 zawiera ogólne uwagi na temat zastosowań modeli GARCH w naukach ekonomicznych.

W ostatnich dwóch podrozdziałach zaprezentowano aplikacje jednorównaniowych modeli GARCH w przykładowych, mniej typowych zastosowaniach dotyczących modelowania finansowych szeregów czasowych. W podrozdziale 1.5 modele ARFIMA-FIGARCH zastosowano do opisu długiej pamięci w średniej i wariancji, natomiast w podrozdziale 1.6 zmodyfikowane parametryzacje modeli GARCH wykorzystano do opisu wahań sezonowych, efektu dnia tygodnia oraz efektu związanego z okresami świątecznymi.

## 1.1. STOPY ZWROTU I ICH WŁASNOŚCI

Podstawową charakterystyką każdej inwestycji jest stopa zwrotu<sup>1</sup>. W literaturze wyróżnia się dwie podstawowe definicje stóp zwrotu (patrz np. Campbell, Lo i MacKinlay, 1997):

– zwykła (prosta) stopa zwrotu:

$$R_t = \frac{P_t - P_{t-1}}{P_{t-1}}, \quad (1.1.1)$$

– logarytmiczna stopa zwrotu:

$$r_t = \ln P_t - \ln P_{t-1}, \quad (1.1.2)$$

gdzie  $P_t$  jest ceną instrumentu finansowego w chwili  $t$ . W obu definicjach pominięto dochody uzyskiwane z tytułu posiadania aktywów, tj. dywidend, praw poboru, itp.

Logarytmiczne stopy zwrotu mają kilka własności, ze względu na które są częściej stosowane w ekonometrii finansowej i matematyce finansowej. Logarytmiczne stopy zwrotu są addytywne i można dla nich obliczać średnią arytmetyczną, która odpowiada kapitalizacji ciągłej (zakłada się, że wszystkie dochody są reinwestowane). W przypadku prostych stóp zwrotu, średnią, która odpowiada kapitalizacji ciągłej, jest średnia geometryczna. Obliczając średnią arytmetyczną prostych stóp zwrotu, zakłada się, że wielkość zainwestowanego kapitału pozostaje stała na początku każdego okresu. Zatem średnia arytmetyczna prostych stóp zwrotu, obliczona dla wybranego aktywu, nie informuje o rzeczywistej zmianie wartości inwestycji w badanym okresie.

<sup>1</sup> Stopa zwrotu jest niekiedy określana jako stopa zysku, tempo wzrostu lub stopa zmian.

Cena akcji nie może spaść poniżej zera, dlatego zwykle stopy zwrotu mogą teoretycznie przyjmować wartości od minus jeden do plus nieskończoności. Teoretyczny rozkład prostych stóp zwrotu powinien być zatem rozkładem uciętym z lewej strony. Logarytmiczne stopy zwrotu mogą teoretycznie przyjmować wartości od minus do plus nieskończoności.

Dla niektórych szeregów finansowych, takich jak kursy walutowe, logarytmiczna stopa zwrotu kursu pierwszej waluty względem drugiej waluty ma przeciwny znak i jest dokładnie równa co do wartości bezwzględnej logarytmicznej stopie zwrotu kursu drugiej waluty względem pierwszej. Proste stopy zwrotu nie posiadają takiej własności. Dla logarytmicznych stóp zwrotu łatwe jest przeliczanie pomiędzy różnymi walutami. Logarytmiczna stopa zwrotu kursu  $P_{A/B,t}$  jest równa różnicy między logarytmiczną stopą zwrotu kursu  $P_{C/B,t}$  a logarytmiczną stopą zwrotu kursu  $P_{C/A,t}$ .

Z drugiej strony trzeba pamiętać, że logarytmiczne stopy zwrotu mają również pewne wady. Po pierwsze, prosta stopa zwrotu portfela aktywów jest równa ważonej średniej arytmetycznej prostych stóp zwrotu poszczególnych aktywów. Logarytmiczna stopa zwrotu nie posiada takiej własności. Po drugie, w przypadku bardzo dużych zmian wartości aktywów (wzrostu lub spadku) logarytmiczne stopy zwrotu są znacząco mniejsze od prostych stóp zwrotu. Może to mieć znaczący wpływ na wyniki analiz, w których ważną rolę odgrywają wartości w ogonach rozkładu stóp zwrotu, jak na przykład estymowanie wartości zagrożonej<sup>2</sup>. Na przykład VaR, szacowany metodą symulacji historycznej na podstawie logarytmicznych stóp zwrotu dla inwestora posiadającego długą pozycję, może być zawyżony, natomiast dla inwestora posiadającego pozycję krótką, zaniżony.

Ze względu na to, że proste stopy zwrotu są zawsze większe lub równe minus jeden, należy się spodziewać, iż ich rozkłady (określone na przedziale ograniczonym z dołu) będą zwykle asymetryczne. Modele statystyczne buduje się bowiem dla logarytmicznych stóp, a dla statystyka stopy te są najbardziej oczywistą transformacją zwykłych stóp zwrotu. Należy być bardzo ostrożnym w stosowaniu do modelowania zwykłych stóp zwrotu rozkładów symetrycznych, jak np. rozkład normalny czy t-Studenta. W większości analiz w niniejszej pracy zastosowano logarytmiczne stopy zwrotu.

Modelowanie finansowych szeregów czasowych wymaga dobrej znajomości empirycznych własności stóp zwrotu. Pomimo dużego zróżnicowania stóp zwrotu, które mogą dotyczyć np. akcji, obligacji, bonów skarbowych, walut, surowców, instrumentów pochodnych czy indeksów, mają one bar-

<sup>2</sup> Zagadnienia związane z wartością zagrożoną przedstawiono w punkcie 4.2.

dzo typowe własności, odróżniające je od innych ekonomicznych szeregów czasowych, których własności zostały omówione m.in. w pracach: Zieliński, 1979, Talaga i Zieliński, 1986. Do charakterystycznych empirycznych własności stóp zwrotu można zaliczyć między innymi: grupowanie się zmienności i ściśle z tym związaną zmienność wariancji warunkowej (efekt ARCH), grube ogony rozkładów stóp zwrotu, leptokurtyczność rozkładów stóp zwrotu, asymetrię rozkładów stóp zwrotu, słabą autokorelację stóp zwrotu, występowanie asymetrycznego wpływu dodatnich i ujemnych stóp zwrotu na wariancję<sup>3</sup>, długoterminową zależność danych, istnienie silnych zależności występujących pomiędzy procesami stóp zwrotu różnych instrumentów finansowych. Własności te są szeroko omawiane w literaturze (patrz np. Bollerslev, Engle i Nelson, 1994; Fiszeder, 2000, 2001a; Brzeszczyński i Kelm, 2002; Doman i Doman, 2004; Osińska, 2008), dlatego pominięto ich opis. W dalszej części pracy, przy konkretnych aplikacjach finansowych modeli GARCH, bardzo często odnoszono się do tych własności, próbując uzyskać szersze wnioski z analizy. Niektóre własności finansowych szeregów czasowych są typowe tylko dla określonych segmentów rynku finansowego. Na przykład zmienność kursów walutowych jest na ogół mniejsza niż zmienność akcji. Szeregi czasowe z rynku pieniężnego charakteryzują się występowaniem częstych wartości nietypowych oraz okresów o minimalnych wahaniach.

## **1.2. SPECYFIKACJE JEDNORÓWNANIOWYCH MODELI GARCH STOSOWANE DO OPISU FINANSOWYCH SZEREGÓW CZASOWYCH**

Modelem, który dobrze opisuje wymienione w punkcie 1.1 własności pojedynczych finansowych szeregów czasowych (dotyczące zmienności) jest model GARCH i jego uogólnienia. Przeglądu jednorównaniowych modeli GARCH dokonano już wielokrotnie w literaturze światowej, na przykład w pracach: Bollerslev, Chou i Kroner (1992), Bera i Higgins (1993), Bollerslev, Engle i Nelson (1994), Gouriéroux (1997) oraz w literaturze polskiej, na przykład w pracach: Weron i Weron (1998), Fiszeder (2001a), Brzeszczyński i Kelm (2002), Piontek (2002a), Doman i Doman (2004), Osińska (2006), Pipień (2006). Z tego względu w niniejszej pracy pominięto prezentację jed-

<sup>3</sup> Efekt ten jest często, choć nie zawsze słusznie, utożsamiany z efektem dźwigni (patrz np. Bekaert i Wu, 2000).



norównaniowych parametryzacji modeli, a ograniczono się jedynie do tabelarycznego przedstawienia specyfikacji stosowanych w dalszych rozdziałach.

Modelując zmienność stóp zwrotu, nie można pominąć modelowania wartości oczekiwanych stóp zwrotu<sup>4</sup>. W wielu badaniach pokazano, że specyfikacja równania dla średniej może wpływać znacząco na specyfikację równania dla wariancji (patrz np. Glosten, Jagannathan i Runkle, 1993; Lumsdaine i Ng, 1999). Załóżmy, że proces stóp zwrotu można przedstawić w postaci:

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t, \quad (1.2.1)$$

gdzie  $\mu_t = E(r_t | \psi_{t-1})$ ,  $\psi_{t-1}$  oznacza zbiór wszystkich informacji dostępnych w chwili  $t-1$  ( $\psi_{t-1}$  zawiera między innymi wszystkie przeszłe wartości stóp zwrotu). Do opisu warunkowej wartości oczekiwanej stóp zwrotu najczęściej stosuje się modele autoregresyjne lub modele regresji, jednakże możliwe są bardzo różne specyfikacje modelu, zarówno liniowe, jak i nieliniowe. W pracy, oprócz modeli AR, zastosowano między innymi modele ARMA, ARFIMA, modele ze zmiennymi sezonowymi oraz modele regresji.

Niech  $\varepsilon_t$  dane będzie formułą:

$$\varepsilon_t = z_t h_t^{1/2}, \quad z_t \sim N(0,1), \quad (1.2.2)$$

gdzie  $N(0,1)$  oznacza rozkład normalny o wartości oczekiwanej równej zero i wariancji równej jeden.

Z formuły (1.2.2) wynika, że:

$$\varepsilon_t | \psi_{t-1} \sim N(0, h_t). \quad (1.2.3)$$

Zatem  $h_t$  jest warunkową wariancją  $\varepsilon_t$  oraz  $r_t$ :

$$Var(r_t | \psi_{t-1}) = Var(\varepsilon_t | \psi_{t-1}) = h_t \quad (1.2.4)$$

i powinno być nieujemne dla wszystkich możliwych realizacji. Jeżeli nie jest to wyraźnie zaznaczone, to poniższe postacie jednorównaniowych modeli GARCH będą się różniły jedynie specyfikacją warunkowej wariancji  $h_t$ . Dla  $z_t$  może być również przyjęta inna postać funkcji gęstości prawdopodobień-

<sup>4</sup> Jeżeli zależności w średniej są słabe, to w niektórych zastosowaniach finansowych nieuwzględnienie zmienności średniej warunkowej może nie mieć istotnego wpływu na uzyskane wyniki (patrz Tsay, 2005).

stwa, np. rozkład t-Studenta (Bollerslev, 1987), skośny rozkład t-Studenta (Osiewalski i Pipień, 1999a), uogólniony rozkład błędu GED (Hsieh, 1989b; Nelson, 1991), rozkład  $\alpha$ -stabilny (Liu i Brorsen, 1995), mieszaniny rozkładów (np. Hsieh, 1989a), rozkład hiperboliczny (patrz np. Talar, 2007). Własności dotyczące momentów rozkładu procesu GARCH z różnymi specyfikacjami warunkowego rozkładu zostały omówione na przykład w pracy Pipienia (2006). Zastosowanie innych rozkładów warunkowych dla  $\varepsilon_t$  ma na celu lepszy opis rozkładów stóp zwrotu instrumentów finansowych (dotyczy to przede wszystkim leptokurtyczności lub asymetrii rozkładu).

W tabeli 1.1 przedstawiono postacie jednorównaniowych modeli GARCH stosowane w dalszych rozdziałach pracy. Wszystkie parametryzacje pozwalają opisać zmieniającą się w czasie wariancję warunkową oraz efekt skupiania się wariancji w wąskich przedziałach czasu. Inną ważną cechą procesów GARCH są grube ogony rozkładów brzegowych. Brzegowy (bezwarunkowy) rozkład  $\varepsilon_t$  jest leptokurtyczny. Model ARCH znajduje najczęściej zastosowanie w przypadku szeregów czasowych o niskiej częstotliwości i małej liczbie obserwacji (kilkadziesiąt), jak np. dane miesięczne. Z tego względu jest częściej stosowany dla procesów makroekonomicznych (np. wielkość inflacji, stopy procentowe). Przy większej liczbie obserwacji (kilkaset) konieczne jest stosowanie bardzo dużych rzędów opóźnień  $q$ . W takiej sytuacji przy estymacji parametrów (bez nakładania restrykcji) bardzo często nie są spełnione założenia zapewniające nieujemność wariancji warunkowej –  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$  dla  $i = 1, \dots, q$ . W celu uniknięcia problemów związanych z estymacją parametrów modelu ARCH stosuje się model GARCH<sup>5</sup>. Model GARCH posiada wszystkie zalety modelu ARCH, a dodatkowo lepiej opisuje zmienność większości szeregów finansowych. Wprowadzenie wariancji z poprzednich okresów umożliwia uzależnienie bieżącej zmienności procesu od całej jego przeszłości, w sposób oszczędnie sparametryzowany. Model GARCH również lepiej opisuje rozkłady o grubych ogonach niż model ARCH. Dla zapewnienia dodatniości wariancji warunkowej dla modelu GARCH przyjmuje się, że  $\alpha_0 > 0$ ,  $\alpha_i \geq 0$  dla  $i = 1, 2, \dots, q$  oraz  $\beta_j \geq 0$  dla  $j = 1, 2, \dots, p$ . Okazuje się jednakże, że przy większych rzędach opóźnień  $p$  i  $q$  założenia te są zbyt restrykcyjne i możliwe jest uzyskanie lepszego opisu wariancji warunkowej poprzez ich złagodzenie, np. restrykcje zapewniające dodatniość wariancji dla modeli GARCH(1,1), GARCH(1,2), GARCH(2,1) oraz GARCH(2,2) dane są odpowiednio formułami (1.2.5), (1.2.6), (1.2.7) i (1.2.8):

<sup>5</sup> Występuje tutaj analogia do relacji między modelami AR i ARMA, jednakże w odróżnieniu od modelowania średniej, model GARCH jest stosowany znacznie częściej niż model ARMA dla zmiennych ekonomicznych.

TABELA. 1.1. PARAMETRYZACJE JEDNORÓWNIOWYCH MODELI GARCH

Model i autor	Postać modelu	Objaśnienia zmiennych i restrakcje zapewniające dodatność $h_t$
ARCH( $q$ ) Engle (1982)	$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2$	$\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0$ dla $i = 1, \dots, q$ .
GARCH( $p, q$ ) Bollerslev (1986), Taylor (1986)	$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}$	$\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0$ dla $i = 1, \dots, q$ oraz $\beta_j \geq 0$ dla $j = 1, \dots, p$ .
EGARCH( $p, q$ ) Nelson (1991)	$\ln h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \left\{ \theta z_{t-i} + \gamma \left[  z_{t-i}  - E( z_{t-i} ) \right] \right\} + \sum_{j=1}^p \beta_j \ln h_{t-j}$	$\alpha_i \equiv 1$ , dla rozkładu normalnego $E( z_{t-i} ) = \sqrt{2/\pi}$ .
TGARCH( $p, q$ ) Rabemananjara i Zakoian (1993)	$\sqrt{h_t} = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q (\alpha_i^+ \varepsilon_{t-i}^+ - \alpha_i^- \varepsilon_{t-i}^-) + \sum_{j=1}^p \beta_j \sqrt{h_{t-j}}$	$\varepsilon_{t-i}^+ = \max(\varepsilon_{t-i}, 0), \varepsilon_{t-i}^- = \min(\varepsilon_{t-i}, 0)$ , $\alpha_0 > 0, \alpha_i^+ \geq 0, \alpha_i^- \geq 0$ dla $i = 1, 2, \dots, q, \beta_j \geq 0$ dla $j = 1, \dots, p$ .
GJR-GARCH( $p, q$ ) Glosten, Jagannathan i Runkle (1993)	$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{i=1}^q \omega_i I_{t-i} \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}$	$I_{t-i} = 1$ gdy $\varepsilon_{t-i} \leq 0$ i $I_{t-i} = 0$ gdy $\varepsilon_{t-i} > 0, \alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0, \alpha_i + \omega_i \geq 0$ , dla $i = 1, \dots, q, \beta_j \geq 0$ dla $j = 1, \dots, p$ .
AGARCH( $p, q$ ) Engle i Ng (1993)	$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (\varepsilon_{t-i} - \gamma_i \sqrt{h_{t-i}})^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}$	$\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0$ dla $i = 1, \dots, q$ oraz $\beta_j \geq 0$ dla $j = 1, \dots, p$ .
GARCH-M( $p, q$ ) Engle, Lilien i Robins (1987)	$r_t = x_t' \xi + \delta g(h_t) + \varepsilon_t$ $h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}$	$g(h_t) = h_t$ lub $g(h_t) = \sqrt{h_t}$ lub $g(h_t) = \ln(h_t)$ , $x_t$ – wektor zmiennych objaśniających oraz założenia dotyczące modelu GARCH.
GARCH-MT( $p, q$ ) Fiszeder (2005b)	$y_t = c + \delta^+ I_t h_t + \delta^- (1 - I_t) h_t + \varepsilon_t$ $h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}$	$I_t = 1$ gdy $x_{t-k} \geq 0$ i $I_t = 0$ gdy $x_{t-k} < 0, x_{t-k}$ – zmienna egzogeniczna oraz założenia dotyczące modelu GARCH.
IGARCH( $p, q$ ) Engle i Bollerslev (1986)	$h_t = \alpha_0 + \varepsilon_{t-1}^2 + \sum_{i=2}^q \alpha_i (\varepsilon_{t-i}^2 - \varepsilon_{t-1}^2) + \sum_{j=1}^p \beta_j (h_{t-j} - \varepsilon_{t-1}^2)$	$\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0$ dla $i = 2, \dots, q, \beta_j \geq 0$ dla $j = 1, \dots, p$ oraz $1 \geq \sum_{i=2}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j$ .
FIGARCH( $p, q$ ) Baillie, Bollerslev i Mikkelsen (1996)	$\varphi(L)(1-L)^d \varepsilon_t^2 = \alpha_0 + [1 - \beta(L)] v_t$	$v_t = \varepsilon_t^2 - h_t, \varphi(L) = 1 - \sum_{j=1}^q \varphi_j L^j$ , $\beta(L) = \sum_{j=1}^p \beta_j L^j, L^s \varepsilon_t = \varepsilon_{t-s}, 0 < d < 1$ , wszystkie pierwiastki równania $\varphi(L) = 0$ leżą poza kołem jednostkowym.
GARCH( $p, q$ ) z dodatkową zmienną objaśniającą	$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j} + \gamma J_{t-k}$	$J_{t-k}$ – dodatkowa zmienna egzogeniczna, $\alpha_0 > 0, \alpha_i \geq 0$ dla $i = 1, \dots, q$ oraz $\beta_j \geq 0$ dla $j = 1, \dots, p$ , $\gamma > 0$ .

Niektóre z podanych założeń zapewniających dodatność wariancji warunkowej są zbyt restrykcyjne i możliwe jest ich złagodzenie w celu uzyskania lepszego opisu szeregu czasowego. Informacja o warunkach dla modelu FIGARCH jest podana w dalszej części pracy. Dodatkowo na parametry modeli należy wprowadzić odpowiednie restrakcje zapewniające stacjonarność.

ŹRÓDŁO: OPRACOWANIE WŁASNE.

$$\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0 \text{ i } \beta_1 \geq 0, \quad (1.2.5)$$

$$\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, 0 \leq \beta_1 < 1 \text{ i } \beta_1 \alpha_1 + \alpha_2 \geq 0, \quad (1.2.6)$$

$$\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0, \beta_1 + \beta_2 < 1 \text{ i } \beta_1^2 + 4\beta_2 \geq 0, \quad (1.2.7)$$

$$\alpha_0 > 0, \alpha_1 \geq 0, \beta_1 \geq 0, \beta_1 + \beta_2 < 1, \beta_1^2 + 4\beta_2 \geq 0, \alpha_2 + \beta_1 \alpha_1 \geq 0,$$

$$2\alpha_2 + \alpha_1 \beta_1 + \alpha_1 \sqrt{\beta_1^2 + 4\beta_2} > 0. \quad (1.2.8)$$

Na przykład dla modelu GARCH (1,2) parametr  $\alpha_2$  może być ujemny, a mimo to warunkowa wariancja jest dodatnia dla wszystkich  $t$  i wszystkich możliwych ścieżek procesu.

W praktyce najczęściej wykorzystywanym w modelowaniu finansowych szeregów czasowych jest model GARCH(1,1), jednakże w przypadku pojedynczych spółek, dla dłuższych szeregów czasowych, modele GARCH(1,2) oraz GARCH(2,1) opisują niekiedy zmienność lepiej niż model GARCH(1,1) (patrz Fiszeder, 2001c).

W modelu GARCH wariancja warunkowa jest nieliniową funkcją  $\varepsilon$ , ale liniową funkcją  $\varepsilon^2$ . Postacie modeli GARCH, w których wariancja warunkowa jest liniową funkcją  $\varepsilon^2$  są często nazywane liniowymi modelami GARCH. Specyfikacje modelu, w których wariancja warunkowa jest nieliniową funkcją  $\varepsilon^2$  przyjęto określać mianem nieliniowych modeli GARCH. Model ARCH miał za zadanie opisać zmieniającą się w czasie wariancję warunkową. Wprowadzane w kolejnych latach uogólnienia i rozszerzenia modelu miały na celu uwzględnienie określonych empirycznych własności stóp zwrotu, których nie były w stanie opisać modele ARCH i GARCH. Do opisu występującego często na rynkach rozwiniętych asymetrycznego wpływu dodatnich i ujemnych stóp zwrotu na wariancję<sup>6</sup> można zastosować szereg nieliniowych uogólnień modelu GARCH. Nieliniowe uogólnienia modelu GARCH stanowią najszerszą podklasę modeli GARCH. Do najczęściej stosowanych można zaliczyć modele EGARCH, TGARCH i GJR-GARCH. Zaletą modelu EGARCH jest logarytmiczna postać warunkowej wariancji, dzięki czemu nie trzeba wprowadzać żadnych ograniczeń na parametry w celu zapewnienia dodatniości wariancji warunkowej<sup>7</sup>. Wprowadzenie do modelu zmiennej standaryzowanej  $z_t$ ,

<sup>6</sup> Efekt ten jest znacznie słabszy w przypadku GPW w Warszawie (patrz Fiszeder, 2001c).

<sup>7</sup> Z drugiej strony wydaje się, że logarytmiczna postać wariancji warunkowej powodu-

zamiast  $\varepsilon_t$ , ogranicza wpływ wartości nietypowych na wariancję warunkową. Z kolei logarytmiczna postać wariancji powoduje, że wartości nietypowe mają większy wpływ na  $h_t$  niż w modelu GARCH.

Model GARCH-M pozwala opisać zależność pomiędzy oczekiwaną stopą zwrotu a ryzykiem mierzonym za pomocą warunkowej wariancji (lub warunkowego odchylenia standardowego). Wyniki badań empirycznych pokazują, że ocena parametru  $\delta$  (patrz tabela 1.1) jest często nieistotna statystycznie. Na zależność między oczekiwaną stopą zwrotu a warunkową wariancją mogą wpływać zmienne ekonomiczne lub finansowe  $x_t$ . Do opisu takiej sytuacji można zastosować model GARCH z progowym efektem GARCH-M (GARCH-MT). Model zakłada, że zależność pomiędzy oczekiwaną stopą zwrotu a wariancją może być różna, w zależności od tego, czy zmienna egzogeniczna  $x_{t-k}$  jest dodatnia, czy ujemna. Jeżeli znaki parametrów  $\delta^+$  i  $\delta^-$  są różne, to można mówić o asymetrycznym efekcie GARCH-M. Jako  $x_{t-k}$  można przyjąć np. stopy zwrotu indeksu rynku akcji w Stanach Zjednoczonych lub szerszego indeksu międzynarodowego. Koniunktura na większości rynków akcji na świecie jest w dużym stopniu uzależniona od koniunktury na rynku akcji w Nowym Jorku, dlatego wydaje się, że sytuacja na giełdzie w Stanach Zjednoczonych może również wpływać na zależność między stopą zwrotu a wariancją (a przez to także na premie za ryzyko, szacowane na podstawie modelu GARCH-M na innych giełdach). Dalsze zagadnienia i parametryzacje modeli dotyczące zależności między oczekiwaną stopą zwrotu a wariancją warunkową zostały przedstawione w punkcie 4.4.

W badaniach empirycznych (szczególnie dla danych o częstotliwości dziennej) suma ocen parametrów  $\alpha_1$  i  $\beta_1$  w modelu GARCH (1,1) jest bardzo często bliska jedności. Powyższą własność można uznać za typową dla procesów finansowych. Jeżeli  $\alpha_1 + \beta_1 = 1$  ( $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_q + \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_p = 1$  dla modelu GARCH w ogólnej postaci), to mamy do czynienia z przypadkiem osobliwym, zwanym procesem IGARCH. Suma parametrów równa jeden sugeruje podobieństwo między modelem IGARCH a modelem ARIMA, jednakże pomimo tego, że proces IGARCH nie jest procesem stacjonarnym kowariancyjnie (nie istnieje wariancja bezwarunkowa), to może być ściśle stacjonarny<sup>8</sup>, co zdecydowanie odróżnia go od modelu ARIMA. Zatem w przypadku modeli GARCH stacjonarność kowariancyjna jest włas-

---

je znaczne przeszacowanie prognoz zmienności konstruowanych na podstawie tego modelu (patrz np. Fiszeder, 2005b).

<sup>8</sup> Nelson (1990) podaje warunek, przy którym model GARCH(1,1), a także IGARCH(1,1) jest ściśle stacjonarny  $E(\ln(\alpha_1 z_t^2 + \beta_1)) < 0$ .

nością znacznie mocniejszą niż ścisła stacjonarność (patrz np. Osiewalski i Pipień, 1999b).

Im większa jest suma ocen parametrów  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_q + \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_p = 1$  w modelu GARCH, tym zjawiska szokowe mają bardziej długotrwały wpływ na wariancję badanego procesu. Mówi się wówczas o persystentnej (trwałej) wariancji. Jak dotąd nie powstała jeszcze teoria ekonomiczna, która tłumaczyłaby, dlaczego zjawiska szokowe mają mieć aż tak długotrwały wpływ na wariancje procesów finansowych. Diebold (1986) oraz Lamoureux i Lastrapes (1990) twierdzą, że bliska jedynki suma ocen parametrów  $\alpha_1$  i  $\beta_1$  w modelu GARCH (1,1) może wynikać z błędu w specyfikacji równania dla wariancji i jest następstwem nieuwzględnienia w modelu zmian wariancji brzegowej. Również West i Cho (1995) zwracają uwagę na zmiany w bezwarunkowej wariancji finansowych szeregów czasowych, które mogą być w niektórych przypadkach przyczyną mniej trafnych prognoz, uzyskanych na podstawie modeli GARCH. Schwert (1990), Engle i Mustafa (1992) oraz Lamoureux i Lastrapes (1993) podają przykłady procesów, dla których zjawiska szokowe mają mniej trwały wpływ na wariancję niż wynikałoby to z oszacowanego modelu, w którym suma parametrów  $\alpha_1$  i  $\beta_1$  jest bliska jedności.

Modelem, który jest najczęściej stosowany do opisu długiej pamięci<sup>9</sup> w zmienności, jest model FIGARCH. Proces FIGARCH jest niestacjonarny kowariancyjnie, ponieważ nie istnieje wariancja bezwarunkowa  $\varepsilon_t$ , jednakże jest procesem ściśle stacjonarnym. Trudno jest ustalić warunki istnienia dodatniej wariancji warunkowej w ogólnym modelu FIGARCH( $p, d, q$ ). Możliwe jest natomiast ustalenie restrykcji w przypadku modeli o niskich rzędach  $p$  i  $q$ . Na przykład dla modelu FIGARCH(1,  $d$ , 1) następujące warunki wprowadzone na podstawie rozwinięcia procesu w proces ARCH nieskończonego rzędu:

$$\beta_1 - d \leq \varphi_1 \leq (2-d)/3, \quad d[\varphi_1 - (1-d)/2] \leq \beta_1(\varphi_1 - \beta_1 + d), \quad (1.2.9)$$

zapewniają dodatniość warunkowej wariancji. Chung (1999) podaje inne warunki zapewniające również istnienie dodatniej wariancji warunkowej:

$$0 \leq \varphi_1 \leq \beta_1 \leq d < 1. \quad (1.2.10)$$

<sup>9</sup> Pojęcia krótkiej, długiej i średniej pamięci zostały zdefiniowane na przykład w pracach Brockwella i Davisa (1996) oraz Osiewalskiego (2001). Pojęcie procesu z długą pamięcią zdefiniowano w podrozdziale 1.5.

Żaden ze zbiorów dopuszczalnych wartości parametrów wynikających z restrykcji (1.2.9) i (1.2.10) nie zawiera się w drugim. Warunki (1.2.9) i (1.2.10) są wystarczające, ale niekonieczne, aby wariancja warunkowa była dodatnia.

Jeżeli  $d = 0$ , to proces FIGARCH jest procesem GARCH, natomiast dla  $d = 1$  procesem IGARCH. Jednakże model FIGARCH( $p, 0, q$ ) nie zawsze redukuje się do modelu GARCH( $p, q$ ). Jeżeli proces GARCH jest kowariancyjnie stacjonarny, to wpływ bieżącej zmienności<sup>10</sup> na jej prognozowane wartości maleje do zera w tempie wykładniczym (patrz np. formuła (3.2.28) i wpływ prognozy  $h_{t+1}$ ). W przypadku procesu IGARCH obecna zmienność ma nieskończony wpływ na prognozę wariancji warunkowej (patrz formuła (3.2.29)). Dla procesu FIGARCH wpływ ten maleje do zera znacznie wolniej niż w przypadku procesu GARCH, tzn. zgodnie z funkcją hiperboliczną. Należy jednakże odróżnić wpływ bieżącej zmienności na prognozy zmienności, od wpływu na rzeczywistą zmienność procesu (patrz: Ding i Granger, 1996). Mianowicie funkcja autokorelacyjna dla  $\varepsilon_t^2$  dla procesów GARCH i IGARCH wygasa w tempie wykładniczym, natomiast dla procesu FIGARCH wygasa w tempie hiperbolicznym. Zatem w przypadku, gdy  $0 < d < 1$ , to proces FIGARCH ma długą pamięć w zmienności. Natomiast pomimo tego, że wpływ bieżącej zmienności na prognozy wariancji warunkowej jest dla procesu IGARCH nieskończony, to proces ten charakteryzuje się krótką pamięcią (dalsze wyjaśnienie tego zagadnienia można znaleźć w pracy Davidsona, 2004).

Lamoureux i Lastrapes (1990) twierdzą, że długa pamięć w zmienności może wynikać z błędu w specyfikacji równania dla wariancji i jest następstwem nieuwzględnienia w modelu zmian wariancji brzegowej. Więcej na temat zależności między długą pamięcią a zmianami strukturalnymi można znaleźć w pracy Banerjee i Urga (2005).

W celu uwzględnienia dodatkowych informacji w równaniu dla wariancji warunkowej można zastosować model GARCH z dodatkową zmienną objaśniającą. Jako  $J_{t-k}$  można przyjąć procesy zachodzące w otoczeniu rynku (np. procesy makroekonomiczne) lub bezpośrednio związane z rynkiem finansowym, jak wielkość obrotów czy też zmienność innych aktywów. Sam model GARCH pozwala jedynie opisać zmienność warunkowej wariancji procesów finansowych, bez wnikania w przyczynę tej zmienności. Stosowanie modeli GARCH z dodatkowymi zmiennymi objaśniającymi, pozwala odeprzeć ten najczęściej stawiany wobec modeli GARCH krytyczny zarzut. Wyjaśnianie

<sup>10</sup> Często zamiast o wpływie bieżącej zmienności, mówi się również o wpływie zjawisk szokowych na prognozy zmienności.

przyczyn zmienności jest również możliwe na podstawie wielorównaniowych modeli GARCH (patrz rozdział 2).

### 1.3. ESTYMACJA PARAMETRÓW I TESTY DIAGNOSTYCZNE

#### 1.3.1. ESTYMACJA PARAMETRÓW ZA POMOCĄ MNW

Najczęściej stosowanymi metodami estymacji parametrów modeli GARCH są: metoda największej wiarygodności oraz metoda quasi-największej wiarygodności. Wynika to z faktu, że estymacja parametrów za pomocą obu metod jest stosunkowo prosta. Obie metody były również stosowane w niniejszej pracy. Załóżmy, że  $y_t$  jest realizacją procesu stochastycznego, dla którego warunkowa wartość oczekiwana oraz warunkowa wariancja są równe odpowiednio  $\mu_t(\boldsymbol{\theta}_0)$  i  $h_t(\boldsymbol{\theta}_0)$ , gdzie  $\boldsymbol{\theta}_0$  oznacza wektor prawdziwych parametrów dla warunkowej wartości oczekiwanej i wariancji. Logarytm naturalny funkcji wiarygodności dla próby zawierającej  $T$  obserwacji  $(y_1, y_2, \dots, y_T)$  ma postać<sup>11</sup>:

$$L_T(\boldsymbol{\zeta}) = \sum_{t=1}^T l_t(\boldsymbol{\zeta}), \quad (1.3.1)$$

gdzie  $\boldsymbol{\zeta}' \equiv (\boldsymbol{\theta}', \boldsymbol{\eta}')$  oznacza wektor zawierający nieznanne parametry dla warunkowej wartości oczekiwanej i wariancji –  $\boldsymbol{\theta}'$  oraz parametry funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa –  $g(z_t, \boldsymbol{\eta})$  dla  $z_t(\boldsymbol{\theta}) \equiv \varepsilon_t(\boldsymbol{\theta}) / \sqrt{h_t(\boldsymbol{\theta})}$ ,  $\varepsilon_t(\boldsymbol{\theta}) = y_t - \mu_t(\boldsymbol{\theta})$ . Logarytm naturalny czynnika funkcji wiarygodności odpowiadającego  $t$ -tej obserwacji –  $l_t(\boldsymbol{\zeta})$  dany jest wzorem:

$$l_t(\boldsymbol{\zeta}) = \ln\{g[z_t(\boldsymbol{\theta}); \boldsymbol{\eta}]\} - 0,5 \ln[h_t(\boldsymbol{\theta})] \quad \text{dla } t = 1, 2, \dots, T. \quad (1.3.2)$$

Zastosowanie powyższych formuł wymaga przyjęcia określonej postaci funkcji gęstości  $g(z_t(\boldsymbol{\theta}); \boldsymbol{\eta})$  w równaniu (1.3.2). Dla rozkładu normalnego równanie (1.3.2) przyjmuje następującą postać:

$$l_t(\boldsymbol{\theta}) = \ln(2\pi)^{-\frac{1}{2}} - \frac{1}{2} \frac{[y_t - \mu_t(\boldsymbol{\theta})]^2}{h_t(\boldsymbol{\theta})} - \frac{1}{2} \ln h_t(\boldsymbol{\theta}). \quad (1.3.3)$$

<sup>11</sup> W zastosowaniach empirycznych funkcję wiarygodności buduje się warunkując ją względem początkowych wartości oraz parametrów zakłócających (np. początkowe wartości wariancji warunkowej). Pod warunkiem spełnienia odpowiednich warunków stacjonarności, nie wpływa to na asymptotyczny rozkład MNW.



Ponieważ rozkład normalny jest jednoznacznie określony przez dwa pierwsze momenty, dlatego w funkcji wiarygodności znajdują się wyłącznie parametry dla warunkowej wartości oczekiwanej i wariancji, a zatem  $\zeta = \theta$ . Estymacja MNW sprowadza się do maksymalizacji funkcji (1.3.1)<sup>12</sup>. Wartości pochodnych cząstkowych wykorzystywane w procesie estymacji są na ogół przybliżane za pomocą metod numerycznych. Można zastosować na przykład algorytmy BHHH, Marquardta (opierające się na pochodnych cząstkowych pierwszego rzędu) lub Newtona-Raphsona czy Goldfelda-Quandt (opierające się na pochodnych cząstkowych pierwszego i drugiego rzędu). Alternatywnie pochodne cząstkowe mogą być wyznaczone analitycznie, co zwiększa dokładność szacunku i przyspiesza estymację (patrz Fiorentini, Calzolari i Panattoni, 1996; McCullough i Vinod, 1999). Przy warunkowej normalności procesów ARCH( $q$ ), jak i GARCH(1,1) udowodniono, w pewnych szczególnych przypadkach, zgodność i asymptotyczną normalność estymatora MNW (patrz Weiss, 1986; Lumsdaine, 1995). Niestety, w przypadku większości procesów finansowych, założenie o normalności  $z_t$  nie jest spełnione. Straumann (2005) udowadnia zgodność i asymptotyczną normalność estymatorów MNW przy ogólnych założeniach. Niech  $X_t$  oznacza stacjonarny proces GARCH ( $p, q$ ) oraz  $z_t$  spełnia następujący warunek  $z_t \text{ IID} \sim k_\eta(x) dx$ , gdzie  $\{k_\eta | \eta \in V\}$  gęstość Lebesgue'a (ang. Lebesgue density) spełnia  $\int_{-\infty}^{\infty} x k_\eta(x) dx = 0$  oraz  $\int_{-\infty}^{\infty} x^2 k_\eta(x) dx = 1$  dla wszystkich  $\eta$ . Zbiór zwarty  $K \subset (0, \infty) \times [0, \infty)^q \times B$  zawiera  $\theta_0$  oraz spełniony jest dla  $\theta_0$  warunek:

$(\alpha_q^o, \beta_p^o) \neq (0, 0)$ ,  $\alpha_0^o > 0$ , istnieje  $i > 0$ , takie że  $\alpha_i^o > 0$  oraz wielomiany  $\alpha^o(L) = \alpha_1^o L + \alpha_2^o L^2 + \dots + \alpha_q^o L^q$  i  $1 - \beta^o(L) = 1 - \beta_1^o L - \beta_2^o L^2 - \dots - \beta_p^o L^p$  nie mają wspólnych pierwiastków, a  $L$  oznacza operator przesunięcia ( $L^s \varepsilon_t = \varepsilon_{t-s}$ ), gdzie  $\theta_0' = (\alpha_0^o, \alpha_1^o, \dots, \alpha_q^o, \beta_1^o, \dots, \beta_p^o)$  oznacza wektor prawdziwych parametrów.

Założmy, że klasa funkcji gęstości  $D = \{k_\eta | \eta \in V\}$  spełnia warunki regularności:

- A1) Gęstości  $k_\eta$  są dodatnie, tj. dla każdego  $\eta$  i  $x \in R$  spełniony jest warunek  $k_\eta(x) > 0$ .
- A2) Odwzorowanie  $R \times V \rightarrow (0, \infty)$ :  $(x, \eta) \mapsto k_\eta(x)$  jest ciągle.
- A3) Jeżeli  $k_\eta(x) = k_{\eta'}(x)$  dla każdego  $x \in R$ , to  $\eta = \eta'$ .

<sup>12</sup> Wariancja warunkowa  $h_t(\theta)$  jest wyznaczana rekurencyjnie.

Spełnione są również własności:

B1) Gęstość  $k_{\eta_0}$  spełnia  $E|\log k_{\eta_0}(z_0)| < \infty$ .

B2)  $D$  jest tak określone, że  $n^{-1}\|\hat{L}_T - L_T\|_{K \times V} \rightarrow 0$  dla  $T \rightarrow \infty$ , gdzie  $\|\cdot\|$  oznacza normę euklidesową wektora lub macierzy.

Wówczas estymator MNW parametrów  $\hat{\zeta}_T$  jest zgodny. Zakładając nieco szerszą klasę modelu z warunkowo heteroskedastyczną wariancją oraz spełnienie dodatkowych, znacznie bardziej złożonych, sześciu warunków regularności, Straumann (2005) udowodnił asymptotyczną normalność estymatora MNW parametrów  $\hat{\zeta}_T$ , tj.  $\sqrt{T}(\hat{\zeta}_T - \zeta_0) \rightarrow N(0, \mathbf{F}_0^{-1})$  dla  $T \rightarrow \infty$ . Macierz  $\mathbf{F}_0$  dana jest formułą:

$$\mathbf{F}_0 = -E \left[ \frac{\partial^2 l_0(\zeta_0)}{\partial \zeta^2} \right], \quad (1.3.4)$$

gdzie  $l_0(\zeta) = \log s(\boldsymbol{\theta}) + \log k_{\eta}(s(\boldsymbol{\theta})X_0)$ ,  $s(\boldsymbol{\theta}) = (h_0(\boldsymbol{\theta}))^{-1/2}$ .

Część z tych warunków jest stosunkowo trudna do weryfikacji dla ogólnych parametryzacji modeli GARCH.

Bollerslev i Wooldridge (1992) zaproponowali, aby do estymacji parametrów modeli GARCH stosować metodę quasi-największej wiarygodności. Ideą wnioskowania na podstawie estymacji quasi-MNW jest wykorzystanie estymatora MNW parametrów w sytuacji, gdy funkcja wiarygodności jest budowana na bazie gęstości rozkładu normalnego, a nie gęstości wynikających z założeń o typie rozkładu zmiennej  $z_t$ . Metoda ta sprowadza się w istocie do wykorzystania MNW przy fałszywym założeniu warunkowej normalności (w kontekście modeli GARCH). Jednakże nawet jeżeli rozkład  $z_t$  nie jest normalny, to estymator quasi-MNW parametrów  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_T$  otrzymany na podstawie logarytmu funkcji wiarygodności dla modelu GARCH o warunkowym rozkładzie normalnym jest zgodny i asymptotycznie normalny, pod warunkiem spełnienia podstawowych warunków regularności. Warto podkreślić, że powyższe własności estymatora quasi-MNW były w kolejnych latach dowodzone przy coraz mniej restrykcyjnych założeniach (patrz Elie i Jeantheau, 1995; Boussama, 2000; Berkes, Horvath i Kokoszka, 2003 oraz Straumann, 2005). Poniżej podano warunki, na podstawie których Straumann (2005) udowodnił zgodność estymatora quasi-MNW dla stacjonarnego procesu GARCH( $p, q$ ):

C1) Rozkład  $z_0$  nie jest skoncentrowany w dwóch punktach.

C2)  $(\alpha_q^o, \beta_p^o) \neq (0, 0)$ ,  $\alpha_0^o > 0$ , istnieje  $i > 0$ , takie że  $\alpha_i^o > 0$  oraz wielomiany  $\alpha^o(L) = \alpha_1^o L + \alpha_2^o L^2 + \dots + \alpha_q^o L^q$  i  $1 - \beta^o(L) = 1 - \beta_1^o L - \beta_2^o L^2 - \dots - \beta_p^o L^p$  nie mają wspólnych pierwiastków, a  $L$  oznacza

operator przesunięcia ( $L^s \varepsilon_t = \varepsilon_{t-s}$ ), gdzie  $\theta_0' = (\alpha_0^o, \alpha_1^o, \dots, \alpha_q^o, \beta_1^o, \dots, \beta_p^o)$  oznacza wektor prawdziwych parametrów.

Asymptotyczna normalność estymatorów quasi-MNW dla stacjonarnego procesu GARCH( $p, q$ ) została udowodniona przy założeniu spełnienia pewnych warunków regularności oraz istnienia skończonych momentów czwartego rzędu, tzn.  $E(z_t^4) < \infty$  (patrz Berkes, Horvath i Kokoszka, 2003). Konieczne warunki regularności, poza wymienionymi wyżej założeniami niezbędnymi do zgodności estymatorów quasi-MNW to (patrz Straumann, 2005):

C3) Wektor prawdziwych parametrów  $\theta_0$  leży we wnętrzu zbioru  $K$ .

C4) Istnieje  $\mu > 0$  takie że  $P(|z_0| \leq t) = o(t^\mu)$ , gdy  $t$  zbiega do zera, gdzie zbiór zwarty  $K$  spełnia  $K \subset (0, \infty) \times [0, \infty)^q \times B$ , natomiast

$B = \left\{ (\beta_1, \dots, \beta_p)' \in [0, 1]^p \mid \sum_{j=1}^p \beta_j < 1 \right\}$ . Warunek C3 wyklucza sytuację, w której  $\theta_0$  leży na granicy zbioru dopuszczalnych parametrów stacjonarnego modelu GARCH. Warunek C4 natomiast zapobiega zbyt dużej koncentracji rozkładu  $|z_0|$  wokół zera. Asymptotyczna normalność estymatorów była już wcześniej udowodniona, ale tylko dla szczególnych przypadków modelu GARCH (patrz Lee i Hansen, 1994; Lumsdaine, 1996). Straumann (2005) udowodnił zgodność i asymptotyczną normalność estymatorów quasi-MNW dla niektórych uogólnień procesu GARCH.

Oceny parametrów  $\theta$  uzyskane na podstawie metody quasi-MNW nie różnią się od ocen uzyskanych za pomocą metody MNW, różnice występują natomiast w sposobie określania średnich błędów szacunku. Niech  $\hat{\zeta}_T$  oznacza wektor parametrów maksymalizujących gaussowską funkcję wiarygodności, a  $\zeta_0$  oznacza wektor prawdziwych parametrów. Asymptotyczne własności MNW mówią, że różnica między ocenami parametrów a rzeczywistymi parametrami pomnożona przez pierwiastek z liczby obserwacji ma, przy wielkości próby zmierzającej do nieskończoności, rozkład normalny o wartości średniej równej zero i macierzy kowariancji  $\mathbf{K}$  równej odwrotności macierzy informacji, tj.  $\sqrt{T}(\hat{\zeta}_T - \zeta_0) \rightarrow N(0, \mathbf{K})$  dla  $T \rightarrow \infty$ . Macierz informacji  $\mathbf{F}_0$  definiuje się jako wartość oczekiwaną macierzy drugich pochodnych cząstkowych funkcji wiarygodności, wziętą ze znakiem minus (por. formuła (1.3.4)) i może być ona oszacowana w następujący sposób:

$$\mathbf{F}_0(\hat{\zeta}_T) = -\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left( \frac{\partial^2 l_t(\hat{\zeta}_T)}{\partial \zeta \partial \zeta'} \right). \quad (1.3.5)$$

W przypadku quasi-MNW macierz kowariancji  $\mathbf{K}$  musi być następująco zmodyfikowana (patrz Bollerslev i Wooldridge, 1992):

$$\mathbf{K} = \mathbf{F}_0^{-1} \mathbf{G}_0 \mathbf{F}_0^{-1}, \quad (1.3.6)$$

gdzie  $\mathbf{G}_0$  oznacza wartość oczekiwaną iloczynu gradientów funkcji wiarygodności.

Macierz kowariancji może być oszacowana, przyjmując w miejsce  $\mathbf{F}_0$  estymator (1.3.5) oraz w miejsce  $\mathbf{G}_0$  estymator:

$$\mathbf{G}_0(\hat{\boldsymbol{\zeta}}_T) = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \left[ \left( \frac{\partial l_t(\hat{\boldsymbol{\zeta}}_T)}{\partial \boldsymbol{\zeta}} \right)' \left( \frac{\partial l_t(\hat{\boldsymbol{\zeta}}_T)}{\partial \boldsymbol{\zeta}} \right) \right]. \quad (1.3.7)$$

Dla stacjonarnego procesu GARCH( $p, q$ ), jeżeli spełnione są przedstawione powyżej warunki C1-C4 oraz  $E(z_t^4) < \infty$ , wówczas estymator quasi-MNW parametrów  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_T$  jest asymptotycznie normalny (patrz Straumann, 2005), tj.

$$\sqrt{T}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T - \boldsymbol{\theta}_0) \rightarrow N(0, \mathbf{F}_0^{-1} \mathbf{G}_0 \mathbf{F}_0^{-1}) \text{ dla } T \rightarrow \infty, \quad (1.3.8)$$

gdzie macierze  $\mathbf{F}_0$  i  $\mathbf{G}_0$  o wymiarach  $(p+q+1) \times (p+q+1)$  dane są formułami:

$$\mathbf{F}_0 = -\frac{2}{E(z_0^4) - 1} \mathbf{G}_0, \quad (1.3.9)$$

$$\mathbf{G}_0 = \frac{E(z_0^4) - 1}{4} E \left( \frac{1}{\sigma_0^4} \left( \frac{\partial h_0(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right)' \frac{\partial h_0(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \boldsymbol{\theta}} \right). \quad (1.3.10)$$

Zgodnymi estymatorami macierzy  $\mathbf{F}_0$  i  $\mathbf{G}_0$  są odpowiednio  $\mathbf{F}_0(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T)$  i  $\mathbf{G}_0(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T)$  dane formułami (1.3.5) i (1.3.7). Estymatory te można wykorzystać do szacowania macierzy kowariancji i średnich błędów szacunku.

W pewnych sytuacjach wskazane jest jednak zastosowanie modeli GARCH o warunkowym rozkładzie, który lepiej opisuje rzeczywiste stopy zwrotu. Na przykład, jeżeli celem jest uzyskanie prognoz gęstości predyktywnych (patrz Diebold, Gunther i Tay, 1998) lub wykorzystanie modelu do estymacji VaR, to pożądane jest złagodzenie założenia o warunkowej normalności i zastosowanie rozkładu mającego grubsze ogony. Logarytm funkcji wiarygodności dla procesu GARCH o warunkowym rozkładzie t-Student-

ta przyjmuje postać:

$$L_T(\boldsymbol{\zeta}) = T \left[ \ln \Gamma \left( \frac{\nu+1}{2} \right) - \ln \Gamma \left( \frac{\nu}{2} \right) - \frac{1}{2} \ln \left( \pi(\nu-2) \right) \right] - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left[ \ln h_t + (\nu+1) \ln \left( 1 + \frac{[y_t - \mu_t(\boldsymbol{\theta})]^2}{h_t (\nu-2)} \right) \right], \quad (1.3.11)$$

gdzie  $\Gamma$  oznacza funkcję gamma,  $\nu > 2$ , a  $\boldsymbol{\eta}$  w tym przypadku jest równe  $\nu$ . Jest to funkcja prawie stała dla dużych  $\nu$ , co może powodować problemy podczas estymacji. Straumann (2005) rozszerzając warunki regularności dowodzi, że estymatory MNW są zgodne i asymptotycznie normalne, jeżeli  $z_t$  ma rozkład t-Studenta. Jeżeli jednak założenie o rozkładzie okaże się błędne, to estymatory nie są zgodne. Poniżej podano odpowiednie warunki regularności. Niech  $X_t$  oznacza stacjonarny proces GARCH( $p, q$ ), gdzie zmienna  $z_t$  ma standaryzowany rozkład t-Studenta o wariancji równej jeden, a zbiór zwarty  $K \subset (0, \infty) \times [0, \infty)^q \times B$  (lub odpowiednio  $K \subset (0, \infty) \times [0, \infty)^q \times B \times [-1, 1]$ ) zawiera  $\boldsymbol{\theta}_0$  oraz spełniony jest warunek C2 dla  $\boldsymbol{\theta}_0$  (opisany wyżej dla estymatora quasi-MNW). Jeżeli zbiór zwarty  $V$  zawiera  $\nu_0$ , wówczas estymator MNW parametrów  $\hat{\boldsymbol{\zeta}}_T$  jest zgodny. Nieco inne założenia są konieczne do udowodnienia asymptotycznej normalności. Niech  $X_t$  oznacza stacjonarny proces GARCH( $p, q$ ) z  $z_t \text{ IID} \sim t_{\nu_0}$ , zbiór zwarty  $K$  spełnia  $K \subset (0, \infty) \times [0, \infty)^q \times B$ , gdzie  $B = \left\{ (\beta_1, \dots, \beta_p)' \in [0, 1]^p \mid \sum_{j=1}^p \beta_j < 1 \right\}$  oraz spełnione są warunki C2 i C3 (przedstawione powyżej dla estymatora quasi MNW). Ponadto niech  $V \subset (2, \infty)$  oraz  $\nu_0 \in V$ , wówczas estymator MNW parametrów  $\hat{\boldsymbol{\zeta}}_T$  jest asymptotycznie normalny, tj.  $\sqrt{T}(\hat{\boldsymbol{\zeta}}_T - \boldsymbol{\zeta}_0) \rightarrow N(0, \mathbf{F}_0^{-1})$  dla  $T \rightarrow \infty$ , gdzie macierz  $\mathbf{F}_0$  jest dana formułą (1.3.4).

Dla rozkładu GED logarytm funkcji wiarygodności jest równy:

$$L_T(\boldsymbol{\zeta}) = \sum_{t=1}^T \left[ \ln \left( \frac{\nu}{\lambda} \right) - \frac{1}{2} \left| \frac{y_t - \mu_t(\boldsymbol{\theta})}{\lambda h_t^{1/2}} \right|^\nu - (1 + \nu^{-1}) \ln(2) - \ln \Gamma \left( \frac{1}{\nu} \right) - \frac{1}{2} \ln(h_t) \right]. \quad (1.3.12)$$

Możliwe są również inne specyfikacje rozkładu warunkowego (patrz podrozdział 1.2).

Alternatywne podejście polega na zastosowaniu semiparametrycznych metod estymacji (patrz Engle i González-Rivera, 1991; Drost i Klaassen, 1997). W pierwszej kolejności estymowane są parametry modelu za pomocą metody quasi-MNW. Oszacowane na podstawie otrzymanego modelu reszty są wykorzystywane w drugim kroku do estymacji nieparametrycznej funkcji  $g(\cdot)$ . Następnie parametry modelu GARCH są szacowane z zastosowaniem  $\hat{g}(\cdot)$  w celu określenia funkcji wiarygodności.

Na podstawie przedstawionych powyżej formuł na funkcje wiarygodności estymacja parametrów warunkowej wartości oczekiwanej i warunkowej wariancji odbywa się jednocześnie<sup>13</sup>. Parametry równania dla warunkowej wartości oczekiwanej mogą być również szacowane oddzielnie, bez estymacji parametrów warunkowej wariancji. Nie dotyczy to modelu GARCH-M, dla którego macierz informacji nie jest macierzą blokowo-diagonalną ze względu na parametry w warunkowej wartości oczekiwanej i w wariancji. Przy łącznym szacowaniu parametrów dla warunkowych wartości oczekiwanych i warunkowej macierzy kowariancji estymatory są jednakże efektywniejsze. Załóżmy, że średnia procesu jest opisana za pomocą modelu regresji liniowej:

$$y_t = \mathbf{x}'_t \boldsymbol{\xi} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t | \psi_{t-1} \sim N(0, h_t), \quad (1.3.13)$$

$$h_t = \alpha_o + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}, \quad (1.3.14)$$

gdzie  $\mathbf{x}_t$  jest wektorem zmiennych objaśniających o wymiarach  $k \times 1$ , który może również zawierać opóźnione zmienne endogeniczne,  $\boldsymbol{\xi}$  jest wektorem parametrów o wymiarach  $k \times 1$ , parametry modelu GARCH zapewniają dodatniość warunkowej wariancji i kowariancyjną stacjonarność. Estymatory parametrów  $\boldsymbol{\xi}$  uzyskane metodą najmniejszych kwadratów są zgodne pod warunkiem, że zmienne objaśniające są nieskorelowane z  $\varepsilon_t$ . Jeżeli  $\mathbf{x}_t$  zawiera opóźnione zmienne endogeniczne, wówczas kwadraty opóźnionych zmiennych endogenicznych są skorelowane z  $\varepsilon_t^2$  i w konsekwencji estymatory średnich błędów szacunku nie są zgodne (Engle, 1982). Jeżeli  $\mathbf{x}_t$  nie zawiera opóźnionych zmiennych endogenicznych, procesy są stacjonarne i spełnione są założenia twierdzenia Gaussa-Markowa, to estymatory parametrów  $\boldsymbol{\xi}$ , uzyskane metodą najmniejszych kwadratów, są zgodne i najefektywniejsze w klasie estymatorów liniowych. Estymatory średnich błędów szacunku są wówczas nieobciążone i zgodne. Jednakże efektywniejsze estymatory para-

<sup>13</sup> Wystarczy w miejsce  $\mu_1(\boldsymbol{\theta})$  wstawić odpowiednie formuły dla warunkowej wartości oczekiwanej.

metrów  $\xi$  można uzyskać stosując metodę największej wiarygodności i szacując łącznie parametry w równaniu dla warunkowej wartości oczekiwanej i wariancji. Strata efektywności, wynikająca z zastosowania klasycznej metody najmniejszych kwadratów, może być stosunkowo duża.

Jeżeli wariancja warunkowa  $h_t$  jest symetryczną funkcją  $\varepsilon_{t-i}$  (dla  $i = 0, 1, \dots, q$ ), to macierz informacji jest macierzą blokowo-diagonalną ze względu na parametry warunkowej wartości oczekiwanej i wariancji. Zatem dla modelu ARCH lub modelu GARCH parametry w równaniu dla warunkowej wariancji mogą być oszacowane na podstawie reszt z równania dla warunkowej wartości oczekiwanej, estymowanego za pomocą MNK. Estymatory parametrów w równaniu dla warunkowej wariancji są wówczas asymptotycznie efektywne, o ile estymatory parametrów w równaniu dla warunkowej wartości oczekiwanej były zgodne (Engle, 1982; Bollerslev, 1986). Jednakże strata asymptotycznej efektywności estymatorów parametrów w równaniu dla warunkowej wartości oczekiwanej może być stosunkowo duża. Z tego względu zaleca się, aby estymacji dokonywać jednocześnie dla obu równań. Parametry nieliniowych modeli GARCH oraz modelu GARCH-M powinny być szacowane jednocześnie dla warunkowej wartości oczekiwanej i wariancji.

Im bardziej skomplikowana jest postać równania dla wariancji, tym uzyskane wyniki są na ogół bardziej wrażliwe na wybór wartości początkowych czy precyzję obliczeń (patrz Pierre, 1998). Przy bardzo złożonych specyfikacjach modeli, estymacja parametrów może być trudna i czasochłonna. Czasami funkcja wiarygodności jest płaska wokół maksimum lub procedura estymacyjna jest wrażliwa na przyjęte wartości startowe. W celu ułatwienia estymacji parametrów można przeskalować dane, dzięki czemu szybciej osiągnięta jest zbieżność, bez konieczności posiadania „dobrych” wartości startowych. Ogromnie pomocne może być badanie funkcji wiarygodności poprzez losowe przeszukiwanie przestrzeni parametrów.

Osobnym problemem jest ustalenie długości szeregów wykorzystywanych do estymacji parametrów. Jeżeli struktura modelu jest stabilna, to najlepszym rozwiązaniem jest stosowanie najdłuższych szeregów, jakimi dysponujemy. W przypadku braku stabilności struktury modelu, na przykład zmienności parametrów w czasie, lepiej jest stosować krótsze szeregi. Wyniki badań empirycznych są zróżnicowane i nie wskazują jednoznacznie a priori żadnego z powyższych podejść.

Modele GARCH mogą być również szacowane za pomocą innych metod, np. za pomocą metod bayesowskich (patrz np. Osiewalski, 2001; Pipień, 2006), metody momentów lub metod semiparametrycznych i nieparametrycz-

nych. Wnioskowanie bayesowskie może dostarczyć teoretycznie spójnego kryterium estymacji, nie odnosząc się do własności asymptotycznych.

Obecnie wiele pakietów ekonometrycznych i statystycznych umożliwia estymację parametrów podstawowych postaci jednorównaniowych modeli GARCH, np.: Eviews, PcGive, Limdep, Microfit, RATS, SAS, SHAZAM i TSP. W językach programowania Gauss, Matlab, S-PLUS i Ox dostępne są nakładki, pozwalające na estymację podstawowych i bardziej zaawansowanych specyfikacji modeli. Przewaga języków programowania polega na stosunkowo łatwej możliwości estymacji własnych modyfikacji modeli. Parametry wszystkich modeli stosowanych w badaniach w niniejszej pracy były estymowane w Gaussie z wykorzystaniem kodów źródłowych napisanych przez autora.

### 1.3.2. TESTY DIAGNOSTYCZNE I WYBÓR MODELU

Tse (2002) dzieli testy diagnostyczne dla warunkowo heteroskedastycznych modeli na trzy kategorie: statystyki łączne (ang. *portmanteau statistics*), testy mnożnika Lagrange'a oraz testy oparte na resztach modelu. Poniżej przedstawiono krótką charakterystykę tych kategorii testów. Testy na występowanie efektu ARCH zostały omówione poniżej oddzielnie, natomiast testy wykorzystywane w określonych zastosowaniach finansowych przedstawiono w dalszych rozdziałach pracy. Statystyki łączne to testy typu Boxa, Pierce'a i Ljunga. Są one powszechnie stosowane jako testy występowania efektu ARCH. Główna zaleta testów LM wynika z faktu, że do podjęcia decyzji wystarczająca jest estymacja modelu z restrykcjami, tj. odpowiadającego hipotezie zerowej. Najbardziej znanym testem LM w odniesieniu do modeli heteroskedastycznych jest test Engle'a (1982) na występowanie efektu ARCH.

Testy oparte na resztach modelu polegają na badaniu istotności parametrów w równaniu regresji kwadratów standaryzowanych reszt względem określonych zmiennych objaśniających. Niestety klasyczne metody wnioskowania nie mają tutaj zastosowania, ponieważ zmienne objaśniające zależą od oszacowanych wcześniej parametrów modelu. Tse (2002) proponuje estymację następującego równania regresji:

$$\hat{z}_t^2 - 1 = \mathbf{d}_t' \boldsymbol{\delta} + \zeta_t, \quad (1.3.15)$$

gdzie  $\hat{z}_t = \hat{\varepsilon}_t / \hat{h}_t^{1/2}$ ,  $\hat{\mathbf{d}}_t$  jest szacunkiem  $\mathbf{d}_t = (z_{t-1}^2, z_{t-2}^2, \dots, z_{t-M}^2)'$ ,  $\boldsymbol{\delta}$  jest wektorem parametrów o wymiarach  $M \times 1$ .



Jako zmienne objaśniające mogą być wybrane inne zmienne, w zależności od celu konkretnej analizy. Jeżeli  $\hat{\boldsymbol{\delta}}^*$  (estymator MNK) i  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_T$  (estymator MNW) mają asymptotyczny rozkład normalny,  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_T$  jest asymptotycznie efektywne, szacunki MNW parametrów  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_T$  spełniają warunek  $\sqrt{T}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T - \boldsymbol{\theta}) \rightarrow N(0, \mathbf{K})$  oraz przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej, zakładającej prawidłową specyfikację równań dla warunkowej wartości oczekiwanej i wariancji, statystyka  $T\hat{\boldsymbol{\delta}}'\hat{\mathbf{L}}\hat{\boldsymbol{\Omega}}^{-1}\hat{\mathbf{L}}\hat{\boldsymbol{\delta}}$  ma asymptotyczny rozkład  $\chi^2$  o  $M$  stopniach swobody, gdzie

$$\mathbf{L} = \text{plim} \left( \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{d}_t \mathbf{d}_t' \right), \quad (1.3.16)$$

$$\boldsymbol{\Omega} = E\{(z_t^2 - 1)^2\} \mathbf{L} - \mathbf{Q} \mathbf{K} \mathbf{Q}', \quad (1.3.17)$$

$$\mathbf{Q} = \text{plim} \left( \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{d}_t \frac{\partial z_t^2}{\partial \boldsymbol{\theta}'} \right). \quad (1.3.18)$$

Oczywiście w powyższych formułach odpowiednie elementy są szacowane na podstawie próby. Zaletą testów opartych na resztach modelu jest możliwość koncentracji na wybranych, prawdopodobnych przyczynach błędnej specyfikacji modelu.

Zupełnie inne podejście do badania jakości modelu polega na sprawdzeniu ogólnej adekwatności modelu, to jest zgodności zakładanej i „prawdziwej” funkcji gęstości, czyli  $f(y_t | \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}, \psi_{t-1})$  i  $p(y_t | \boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\eta}_0, \psi_{t-1})$  (dla wszystkich  $t$ ). Diebold, Gunther i Tay (1998) proponują procedurę bazującą na koncepcji gęstości predyktywnych.

W większości testów zakłada się warunkową normalność. Wrażliwość poszczególnych testów na odstępstwa od normalności rozkładu jest różna. Niektóre testy są niewrażliwe na występowanie rozkładów asymetrycznych o grubych ogonach, natomiast wrażliwość innych testów zależy od siły asymetrii oraz grubości ogonów rozkładów.

### Testy na występowanie efektu ARCH

Jeden z najbardziej popularnych testów na występowanie efektu ARCH został zaproponowany przez Engle'a (1982). Hipoteza zerowa zakłada, że parametry  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_q$  modelu ARCH (tabela 1.1) są równe zero, czyli nie występuje efekt ARCH:

$$\begin{aligned} H_0 : \alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_q = 0, \\ H_1 : \exists_{i \in \{1, \dots, q\}} \alpha_i \neq 0. \end{aligned} \quad (1.3.19)$$

Hipoteza alternatywna oznacza, że składnik losowy  $\varepsilon_t$  ma zmienną wariancję warunkową. Decyzję podejmuje się na podstawie statystyki  $LM = TR^2$ , gdzie  $R^2$  jest współczynnikiem determinacji równania regresji, oszacowanego metodą najmniejszych kwadratów:

$$\hat{\varepsilon}_t^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \hat{\varepsilon}_{t-i}^2 + \xi_t, \quad (1.3.20)$$

$\hat{\varepsilon}_t$  są zaś resztami otrzymanymi z równania dla warunkowej wartości oczekiwanej  $\hat{\varepsilon}_t = r_t - \hat{\mu}_t$ .

Przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej statystyka  $TR^2$  ma rozkład asymptotycznie zbieżny do rozkładu  $\chi^2$  o  $q$  stopniach swobody. W przypadku testowania reszt z modelu uwzględniającego zmienną wariancję warunkową zamiast  $\hat{\varepsilon}_t$  podstawia się warunkowo standaryzowane reszty, czyli  $\hat{z}_t = \hat{\varepsilon}_t / \hat{h}_t^{1/2}$ . W takiej sytuacji test ma na celu wykrycie błędnej specyfikacji wariancji warunkowej. Test na występowanie składnika GARCH(1,1) jest numerycznie identyczny do testu LM na występowanie efektu ARCH (Lee, 1991). Zatem test nie pozwala rozstrzygnąć, czy powinien być zastosowany model ARCH, czy GARCH.

Obok testu LM Engle'a najbardziej popularnym testem na występowanie efektu ARCH jest test Ljunga-Boxa (LB) zastosowany dla kwadratów reszt z równania dla warunkowej wartości oczekiwanej lub warunkowo standaryzowanych reszt dla modelu uwzględniającego zmienną wariancję warunkową<sup>14</sup>. Li i Mak (1994) pokazują jednakże, że jeżeli test jest stosowany na podstawie kwadratów reszt z modelu, w którym opisano zmienną wariancję warunkową, to statystyka nie ma asymptotycznego rozkładu  $\chi^2$ . Autorzy wyprowadzają także asymptotyczny rozkład statystyki.

Powstało wiele alternatywnych testów efektu ARCH. Poniżej wspomniano o kilku wybranych. Lee i King (1993) oraz Demos i Sentana (1998) zaproponowali testy z jednostronnym obszarem krytycznym. Lee i King (1993) przedstawiają test oparty na pochodnych cząstkowych logarytmu funkcji wiarygodności (ang. *score test*), Demos i Sentana (1998) natomiast stosują wersję testu LM. Oba testy są mocniejsze od testów LM i LB, z tym że dla dużych wartości opóźnienia  $q$  różnica nie jest znacząca. Linton i Steigerwald (2000) wyprowadzają semiparametryczny test efektu ARCH, bez założenia o warunkowej normalności. Statystykę łączną wykorzystującą funkcję gęstości spektralnej przedstawili Hong i Shehadeh (1999). Wartość  $q$  może być ustalona

<sup>14</sup> Patrz McLeod i Li (1983).

na podstawie analizy danych. Jeżeli wartość opóźnienia  $q$  jest duża, to dzięki nadaniu większych wag ostatnim informacjom test może mieć większą moc od przedstawionych wcześniej.

### Wybór postaci modelu

Ważną rolę przy wyborze postaci modelu GARCH pełnią omówione powyżej testy diagnostyczne. Z jednej strony pozwalają wyeliminować z rozważań pewne postacie modelu (często bez ich estymacji), z drugiej dokonać oceny poprawności przyjętych specyfikacji. Niezależnie od przyjętego kryterium wyboru modelu testy diagnostyczne powinny być przeprowadzane równolegle.

Nie istnieje uniwersalne kryterium wyboru postaci modelu GARCH. Zazwyczaj im model jest bardziej złożony, tym większa jest wartość funkcji wiarygodności, czyli dopasowanie modelu do danych jest lepsze. Jednakże estymacja większej liczby parametrów jest związana z większymi błędami. Dlatego szuka się kompromisu między liczbą parametrów występujących w modelu a wartością funkcji wiarygodności. Wyboru oszczędnie sparymetryzowanej postaci modelu GARCH dokonuje się często na podstawie kryteriów informacyjnych, na przykład kryterium Akaike'a (AIC) lub kryterium Schwarza (SIC), obliczanych według następujących formuł:

$$AIC(q) = -2L_T + 2q, \quad (1.3.21)$$

$$SIC(q) = -2L_T + q \ln(T), \quad (1.3.22)$$

gdzie  $q$  oznacza liczbę parametrów w modelu,  $L_T$  to logarytm naturalny funkcji wiarygodności, a  $T$  – liczba obserwacji. Spośród różnych postaci modelu wybiera się tę, dla której wartość kryterium informacyjnego jest najmniejsza. Kryteria informacyjne są powszechnie stosowane w analizach empirycznych, jednakże należy pamiętać, że ich własności statystyczne nie są znane w kontekście modeli GARCH (patrz Bollerslev, Engle i Nelson, 1994).

W przypadku modeli zagnieżdżonych wyboru różnych postaci modelu można dokonać za pomocą testu ilorazu wiarygodności  $LR$ :

$$LR = -2(L_{T_1} - L_{T_2}), \quad (1.3.23)$$

gdzie  $L_{T_1}$  i  $L_{T_2}$  to logarytmy naturalne funkcji wiarygodności dla modelu, odpowiednio z restrykcjami i bez restrykcji. Statystyka  $LR$  ma asymptotyczny

rozkład  $\chi^2$  o  $k$  stopniach swobody ( $k$  oznacza liczbę parametrów, dla których nałożono restrykcje). Niestety w przypadku procesów GARCH założenie dotyczące asymptotycznego rozkładu LR może nie być spełnione z uwagi na odstępstwa od rozkładu normalnego.

Wyboru między niektórymi postaciami modelu GARCH można dokonać na podstawie ogólnych postaci modelu GARCH, na przykład asymetrycznego potęgowego modelu GARCH (APARCH, patrz Ding, Granger i Engle, 1993) lub rozszerzonych postaci modeli GARCH, obejmujących jako szczególne przypadki inne specyfikacje. W tym przypadku wystarczy testować restrykcje prowadzące do prostszych specyfikacji modelu. Wybór taki nie bierze jednakże pod uwagę oszczędności parametryzacji lub jej braku (dotyczy to w szczególności testu  $LR$ ).

Do selekcji modeli można zastosować wybrane funkcje użyteczności (patrz np. Bond i Satchell, 2006). Wyboru postaci modelu można również dokonać na podstawie miar dokładności prognoz zmienności przedstawionych w punkcie 3.2.3 lub innych kryteriów, które można wykorzystać tylko w ściśle określonych zastosowaniach. A zatem wybór modelu może być uzależniony od celu badania. Na przykład wybór modelu na podstawie analizy liczby przekroczeń wartości zagrożonej, szacowanych z wykorzystaniem różnych postaci modelu GARCH. Mogą to być również kryteria czysto ekonomiczne, jak np. zyskowność określonej strategii inwestycyjnej.

W przypadku modeli jednorównaniowych można bardzo często wskazać postacie, które będą prawdopodobnie lepiej opisywały określone własności finansowych szeregów czasowych. Liczba różnych modyfikacji modelu GARCH jest tak duża<sup>15</sup>, że znalezienie modelu, który najlepiej opisuje badany szereg czasowy, jest zadaniem bardzo trudnym, a w wielu zastosowaniach praktycznych niecelowym. Wydaje się, że wystarczającym rozwiązaniem jest określenie priorytetowych własności procesu, a następnie analizowanie wybranych postaci modeli GARCH, które pozwalają uwzględnić określone charakterystyki w badaniu. Na przykład, jeżeli szacuje się VaR na podstawie modelu GARCH, to bardzo ważne jest, aby model dobrze opisywał ogony rozkładów stóp zwrotu. W tym przypadku należałoby zwrócić szczególną uwagę na postacie modeli, które pozwalają wyjaśnić grube ogony rozkładów brzegowych stóp zwrotu.

W kolejnych rozdziałach pracy pokazano, że można na podstawie analizy wewnątrz próby dla tej samej miary, na podstawie której dokonuje się oceny

<sup>15</sup> Różne specyfikacje modelu mogą dodatkowo występować w różnych kombinacjach, np. model FIAPARCH jako połączenie modeli FIGARCH i APARCH albo IGARCH-M jako połączenie modeli IGARCH i GARCH-M.

poza próbą, wskazać postaci model, jakie będą prawdopodobnie lepiej zachowywały się w wybranych aplikacjach. Takie badanie wewnątrz próby ma większe szanse na wybór najlepszej parametryzacji niż analiza statystycznych własności szeregów czasowych i kryteriów informacyjnych.

## 1.4. MIEJSCE I ROLA MODELI GARCH W NAUKACH EKONOMICZNYCH

Jednym z podstawowych zastosowań modeli GARCH jest modelowanie i prognozowanie zmienności. Zmienność odgrywa bardzo ważną rolę w wielu zagadnieniach finansowych i makroekonomicznych. Należy podkreślić, że zmienność jest już nie tylko miarą niepewności, istotną dla wielu analiz finansowych, ale może być traktowana jako nowe aktywo finansowe (patrz Nelson, 2007). Powstały nowe instrumenty finansowe oparte na zmienności, np. notowane na Chicago Board of Options Exchange indeksy zmienności: VIX, VXD, VXN, kontrakty futures na VIX, VXD, VXN, opcje na VIX, notowane na rynku pozagieldowym swapy zmienności i kowariancji oparte na różnych miarach zmienności zrealizowanej. Wprowadzenie takich instrumentów otwiera nowe możliwości inwestycji i analizowania ryzyka. Pojawiają się dzięki temu nowe efektywniejsze sposoby zabezpieczania portfela inwestycji (patrz np. Whaley, 1993), a spekulacja oczekiwaną zmiennością cen staje się łatwiejsza. Strategie inwestycyjne opierające się na zmienności były możliwe już znacznie wcześniej (patrz np. Carr i Madan, 1998).

Najwięcej aplikacji modeli GARCH dotyczy z pewnością finansów. Znalazły one zastosowanie w takich zagadnieniach, jak wybór inwestycji, analiza ryzyka, w tym przede wszystkim modelowanie ryzyka, jego pomiar i zabezpieczanie przed ryzykiem, modele równowagi rynku, analiza portfelową, wycena aktywów finansowych. Duża część z tych zagadnień jest omawiana w następujących rozdziałach pracy.

Zastosowania modeli GARCH nie ograniczają się wyłącznie do analiz finansowych. Modele GARCH zostały również z powodzeniem wykorzystane w wielu innych dziedzinach, na przykład w badaniach ekonomicznych w skali makro i mikro, w ekonomice rolnictwa, w politologii czy nawet medycynie. Modele te znalazły zastosowanie między innymi w opisie pojedynczych zmiennych makroekonomicznych lub w wyjaśnianiu zależności między zmiennymi makroekonomicznymi, takimi jak wskaźnik inflacji, wskaźnik produkcji, stopa bezrobocia, w modelowaniu niepewności związa-

nej z prognozami zmiennych makroekonomicznych, w modelowaniu zmienności dochodów w skali mikro, w opisie oraz analizie zmienności cen produktów rolnych (np. pszenicy, soi, kukurydzy), surowców naturalnych (np. gazu ziemnego, ropy naftowej, miedzi), w opisie procesów klimatyczno-przyrodniczych (np. wiatru, temperatury), w opisie dynamiki procesów politycznych, w opisie zmienności sondaży wyborczych, w ustalaniu optymalnej dawki leku dla pacjentów, w opisie ćwiczeń przy rehabilitacji urazów. Szerszy przegląd zastosowań, wraz z odwołaniami do literatury, można znaleźć w pracy Andersen, Bollersleva, Christoffersena i Diebolda (2006).

Niektórzy autorzy uważają rok 1982, w którym ukazał się artykuł Engle'a, proponujący model ARCH, za oficjalny początek ekonometrii finansowej (patrz np. Jajuga, 2007a). Modele GARCH, a w szczególności wielorównaniowe modele i ich zastosowania należą z pewnością do ciągle dynamicznie rozwijającego się obszaru ekonometrii finansowej. Ekonometria finansowa z jednej strony stanowi część nowoczesnych finansów, z drugiej strony jest również działem nowoczesnej ekonometrii, zwłaszcza ekonometrii dynamicznej. Przedmiotem ekonometrii finansowej są procesy finansowe, które charakteryzują się wysoką częstotliwością obserwacji, po wielokroć niestacjonarnością, wrażliwością na różnorodne informacje, trudnościami w przewidywaniu zmian oraz dużą zmiennością<sup>16</sup>. Z tego względu zagadnienia dotyczące procesów finansowych wymagają specjalnych metod analizy i prognozowania. Do obszarów badawczych ekonometrii finansowej można zaliczyć między innymi: modele równowagi rynku kapitałowego, analizę portfelową, analizę mikrostruktury rynków finansowych, wycenę instrumentów finansowych (ze szczególnym uwzględnieniem instrumentów pochodnych), analizę ryzyka (w tym pomiar ryzyka, zabezpieczanie się przed ryzykiem).

Jedną z największych wad modeli GARCH są słabe podstawy teoretyczne. McQueen i Vorkink (2004) zaproponowali model równowagi oparty na preferencjach, z którego wynika zmienność warunkowych wariancji stóp zwrotu. Bardzo rzadko specyfikacja modelu wynika z teorii ekonomicznej. Do wyjątków można zaliczyć czynnikowe modele GARCH, dla których można znaleźć uzasadnienie w teorii finansów. W teorii arbitrażu cenowego zakłada się, że nieoczekiwana część stóp zwrotu z aktywów zależy od wspólnych czynników i ryzyka specyficznego.

Innym często stawianym zarzutem wobec modeli GARCH jest fakt, że nie wyjaśniają one przyczyn zmienności stóp zwrotu tylko opisują mechanizm tej

<sup>16</sup> Inne własności stóp zwrotu zostały wymienione w podrozdziale 1.1.

zmienności. Zmienność wariancji warunkowej może wynikać między innymi z: autokorelacji ilości informacji lub znaczenia informacji napływających na rynek, nieefektywności rynku (informacje napływające na rynek nie znajdują natychmiast pełnego odzwierciedlenia w cenach), zjawiska okresowych nasileń i spadków spekulacji (silnie powiązane z wielkością obrotów), krótkiego horyzontu inwestycyjnego, różnic występujących między czasem kalendarzowym a transakcyjnym, nieuwzględnienia nieliniowych zależności dotyczących stóp zwrotu lub cen aktywów. Duża część z tych przyczyn jest trudna do modelowania. Według McQueena i Vorkinka (2004) przyczyną zmieniającej się wariancji warunkowej stóp zwrotu są: zależna od dochodu awersja do ryzyka i zmienna w czasie wrażliwość inwestorów na napływające informacje. Skonstruowany przez autorów model preferencji pozwala również wyjaśnić często obserwowaną na rynkach finansowych ujemną korelację pomiędzy bieżącą stopą zwrotu a przyszłą zmiennością. Najczęściej pojawiające się w literaturze wyjaśnienie zmieniającej się wariancji warunkowej, opierające się na ważności informacji oraz sposobie ich napływu na rynek, wydaje się problematyczne wobec wyników badań (patrz np. Schwert, 1989, Pagan i Schwert, 1990), które pokazują, że zmienność stóp zwrotu akcji jest tylko słabo powiązana ze zmiennymi ekonomicznymi. Wariancja stóp zwrotu jest większa niż zmienność wynikająca z modeli przepływów pieniężnych (patrz Cochrane, 1999). Zmienność zależy również od rozwoju rynku i wielkości gospodarki. Wariancja stóp zwrotu jest zdecydowanie większa na rynkach wschodzących niż na rynkach rozwiniętych (patrz Bekaert i Harvey, 1997 oraz Fiszeder i Romański, 2002). Wydaje się, że część zmienności bierze się wyłącznie z samego faktu notowania aktywów na rynku.

Zmienność procesów finansowych wynika również ze zmienności innych procesów ekonomicznych i finansowych lub niepewności związanej z tymi procesami. Na przykład zmienność cen akcji zależy od zmienności: krótkookresowych stóp procentowych, inflacji, PKB, podaży pieniądza, oraz niepewności związanej z inflacją i zyskami przedsiębiorstw (patrz David i Veronesi, 2008; Diebold i Yilmaz, 2008; Engle i Rangel, 2008). Zmienność cen akcji na GPW w Warszawie zależy w dużym stopniu od zmienności cen akcji na innych giełdach, w tym w Stanach Zjednoczonych i w Budapeszcie (patrz np. Fiszeder, 2001b oraz punkt 2.5.1 niniejszej pracy).

Informacje napływające na rynek można uwzględnić w modelu GARCH przez wprowadzenie do równania dla wariancji warunkowej dodatkowych zmiennych egzogenicznych. Jako zmienne objaśniające można przyjąć procesy zachodzące w otoczeniu rynku (np. procesy makroekonomiczne) lub bezpośrednio związane z rynkiem finansowym, jak wielkość obrotów, zmienność

zrealizowaną czy też zmienność innych aktywów<sup>17</sup>. Uwzględnienie bezpośrednio w modelu ważnych informacji (np. dotyczących publikacji danych finansowych) może spowodować znaczące zmiany w ocenie własności badanych procesów (patrz Goodhart, Hall, Henry i Pesaran, 1993). Na przykład wprowadzenie kilku zmiennych zero-jedynkowych powoduje znaczne zmniejszenie persistencji wariancji (patrz Baillie i Bollerslev, 1990).

Zmienność procesów finansowych jest najczęściej analizowana dla danych o wysokiej częstotliwości, np. danych dziennych, godzinowych lub minutowych. Z drugiej strony większość danych makroekonomicznych jest publikowana w odstępach miesięcznych lub kwartalnych. Z tego względu uwzględnienie takich informacji w modelu jako wyjaśniające zmienność jest znacząco utrudnione. Rozwiązaniem mogłoby być zmniejszenie częstotliwości obserwacji analizowanych danych finansowych, ale to z kolei prowadzi na ogół do znaczącej utraty informacji o zmienności. Engle i Rangel (2008) zaproponowali, aby na podstawie modelu Spline-GARCH dokonać dekompozycji zmienności na krótkookresowy i długookresowy składnik. Pierwszy składnik opisuje krótkookresową dynamikę warunkowej zmienności związanej z krótkotrwałymi czynnikami, drugi opisuje powolne zmiany wariancji związane z czynnikami o długotrwałym wpływie. Długookresowy składnik, nazwany zmiennością o niskiej częstotliwości, zależy od czynników ekonomicznych, które wpływają na niepewność przyszłych przepływów pieniężnych związanych z dywidendami oraz premii za ryzyko związanych z inwestowaniem w dane akcje. Wpływ czynników ekonomicznych na zmienność aktywów może zależeć od stanu gospodarki czy fazy cyklu koniunkturalnego (patrz np. Schwert, 1989; Engle i Rangel, 2008). Do badania przyczyn wpływających na zmienność o niskiej częstotliwości Engle i Rangel (2008) stosują modele SUR (regresje pozornie niezależne) szacowane na podstawie danych przekrojowych. Diebold i Yilmaz (2008) badają zależności między zmiennością stóp zwrotu akcji a zmiennością procesów makroekonomicznych również na podstawie danych przekrojowych dotyczących różnych rynków akcji na świecie.

Wyjaśnianie przyczyn zmienności jest także możliwe na podstawie wielorównaniowych modeli GARCH. Wybrane parametryzacje modeli pozwalają opisać wzajemne relacje między wariancjami warunkowymi badanych aktywów<sup>18</sup>.

<sup>17</sup> Przy porównywaniu własności prognostycznych modeli z dodatkowymi zmiennymi objaśniającymi należy uwzględnić formalnie niepewność o przyszłych wartościach zmiennych objaśniających w modelu warunkowym (patrz np. Osiewalski i Pipień, 2004b).

<sup>18</sup> Więcej informacji na ten temat zamieszczono w rozdziale drugim.



Korzyści wynikające z zastosowania modeli GARCH można podzielić na dwie grupy. Pierwsza grupa dotyczy własności statystycznych. Dzięki uwzględnieniu efektu ARCH można na przykład uzyskać efektywniejsze estymatory parametrów i nieobciążone średnie błędy szacunku, poprawić własności składników resztowych w modelu, opisać zmieniające się w czasie jednoczesne relacje między warunkowymi wartościami oczekiwanymi (za pomocą modeli wielorównaniowych), poprawić własności niektórych testów statystycznych. To może prowadzić do lepszego wyjaśnienia opisywanych zjawisk lub ograniczyć błędy poznawcze. Przykłady wielu takich zastosowań podano w kolejnych rozdziałach pracy. Druga grupa to korzyści ekonomiczne i finansowe. Dotyczą one najczęściej zwiększenia dochodu z inwestycji i zmniejszenia ryzyka. Przykłady innych korzyści ekonomicznych podano we wprowadzeniach do rozdziałów piątego i szóstego.

## **1.5. MODELOWANIE PROCESÓW FINANSOWYCH Z DŁUGĄ PAMIĘCIĄ – ZASTOSOWANIE MODELI ARFIMA-FIGARCH<sup>19</sup>**

Długa pamięć jest typowa dla procesów klimatyczno-przyrodniczych (patrz np. Hurst, 1951; Kwiatkowski i Osiewalski, 2002), ale możliwość jej występowania w makroekonomii uzasadniał Granger (1980) jako efekt agregacji procesów z krótką pamięcią (zob. Osiewalski, 2001). Wyniki badań dotyczące procesów finansowych nie są już tak jednoznaczne. Długookresowe zależności mogą dotyczyć zarówno warunkowej wartości oczekiwanej, jak i warunkowej wariancji procesu. W większości prac bada się tylko jedną z tych zależności, pomijając drugą, tymczasem wiadomo, że nieuwzględnienie w badaniu zmiennej wariancji warunkowej obniża efektywność estymatorów parametrów w równaniu dla wartości oczekiwanej. Występowanie efektu ARCH może wpływać również na wielkość średnich błędów szacunku. Z kolei błędna identyfikacja równania dla wartości oczekiwanej może wpłynąć na wyniki testowania dotyczące warunkowej heteroskedastyczności (patrz Lumsdaine i Ng, 1999). Istnieje wiele metod identyfikacji długiej pamięci. W pracy rozważane jest tylko podejście oparte na modelach ARFIMA i FIGARCH. Głównym celem przedstawionej poniżej analizy jest pokazanie, że niektóre procesy finansowe mają długą pamięć w średniej lub w wariancji, którą można opisać za pomocą modeli ARFIMA-FIGARCH.

<sup>19</sup> Punkt 1.5 opracowano na podstawie pracy Fiszdera (2005c), uwzględniając dodatkowe wyniki estymacji.

Pojęcie pamięci procesu nie jest jednoznacznie rozumiane w literaturze. W niniejszej pracy pod pojęciem procesów z długą pamięcią, rozumie się procesy, których funkcja autokorelacyjna  $\rho(k)$  wygasa w tempie hiperbolicznym, a szereg  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\rho(k)|$  jest rozbieżny. Rozważane są dwa procesy z długą pamięcią – proces ARFIMA (patrz Granger i Joyeux, 1980) i proces FIGARCH (Baillie, Bollerslev i Mikkelsen, 1996, patrz tabela 1.1). Model ARFIMA, stanowiący uogólnienie modelu ARIMA, pozwala opisać długookresowe zależności między poszczególnymi obserwacjami tworzącymi szereg czasowy. Model FIGARCH, będący uogólnieniem modelu GARCH, pozwala opisać długoterminowe zależności między kwadratami poszczególnych obserwacji. Model ARFIMA opisuje warunkową wartość oczekiwaną, natomiast model FIGARCH – warunkową wariancję. Zatem proces FIGARCH jest procesem z długą pamięcią, ale dotyczącą wyłącznie zmienności. Model FIGARCH zaprezentowano w podrozdziale 1.2, poniżej natomiast przedstawiono model ARFIMA.

Model ARFIMA( $P, D, Q$ ) można zapisać w postaci:

$$\phi(L)(1-L)^D(y_t - \mu_t) = \theta(L)\varepsilon_t, \quad (1.5.1)$$

gdzie  $\phi(L) = 1 - \sum_{j=1}^P \phi_j L^j$ ,  $\theta(L) = 1 + \sum_{j=1}^Q \theta_j L^j$ ,  $L$  oznacza operator przesunięcia ( $L^s \varepsilon_t = \varepsilon_{t-s}$ ),  $-1 < D < 0,5$ ,  $\varepsilon_t$  jest białym szumem. Ułamkowy operator różnicowania  $(1-L)^D$  zdefiniowany jest następująco:

$$(1-L)^D = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{D}{k} (-L)^k. \quad (1.5.2)$$

Proces spełniający równanie (1.5.1) jest stacjonarny, gdy  $D < 0,5$  oraz wszystkie pierwiastki równania  $\phi(L) = 0$  leżą poza kołem jednostkowym, natomiast jest odwracalny, gdy  $D > -1$  oraz wszystkie pierwiastki równania  $\theta(L) = 0$  leżą poza kołem jednostkowym. Jeżeli  $D \in (0; 0,5)$ , to proces ARFIMA określany jest jako proces z długą pamięcią (patrz Kwiatkowski i Osiewalski, 2002). Funkcja autokorelacyjna  $\rho(k)$  maleje bardzo powoli do zera, zgodnie z funkcją hiperboliczną i szereg  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\rho(k)|$  jest rozbieżny. W przypadku, gdy  $D = 0$  proces (1.5.1) jest procesem ARMA( $p, q$ ), a funkcja autokorelacyjna zmierza do zera w postępie geometrycznym (zgodnie z funkcją wykładniczą), czyli bardzo szybko. Proces ARMA jest procesem z krótką pamięcią. Jeżeli

$D \in (-0,5; 0)$ , proces ARFIMA określa się jako proces ze średnią pamięcią, bo  $\rho(k)$  wygasa hiperbolicznie, ale szereg  $\sum_{k=-\infty}^{\infty} |\rho(k)|$  jest zbieżny.

Badaniu poddano następujące szeregi finansowe: indeksy rynku akcji na GPW w Warszawie – MIDWIG, TechWIG, WIG, WIG20, WIRR, indeksy rynku akcji na świecie – DJIA, Nasdaq Composite, S&P 500 (Nowy Jork), DAX (Frankfurt), BUX (Budapeszt), kursy walut – USD/PLN, EUR/PLN, EUR/USD, ceny surowców naturalnych – złoto, ropa naftowa, miedź. Dla indeksów rynku akcji na GPW w Warszawie analizowano dzienne obserwacje od momentu, kiedy notowania odbywały się pięć razy w tygodniu (3 październik 1994 r.) lub od momentu wprowadzenia danego indeksu na GPW w Warszawie do 28 lutego 2005 roku. W celu zachowania zbliżonej liczebności próby taki sam okres przyjęto przy badaniu indeksów rynku akcji na świecie oraz surowców naturalnych. Na dynamikę kursów wymiany złotego znaczący wpływ miał obowiązujący w okresie ich notowania system kursu walutowego (patrz Doman i Doman, 2004), dlatego dla kursu USD/PLN badano dwa szeregi. Pierwszy obejmował dane od momentu częściowego uwolnienia kursu złotego (16 maj 1995 r.), drugi od momentu całkowitego uwolnienia kursu złotego (12 kwiecień 2000 r.) do 28 lutego 2005 roku. Kursy EUR/PLN i EUR/USD badane były w okresie od 12 kwietnia 2000 r. do 28 lutego 2005 roku.

Część spośród analizowanych instrumentów finansowych była już przedmiotem podobnych badań (patrz np. Osiewalski i Pipień, 2000; Fiszeder, 2001c; Piontek, 2004; Doman i Doman, 2004), jednakże prezentowane poniżej wyniki często różnią się od wyników publikowanych w innych pracach. Po pierwsze, w tych badaniach analizowane były tylko szeregi dotyczące polskiego rynku finansowego. Po drugie, w żadnej z wymienionych prac nie modelowano długiej pamięci w średniej. Po trzecie, tylko w pracach Domanów i Piontka rozważane były wszystkie trzy warianty modelu zmienności, to znaczy GARCH, IGARCH i FIGARCH (w ostatniej pracy badany jest tylko indeks WIG). Rozróżnienie między tymi trzema specyfikacjami ma duże znaczenie z teoretycznego punktu widzenia, ponieważ modele te opisują zupełnie inną dynamikę zmienności (patrz podrozdział 1.2). Podstawowa różnica w wynikach opisywanych wyżej analiz dotyczy indeksów rynku akcji. W pracy Domanów modelem najlepiej opisującym zmienność był model GARCH.

W pierwszej kolejności, dla wszystkich szeregów czasowych, przeprowadzono test na pierwiastek jednostkowy Ng-Perrona oraz test stacjonarności KPSS. Otrzymane wyniki zostały zaprezentowane w tabeli 1.2. Wyniki

testu Ng-Perrona wskazują, że wszystkie procesy są procesami zintegrowanymi rzędu pierwszego. Do takiego samego wniosku (z wyjątkiem dwóch szeregów) prowadzą wyniki testu KPSS. Tylko w przypadku indeksu S&P 500 i kursu USD/PLN (1 szereg) hipoteza o stacjonarności pierwszych przyrostów logarytmów badanych zmiennych została odrzucona. Wyniki testów należy jednakże interpretować z dużą ostrożnością, ponieważ we wszystkich szeregach występuje efekt ARCH, a suma ocen parametrów w modelach GARCH jest często bliska jedności<sup>20</sup>. Podjęcie decyzji o kowariancyjnej stacjonarności procesu w przypadku procesów IGARCH będzie zawsze błędne, ponieważ wariancja bezwarunkowa takiego procesu nie istnieje.

Na podstawie logarytmicznych stóp zwrotu oszacowano parametry modeli ARFIMA-FIGARCH (zastosowano metodę największej wiarygodności). Jako warunkowy rozkład  $\varepsilon_t$  przyjęto skośny rozkład t-Studenta<sup>21</sup> (patrz Osiewalski i Pipień, 2000). Dla szeregów stóp zwrotu: MIDWIG, TechWIG, WIRR i BUX otrzymano istotną ocenę parametru  $D$  ( $0 < D < 0,5$ ) w modelu ARFIMA, co oznacza, że są one realizacjami procesów z długą pamięcią. W przypadku szeregów stóp zwrotu: MIDWIG, WIG, WIG20, WIRR, BUX, EUR/PLN, EUR/USD ocena parametru  $d$  ( $0 < d < 1$ ) w modelu FIGARCH była istotna, co wskazuje na występowanie długookresowych zależności w wariancji. Ocena parametru asymetrii  $\xi$  w warunkowym skośnym rozkładzie t-Studenta była istotna dla następujących szeregów: MIDWIG, WIG20, WIRR, Nasdaq Composite, S&P 500, DAX, USD/PLN (krótszy szereg), EUR/PLN i ropa naftowa. Wyboru różnych specyfikacji modelu (wartości  $P$ ,  $Q$ ,  $p$ ,  $q$ , postaci warunkowej wartości oczekiwanej i warunkowej wariancji oraz warunkowego rozkładu  $\varepsilon_t$ ) dokonywano na podstawie kryterium Akaike (AIC) i kryterium Schwarz (SIC) z uwzględnieniem wyników odpowiednich testów diagnostycznych. Wyniki estymacji dla modeli wybranych na podstawie kryteriów informacyjnych zaprezentowano w tabelach 1.3 i 1.4 odpowiednio dla modeli wybranych na podstawie kryterium AIC i SIC.

Jeżeli wyboru modelu dokonywano na podstawie kryterium SIC, to struktura modelu okazała się znacznie prostsza, zwłaszcza w przypadku modelu wariancji warunkowej. Oba kryteria wskazywały model ARFIMA jako najlepszy tylko dla dwóch indeksów MIDWIG i WIRR. Modelem najle-

<sup>20</sup> Na przykład test Dickeya-Fullera w takiej sytuacji odrzuca hipotezę zerową znacznie częściej niż powinien (patrz Kim i Schmidt, 1993).

<sup>21</sup> Własności estymatora MNW dla modelu ARFIMA-FIGARCH z warunkowym skośnym rozkładem t-Studenta nie są jeszcze w pełni znane.

piej opisującym wariancję warunkową większości szeregów stóp zwrotu, według kryterium SIC, okazał się model IGARCH (poza szeregami miedź, EUR/PLN i USD/PLN – krótszy szereg, dla których najlepszym modelem był GARCH i szeregami WIRR i BUX, dla których najlepszy był model FIGARCH, jednakże nie spełniał on restrykcji, zapewniających dodatniość wariancji warunkowej<sup>22</sup>). Jeżeli wyбору modelu dokonywano na podstawie kryterium AIC, to najlepszym modelem był najczęściej model FIGARCH, choć w większości przypadków oceny parametrów nie spełniały restrykcji zapewniających dodatniość wariancji. Porównując funkcje autokorelacyjne obliczone dla kwadratów realizacji procesów GARCH, IGARCH i FIGARCH z empirycznymi funkcjami autokorelacyjnymi dla kwadratów stóp zwrotu badanych szeregów, można jednakże zauważyć, że modele FIGARCH i GARCH w wielu przypadkach lepiej opisują zmienność analizowanych szeregów. Dla modeli IGARCH wartości funkcji autokorelacyjnej dla pierwszych kilkudziesięciu odstępów są wyraźnie przeszacowane. Z tego względu wydaje się jednak, że modele IGARCH, wybrane na podstawie kryterium SIC, są zbyt oszczędnie sparametryzowane i najczęściej opisują zmienność empirycznych stóp zwrotu w niewystarczającym stopniu. Podsumowując, uzyskane wyniki wskazują, że wybór modelu może w znacznym stopniu zależeć od przyjętego kryterium statystycznego. Nawet przy tak zbliżonych kryteriach jak AIC i SIC wybrane modele często wskazywały na duże różnice we własnościach wariancji badanych procesów finansowych.

Zastosowania modeli GARCH, IGARCH oraz FIGARCH w prognozowaniu zmienności stóp zwrotu na GPW w Warszawie przedstawiono w punkcie 3.2.5. Nie badano, jakie może być znaczenie praktyczne modeli ARFI-MA-FIGARCH do zabezpieczania i wyceny instrumentów pochodnych, ale wyniki trafności prognoz zmienności stóp zwrotu indeksu WIG20 i spółki PKN Orlen sugerują, że przewaga takiego modelu może nie być istotna z ekonomicznego punktu widzenia. Należy jednakże przypuszczać, że wyniki będą zależały od własności badanych szeregów czasowych. W badaniu Bollersleva i Mikkelsena (1999) wyceny długoterminowych opcji konstruowane na podstawie modelu FIEGARCH były dokładniejsze niż wyceny konstruowane na podstawie modeli EGARCH i IGARCH.

---

<sup>22</sup> Nie udało się oszacować parametrów w przypadku, gdy restrykcje zostały narzucone w trakcie estymacji.

TABELA 1.2. TEST NA PIERWIASTEK JEDNOSTKOWY ORAZ TEST KOWARIANCYJNEJ STACJONARNOŚCI DLA WYBRANYCH PROCESÓW FINANSOWYCH

Szereg	Test Ng-Perrona						Test KPSS			
	ln y <sub>t</sub>			Δ ln y <sub>t</sub>			ln y <sub>t</sub>	Δ ln y <sub>t</sub>		
	MZ <sub>p</sub>	MZ <sub>t</sub>	MSB	MP <sub>t</sub>	MZ <sub>p</sub>	MZ <sub>t</sub>			MSB	MP <sub>t</sub>
	Indeksy rynku akcji na GPW w Warszawie									
MIDWIG	-0,61	-0,24	0,39	13,13	-308,48*	-12,41*	0,04*	0,09*	2,60*	0,20
TechWIG	-1,09	-0,69	0,63	20,35	-84,55*	-6,48*	0,08*	0,33*	2,50*	0,28
WIG	0,31	0,17	0,55	22,88	-909,31*	-21,32*	0,02*	0,03*	3,18*	0,07
WIG20	-0,84	-0,39	0,47	15,17	-944,75*	-21,73*	0,02*	0,03*	1,54*	0,07
WIRR	1,01	0,91	0,91	58,69	-120,51*	-7,74*	0,06*	0,24*	1,06*	0,24
	Indeksy rynku akcji na świecie									
DJIA	0,55	0,78	1,41	120,33	-594,59*	-17,24*	0,03*	0,04*	4,22*	0,35
Nasdaq Composite	0,06	0,06	0,98	54,84	-653,30*	-18,07*	0,03*	0,04*	2,32*	0,30
S&P500	0,45	0,61	1,36	109,00	-449,25*	-14,99*	0,03*	0,06*	3,29*	0,49*
DAX	-0,06	-0,06	0,95	50,28	-773,43*	-19,66*	0,03*	0,03*	2,17*	0,35
BUX	1,08	1,70	1,58	167,20	-1268,7*	-25,18*	0,02*	0,02*	4,12*	0,24
	Kursy walut									
USD/PLN 1	-0,20	-0,26	1,29	83,87	-923,14*	-21,48*	0,02*	0,03*	3,47*	1,07*
USD/PLN 2	2,39	0,86	0,36	17,58	-116,29*	-7,60*	0,07*	0,25*	3,16*	0,32
EUR/PLN	-2,69	-1,16	0,43	9,11	-102,17*	-7,13*	0,07*	0,27*	2,71*	0,22
EUR/USD	0,84	0,56	0,66	33,54	-627,14*	-17,71*	0,03*	0,04*	3,94*	0,24
	Surowce naturalne									
Złoto	-1,54	-0,85	0,55	15,38	-947,96*	-21,77*	0,02*	0,03*	1,53*	0,44
Ropa (fut.)	-0,38	-0,14	0,37	13,00	-1188,9*	-24,38*	0,02*	0,02*	3,70*	0,12
Miedź (fut.)	-2,37	-1,02	0,43	9,90	-1057,7*	-23,00*	0,02*	0,02*	1,50*	0,39

Gwiazdką oznaczono oceny statystyk, w przypadku których weryfikowana hipoteza została odrzucona na poziomie 0,05.

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2005C).

TABELA 1.3. WYNIKI ESTYMACJI MODELI W KLASIE ARFIMA-FIGARCH WYBRANYCH NA PODSTAWIE KRYTERIUM AIC

Szereg	$\phi_0 \times 10^{-4}$	$\phi_1$	$\phi_2$	$\theta_1$	D	$\alpha_0 \times 10^{-4}$	$\alpha_1$ lub $\varphi_1$	$\alpha_2$	$\beta_1$	d	v	$\xi$
MIDWIG	1,1796 (4,7709)	-	-	-	0,1046 (0,0188)	4,9806 (2,8887)	0,1029 (0,0746)	-	0,5800 (0,0947)	0,5911 (0,0651)	9,3522 (2,2249)	-0,0840 (0,0345)
TechWIG	2,2738 (4,3247)	0,0903 (0,0282)	-	-	-	0,0124 (0,0090)	0,0732 (0,0137)	-	-	-	11,2753 (3,2175)	-
WIG	5,8458 (4,3244)	-	-	0,1572 (0,0204)	-	0,0257 (0,0119)	0,1018 (0,0154)	-	-	-	7,3670 (1,0141)	-
WIG20	7,7597 (3,4501)	0,0698 (0,0200)	-	-	-	0,0614 (0,0181)	0,0970 (0,0127)	-	0,8901 (0,0139)	-	8,2265 (1,3395)	0,0665 (0,0284)
WIRR	-5,6879 (6,3638)	0,0440 (0,0319)	-0,1000 (0,0238)	-	0,1332 (0,0262)	0,0103 (0,0042)	0,1879 (0,0348)	-0,1199 (0,0376)	-	-	7,2820 (0,9252)	-0,1262 (0,0284)
DJA	6,3572 (1,7399)	-	-	-	-	0,0098 (0,0034)	0,0665 (0,0094)	-	0,9259 (0,0101)	-	9,6183 (1,5514)	-0,0629 (0,0310)
Nasdaq	10,7963 (2,1535)	-	-	-	-	0,0184 (0,0073)	0,0345 (0,0192)	0,0812 (0,0290)	-	-	13,4195 (2,9514)	-0,1321 (0,0381)
S&P 500	7,6261 (1,6025)	-	-	-	-	0,0058 (0,0023)	0,0329 (0,0180)	0,0439 (0,0218)	-	-	8,1124 (1,1634)	-0,0650 (0,0300)
DAX	6,6957 (2,1694)	-	-	-	-	0,0158 (0,0065)	0,0004 (0,0161)	0,1135 (0,0230)	-	-	16,5858 (3,9796)	-0,1085 (0,0290)
BOX	10,9156 (2,723)	-	-	0,0673 (0,0326)	-	0,0651 (0,0172)	0,1980 (0,0253)	-0,1005 (0,0268)	-	-	4,9737 (0,5171)	-
USD/PLN 1	1,6305 (0,9251)	-	-	-	-	0,0123 (0,0028)	0,2493 (0,0382)	-0,1061 (0,0495)	-	-	5,3949 (0,5065)	-
USD/PLN 2	-3,8988 (1,9585)	-	-	-	-	0,0821 (0,0253)	0,1489 (0,0320)	-	0,6947 (0,0646)	-	10,2065 (3,1741)	0,1101 (0,0426)
EUR/PLN	-1,3877 (1,6334)	-0,1106 (0,0317)	-	-	-	1,0134 (0,4522)	0,2929 (0,1340)	-	0,5739 (0,1529)	0,4352 (0,0825)	6,2186 (1,1227)	0,1145 (0,0439)
EUR/USD	2,8011 (1,6978)	-	-	-0,0598 (0,0260)	-	0,5774 (0,1677)	0,2724 (0,0573)	-	0,6526 (0,0848)	0,3914 (0,0921)	10,7057 (3,5385)	-
Złoto	-1,3035 (0,9528)	-	-	-0,0463 (0,0187)	-	0,0022 (0,0011)	0,0851 (0,0139)	-	0,9148 (0,0088)	-	3,5742 (0,2912)	-
Ropa (fut.)	5,4732 (3,5341)	-	-	-	-	0,0189 (0,0089)	0,0377 (0,0089)	-	-	-	6,361 (0,8553)	-0,0596 (0,0277)
Miedź (fut.)	0,5315 (2,3480)	-0,0768 (0,0186)	-	-	-	0,0307 (0,0123)	0,0237 (0,0060)	-	0,9627 (0,0097)	-	5,0453 (0,4949)	-

W nawiasach, pod ocenami parametrów, podano średnie błędy szacunku,  $v$  i  $\xi$  to parametry skośnego rozkładu t-Studenta. Pozostałe parametry odnoszą się do specyfikacji modeli GARCH, IGARCH i FIGARCH przedstawionych w tabeli 1.1 oraz formuły (1.5.1).

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2005C).

TABELA 1.4. WYNIKI ESTYMACJI MODELI W KLASIE ARFIMA-FIGARCH WYBRANYCH NA PODSTAWIE KRYTERIUM SIC

Szereg	$\phi_0 \times 10^{-4}$	$\phi_1$	$\phi_2$	$\theta_1$	D	$\alpha_n \times 10^{-4}$	$\alpha_n$ or $\phi_n$	$\alpha_2$	$\beta_1$	d	v	$\xi$
MIDWIG	3,3546 (4,5631)	-	-	-	0,1067 (0,0180)	0,0106 (0,0051)	0,1099 (0,0195)	-	-	-	9,6564 (2,0026)	-
TechWIG	2,2738 (4,3247)	0,0903 (0,0282)	-	-	-	0,0124 (0,0090)	0,0732 (0,0137)	-	-	-	11,2753 (3,2175)	-
WIG	5,8458 (4,3244)	-	-	0,1572 (0,0204)	-	0,0257 (0,0119)	0,1018 (0,0154)	-	-	-	7,3670 (1,0141)	-
WIG20	5,0402 (3,0103)	0,0684 (0,0202)	-	-	-	0,0367 (0,0180)	0,0999 (0,0166)	-	-	-	7,5076 (1,0599)	-
WIRR	-6,0511 (6,5688)	0,0438 (0,0335)	-0,0984 (0,0241)	-	0,1355 (0,0262)	11,5654 (7,4217)	0,9982 (0,0012)	-	0,9671 (0,0090)	0,1657 (0,0368)	8,2008 (1,2203)	-0,1256 (0,0291)
DIIA	7,2419 (1,7321)	-	-	-	-	0,0092 (0,0052)	0,0710 (0,0114)	-	-	-	8,4418 (1,2836)	-
Nasdaq	9,6381 (2,2827)	-	-	-	-	0,0112 (0,0051)	0,0861 (0,0134)	-	-	-	14,5024 (3,0713)	-0,1436 (0,0285)
S&P 500	7,6266 (1,5944)	-	-	-	-	0,0018 (0,0009)	0,0670 (0,0094)	-	-	-	8,1882 (0,9806)	-
DAX	6,6957 (2,1694)	-	-	-	-	0,0158 (0,0065)	0,0004 (0,0161)	0,1135 (0,0230)	-	-	16,5858 (3,9796)	-0,1085 (0,0290)
BUX	11,1109 (2,5642)	-	-	0,0811 (0,0216)	-	1,6540 (0,3367)	0,9441 (0,0268)	-	0,9138 (0,0377)	0,1650 (0,0395)	5,9145 (0,5339)	-
USD/PLN 1	1,3811 (0,9263)	-	-	-	-	0,0065 (0,0027)	0,1944 (0,0243)	-	-	-	5,3222 (0,3743)	-
USD/PLN 2	-3,8988 (1,9585)	-	-	-	-	0,0821 (0,0253)	0,1489 (0,0320)	-	0,6947 (0,0646)	-	10,2065 (3,1741)	0,1101 (0,0426)
EUR/PLN	-2,9125 (1,4680)	-0,1127 (0,0288)	-	-	-	0,0168 (0,0057)	0,0858 (0,0176)	-	0,8770 (0,0241)	-	6,8464 (1,1768)	-
USD/EUR	-3,7143 (1,7913)	-	-	-0,0598 (0,0235)	-	0,0007 (0,0008)	0,0316 (0,0091)	-	-	-	10,9976 (3,4399)	-
Złoto	-1,2508 (0,9751)	-	-	-	-	0,0034 (0,0013)	0,0749 (0,0101)	-	-	-	4,0938 (0,2548)	-
Ropa (fut.)	6,8663 (3,6167)	-	-	-	-	0,0158 (0,0076)	0,0395 (0,0079)	-	-	-	5,9744 (0,7066)	-
Miedz (fut.)	0,5315 (2,3480)	-0,0768 (0,0186)	-	-	-	0,0307 (0,0123)	0,0237 (0,0060)	-	0,9627 (0,0097)	-	5,0453 (0,4949)	-

W nawiasach, pod ocenami parametrów, podano średnie błędy szacunku,  $v$  i  $\xi$  to parametry skośnego rozkładu t-Studenta. Pozostałe parametry odnoszą się do specyfikacji modeli GARCH, IGARCH i FIGARCH przedstawionych w tabeli 1.1 oraz formuły (1.5.1).

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.



## 1.6. EFEKTY KALENDARZOWE

Szereg badań dotyczących zarówno rynku amerykańskiego, jak i innych giełd zagranicznych wskazuje na występowanie wahań okresowych stóp zwrotu z papierów wartościowych (patrz np. Bernstein, 1996; Haugen, 1996; Elton i Gruber, 1998). Stopy zwrotu są wyraźnie wyższe lub niższe w zależności od pory dnia, dnia tygodnia czy też miesiąca. Wahania o okresie tygodniowym określane są często jako efekt dnia tygodnia. Występują istotne różnice w stopach zwrotu w zależności od dnia tygodnia, w którym dokonywane są transakcje. Na nowojorskiej giełdzie NYSE średnie stopy zwrotu w poniedziałki są istotnie mniejsze od średnich stóp zwrotu w pozostałe dni tygodnia. Co więcej, szacunki poniedziałkowych stóp zwrotu są najczęściej ujemne. Zaobserwowana anomalia jest często określana jako efekt poniedziałku. Podobny efekt występuje również na innych rynkach zagranicznych, z tym że na niektórych rynkach dotyczy nie poniedziałku, lecz wtorku. Efekt dnia tygodnia dla polskiego rynku badali między innymi: Tarczyński (1997b), Szyszka (1999), Piontek (2000), Landmesser (2006), Kluth (2007) oraz Witkowska i Kompa (2007). Badania te pokazały, że średnie stopy zwrotu w poniedziałki są większe od średnich stóp zwrotu w pozostałe dni tygodnia, natomiast średnie stopy zwrotu we wtorki są ujemne. Wyjaśnienie ujemnych średnich stóp zwrotu we wtorki jest stosunkowo proste, jeżeli weźmie się pod uwagę fakt, że sytuacja na giełdzie w Nowym Jorku ma istotny wpływ na notowania na GPW w Warszawie (patrz Fiszeder, 2001b). Ponieważ notowania w Nowym Jorku kończą się po zamknięciu sesji na GPW, dlatego inwestorzy mogą zareagować na wydarzenia na NYSE dopiero następnego dnia.

Najczęściej badanymi wahaniami okresowymi są wahania sezonowe, czyli wahania o okresie rocznym (patrz Zieliński, 1979). Liczne badania wskazują, że średnie stopy zwrotu w styczniu są istotnie większe od średnich stóp zwrotu w pozostałych miesiącach (patrz np. Bernstein, 1996; Haugen, 1996). Anomalia ta jest często określana jako efekt stycznia. W przypadku rynku amerykańskiego efekt stycznia dotyczy przede wszystkim akcji firm o relatywnie małej kapitalizacji. Istnieje co najmniej kilka teorii próbujących wyjaśnić występowanie większych średnich stóp zwrotu w styczniu, jak np.: wyprzedaż akcji ze względów podatkowych, uzasadnienie oparte na mikrostrukturze rynku<sup>23</sup> czy praktyki stosowane przez osoby zawodowo zarządza-

---

<sup>23</sup> Na przykład znaczące różnice między ofertami kupna i sprzedaży w przypadku mało płynnych spółek.

jące portfelami (patrz Haugen, 1996; Elton i Gruber, 1998). Sezonowość stóp zwrotu dla polskiego rynku badał np. Szyszka (1999), jednakże ze względu na krótką historię GPW i przyjętą metodologię nie zaobserwował istotnych statystycznie zależności.

Dużą część badań dotyczących efektu dnia tygodnia oraz wahań sezonowych stóp zwrotu nie uwzględnia jednej z podstawowych własności finansowych szeregów czasowych, a mianowicie zmienności wariancji warunkowych stóp zwrotu. Na przykład występowanie zmiennej wariancji warunkowej składnika losowego w modelu regresji ze zmiennymi zero-jedynkowymi, opisującymi wahania okresowe stóp zwrotu, obniża efektywność estymatorów parametrów strukturalnych otrzymanych metodą najmniejszych kwadratów. Jeżeli dodatkowo w modelu występują opóźnione zmienne endogeniczne, to powszechnie stosowana formuła na macierz kowariancji estymatorów  $\sigma^2(X'X)^{-1}$  jest wówczas nieodpowiednia (patrz punkt 1.3.1), a jej zastosowanie może prowadzić do błędnej decyzji o występowaniu wahań okresowych. Aby uwzględnić zmienność warunkowych wariancji, można zastosować model GARCH. Takie podejście zostało przedstawione w dalszej części pracy.

Większość prowadzonych badań dotyczy wahań okresowych stóp zwrotu, tymczasem podobne wahania mogą również dotyczyć zmienności. Analizy Famy (1965) oraz Frencha i Rolla (1986) pokazują, że zmienność stóp zwrotu na NYSE jest większa w poniedziałki niż w pozostałe dni tygodnia. Okazuje się, że zmienność jest również większa w inne dni tygodnia, jeżeli sesja odbywa się bezpośrednio po dniu, w którym nie było notowań (najczęściej ze względu na okres świąteczny). Podobne zjawisko można również zauważyć w przypadku kursów walutowych (patrz Baillie i Bollerslev, 1989 oraz Bollerslev, Engle i Nelson, 1994). Na rynku amerykańskim występują również wahania sezonowe zmienności. Wariancja stóp zwrotu na NYSE jest istotnie większa w styczniu i październiku (patrz np. Glosten, Jagannathan i Runkle, 1993). Efekt dnia tygodnia dotyczący zmienności dla polskiego rynku analizowali między innymi Piontek (2000), Skrodzka i Włodarczyk (2004), Landmesser (2006), Kluth (2007) oraz Witkowska i Kompa (2007). Wariancja stóp zwrotu na GPW w Warszawie jest również większa w poniedziałki niż w pozostałe dni tygodnia. W przeprowadzonych badaniach, poza analizami Landmesser (2006) i Kluth (2007)<sup>24</sup>, nie uwzględniono jednakże efektu ARCH. Wahania okresowe na GPW w Warszawie badali również za pomocą metod

<sup>24</sup> Przyjęte przez autorki specyfikacje modelu GARCH nie zapewniają dodatniości wariancji warunkowej. W badaniu empirycznym niektóre oceny parametrów w równaniach dla wariancji były ujemne.

analizy spektralnej Fiszeder (1999) oraz Górka i Osińska (2001) i nie wykryli występowania efektu dnia tygodnia i sezonowości. Wynikało to prawdopodobnie z zastosowanej metody.

### 1.6.1. MODELE GARCH OPISUJĄCE WAHANIA OKRESOWE

W celu uwzględnienia zmiennej wariancji warunkowej analiza efektu dnia tygodnia może być przeprowadzona na podstawie następującej postaci modelu AR( $s$ )-GARCH( $p, q$ ) rozszerzonej o zmienne zero-jedynkowe:

$$r_t = a_0 + a_1 r_{t-1} + \dots + a_s r_{t-s} + \sum_{k=1}^4 b_k d_{kt} + \varepsilon_t, \quad (1.6.1)$$

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t}, \quad z_t \sim N(0,1), \quad (1.6.2)$$

$$\ln h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \ln h_{t-j} + \sum_{k=1}^4 \gamma_k d_{kt}, \quad (1.6.3)$$

gdzie  $r_t$  jest to stopa zwrotu w chwili  $t$ ,  $d_{kt}$  to zmienne zero-jedynkowe oznaczające dzień tygodnia. Przyjęcie logarytmicznej postaci warunkowej wariancji zapewnia jej dodatni znak dla wszystkich możliwych realizacji szeregu. Dzięki temu nie trzeba nakładać na parametry w równaniu dla wariancji dodatkowych restrykcji, tak jak na przykład w pracy Hsieha (1989a). Z uwagi na występowanie pomiędzy zmiennymi objaśniającymi (zmiennymi zero-jedynkowymi i wyrazem wolnym) współliniowości w równaniach (1.6.1 i 1.6.3) pominięto zmienne dla piątku, a w równaniach (1.6.7 i 1.6.9) zmienne dla grudnia<sup>25</sup>. Ograniczenie parametrów tylko do wartości nieujemnych może wpłynąć znacząco na uzyskane wyniki. Przyjęcie modelu w postaci (1.6.1–1.6.3) pozwala na jednoczesne badanie efektu dnia tygodnia dla stóp zwrotu i zmienności z uwzględnieniem występowania zmiennej wariancji warunkowej. Badanie istotności efektu dnia tygodnia można przeprowadzić, weryfikując hipotezy:  $b_1 = b_2 = \dots = b_5 = 0$  dla stóp zwrotu oraz  $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_5 = 0$  dla wariancji. Powyższa specyfikacja modelu jest różna od dwóch postaci zaproponowanych w pracach: Baillie i Bollerslev (1989) oraz Bollerslev i Ghysels (1996), które również pozwalają modelować efekt dnia tygodnia w zmienności. W modelu przedstawionym w pierwszej pracy cykliczne zmienne zero-je-

<sup>25</sup> Brakujące oceny parametrów można wyznaczyć z odpowiednich tożsamości.

dynkowe zostały uwzględnione w sposób multiplikatywny, natomiast model zaproponowany w drugiej pracy pozwala na periodyczne zmiany parametrów w równaniu dla wariancji.

Na rynku amerykańskim zmienność jest większa nie tylko w poniedziałki, ale również w inne dni tygodnia, jeżeli sesja odbywa się bezpośrednio po dniu, w którym nie było notowań (najczęściej ze względu na okres świąteczny). Merrill (1982) badał z kolei stopy zwrotu na NYSE w okolicach świąt i wykazał, że są one najczęściej dodatnie przed świętami, w czasie których nie ma notowań. Poniższa specyfikacja modelu  $AR(s)$ -GARCH( $p, q$ ) pozwala opisać wspomniane własności, związane z okresami świątecznymi:

$$r_t = a_0 + a_1 r_{t-1} + \dots + a_s r_{t-s} + e_1 hol_{1t} + e_2 hol_{2t} + \varepsilon_t, \quad (1.6.4)$$

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t}, \quad z_t \sim N(0,1), \quad (1.6.5)$$

$$\ln h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \ln h_{t-j} + \varphi_1 hol_{1t} + \varphi_2 hol_{2t}, \quad (1.6.6)$$

gdzie  $hol_{1t} = 1$ , jeżeli sesja odbywa się przed dniem, w czasie którego nie ma notowań (poza weekendem),  $hol_{1t} = 0$  w pozostałe dni,  $hol_{2t} = 1$  jeżeli sesja odbywa się po dniu, w czasie którego nie ma notowań (poza weekendem) i  $hol_{2t} = 0$  w pozostałe dni. Dzięki logarytmicznej postaci warunkowej wariancji nie trzeba nakładać na parametry w równaniu dla wariancji dodatkowych restrykcji. Równanie (1.6.6) pozwala zatem opisać zmniejszoną zmienność na sesji przed świętami. Badanie istotności efektu związanego z okresami świątecznymi przeprowadza się weryfikując hipotezy:  $e_1 = 0, e_2 = 0$  dla warunkowej wartości oczekiwanej oraz  $\varphi_1 = 0, \varphi_2 = 0$  dla warunkowej wariancji. Zaproponowana specyfikacja modelu różni się od postaci przedstawionych w pracach: Baillie i Bollerslev (1989) oraz Hsieh (1989a). W pierwszej pracy dodatkowe zmienne zero-jedynkowe opisujące efekt związany ze świętami zostały uwzględnione w równaniu dla warunkowej wariancji w sposób multiplikatywny, w drugiej pracy w równaniu dla warunkowej wariancji dodano zmienną oznaczającą liczbę dni wolnych (poza weekendem) pomiędzy kolejnymi sesjami giełdowymi.

Wahania sezonowe stóp zwrotu i zmienności można opisać za pomocą następującego modelu  $AR(s)$ -GARCH( $p, q$ ):

$$r_t = a_0 + a_1 r_{t-1} + \dots + a_s r_{t-s} + \sum_{k=1}^{11} c_k m_{kt} + \varepsilon_t, \quad (1.6.7)$$

$$\varepsilon_t = z_t \sqrt{h_t}, \quad z_t \sim N(0,1), \quad (1.6.8)$$

$$\ln h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j \ln h_{t-j} + \sum_{k=1}^{11} \delta_k m_{kt}, \quad (1.6.9)$$

gdzie  $m_{kt}$  to zmienne zero-jedynkowe oznaczające kolejne miesiące. Jeżeli następujące hipotezy:  $c_1 = c_2 = \dots = c_{12} = 0$  oraz  $\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_{12} = 0$  zostaną odrzucone, to występują wahania sezonowe odpowiednio stóp zwrotu i zmienności. Model w postaci (1.6.7–1.6.9) jest różny od specyfikacji modelu GARCH zaproponowanych w pracach: Glosten, Jagannathan i Runkle (1993) oraz Bollerslev i Ghysels (1996), które również pozwalają opisać wahania sezonowe zmienności. W modelu przedstawionym w pierwszej pracy składnik losowy z równania dla warunkowej wartości oczekiwanej jest iloczynem „zmienności fundamentalnej” pozbawionej wahań sezonowych i składnika sezonowego opisanego za pomocą zmiennych zero-jedynkowych<sup>26</sup>, natomiast model zaproponowany w drugiej pracy pozwala na periodyczne zmiany parametrów w równaniu dla wariancji.

Zaprezentowane efekty kalendarzowe powinny być analizowane łącznie, jednakże z uwagi na dużą liczbę parametrów i problemy związane z ich estymacją są one najczęściej badane oddzielnie. Z tego względu również analiza empiryczna przedstawiona w następnym punkcie została przeprowadzona oddzielnie dla poszczególnych efektów.

### 1.6.2. ANALIZA EFEKTU DNIA TYGODNIA ORAZ WAHAŃ SEZONOWYCH DLA GPW W WARSZAWIE

Przedstawione w punkcie 1.6.1 modele zastosowano do badania efektu dnia tygodnia oraz wahań sezonowych stóp zwrotu i zmienności na GPW w Warszawie. Analiza została przeprowadzona dla indeksów WIG oraz WIRR. Indeks WIG to najstarszy i obejmujący największą liczbę spółek indeks charakteryzujący GPW w Warszawie. Do badania przyjęto okres od 3 października 1994 r. (od dnia, kiedy sesje odbywają się pięć razy w tygodniu) do 30 czerwca 2004 roku. Indeks WIRR początkowo był obliczany na podstawie wszystkich spółek, notowanych na rynku równoległym GPW w Warszawie (obecnie indeks ten nosi nazwę sWIG80). Indeks WIRR w sposób syntetyczny informuje o zmianach cen najmniejszych spółek. Do badania

<sup>26</sup> Autorzy uwzględnili w modelu tylko dwie istotne zmienne zero-jedynkowe dla stycznia i października.

przyjęto okres od 31 grudnia 1994 r. (od momentu wprowadzenia indeksu) do 30 czerwca 2004 roku. Badano dzienne stopy zwrotu, obliczane według formuły:  $r_t = 100 \ln(y_t / y_{t-1})$ . Ponieważ warunkowa normalność procesu (założona w równaniach (1.6.2), (1.6.5) i (1.6.8)) nie była w stanie wyjaśnić zwiększonej kurtozy występującej w rozkładach brzegowych, dlatego zastosowano metodę quasi-największej wiarygodności (różni się ona od MNW nie ocenami parametrów, lecz średnimi błędami szacunku – sposobem ich szacowania). W tabeli 1.5 zaprezentowano oszacowane modele AR-GARCH w postaci (1.6.1–1.6.3), pozwalające opisać efekt dnia tygodnia. Na podstawie kryterium SIC oraz testów na badanie autokorelacji i efektu ARCH, ustalono, że  $s = q = p = 1$ .

TABELA 1.5. MODEL EFEKTU DNIA TYGODNIA

Parametr	WIG		WIRR	
	Ocena par.	Błąd oceny	Ocena par.	Błąd oceny
$a_0$	0,0459	0,0301	0,0186	0,0218
$a_1$	0,1576*	0,0216	0,1679*	0,0244
$b_1$	0,0536	0,0725	0,0992	0,0638
$b_2$	-0,1252	0,0649	-0,1969*	0,0555
$b_3$	-0,1088	0,0613	-0,0685	0,0618
$b_4$	0,1082	0,0657	0,0203	0,0570
$b_5$	0,0722	0,0644	0,1459*	0,0583
$\alpha_0$	0,0393	0,0212	-0,0052	0,0041
$\alpha_1$	0,0245*	0,0059	0,0108	0,0065
$\beta_1$	0,8739*	0,0377	0,9642*	0,0257
$\gamma_1$	0,3008*	0,0891	0,2503*	0,0786
$\gamma_2$	-0,1596	0,1176	-0,1172	0,0992
$\gamma_3$	-0,1074	0,1006	0,1037	0,0936
$\gamma_4$	0,1123	0,0867	-0,0352	0,0869
$\gamma_5$	-0,1461	0,0945	-0,2017*	0,0970

Gwiazdka oznacza oceny parametrów, różniące się istotnie od zera na poziomie istotności 0,05.

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

Dla obu indeksów stopy zwrotu były przeciętnie większe w poniedziałki, czwartki i piątki oraz mniejsze we wtorki i środy. Dla indeksu WIG żaden z parametrów odpowiadających za zmiany stóp zwrotu w poszczególne dni tygodnia nie był istotny statystycznie. W przypadku indeksu małych spółek stopy zwrotu były istotnie mniejsze we wtorki oraz większe w piątki. Dodatkowo testowano występowanie efektu dnia tygodnia, łącznie dla wszystkich dni, weryfikując hipotezę  $b_1 = b_2 = \dots = b_5 = 0$ . Zastosowano test ilorazu wia-

rygodności. Uzyskane wyniki zostały przedstawione w tabeli 1.6<sup>27</sup>. Dla obu indeksów efekt dnia tygodnia był istotny statystycznie dla stóp zwrotu, znacznie silniejszy w przypadku najmniejszych spółek.

**TABELA 1.6. TESTOWANIE WYSTĘPOWANIA EFEKTÓW KALENDARZOWYCH**

Badane wahania	Weryfikowane hipotezy	WIG	WIRR
Wahania tygodniowe	$b_1 = b_2 = \dots = b_5 = 0$	10,67*	23,56*
	$\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_5 = 0$	21,81*	21,47*
Efekt związany ze świętami	$e_1 = e_2 = 0$	4,23	2,04
	$\varphi_1 = \varphi_2 = 0$	8,70*	1,63
Wahania sezonowe	$c_1 = c_2 = \dots = c_{12} = 0$	13,80	11,22
	$\delta_1 = \delta_2 = \dots = \delta_{12} = 0$	35,58*	54,72*

Gwiazdka oznacza oceny statystyk, w przypadku których, weryfikowana hipoteza została odrzucona na poziomie istotności 0,05.

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

Dla indeksu WIG wariancja warunkowa była przeciętnie większa w poniedziałki i czwartki oraz mniejsza we wtorki, środy i piątki, jednakże istotny statystycznie był tylko wzrost zmienności w poniedziałek. Z kolei dla indeksu WIRR wariancja warunkowa była przeciętnie większa w poniedziałki i środy, a mniejsza we wtorki, czwartki i piątki. Istotny statystycznie był wzrost zmienności w poniedziałek i jej spadek w piątek. Efekt dnia tygodnia dla wariancji, badany łącznie dla wszystkich dni, był również istotny statystycznie w przypadku obu indeksów (patrz tabela 1.6).

Wyniki estymacji parametrów modeli AR-GARCH w postaci (1.6.4–1.6.6), pozwalających opisać efekt związany ze świętami, zostały przedstawione w tabeli 1.7. Dla obu indeksów stopy zwrotu były przeciętnie większe zarówno przed, jak i po dniu świątecznym, w którym nie było notowań (poza weekendem), jednakże wzrost ten nie był istotny statystycznie (tabela 1.6 i 1.7). Efekt związany ze świętami był znacznie silniejszy w przypadku zmienności indeksu WIG. Dla obu indeksów wariancja warunkowa przeciętnie malała przed dniem świątecznym oraz rosła po dniu świątecznym, jednakże w przypadku najmniejszych spółek zmiany te były nieistotne statystycznie.

<sup>27</sup> Wyniki testu LR były niewrażliwe na przyjętą specyfikację rozkładu warunkowego. Takie same wyniki uzyskano dla warunkowego rozkładu t-Studenta. Dotyczy to również pozostałych efektów kalendarzowych.

TABELA 1.7. MODEL EFEKTU ZWIĄZANEGO ZE ŚWIĘTAMI

Parametr	WIG		WIRR	
	Ocena par.	Błąd oceny	Ocena par.	Błąd oceny
$a_0$	0,0256	0,0294	0,0079	0,0273
$a_1$	0,1590*	0,0217	0,1685*	0,0237
$e_1$	0,2252	0,1389	0,0819	0,1326
$e_2$	0,2648	0,1851	0,2091	0,1748
$\alpha_0$	0,0399	0,0212	-0,0045	0,0047
$\alpha_1$	0,0251*	0,0060	0,0150*	0,0035
$\beta_1$	0,8670*	0,0409	0,9434*	0,0142
$\varphi_1$	-0,3781*	0,1439	-0,2178	0,2011
$\varphi_2$	0,4838*	0,1616	0,2217	0,2001

Gwiazdka oznacza oceny parametrów, różniące się istotnie od zera na poziomie istotności 0,05.

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

Wyniki estymacji parametrów modeli AR-GARCH w postaci (1.6.7–1.6.9), pozwalających opisać wahania sezonowe, zaprezentowano w tabeli 1.8. Dla indeksu WIG stopy zwrotu były przeciętnie większe w styczniu, lutym, kwietniu, sierpniu i grudniu oraz mniejsze w pozostałe miesiące, jednakże istotny statystycznie był tylko wzrost w styczniu i spadek we wrześniu. Dla indeksu WIRR stopy zwrotu były przeciętnie większe w styczniu, lutym, maju, sierpniu, wrześniu, październiku i listopadzie oraz mniejsze w pozostałe miesiące. Istotny statystycznie był tylko wzrost w styczniu i spadek w czerwcu. Efekt stycznia był silniejszy w przypadku spółek z indeksu WIG, czyli dużych i średnich, inaczej niż w przypadku rynku amerykańskiego, gdzie efekt ten dotyczy przede wszystkim akcji firm o relatywnie małej kapitalizacji. Dla obu indeksów wahania sezonowe stóp zwrotu, badane łącznie dla wszystkich miesięcy w roku, były nieistotne statystycznie (patrz tabela 1.6).

Dla indeksu WIG wariancja warunkowa była przeciętnie większa w styczniu, marcu, lipcu, sierpniu, październiku i grudniu oraz mniejsza w pozostałe miesiące. Istotny statystycznie był tylko spadek zmienności w czerwcu. Dla indeksu WIRR wariancja warunkowa była przeciętnie większa w styczniu, lutym, kwietniu, maju, lipcu, wrześniu i październiku oraz mniejsza w pozostałe miesiące. Istotny statystycznie był spadek zmienności w marcu i grudniu oraz wzrost w kwietniu.

Dla obu indeksów wahania sezonowe zmienności, badane łącznie dla wszystkich miesięcy w roku, były istotne statystycznie (patrz tabela 1.6); silniejsze w przypadku indeksu najmniejszych spółek.



TABELA 1.8. MODEL WAHAŃ SEZONOWYCH

Parametr	WIG		WIRR	
	Ocena par.	Błąd oceny	Ocena par.	Błąd oceny
$a_0$	0,0456	0,0481	0,0103	0,0218
$a_1$	0,1539*	0,0216	0,1598*	0,0242
$c_1$	0,2496*	0,1208	0,1796*	0,0750
$c_2$	0,0098	0,1097	0,0240	0,0900
$c_3$	-0,1113	0,0998	-0,0344	0,0742
$c_4$	0,0985	0,0889	-0,0614	0,0900
$c_5$	-0,0330	0,0891	0,0253	0,0872
$c_6$	-0,0429	0,0780	-0,1897*	0,0952
$c_7$	-0,0648	0,0930	-0,0094	0,0842
$c_8$	0,0563	0,0964	0,0035	0,1094
$c_9$	-0,2210*	0,0974	0,0600	0,0839
$c_{10}$	-0,0339	0,1048	0,0384	0,1121
$c_{11}$	-0,0227	0,1092	0,0720	0,0965
$c_{12}$	0,1155	0,0946	-0,1078	0,0831
$\alpha_0$	0,0255	0,0221	-0,0055	0,0049
$\alpha_1$	0,0190*	0,0052	0,0115*	0,0028
$\beta_1$	0,9052*	0,0317	0,9613*	0,0105
$\delta_1$	0,0249	0,0268	0,0112	0,0121
$\delta_2$	-0,0104	0,0229	0,0049	0,0136
$\delta_3$	0,0083	0,0205	-0,0395*	0,0132
$\delta_4$	-0,0108	0,0246	0,0277*	0,0133
$\delta_5$	-0,0113	0,0191	0,0032	0,0152
$\delta_6$	-0,0388*	0,0158	-0,0011	0,0147
$\delta_7$	0,0081	0,0175	0,0199	0,0181
$\delta_8$	0,0085	0,0200	-0,0188	0,0171
$\delta_9$	-0,0262	0,0203	0,0202	0,0129
$\delta_{10}$	0,0525	0,0314	0,0218	0,0132
$\delta_{11}$	-0,0264	0,0273	-0,0229	0,0136
$\delta_{12}$	0,0216	0,0188	-0,0265*	0,0132

Gwiazdka oznacza oceny parametrów, różniące się istotnie od zera na poziomie istotności 0,05.

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

Estymowane w pracy modele pozwoliły opisać efekt dnia tygodnia, wahania związane z okresami świątecznymi oraz wahania sezonowe stóp zwrotu i zmienności z jednoczesnym uwzględnieniem zmiennej wariancji warunkowej. Badanie dotyczące zastosowania modeli GARCH opisujących wahania sezonowe, efekt dnia tygodnia oraz efekt związany z okresami świątecznymi, do prognozowania zmienności stóp zwrotu na GPW w Warszawie, przedstawiono w punkcie 3.2.5.

## Rozdział II

# WIELORÓWNANIOWE MODELE GARCH W ANALIZIE ZALEŻNOŚCI MIĘDZY PROCESAMI FINANSOWYMI

W aplikacjach finansowych bardzo rzadko zastosowanie jednorównaniowych postaci modeli GARCH okazuje się wystarczające. Portfele inwestorów składają się z wielu aktywów, których stopy zwrotu mają zmienne wariancje. Pomiędzy stopami zwrotu różnych aktywów finansowych występują często silne zależności. Powiązania mogą dotyczyć zarówno instrumentów notowanych na tym samym rynku, jak i instrumentów notowanych na różnych rynkach. To wszystko powoduje, że konieczna jest analiza procesów wielowymiarowych. Wielorównaniowe modele GARCH należą do najczęściej stosowanych modeli opisujących zależności między finansowymi szeregami czasowymi. Jest to przede wszystkim zasługa bardzo licznych i różnorodnych parametryzacji modeli oraz stosunkowo łatwej możliwości ich rozszerzania. Wielorównaniowe modele GARCH pozwalają opisać nie tylko zmienne wariancje, ale także kowariancje, odpowiadające za opis wzajemnych relacji między badanymi zjawiskami. Wnioskowanie dotyczące warunkowych wariancji i kowariancji wzbogaca analizy prowadzone dla warunkowych średnich, ale także umożliwia uchwycenie relacji równoczesnych w sytuacji, gdy brak zależności od poprzednich realizacji badanych zmiennych. Częstym zarzutem wobec jednorównaniowego modelu GARCH jest brak możliwości wyjaśnienia przyczyn zmienności<sup>28</sup>. Wielorównaniowe modele GARCH pozwalają na przeprowadzenie analizy dotyczącej niektórych przyczyn zmienności.

O ile w przypadku jednorównaniowych modeli GARCH kolejne specyfikacje powstawały w celu uwzględnienia empirycznych własności szeregów stóp zwrotu, powodując coraz większą złożoność modelu, o tyle w przypadku modeli wielorównaniowych, głównym celem było uproszczenie modelu,

---

<sup>28</sup> Zarzut nie jest do końca prawdziwy, ponieważ model GARCH można rozszerzyć o dodatkowe zmienne w równaniu dla wariancji (patrz podrozdział 1.2).

pozwalające opisać większą liczbę aktywów. Powstawały, co prawda, złożone modele opisujące określone charakterystyki procesów finansowych (patrz np. dwurównaniowy model BEKK GJR (Hafner i Herwartz, 1998) czy dwurównaniowy model CCC FIGARCH (Brunetti i Gilbert, 2000)), jednakże ich zastosowania jak na razie ograniczają się do bardzo małej liczby aktywów. Wielorównaniowe modele GARCH należą z pewnością do ciągle dynamicznie rozwijającego się obszaru ekonometrii finansowej.

W podrozdziale 2.1 przedstawiono wybrane, ważne z punktu widzenia zastosowań empirycznych, postacie wielorównaniowych modeli GARCH. Opisując kolejne specyfikacje, starano się zwrócić uwagę z jednej strony na łatwość estymacji parametrów modelu, z drugiej zaś na zasadność przyjętych uproszczeń. W większości prac, w których opisuje się wielorównaniowe modele GARCH przedstawia się tylko kilka wybranych specyfikacji modeli (patrz np. Gouriéroux, 1997; Tsay, 2005; Osińska, 2006). Szerszego przeglądu istniejących i powstających nowych parametryzacji wielorównaniowych modeli GARCH dokonano w pracach Bauwensa, Laurenta i Romboutsa (2006) oraz Silvennoinen i Teräsvirta (2008). W literaturze polskiej szerszy opis wielorównaniowych modeli GARCH (oraz ich bayesowskie porównanie z modelami SV) można znaleźć w pracach Osiewalskiego, Pajor i Pipienia (2006a, 2006b, 2007).

Podrozdział 2.2 zawiera próbę syntetycznego spojrzenia na omawiane parametryzacje modeli. Przedstawiono szereg klasyfikacji modeli, w tym zaproponowano kilka nowych podziałów. Zaprezentowano różne metody wyboru modeli GARCH. W podrozdziale 2.3 omówiono estymację parametrów wielorównaniowych modeli GARCH za pomocą MNW. Podrozdział 2.4 zawiera omówienie podstawowych testów diagnostycznych do oceny ich jakości. Największy nacisk położono na ważne, z praktycznego punktu widzenia, testy stałości współczynników korelacji oraz testy przyczynowości w wariancji.

W ostatnich dwóch podrozdziałach przedstawiono wyniki badań z zastosowaniem wielorównaniowych modeli GARCH dotyczące zależności między rynkami akcji. W punkcie 2.5 przeprowadzono analizę powiązań między indeksem WIG a wybranymi indeksami rynków akcji na świecie. W badaniu zastosowano dwurównaniowe modele VAR-BEKK. Przeprowadzono między innymi testy stałości współczynników korelacji oraz przyczynowości w wariancji konstruowane na podstawie wielorównaniowych modeli GARCH. W punkcie 2.6 zaproponowano test efektu zarażania (ang. *contagion*) konstruowany na podstawie modelu VAR i testu Tse (2000) na stałość współczynników korelacji w wielorównaniowym modelu GARCH. Idea testu opiera się

na propozycji zawartej w pracy: Corsetti, Pericoli i Sbracia (2001), gdzie poprzez efekt zarażania rozumie się istotny wzrost współczynników korelacji pomiędzy procesami finansowymi, obserwowanymi w różnych krajach, po uwzględnieniu wpływu czynnika globalnego. Zaproponowany test zastosowano do badania zależności pomiędzy indeksem WIG a indeksami wybranych rynków akcji na świecie.

## 2.1. POSTACIE WIELORÓWNANIOWYCH MODELI GARCH STOSOWANE DO OPISU WIELOWYMIAROWYCH FINANSOWYCH SZEREGÓW CZASOWYCH

Podobnie jak w przypadku procesów jednowymiarowych, modelując zmienność stóp zwrotu, nie można pominąć modelowania wartości oczekiwanych stóp zwrotu<sup>29</sup>. Załóżmy, że wielowymiarowy proces stóp zwrotu można przedstawić w postaci:

$$\mathbf{r}_t = \boldsymbol{\mu}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (2.1.1)$$

gdzie  $\mathbf{r}_t$ ,  $\boldsymbol{\mu}_t$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  są wektorami o wymiarach  $N \times 1$ ,  $\boldsymbol{\mu}_t = E(\mathbf{r}_t | \psi_{t-1})$ . Do opisu warunkowych wartości oczekiwanych stóp zwrotu –  $\boldsymbol{\mu}_t$  stosuje się często modele wektorowej autoregresji VAR, zwykle VAR(1), jednakże możliwe są bardzo różne specyfikacje modelu. Niech  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  dane będzie formułą:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{H}_t^{1/2} \mathbf{z}_t, \quad \mathbf{z}_t \sim \text{IID}(0, \mathbf{I}_N), \quad (2.1.2)$$

gdzie  $\mathbf{z}_t$  jest wektorem o wymiarach  $N \times 1$ ,  $D(0, \mathbf{I}_N)$  oznacza określoną postać wielowymiarowego rozkładu o wartościach oczekiwanych równych zeru i jednostkowej macierzy kowariancji (najczęściej jest to rozkład normalny lub t-Studenta),  $\mathbf{H}_t^{1/2}$  jest macierzą o wymiarach  $N \times N$ .

Postać macierzy  $\mathbf{H}_t^{1/2}$  nie jest jednoznaczna<sup>30</sup>, jednakże dla każdej postaci spełniającej warunek  $\mathbf{H}_t^{1/2} \mathbf{H}_t^{1/2} = \mathbf{H}_t$  otrzymamy tę samą postać warunkowej macierzy kowariancji.

<sup>29</sup> Jeżeli zależności w średnich są słabe, to w niektórych zastosowaniach finansowych nieuwzględnienie zmienności średnich warunkowych może nie mieć istotnego wpływu na uzyskane wyniki (patrz Tsay, 2005).

<sup>30</sup> Można ją otrzymać np. za pomocą dekompozycji Choleskiego.

Z formuły (2.1.2) wynika, że:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t \mid \psi_{t-1} \sim D(0, \mathbf{H}_t) . \quad (2.1.3)$$

Macierz  $\mathbf{H}_t$  jest zatem warunkową macierzą kowariancji  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  oraz  $\mathbf{r}_t$ :

$$\text{Cov}_{t-1}(\mathbf{r}_t) = \text{Cov}_{t-1}(\boldsymbol{\varepsilon}_t) = \mathbf{H}_t \quad (2.1.4)$$

i powinna być dodatkowo określona dla wszystkich możliwych realizacji. Jeżeli nie jest to wyraźnie zaznaczone, to poniższe postacie wielorównaniowych modeli GARCH będą się różniły jedynie specyfikacją macierzy kowariancji  $\mathbf{H}_t$ .

### 2.1.1. MODEL VECH

Ogólną postać wielorównaniowego modelu GARCH( $p, q$ ), wprowadzoną przez Krafta i Engle'a (1983), zwaną postacią VECH (niekiedy VEC), można przedstawić w następującej formie:

$$\text{vech}(\mathbf{H}_t) = \mathbf{W} + \sum_{i=1}^q \mathbf{A}_i \text{vech}(\boldsymbol{\varepsilon}_{t-i} \boldsymbol{\varepsilon}'_{t-i}) + \sum_{j=1}^p \mathbf{B}_j \text{vech}(\mathbf{H}_{t-j}), \quad (2.1.5)$$

gdzie  $\mathbf{W}$  jest wektorem parametrów o wymiarach  $N(N+1)/2 \times 1$ ,  $\mathbf{A}_i$ ,  $\mathbf{B}_j$  są macierzami parametrów o wymiarach:  $N(N+1)/2 \times N(N+1)/2$ ,  $\text{vech}(\cdot)$  oznacza operator wektoryzacji macierzy symetrycznej, ustawiający elementy macierzy znajdujące się poniżej oraz na przekątnej w wektor kolumnę.

Z względu na dużą liczbę parametrów, jakie należy oszacować (dla modelu (2.1.5), liczba parametrów wynosi  $[N(N+1)/2][1 + (p+q)N(N+1)/2]$ ), formułowanie warunków, przy których macierz  $\mathbf{H}_t$  jest dodatnio określona<sup>31</sup>, a następnie ich weryfikowanie jest bardzo trudne. Z tego względu model w postaci VECH nie znajduje zastosowania w praktyce. Niech  $N^* = N(N+1)/2$ , proces VECH jest procesem kowariancyjnie stacjonarnym, jeżeli pierwiastki równania:

$$\left| \mathbf{I}_{N^*} - \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i) z^i \right| = 0 \quad (2.1.6)$$

<sup>31</sup> Gourieroux (1997) podaje warunki dodatniej określoności macierzy  $\mathbf{H}_t$ .

leżą poza kołem jednostkowym. Ten warunek jest warunkiem wystarczającym, ale nie koniecznym. Na przykład dla modelu VECH(1,1) wartości własne macierzy  $\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1$  muszą być mniejsze co do modułu od jedności.

Bezwarunkowa macierz kowariancji  $\mathbf{S} = E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t')$  dana jest wówczas formułą:

$$\text{vech}(\mathbf{S}) = [\mathbf{I}_{N^*} - \sum_{i=1}^{\max(p,q)} (\mathbf{A}_i + \mathbf{B}_i)]^{-1} \mathbf{W}. \quad (2.1.7)$$

### Model diagonalny VECH

W celu ograniczenia liczby parametrów w modelu Bollerslev, Engle i Wooldridge (1988) wprowadzili diagonalną postać modelu VECH (DVECH, ang. *diagonal* VECH), w której zakłada się, że macierze  $\mathbf{A}_i$  oraz  $\mathbf{B}_j$  w modelu (2.1.5) są macierzami diagonalnymi. Oznacza to, że  $kl$ -ty element w macierzy  $\mathbf{H}_t$  zależy wyłącznie od  $kl$ -tych elementów w macierzach  $\boldsymbol{\varepsilon}_{t-i} \boldsymbol{\varepsilon}'_{t-i}$  oraz  $\mathbf{H}_{t-j}$ . Powyższe ograniczenie zmniejsza, co prawda, liczbę parametrów, które należy oszacować do  $[N(N+1)/2](1+p+q)$ , ale nie rozwiązuje problemu dodatkowej określoności macierzy  $\mathbf{H}_t$ . Diagonalną postać modelu można również przedstawić w następującej formie (dla  $p = q = 1$ ):

$$h_{kt} = w_k + a_k \varepsilon_{kt-1}^2 + b_k h_{kt-1} \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, N, \quad (2.1.8)$$

$$h_{klt} = w_{kl} + a_{kl} \varepsilon_{kt-1} \varepsilon_{lt-1} + b_{kl} h_{klt-1} \quad \text{dla } 1 \leq k < l \leq N. \quad (2.1.9)$$

Wariancje warunkowe są zatem opisane za pomocą jednorównaniowych modeli GARCH, a kowariancje warunkowe – za pomocą ich odpowiedników. Głównymi zaletami modelu DVECH są: łatwość estymacji parametrów oraz możliwość bezpośredniej interpretacji parametrów. Każde równanie tego modelu może być estymowane oddzielnie (patrz Silvennoinen i Teräsvirta, 2008). Model diagonalny VECH( $p, q$ ) można przedstawić również za pomocą iloczynu Hadamarda<sup>32</sup>:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{W}^* + \sum_{i=1}^q \mathbf{A}_i^* \odot (\boldsymbol{\varepsilon}_{t-i} \boldsymbol{\varepsilon}'_{t-i}) + \sum_{j=1}^p \mathbf{B}_j^* \odot \mathbf{H}_{t-j}, \quad (2.1.10)$$

gdzie  $\mathbf{W}^*$ ,  $\mathbf{A}_i^*$  oraz  $\mathbf{B}_j^*$  są symetrycznymi macierzami parametrów o wymiarach

<sup>32</sup> Iloczyn Hadamarda dwóch macierzy  $\mathbf{A}$  i  $\mathbf{B}$  o wymiarach  $N \times N$  jest określony w następujący sposób:  $\{\mathbf{A} \odot \mathbf{B}\}_{ij} \equiv \{\mathbf{A}\}_{ij} \{\mathbf{B}\}_{ij}$ .

$N \times N$ , określonymi przez relacje  $\mathbf{A} = \text{diag}[\text{vech}(\mathbf{A}^*)]$ ,  $\mathbf{B} = \text{diag}[\text{vech}(\mathbf{B}^*)]$  oraz  $\mathbf{W} = \text{vech}(\mathbf{W}^*)$ .

Warunkowa macierz kowariancji jest macierzą dodatnio określoną, jeżeli macierze  $\mathbf{W}^*$ ,  $\mathbf{A}_i^*$ ,  $\mathbf{B}_j^*$  są dodatnio półokreślone oraz początkowa macierz kowariancji ( $\mathbf{H}_0$ ) jest dodatnio określona. Dodatnia określoność  $\mathbf{H}_0$  może być zagwarantowana przez przyjęcie próbkowej macierzy kowariancji. Restrykcje zapewniające dodatnią półokreśloność macierzy parametrów można nałożyć, stosując dekompozycję Choleskiego lub zakładając:

$$\mathbf{W}^* = \mathbf{W}^{**} \mathbf{W}^{**'}, \mathbf{A}_i^* = \mathbf{A}_i^{**} \mathbf{A}_i^{**'}, \mathbf{B}_j^* = \mathbf{B}_j^{**} \mathbf{B}_j^{**'}. \quad (2.1.11)$$

Możliwe jest dalsze uproszczenie modelu przez zastąpienie macierzy  $\mathbf{A}_i^*$  oraz  $\mathbf{B}_j^*$  we wzorze (2.1.10) macierzami o rzędach jeden. Najprostszą wersję modelu (2.1.10) otrzymamy, zastępując macierze  $\mathbf{A}_i^*$  oraz  $\mathbf{B}_j^*$  dodatnimi skalarami pomnożonymi przez macierz jedynek:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{W}^* + \sum_{i=1}^q \alpha_i \boldsymbol{\varepsilon}_{t-i} \boldsymbol{\varepsilon}'_{t-i} + \sum_{j=1}^p \beta_j \mathbf{H}_{t-j}. \quad (2.1.12)$$

Dla  $\mathbf{W}^* = \mathbf{W}^{**} \mathbf{W}^{**'}$  model (2.1.12) jest określany jako skalarno-diagonalny (skalarna postać diagonalnej postaci modelu VECH).

Zakładając, że  $\mathbf{W}^* = 0$  oraz  $\sum_{i=1}^q \alpha_i + \sum_{j=1}^p \beta_j = 1$ , otrzymamy model określany zintegrowanym wielorównaniowym modelem GARCH. Dla  $q = p = 1$  model ma tylko jeden parametr:

$$\mathbf{H}_t = \alpha \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} \boldsymbol{\varepsilon}'_{t-1} + (1 - \alpha) \mathbf{H}_{t-1}, \quad (2.1.13)$$

gdzie  $0 < \alpha < 1$ .

Większość powyższych założeń jest bardzo silna i może nie być spełniona dla rzeczywistych szeregów czasowych. Model VECH w postaci diagonalnej i jego uproszczenia nie uwzględniają możliwości występowania zależności pomiędzy wariancją warunkową jednego procesu a opóźnionymi wariancjami warunkowymi innych badanych procesów finansowych.

### 2.1.2. MODEL BEKK

Baba, Engle, Kraft i Kroner (1990) przedstawili następującą postać modelu, nazywaną modelem BEKK  $(p, q, K)$ <sup>33</sup> (patrz Engle i Kroner, 1995):

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{C}\mathbf{C}' + \sum_{k=1}^K \sum_{i=1}^q \mathbf{D}_{ik} \boldsymbol{\varepsilon}_{t-i} \boldsymbol{\varepsilon}'_{t-i} \mathbf{D}'_{ik} + \sum_{k=1}^K \sum_{j=1}^p \mathbf{E}_{jk} \mathbf{H}_{t-j} \mathbf{E}'_{jk}, \quad (2.1.14)$$

gdzie  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}_{ik}$  oraz  $\mathbf{E}_{jk}$  są macierzami parametrów o wymiarach  $N \times N$ . Często przyjmuje się, że macierz  $\mathbf{C}$  jest macierzą trójkątną. Powyższa postać zapewnia dodatnią określoność macierzy kowariancji  $\mathbf{H}_t$ <sup>34</sup>. W modelu (2.1.14) występuje  $N(N+1)/2 + (p+q)KN^2$  parametrów. W badaniach empirycznych najczęściej wykorzystywana jest postać modelu dla  $K=1$ , dlatego dalsze wzory dla modelu BEKK są podawane dla tej postaci. Proces BEKK  $(p, q, 1)$  będzie dalej oznaczany jako BEKK  $(p, q)$ . Ze względu na to, że różne parametryzacje dają tę samą reprezentację modelu, występuje problem identyfikowalności. Można go jednak rozwiązać, przyjmując na przykład restrykcje zaproponowane przez Engle'a i Kronera (1995).

Można wykazać, że o ile spełnione są pewne nieliniowe restrykcje, nałożone na parametry w macierzach  $\mathbf{W}, \mathbf{A}_i, \mathbf{B}_j, \mathbf{C}, \mathbf{D}_i$  oraz  $\mathbf{E}_j$ , to modele VECH i BEKK są równoważne (patrz Engle i Kroner, 1995). Osiewalski i Pipień (2002) pokazują, w jaki sposób można otrzymać model BEKK(1,1), testując alternatywne zestawy nieliniowych restrykcyj w modelu VECH(1,1). Model BEKK obejmuje wszystkie dodatnio określone postacie modelu diagonalnego VECH i większość dodatnio określonych postaci modelu VECH.

Proces BEKK(1,1) jest procesem kowariancyjnie stacjonarnym, jeżeli wartości własne macierzy  $(\mathbf{D}_1 \odot \mathbf{D}_1) + (\mathbf{E}_1 \odot \mathbf{E}_1)$  są mniejsze co do modułu od jedności. Bezwarunkowa macierz kowariancji  $\mathbf{S}$  dana jest formułą:

$$\text{vech}(\mathbf{S}) = [\mathbf{I}_N - (\mathbf{D}_1 \odot \mathbf{D}_1) - (\mathbf{E}_1 \odot \mathbf{E}_1)]^{-1} \text{vech}(\mathbf{C}\mathbf{C}'). \quad (2.1.15)$$

Parametryzacja modelu BEKK pozwala pośrednio opisać zmieniające się w czasie warunkowe współczynniki korelacji pomiędzy szeregami czasowymi (poprzez zmienne warunkowe wariancje i kowariancje) oraz zależności pomiędzy wariancją warunkową jednego procesu a opóźnionymi wariancjami warunkowymi innych badanych procesów finansowych.

<sup>33</sup> Nazwa pochodzi od pierwszych liter nazwisk autorów.

<sup>34</sup> Pod warunkiem, że rzędy macierzy  $\mathbf{D}_i$  i  $\mathbf{E}_j$  są równe  $N$  oraz  $\mathbf{H}_0$  jest macierzą dodatnio określoną, albo  $\mathbf{C}$  jest nieosobliwa i  $\mathbf{H}_0$  nieujemnie określona.



Kolejną zaletą tego modelu jest fakt, że nie nakłada on z góry na parametry krępujących ograniczeń. Model BEKK jest jedną z najczęściej stosowanych postaci wielorównaniowego modelu GARCH w przypadku kilku szeregów. Niestety parametry modelu nie mają prostej interpretacji. Dodatkowo parametryzacja modelu BEKK jest na ogół zbyt złożona. W badaniach empirycznych spora część parametrów jest najczęściej nieistotna statystycznie. Już dla czterech szeregów (lub więcej) estymacja modelu jest trudna i czasochłonna<sup>35</sup>, a przy większej liczbie szeregów praktycznie niemożliwa do estymacji. W niektórych zastosowaniach możliwe jest jednak uproszczenie modelu, poprzez zastąpienie macierzy  $\mathbf{D}_i$  i  $\mathbf{E}_j$  macierzami diagonalnymi (diagonalny BEKK) lub nawet skalarami pomnożonymi przez macierz jedynek (skalarny BEKK)<sup>36</sup>. Diagonalny model BEKK  $(p, q)$  można również przedstawić w postaci:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{C}\mathbf{C}' + \sum_{i=1}^q \mathbf{d}_i \mathbf{d}_i' \odot \boldsymbol{\varepsilon}_{t-i} \boldsymbol{\varepsilon}_{t-i}' + \sum_{j=1}^p \mathbf{e}_j \mathbf{e}_j' \odot \mathbf{H}_{t-j}, \quad (2.1.16)$$

gdzie  $\mathbf{d}_i$  oraz  $\mathbf{e}_j$  są wektorami parametrów o wymiarach  $N \times 1$  i zawierają diagonalne elementy diagonalnych macierzy odpowiednio  $\mathbf{D}_i$  oraz  $\mathbf{E}_j$ .

Diagonalna postać modelu BEKK jest szczególnym przypadkiem diagonalnej postaci modelu VECH (jest mniej ogólna i zawiera mniej parametrów niż diagonalna postać modelu VECH). Diagonalna specyfikacja dosyć dobrze opisuje zmienność wariancji i kowariancji stóp zwrotu, jednakże nie uwzględnia możliwości występowania zależności pomiędzy wariancją warunkową jednego procesu a opóźnionymi wariancjami warunkowymi innych badanych procesów finansowych. Pomimo uproszczenia modelu przy większej liczbie szeregów (kilkadziesiąt i więcej), liczba parametrów modelu jest na tyle duża (estymacja jest czasochłonna), że w zasadzie uniemożliwia praktyczne wykorzystanie modelu. Skalarna postać modelu BEKK oznacza natomiast, że modele opisujące wariancje i kowariancje warunkowe dla wszystkich szeregów mają takie same parametry, zatem dynamika zmienności jest zbliżona (choć nie jest identyczna).

<sup>35</sup> Bardzo często funkcja wiarygodności jest płaska wokół maksimum, często również iterycyjna procedura numeryczna jest wrażliwa na przyjęte wartości startowe.

<sup>36</sup> Niektórzy autorzy jako skalarny BEKK definiują model, w którym macierze  $\mathbf{D}_i$  i  $\mathbf{E}_j$  są zastąpione skalarami pomnożonymi przez macierz jednostkową.

### 2.1.3. MODEL STAŁYCH WARUNKOWYCH WSPÓŁCZYNNIKÓW KORELACJI

Bollerslev (1990) wprowadził model stałych warunkowych współczynników korelacji (CCC ang. *constant conditional correlations*), w którym zakłada się, że zmieniające się w czasie warunkowe kowariancje są proporcjonalne do iloczynu odpowiednich warunkowych odchyłeń standardowych:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{\Gamma} \mathbf{D}_t, \quad (2.1.17)$$

gdzie  $\mathbf{D}_t$  oznacza macierz diagonalną o wymiarach  $N \times N$ , której elementami są warunkowe odchylenia standardowe, opisane za pomocą dowolnych jednorównaniowych modeli GARCH -  $\mathbf{D}_t = \text{diag}(h_{1t}^{1/2}, h_{2t}^{1/2}, \dots, h_{Nt}^{1/2})$ , a  $\mathbf{\Gamma}$  jest macierzą stałych warunkowych współczynników korelacji.

Na to, aby macierz  $\mathbf{H}_t$  była dodatnio określona dla wszystkich  $t$ , potrzeba i wystarcza, by warunkowe wariancje były większe od zera oraz macierz  $\mathbf{\Gamma}$  była dodatnio określona.

Zakładając, że wariancje warunkowe są opisane za pomocą jednorównaniowych modeli GARCH(1,1), model można przedstawić w następującej postaci:

$$h_{it} = \alpha_{i0} + \alpha_{i1} \varepsilon_{it-1}^2 + \beta_{i1} h_{it-1} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.1.18)$$

$$h_{ijt} = \rho_{ij} \sqrt{h_{it}} \sqrt{h_{jt}} \quad \text{dla } 1 \leq i < j \leq N. \quad (2.1.19)$$

W modelu występuje  $N(N+5)/2$  parametrów. Ze względu na stosunkowo prostą postać macierzy warunkowych kowariancji oraz łatwość estymacji model stałych warunkowych współczynników korelacji znalazł zastosowanie w bardzo wielu analizach empirycznych. Należy jednak zauważyć, że założenie o stałości warunkowych współczynników korelacji jest najczęściej przyjmowane z góry i rzadko bywa analizowane lub testowane. Tymczasem niespełnienie powyższego założenia może prowadzić do błędów poznawczych. Testy stałości współczynników korelacji w wielorównaniowym modelu GARCH zostały przedstawione w punkcie 2.4.2. Model w postaci (2.1.17) nie uwzględnia również możliwości występowania zależności pomiędzy wariancją warunkową jednego procesu a opóźnionymi wariancjami warunkowymi innych badanych procesów finansowych. Jeantheau (1998) oraz He i Teräsvirta (2004) przedstawiają rozszerzony model stałych współczynników korelacji, który pozwala opisać taką własność.

### 2.1.4. MODELE DCC

#### Modele DCC Engle'a

Model DCC (ang. *dynamic conditional correlation*) wprowadzony przez Engle'a (2002) można przedstawić w następującej formie:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{R}_t \mathbf{D}_t, \quad (2.1.20)$$

$$\mathbf{R}_t = \mathbf{Q}_t^{*-1} \mathbf{Q}_t \mathbf{Q}_t^{*-1}, \quad (2.1.21)$$

$$\mathbf{Q}_t = \left(1 - \sum_{i=1}^Q \alpha_i - \sum_{j=1}^P \beta_j\right) \mathbf{S} + \sum_{i=1}^Q \alpha_i (\mathbf{z}_{t-i} \mathbf{z}'_{t-i}) + \sum_{j=1}^P \beta_j \mathbf{Q}_{t-j}, \quad (2.1.22)$$

gdzie  $\mathbf{D}_t = \text{diag}(h_{1t}^{1/2}, h_{2t}^{1/2}, \dots, h_{Nt}^{1/2})$ , warunkowe wariancje  $h_{kt}$  (dla  $k = 1, 2, \dots, N$ ) opisane są za pomocą jednorównaniowych modeli GARCH,  $\mathbf{z}_t$  to wektor standaryzowanych wartości  $\varepsilon_{kt}$ , takich że  $z_{kt} = \varepsilon_{kt} / \sqrt{h_{kt}}$ ,  $\mathbf{R}_t$  to macierz zmiennych w czasie warunkowych współczynników korelacji  $\mathbf{z}_t$ ,  $\mathbf{S}$  oznacza bezwarunkową macierz kowariancji  $\mathbf{z}_t$ , a  $\mathbf{Q}_t^*$  jest macierzą diagonalną, której elementami są pierwiastki kwadratowe z elementów diagonalnych macierzy  $\mathbf{Q}_t$ . Parametry muszą dodatkowo spełniać warunek:

$$0 < \sum_{i=1}^Q \alpha_i + \sum_{j=1}^P \beta_j < 1.$$

Jednorównaniowa specyfikacja modelu GARCH nie musi ograniczać się wyłącznie do standardowego modelu GARCH( $p, q$ ). Może to być dowolny jednorównaniowy proces GARCH o normalnym rozkładzie warunkowym  $\varepsilon_p$ , o ile spełnione są warunki stacjonarności i dodatniości wariancji warunkowej. Dla  $Q = P = 1$  oraz jednorównaniowych modeli GARCH(1,1) w modelu występuje  $(N+1)(N+4)/2$  parametrów. Dla  $Q = P = 1$   $kl$ -ty element macierzy  $\mathbf{Q}_t$  można zapisać jako:

$$q_{klt} = \bar{\rho}_{kl} + \alpha(z_{kt-1} z_{lt-1} - \bar{\rho}_{kl}) + \beta(q_{klt-1} - \bar{\rho}_{kl}), \quad (2.1.23)$$

gdzie  $\bar{\rho}_{kl}$  oznacza bezwarunkowy współczynnik korelacji zmiennych  $z_{kt}$  i  $z_{lt}$ . Przyjęcie takiej specyfikacji modelu oznacza, że poszczególne kowariancje są opisane za pomocą procesów GARCH o wspólnych parametrach  $\alpha$  i  $\beta$  i różnych bezwarunkowych współczynnikach korelacji  $\bar{\rho}_{kl}$ . Bezwarunkowe wartości oczekiwane z  $q_{klt}$  i  $q_{kk t}$  są równe odpowiednio  $\bar{\rho}_{kl}$  oraz 1. Macierz warunkowych współczynników korelacji, której  $kl$ -ty element dany jest wzorem  $\rho_{klt} = q_{klt} / (q_{kk t} q_{ll t})^{1/2}$ , jest dodatnio określona, ponieważ macierz kowa-

riancji  $\mathbf{Q}_t$  jest średnią ważoną z dodatnio określonych macierzy  $\mathbf{S}$  i  $\mathbf{Q}_{t-n}$  oraz dodatnio półokreślonych macierzy  $\mathbf{z}_{t-i}\mathbf{z}'_{t-i}$ . Zatem aby macierz warunkowych kowariancji  $\mathbf{H}_t$ , w modelu DCC, była dodatnio określona, muszą być spełnione podobne warunki, jak w przypadku jednorównaniowych modeli GARCH (szczegółowe warunki podają Engle i Sheppard, 2001).

Model w postaci (2.1.23) jest powracającym do średniej, jeżeli tylko  $\alpha + \beta < 1$ . Dla  $\alpha + \beta = 1$ , zamiast równania (2.1.23),  $q_{klt}$  jest dane wzorem:

$$q_{klt} = (1 - \lambda)(z_{k,t-1}z'_{l,t-1}) + \lambda q_{klt}, \quad (2.1.24)$$

gdzie  $\lambda = 1 - \alpha = \beta$ .

Zatem  $q_{klt}$  ma postać modelu wyrównywania wykładniczego. Model DCC jest wówczas określany jako zintegrowany model DCC. W postaci macierzowej formułę (2.1.22) należy zastąpić równaniem:

$$\mathbf{Q}_t = (1 - \lambda)(\mathbf{z}_{t-1}\mathbf{z}'_{t-1}) + \lambda\mathbf{Q}_{t-1}. \quad (2.1.25)$$

Główną zaletą modelu DCC jest możliwość estymacji parametrów w dwóch krokach, dzięki czemu estymacja jest możliwa nawet dla dużej liczby szeregów. Podstawiając za  $\mathbf{S}$  szacunki  $\frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}'_t$ , można jeszcze bardziej uprościć estymację procesów kowariancyjnie stacjonarnych. Możliwość zastosowania dowolnych specyfikacji jednorównaniowych modeli GARCH otwiera drzwi do bardziej zaawansowanych metod opisu wariacji warunkowych. Podstawową wadą modelu DCC jest założenie, że parametry odpowiedzialne za zmienne warunkowe współczynniki korelacji ( $\alpha$  i  $\beta$  oraz  $\lambda$  w ostatniej specyfikacji) są takie same dla wszystkich szeregów. Przy bardzo zróżnicowanych aktywach założenie, że dynamika współczynników korelacji jest dla wszystkich podobna, może być trudne do akceptacji. Z tego względu powstało kilka innych specyfikacji modelu DCC. Na przykład Billio, Caporin i Gobbo (2006) proponują blokowo-diagonalną parametryzację, dla której dynamika współczynników korelacji jest zbliżona tylko dla szeregów należących do danego bloku. Niestety podział na bloki musi być określony a priori. Pelletier (2006) przedstawia model, w którym warunkowe współczynniki korelacji są opisane za pomocą modelu przełącznikowego z łańcuchem Markowa. Macierz korelacji jest stała w każdym reżimie, ale może się różnić pomiędzy reżimami. Cappiello, Engle i Sheppard (2006) rozszerzyli model DCC, wprowadzając asymetryczny model DCC. Model ten pozwala opisać sytuację, w której korelacja wzrasta w większym stopniu, gdy stopy zwrotu spa-

dają niż gdy stopy zwrotu rosną w takim samym stopniu. Inne rozszerzenie modelu DCC, zaproponowane przez Engle'a (2002), to zastąpienie formuły na macierz  $\mathbf{Q}_t$  następującą specyfikacją:

$$\mathbf{Q}_t = \mathbf{S} \odot (\mathbf{ii}' - \sum_{i=1}^Q \mathbf{A}_i - \sum_{j=1}^P \mathbf{B}_j) + \sum_{i=1}^Q \mathbf{A}_i \odot (\mathbf{z}_{t-i} \mathbf{z}'_{t-i}) + \sum_{j=1}^P \mathbf{B}_j \odot \mathbf{H}_{t-j}, \quad (2.1.26)$$

gdzie  $\mathbf{i}$  jest wektorem jedynek, a  $\mathbf{A}_i$  oraz  $\mathbf{B}_j$  są macierzami parametrów o wymiarach  $N \times N$ . Taka parametryzacja powoduje znaczne zwiększenie liczby parametrów, jednakże można przyjąć pewne restrykcje, np.  $\mathbf{A}_i = \mathbf{a}_i \mathbf{a}'_i$ , gdzie  $\mathbf{a}_i$  jest wektorem parametrów o wymiarach  $N \times 1$ .

Engle (2007) połączył zalety modelu czynnikowego z zaletami modelu DCC i zaproponował model czynnikowy DCC. Model ten należy raczej traktować jako rozszerzenie czynnikowego modelu GARCH. Kolejną modyfikacją modelu DCC określaną modelem DECO (ang. *dynamic equicorrelation*) zaproponowali Engle i Kelly (2008). Przyjęli oni założenie, że warunkowe współczynniki korelacji są identyczne dla wszystkich par szeregów czasowych. Teoretycznie taką restrykcję można nałożyć na dowolną parametryzację wielorównaniowego modelu GARCH, jednakże w przypadku modelu DCC uzyskuje się znaczące przyspieszenie w estymacji parametrów (znacząco upraszcza się funkcja wiarygodności i nie jest konieczne odwracanie macierzy). Zmienny w czasie warunkowy współczynnik korelacji dla modelu DECO-DCC jest równy:

$$\rho_t = \frac{1}{N(N-1)} \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^N \frac{q_{ijt}}{\sqrt{q_{iit} q_{jjt}}}. \quad (2.1.27)$$

Estymacja parametrów modelu DECO-DCC jest możliwa dla dużej liczby aktywów, nawet dla kilkuset. Przy bardzo zróżnicowanych aktywach, założenie, że warunkowe współczynniki korelacji są równe, nie będzie prawdopodobnie spełnione. Ze względu na to, że w modelu DECO przyjęto stosunkowo silne założenie upraszczające, autorzy zaproponowali od razu pewne modyfikacje modelu, mianowicie: liniowy model DECO, model rozszerzony o zmieniającą się w czasie, równą dla wszystkich aktywów, wariancję i blokową parametryzację modelu DECO.

### Model DCC Tse i Tsui

Zbliżoną parametryzację, o bardzo podobnych własnościach do modelu DCC Engle'a, zaproponowali Tse i Tsui (2002). Model ten jest również określany mianem modelu DCC i można go zapisać w postaci:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{R}_t \mathbf{D}_t, \quad (2.1.28)$$

$$\mathbf{R}_t = (1 - \theta_1 - \theta_2) \mathbf{R} + \theta_1 \boldsymbol{\Xi}_{t-1} + \theta_2 \mathbf{R}_{t-1}, \quad (2.1.29)$$

$$\boldsymbol{\Xi}_{t-1} = \mathbf{B}_{t-1}^{-1} \mathbf{L}_{t-1} \mathbf{L}'_{t-1} \mathbf{B}_{t-1}^{-1}, \quad (2.1.30)$$

gdzie  $\mathbf{D}_t = \text{diag}(h_{1t}^{1/2}, h_{2t}^{1/2}, \dots, h_{Nt}^{1/2})$ , warunkowe wariancje  $h_{it}$  (dla  $i = 1, 2, \dots, N$ ) opisane są za pomocą dowolnych jednorównaniowych modeli GARCH, parametry  $\theta_1$  i  $\theta_2$  są nieujemne,  $\theta_1 + \theta_2 < 1$ ,  $\mathbf{R}_t$  jest symetryczną, dodatnio określoną macierzą parametrów, o wymiarach  $N \times N$ , z elementami diagonalnymi równymi jeden,  $\boldsymbol{\Xi}_{t-1}$  jest macierzą korelacji  $\boldsymbol{\epsilon}_\tau$  o wymiarach  $N \times N$  dla  $\tau = t - M, t - M + 1, \dots, t - 1$ ,  $\mathbf{B}_{t-1}$  jest diagonalną macierzą o wymiarach  $N \times N$ , której  $i$ -ty diagonalny element jest równy  $(\sum_{h=1}^M z_{it-h}^2)^{1/2}$ ,  $z_{it} = \epsilon_{it} / \sqrt{h_{it}}$  oraz  $\mathbf{L}_{t-1}$  jest macierzą o wymiarach  $N \times M$  równą  $(\mathbf{z}_{t-1}, \mathbf{z}_{t-2}, \dots, \mathbf{z}_{t-M})$ . Zauważmy, że  $kl$ -ty element  $\boldsymbol{\Xi}_{t-1}$  dany jest formułą:

$$\xi_{kl,t-1} = \frac{\sum_{m=1}^M z_{kt-m} z_{lt-m}}{\sqrt{(\sum_{m=1}^M z_{kt-m}^2)(\sum_{h=1}^M z_{lt-m}^2)}}. \quad (2.1.31)$$

Dla jednorównaniowych modeli GARCH(1,1) w modelu występuje  $(N+1)(N+4)/2$  parametrów. Warunkiem koniecznym dodatniej określoności  $\boldsymbol{\Xi}_{t-1}$  i jednocześnie  $\mathbf{R}_t$  jest nierówność  $M \geq N$ <sup>37</sup>.  $\mathbf{R}_t$  jest wówczas macierzą korelacji, o ile  $\mathbf{R}_{t-1}$  jest macierzą korelacji. Model stałych warunkowych współczynników korelacji jest zagnieżdżony w obu modelach ze zmiennymi współczynnikami korelacji. Model DCC Tse i Tsui podobnie jak model DCC Engle'a zakłada, że dynamika współczynników korelacji jest dla wszystkich szeregów dość zbliżona.

Główna różnica pomiędzy modelami DCC Engle'a oraz Tse i Tsui polega na innej parametryzacji macierzy korelacji. W drugim modelu warun-

<sup>37</sup> Dla  $M=1$   $\boldsymbol{\Xi}_{t-1}$  jest równe macierzy jedynek.

kowe współczynniki korelacji są ważoną sumą współczynników korelacji z poprzednich okresów, natomiast w modelu DCC Engle'a macierz korelacji powstaje z transformacji macierzy  $\mathbf{Q}_t$ . Według Engle'a i Shepparda (2001) model DCC Tse i Tsui jest mniej elastyczny i wymaga estymacji większej liczby parametrów.

### 2.1.5. MODELE CZYNNIKOWE

#### **K**-czynnikowy model GARCH

Engle (1987) zaproponował  $K$ -czynnikowy model GARCH  $(p, q)$ , (ang. *K-factor* GARCH) w następującej postaci:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{G} + \sum_{k=1}^K \mathbf{g}_k \mathbf{g}'_k \left( \sum_{i=1}^q \gamma_{ik}^2 \mathbf{w}'_k \boldsymbol{\varepsilon}_{t-i} \boldsymbol{\varepsilon}'_{t-i} \mathbf{w}_k + \sum_{j=1}^p \kappa_{jk}^2 \mathbf{w}'_k \mathbf{H}_{t-j} \mathbf{w}_k \right), \quad (2.1.32)$$

gdzie  $\gamma_{ik}, \kappa_{jk}$  oznaczają parametry,  $\mathbf{w}_k$  i  $\mathbf{g}_k$  są wektorami parametrów o wymiarach  $N \times 1$ , a  $\mathbf{G}$  jest symetryczną macierzą parametrów o wymiarach  $N \times N$ .

Model ten zapewnia dodatnią określoność macierzy  $\mathbf{H}_t$ <sup>38</sup>, a jednocześnie ma relatywnie mniejszą, np. w stosunku do modelu BEKK, liczbę parametrów.  $K$ -czynnikowy model GARCH w postaci (2.1.32) jest szczególnym przypadkiem modelu BEKK (2.1.14), dla którego przyjęto następujące założenia:

$$\mathbf{D}_{ik} = \gamma_{ik} \mathbf{w}_k \mathbf{g}'_k, \quad \mathbf{E}_{jk} = \kappa_{jk} \mathbf{w}_k \mathbf{g}'_k \quad (2.1.33)$$

oraz

$$\mathbf{w}_k \mathbf{g}'_l = \begin{cases} 0 & \text{dla } k \neq l \\ 1 & \text{dla } k = l \end{cases} \quad \text{dla } k, l = 1, 2, \dots, N, \quad (2.1.34)$$

$$\sum_{n=1}^N \mathbf{w}_{kn} = 1. \quad (2.1.35)$$

W modelu (2.1.32)  $k$ -ty czynnik wspólny  $-f_{kt}$  jest liniową kombinacją  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ , zgodnie z formułą  $f_{kt} = \mathbf{w}'_k \boldsymbol{\varepsilon}_t$ , natomiast  $\mathbf{g}_k$  są to ładunki czynników. Model (2.1.32) można również przedstawić w następującej postaci:

<sup>38</sup> Pod warunkiem, że macierz  $\mathbf{G}$  jest dodatnio określona.

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{\Omega} + \sum_{k=1}^K \mathbf{g}_k \mathbf{g}'_k h_{kt}^*, \quad (2.1.36)$$

gdzie  $\mathbf{\Omega} = \mathbf{G} - \sum_{k=1}^K \mathbf{g}_k \mathbf{g}'_k \mathbf{w}'_k \mathbf{G} \mathbf{w}_k$ ,  $\text{var}(f_{kt} \mid \psi_{t-1}) = \mathbf{w}'_k \mathbf{H}_t \mathbf{w}_k = h_{kt}^*$

oraz  $h_{kt}^* = \mathbf{w}'_k \mathbf{G} \mathbf{w}_k + \sum_{i=1}^q \gamma_{ik}^2 f_{k,t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \kappa_{jk}^2 h_{k,t-j}^*$ .

Na podstawie modelu (2.1.36) widać, że warunkowa macierz kowariancji  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  zależy wyłącznie od wariancji warunkowych  $K$  czynników wspólnych oraz każdy z czynników może być opisany jako jednorównaniowy proces GARCH  $(p, q)$ . Zauważmy również, że warunkowa kowariancja dwóch dowolnych czynników jest niezależna od czasu:

$$E_{t-1}(f_{kt} f_{lt}) = \mathbf{w}'_k \mathbf{G} \mathbf{w}_l \quad \text{dla } k \neq l \text{ oraz } k, l = 1, 2, \dots, K. \quad (2.1.37)$$

$K$ -czynnikowy proces GARCH jest kowariancyjnie stacjonarny wtedy i tylko wtedy, gdy:

$$\sum_{i=1}^q \gamma_{ik}^2 + \sum_{j=1}^p \kappa_{jk}^2 < 1 \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, K. \quad (2.1.38)$$

Bezwarunkowa macierz kowariancji  $\mathbf{S} = E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}'_t)$  jest wówczas dana następującą formułą:

$$\mathbf{S} = \mathbf{\Omega} + \sum_{k=1}^K \mathbf{g}_k \mathbf{g}'_k \sigma_k^{*2}, \quad (2.1.39)$$

gdzie  $\sigma_k^{*2} = (\mathbf{w}'_k \mathbf{G} \mathbf{w}_k) / (1 - \sum_{i=1}^q \gamma_{ik}^2 - \sum_{j=1}^p \kappa_{jk}^2)$ .

Model w postaci (2.1.36) może być również wyprowadzony na podstawie modelu:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = \sum_{k=1}^K \mathbf{g}_k f_{kt} + \boldsymbol{\eta}_t, \quad (2.1.40)$$

gdzie  $\boldsymbol{\eta}_t$  ma stałą macierz kowariancji oraz jest nieskorelowane z  $f_{kt}$ .  $K$ -czynnikowy model GARCH oznacza, że zmienna w czasie część macierzy kowariancji ma zredukowany rząd równy  $K$  (rząd  $\mathbf{H}_t$  pozostaje bez zmian ze względu na macierz  $\mathbf{G}$ ). Zmienna w czasie część macierzy kowariancji zależy wyłącznie od  $K$  wspólnych czynników. Przyjmuje się zatem założenie, że  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  mają wspólną zmienność warunkową. Niektóre teorie finansowe i ekono-



miczne sugerują takie zachowanie zmiennych, na przykład w teorii arbitrażu cenowego zakłada się, że nieoczekiwana część stóp zwrotu z aktywów zależy od wspólnych czynników i ryzyka specyficznego.

Podstawową zaletą  $K$ -czynnikowego modelu GARCH, o niedużej liczbie czynników, jest łatwość estymacji parametrów, nawet dla bardzo dużej liczby szeregów, za pomocą procedury dwustopniowej. Słabym punktem tej parametryzacji modelu jest taka sama persistencja dla wszystkich wariancji i kowariancji. Dodatkowo, jeżeli wybrane czynniki nie będą miały silnego wpływu na badane aktywa, to model może opisywać zmienność wariancji i kowariancji stóp zwrotu w niezadowalającym stopniu. Dalsze rozszerzenia modelu czynnikowego zaproponował Engle (2007): model czynnikowy podwójny ARCH (ang. *factor double ARCH*) pozwalający opisać niewyjaśnioną zmienność warunkową oraz model czynnikowy DCC będący połączeniem modelu czynnikowego i DCC. Inne specyfikacje czynnikowego modelu GARCH i jego zastosowanie w testach APT zostały omówione w punkcie 5.3.

### **Pełnoczynnikowy model GARCH**

Vrontos, Dellaportas i Politis (2003) zaproponowali specyfikację modelu czynnikowego, określoną mianem pełnoczynnikowego modelu GARCH:

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{W}\boldsymbol{\Sigma}_t\mathbf{W}', \quad (2.1.41)$$

gdzie  $\mathbf{W}$  jest trójkątną macierzą parametrów z jedynkami na przekątnej o wymiarach  $N \times N$ ,  $\boldsymbol{\Sigma}_t = \text{diag}(\sigma_{1t}^2, \sigma_{2t}^2, \dots, \sigma_{Nt}^2)$ ,  $\sigma_{it}^2$  jest warunkową wariancją  $i$ -tego czynnika, to jest  $i$ -tym elementem  $\mathbf{W}^{-1}\boldsymbol{\varepsilon}_t$  i może być określona przez dowolny jednorównaniowy model GARCH.

Specyfikacja modelu zapewnia dodatnią określoność macierzy  $\mathbf{H}_t$ . Kolejność szeregów w wektorze  $\mathbf{y}_t$  może mieć wpływ na uzyskane wyniki.

### **Model GARCH z ukrytym czynnikiem**

Diebold i Nerlove (1989) wprowadzili model GARCH z ukrytym czynnikiem (ang. *latent factor ARCH*):

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t = \lambda F_t + \boldsymbol{\eta}_t, \quad (2.1.42)$$

gdzie  $\boldsymbol{\eta}_t = (\eta_{1t}, \dots, \eta_{Nt})$ ,  $\eta_{it} \sim (0, \sigma_{ii})$  dla  $i = 1, \dots, N$  oraz  $F_t$  jest zmienną ukrytą o następującym rozkładzie warunkowym  $F_t \mid \psi_{t-1} \sim N(0, h_t)$ . Wówczas:

$$\text{Var}(\varepsilon_t \mid \psi_{t-1}) = h_t \boldsymbol{\lambda} \boldsymbol{\lambda}' + \text{diag}(\sigma_{11}, \dots, \sigma_{NN}), \quad (2.1.43)$$

gdzie  $h_t$  jest wariancją warunkową, opisaną za pomocą jednorównaniowego modelu ARCH.

King, Sentana i Wadhvani (1994) uogólnili model, tak aby uwzględniał zarówno czynniki ukryte, jak i obserwowalne. Model z ukrytym czynnikiem jest modelem oszczędnie sparametryzowanym, jednakże ponieważ czynnik nie jest obserwowalny, estymacja modelu jest znacznie trudniejsza niż innych modeli czynnikowych (można wykorzystać filtr Kalmana lub podejście bayesowskie). Model ten może nie być wystarczający do opisu finansowych szeregów czasowych (patrz np. Osiewalski i Pipień, 2004a).

### Ortogonalny model GARCH

Alexander i Chibumba (1996) wprowadzili ortogonalny model GARCH (ang. *orthogonal* GARCH, O-GARCH), który może być traktowany jako szczególny rodzaj modeli czynnikowych:

$$\mathbf{V}^{-1/2} \boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{u}_t = \boldsymbol{\Lambda}_m \mathbf{f}_t, \quad (2.1.44)$$

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{V}^{1/2} \mathbf{V}_t \mathbf{V}^{1/2}, \quad (2.1.45)$$

gdzie  $\mathbf{V} = \text{diag}(v_1, v_2, \dots, v_N)$ ,  $v_i$  jest bezwarunkową wariancją  $\varepsilon_{it}$ ,  $\boldsymbol{\Lambda}_m$  to macierz wektorów własnych (ortogonalnych) o wymiarach  $N \times m$ ,  $\mathbf{f}_t = (f_{1t}, f_{2t}, \dots, f_{mt})'$  jest wektorem o warunkowych wartościach oczekiwanych równych zeru:  $E_{t-1}(\mathbf{f}_t) = 0$ , oraz warunkowej macierzy kowariancji równej  $\mathbf{Q}_t = \text{diag}(\sigma_{f_{1t}}^2, \sigma_{f_{2t}}^2, \dots, \sigma_{f_{mt}}^2)$ ,  $\sigma_{f_{it}}^2$  jest opisane za pomocą jednorównaniowego stacjonarnego modelu GARCH (dla  $i = 1, 2, \dots, m$ ), a warunkowa macierz kowariancji  $\mathbf{u}_t$  jest równa  $\mathbf{V}_t = \boldsymbol{\Lambda}_m \mathbf{Q}_t \boldsymbol{\Lambda}_m'$ .

W praktyce parametry dla populacji (w macierzach  $\mathbf{V}$  i  $\boldsymbol{\Lambda}_m$ ) są zastąpione szacunkami, uzyskanymi na podstawie próby, a  $m$  jest wybierane na podstawie analizy głównych składowych w odniesieniu do standaryzowanych reszt  $\hat{\mathbf{u}}_t$ .

Podstawową zaletą ortogonalnego modelu GARCH jest łatwość estymacji, nawet dla bardzo dużej liczby szeregów. Specyfikacja modelu umożliwi również estymację macierzy kowariancji (przy małej liczbie czynników), także dla mało płynnych aktywów, dla których ciężko byłoby osiągnąć zbieżność iteracyjnych procedur numerycznych realizujących kryterium estymacji w przypadku innych modeli. Z drugiej strony przyjmuje się założenie, że czynniki są nieskorelowane. Analiza głównych składowych zapewnia brak

korelacji dla rozkładów bezwarunkowych, ale nie gwarantuje braku korelacji dla rozkładów warunkowych. Van der Weide (2002), zamiast założenia o ortogonalności macierzy  $\Lambda_m$ , przyjmuje założenie o jej odwracalności i proponuje uogólniony ortogonalny model GARCH (GO-GARCH). W modelu GO-GARCH liczba czynników nie może być mniejsza niż liczba aktywów, co jest możliwe w modelu O-GARCH. Lanne i Saikkonen (2007) proponują jeszcze inne uogólnienie ortogonalnego modelu czynnikowego, mianowicie GOF-GARCH (ang. *generalized orthogonal factor*). Niektóre czynniki w tym modelu mogą być warunkowo homoskedastyczne.

Jeżeli badane aktywa nie są silnie skorelowane, to modele ortogonalne mogą opisywać zmienność wariancji i kowariancji stóp zwrotu w niezadawalającym stopniu. Model ortogonalny ze wszystkimi czynnikami stosowali Ding i Engle (2001), określając go jako model GARCH głównych składowych. Specyfikacja modeli ortogonalnych zapewnia dodatnią półokreśloność macierzy kowariancji  $\mathbf{H}_t$ . Modele są kowariancyjnie stacjonarne, jeżeli każdy z  $m$  jednorównaniowych modeli GARCH jest kowariancyjnie stacjonarny.

### 2.1.6. MODEL GARCH-M

Bollerslev, Engle i Wooldridge (1988) przedstawili wielorównaniową postać modelu GARCH-M:

$$\mathbf{r}_t = \boldsymbol{\alpha} + \lambda \mathbf{H}_t \boldsymbol{\omega}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{H}_t^{1/2} \mathbf{z}_t, \quad \mathbf{z}_t \sim D(\mathbf{0}, \mathbf{I}_N), \quad (2.1.46)$$

gdzie  $\mathbf{r}_t$  jest to wektor stóp zwrotu o wymiarach  $N \times 1$ ,  $\boldsymbol{\alpha}$  – wektor parametrów o wymiarach  $N \times 1$ ,  $\lambda$  – stały parametr,  $\boldsymbol{\omega}_{t-1}$  – wektor udziałów poszczególnych walorów w portfelu rynkowym o wymiarach  $N \times 1$  (udział  $i$ -tego waloru jest określony jako iloraz wartości rynkowej danego waloru do wartości rynkowej wszystkich walorów). Bollerslev, Engle i Wooldridge (1988) przyjęli model VECH, a szacowali jego diagonalną postać, jednakże możliwa jest dowolna parametryzacja  $\mathbf{H}_t$ . Należy jednakże pamiętać, że estymacja parametrów modelu powinna odbywać się jednocześnie (estymacja łączna), ponieważ macierz informacji nie jest macierzą blokowo-diagonalną ze względu na parametry warunkowych wartości oczekiwanych i kowariancji, a to znacznie ogranicza liczbę możliwych do zastosowania specyfikacji modelu dla większej liczby aktywów. Dalsze parametryzacje modelu

GARCH-M oraz jego zastosowania do weryfikacji modelu CAPM omówiono w punkcie 5.2.

### 2.1.7. GRUBE OGONY WARUNKOWEGO ROZKŁADU WIELOWYMIAROWEGO

W formułach (2.1.2) i (2.1.3) przyjmuje się często wielowymiarowy rozkład normalny. Jednakże podobnie, jak w przypadku modeli jednorównaniowych, warunkowa normalność  $\mathbf{z}_t$ , założona w (2.1.2), nie jest w stanie opisać zwiększonej kurtozy występującej w rozkładach brzegowych stóp zwrotu większości procesów finansowych. Z tego względu często stosuje się warunkowe rozkłady posiadające grubsze ogony niż te, które występują w rozkładzie normalnym. Najczęściej przyjmuje się rozkład t-Studenta. Jeżeli  $\mathbf{x}_t$  ma wielowymiarowy rozkład t-Studenta z  $\nu$  stopniami swobody, wówczas  $\text{var}(x_i) = \nu / (\nu - 2)$ , dla  $\nu > 2$ ,  $i = 1, 2, \dots, N$ , a  $\mathbf{z}_t = \sqrt{(\nu - 2) / \nu} \mathbf{x}_t$  ma standaryzowany wielowymiarowy rozkład t-Studenta. Wielowymiarowa funkcja gęstości prawdopodobieństwa rozkładu t-Studenta dla  $\mathbf{z}_t$  jest określona wzorem:

$$g(\mathbf{z}_t) = \frac{\Gamma((\nu + N) / 2)}{[\pi(\nu - 2)]^{N/2} \Gamma(\nu / 2)} (1 + (\nu - 2)^{-1} \mathbf{z}_t' \mathbf{z}_t)^{-(\nu + N)/2}, \quad (2.1.47)$$

gdzie  $\Gamma$  oznacza funkcję gamma.

Możliwe są również inne specyfikacje wielowymiarowego rozkładu warunkowego, na przykład skośny rozkład t-Studenta dopuszczający asymetrię, mieszanina rozkładów normalnych (patrz Vlaar i Palm, 1993), uogólniony rozkład hiperboliczny (patrz Mencina i Sentana, 2005). Modele GARCH z powyższymi rozkładami warunkowymi pozwalają nie tylko lepiej opisać grube ogony rozkładów bezwarunkowych stóp zwrotu, ale również asymetrię tych rozkładów. Model GARCH z warunkowym rozkładem t-Studenta najczęściej wystarczająco dobrze opisuje zwiększoną kurtozę występującą w rozkładach brzegowych procesów finansowych, a estymacja jego parametrów jest stosunkowo prosta. Problemem, który pozostaje nadal do rozwiązania dla takiego modelu jest określenie własności estymatorów MNW. Osiewalski i Pipień (2004a, b, 2005) stosują podejście bayesowskie jako dogodną alternatywę, proponując konkretne procedury numeryczne, głównie algorytm Metropolisa i Hastingsa z rodziny MCMC.

### 2.1.8. INNE POSTACIE MODELI GARCH

Poniżej przedstawiono kilka mniej znanych parametryzacji modelu, które zdaniem autora mogą w przyszłości okazać się ważne.

#### Uogólniony dynamiczny model kowariancji – GDC

Uogólniony dynamiczny model kowariancji (ang. *general dynamic covariance*) został zaproponowany przez Kronera i Ng (1998), a następnie rozszerzony, tak aby obejmował modele DCC, przez Bauwensa, Laurenta i Rombouts (2006):

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{D}_t \mathbf{R}_t \mathbf{D}_t + \mathbf{\Phi} \otimes \mathbf{\Theta}_t, \quad (2.1.48)$$

gdzie  $\mathbf{D}_t = (d_{ijt})$ ,  $d_{iit} = \sqrt{\theta_{iit}}$  dla  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $d_{ijt} = 0$  dla  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, N$ ,  $\mathbf{\Theta}_t = (\theta_{ijt})$ ,  $\mathbf{R}_t$  jest określone tak, jak w modelach DCC,  $\mathbf{\Phi} = (\phi_{ij})$ ,  $\phi_{ii} = 0$  dla  $i = 1, 2, \dots, N$ ,  $\phi_{ij} = \phi_{ji}$ ,  $\theta_{ijt} = \omega_{ij} + \mathbf{a}'_i \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} \boldsymbol{\varepsilon}'_{t-1} \mathbf{a}_j + \mathbf{g}'_i \mathbf{H}_{t-1} \mathbf{g}_j$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, N$ ,  $\mathbf{a}_i$ ,  $\mathbf{g}_i$  są wektorami parametrów o wymiarach  $N \times 1$  oraz  $\boldsymbol{\Omega} = (\omega_{ij})$  jest dodatnio określoną macierzą symetryczną.

Model GDC obejmuje, jako szczególne przypadki, kilka podstawowych specyfikacji wielorównaniowego modelu GARCH. Rozważmy następujące warunki:

- (i1a)  $\alpha = 0$ ,  $\beta = 0$  (dla DCC Engle'a) lub  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ ,
- (i1b)  $\mathbf{S} = \mathbf{I}_N$  (dla DCC Engle'a) lub  $\mathbf{R} = \mathbf{I}_N$ ,
- (i2)  $\mathbf{a}_i = \alpha_i \mathbf{1}_i$ ,  $\mathbf{g}_i = \beta_i \mathbf{1}_i$  dla  $i = 1, 2, \dots, N$ , gdzie  $\mathbf{1}_i$  jest  $i$ -tą kolumną jednostkowej macierzy o wymiarach  $N \times N$ ,  $\alpha_i$  i  $\beta_i$  dla  $i = 1, 2, \dots, N$  są skalarami,
- (i3)  $\phi_{ij} = 0$  dla  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, N$ ,
- (i4)  $\phi_{ij} = 1$  dla  $i \neq j$ ,  $i, j = 1, 2, \dots, N$ ,
- (i5)  $\mathbf{A} = \alpha(\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\lambda}')$ ,  $\mathbf{G} = \beta(\boldsymbol{\omega} \boldsymbol{\lambda}')$ , gdzie  $\mathbf{A} = [\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_N]$ ,  $\mathbf{G} = [\mathbf{g}_1, \mathbf{g}_2, \dots, \mathbf{g}_N]$  są macierzami o wymiarach  $N \times N$ ,  $\boldsymbol{\omega}$  i  $\boldsymbol{\lambda}$  są wektorami o wymiarach  $N \times 1$  oraz  $\alpha$  i  $\beta$  są skalarami.

Model GDC redukuje się do modeli:

- DCC(1,1) lub modelu ze zmiennymi warunkowymi współczynnikami korelacji, gdy zachodzą (i2) i (i3),
- CCC z warunkowymi wariancjami opisanymi przez procesy GARCH(1,1), gdy zachodzą (i1a), (i2) i (i3),
- DVECH(1,1) z restrykcjami, gdy zachodzą (i1) i (i4),
- BEKK(1,1,1), gdy zachodzą (i1) i (i4),

–  $K$ -czynnikowego modelu GARCH, gdy zachodzą (i1), (i4) i (i5). Warunek (i1b) jest warunkiem identyfikującym dla modeli VECH, BEKK oraz  $K$ -czynnikowego modelu GARCH. W modelu GDC występuje stosunkowo duża liczba parametrów, tj.  $[N(7N - 1) + 4] / 2$ , dlatego model może być wykorzystywany do testowania różnych parametryzacji jedynie dla małej liczby szeregów.

### Asymetryczny wpływ dodatnich i ujemnych stóp zwrotu na wariancje i kowariancje

Podobnie jak w przypadku jednowymiarowym, wpływ dodatnich i ujemnych stóp zwrotu na wariancje i kowariancje może być asymetryczny. Powstało kilka specyfikacji modelu wielorównaniowego pozwalających opisać ten efekt. Zauważmy, że parametryzacja modelu może dotyczyć  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  lub  $\mathbf{z}_t$ . Kroner i Ng (1998) zaproponowali asymetryczny dynamiczny model kowariancji (ADC, ang. *asymmetric dynamic covariance*). Model różni się od modelu GDC jedynie specyfikacją  $\theta_{ijt}$ :

$$\theta_{ijt} = \omega_{ij} + \mathbf{a}'_i \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} \boldsymbol{\varepsilon}'_{t-1} \mathbf{a}_j + \mathbf{g}'_i \mathbf{H}_{t-1} \mathbf{g}_j + \mathbf{b}'_i \mathbf{v}_{t-1} \mathbf{v}'_{t-1} \mathbf{b}_j, \quad (2.1.49)$$

gdzie  $\mathbf{v}_t = \max[\mathbf{0}, -\boldsymbol{\varepsilon}_t]$ .

Model ten obejmuje, jako szczególne przypadki, różne postacie wielorównaniowych modeli GARCH rozszerzone tak, aby uwzględniać asymetryczną reakcję inwestorów na dobre i złe informacje. Hansson i Hordahl (1998) rozszerzają model DVECH (postać 2.1.10), dodając w równaniu macierzy kowariancji składnik  $\mathbf{D} \otimes \mathbf{v}_{t-1} \mathbf{v}'_{t-1}$ , gdzie  $\mathbf{D}$  jest diagonalną macierzą parametrów. Z kolei Hafner i Herwartz (1998) rozszerzają dwurównaniowy model BEKK, dodając składniki  $\mathbf{D}'_1 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} \boldsymbol{\varepsilon}'_{t-1} \mathbf{D}_1 I_{\{\varepsilon_{t-1} < 0\}} + \mathbf{D}'_2 \boldsymbol{\varepsilon}_{t-1} \boldsymbol{\varepsilon}'_{t-1} \mathbf{D}_2 I_{\{\varepsilon_{2t-1} < 0\}}$ , gdzie  $\mathbf{D}_1$  i  $\mathbf{D}_2$  są macierzami parametrów o wymiarach  $2 \times 2$ ,  $I_{\{\dots\}}$  jest zmienną zero-jedynkową. Taką parametryzację można traktować jako uogólnienie jednorównaniowego modelu GJR-GARCH. Dwurównaniowy model EGARCH zaproponowali Braun, Nelson i Sunier (1995), natomiast macierzową postać modelu EGARCH przedstawił Kawakatsu (2006). Cappiello, Engle i Sheppard (2006) rozszerzyli model DCC, wprowadzając asymetryczny model DCC. Model ten pozwala opisać sytuację, w której korelacja wzrasta w większym stopniu, gdy stopy zwrotu spadają, niż gdy stopy zwrotu rosną w takim samym stopniu.

### Parametryzacje z dekompozycją Choleskiego

Inną propozycją zapewniającą dodatnią określoność macierzy  $\mathbf{H}_t$  jest zastosowanie dekompozycji Choleskiego. Kawakatsu (2003) proponuje model GARCH z czynnikiem Choleskiego (ang. *Cholesky factor GARCH model*). Podobny model przedstawia Tsay (2005). W obu postaciach parametryzacja modelu dotyczy macierzy otrzymanych na podstawie dekompozycji Choleskiego. Kawakatsu zakłada, że  $\mathbf{H}_t = \mathbf{L}_t \mathbf{L}'_t$ , natomiast Tsay –  $\mathbf{H}_t = \mathbf{L}_t \mathbf{G}_t \mathbf{L}'_t$ . Dzięki temu dodatnia określoność macierzy  $\mathbf{H}_t$  jest zapewniona bez nakładania restrykcji. Wadą obu modeli jest fakt, że kolejność szeregów w wektorze  $\mathbf{y}_t$  może mieć wpływ na uzyskane wyniki.

### Model kopula-GARCH

Koncepcja leżąca u podstaw modelu kopula-GARCH opiera się na twierdzeniu Sklara (1959), które mówi, że  $N$  wymiarowy łączny rozkład może być rozdzielony na  $N$  rozkładów brzegowych oraz funkcję kopuli, która całkowicie opisuje zależności między  $N$  zmiennymi. Model kopula-GARCH został zaproponowany przez Pattona (2006a) oraz Jondeau i Rockingera (2006). Specyfikacja modelu polega na określeniu: równań dla wariancji warunkowych (niekoniecznie jednorównaniowych, np. wariancja może zależeć również od innych opóźnionych wariancji), postaci rozkładów brzegowych dla każdego szeregu oraz postaci funkcji warunkowej kopuli. Funkcja kopuli zmienia się w czasie poprzez parametry, które mogą być funkcją przeszłych danych. Jak na razie model taki może być stosowany tylko dla bardzo małej liczby szeregów (patrz np. Doman, 2006).

### Modele GARCH dla danych o częstotliwości wyższej niż dzienna

Podobnie jak w przypadku modeli jednorównaniowych, analiza danych o częstotliwości wyższej niż dzienna może dostarczyć dodatkowych informacji o własnościach procesów finansowych. W badaniu można zastosować wszystkie modele GARCH, które stosuje się dla danych dziennych. Z uwagi na specyficzne własności danych intraday, modele takie powinny być jednakże rozszerzone lub zmodyfikowane. Autokorelacja stóp zwrotu jest znacznie silniejsza w przypadku danych o wysokiej częstotliwości. Sumy ocen parametrów  $\alpha_1$  i  $\beta_1$  w modelu GARCH (1,1) są natomiast mniejsze w stosunku do analogicznych wyników, uzyskanych na podstawie danych o częstotliwości dziennej<sup>39</sup> (patrz np. Ghose i Kroner, 1995; Andersen i Bollerslev, 1997; En-

<sup>39</sup> Obserwowana dla danych intraday persistencja wariancji jest znacznie słabsza.

gle, 2000 dla szeregów jednowymiarowych). Goodhart, Hall, Henry i Pesaran (1993) pokazują, że uwzględnienie bezpośrednio w modelu ważnych informacji (np. dotyczących publikacji danych finansowych) może spowodować znaczące zmiany w ocenie własności badanych procesów. Estymacja parametrów większości specyfikacji wielorównaniowych modeli GARCH jest trudna i bardzo czasochłonna już w przypadku danych dziennych. Zastosowanie danych intraday dodatkowo znacząco wydłuża czas estymacji, z tego względu liczba takich badań jest na razie bardzo ograniczona.

Dla danych obserwowanych w okresach krótszych niż godzina relatywnie duże znaczenie mają wahania cykliczne oraz krótkie wzrosty zmienności po publikacji informacji makroekonomicznych (terminy publikacji takich danych są wcześniej znane). Przewidywanie takich wahań nie jest możliwe na podstawie klasycznych modeli GARCH. Z tego względu, na bazie modelu GARCH, powstało wiele alternatywnych postaci modelu służących modelowaniu i prognozowaniu zmienności, mających zastosowanie wyłącznie w przypadku danych o bardzo wysokiej częstotliwości (patrz np. Chan, Chan i Karolyi, 1991; Martens, 2002). W przypadku danych o bardzo wysokiej częstotliwości kluczowe jest uwzględnienie wahań cyklicznych, powtarzających się w ciągu dnia lub tygodnia. Do opisu danych o ultrawysokiej częstotliwości zaproponowano również szereg modeli, których związek z modelami GARCH jest niewielki (np. model ACD, Engle i Russel, 1998). Zagadnienia te należą do analizy mikrostruktury rynku i wymagają odrębnych klas modeli.

## **2.2. UWAGI O WIELORÓWNANIOWYCH PARAMETRYZACJACH MODELI GARCH**

Wielorównaniowy model GARCH powinien z jednej strony dobrze opisywać własności finansowych szeregów czasowych, a z drugiej strony powinien być stosunkowo łatwy w estymacji. Połączenie tych dwóch celów jest bardzo trudne z uwagi na to, że w przypadku większości specyfikacji wraz ze wzrostem liczby aktywów gwałtownie wzrasta liczba parametrów modelu. Należy także pamiętać, że model taki powinien zapewniać dodatnią określoność macierzy kowariancji. Najtrudniejszym problemem w przypadku analizy dużej liczby aktywów staje się estymacja parametrów. Numeryczna optymalizacja funkcji wiarygodności jest w takiej sytuacji trudna i czasochłonna. Z tego względu istniejące specyfikacje wielorównaniowych modeli GARCH dobrze opisują własności finansowych szeregów czasowych tylko w przypad-



ku niewielkiej liczby aktywów. Można dlatego przypuszczać, że jeszcze przez długi czas, wielorównaniowe modele GARCH będą należeć do dynamicznie rozwijającego się obszaru ekonometrii finansowej.

Liczba powstałych parametryzacji wielorównaniowych modeli GARCH jest już na tyle duża, że celowe byłoby przeprowadzenie ich klasyfikacji, która ułatwiłaby wybór odpowiedniej specyfikacji. Bauwens, Laurent i Rombouts (2006) wyróżniają trzy nie wykluczające się wzajemnie podejścia do konstrukcji wielorównaniowych modeli GARCH. Pierwsze podejście jest bezpośrednim uogólnieniem jednorównaniowego modelu GARCH, zaproponowanego przez Bollersleva (1986). Do tej kategorii można zaliczyć modele VECH, BEKK, model wynikający z koncepcji RiskMetrics<sup>40</sup>, parametryzacje z dekompozycją Choleskiego, czynnikowy model GARCH oraz pełnoczynnikowy model GARCH. Drugie podejście polega na liniowej kombinacji jednorównaniowych modeli GARCH. Możemy tutaj zaliczyć modele ortogonalne i modele z ukrytym czynnikiem. Trzecie podejście polega na nieliniowej kombinacji jednorównaniowych modeli GARCH. Do tej kategorii możemy zaliczyć model stałych warunkowych współczynników korelacji, model DCC i uogólniony dynamiczny model kowariancji.

Przyjmując jako kryterium stopień powiązania z innymi modelami, można dokonać klasyfikacji na trzy grupy. Pierwsza, to modele, które nie są zagnieźdzone w innych parametryzacjach, jak np. VECH i uogólniony dynamiczny model kowariancji. Do drugiej grupy można zaliczyć modele, które powstały w wyniku nałożenia pewnych restrykcji na parametry już istniejących specyfikacji, np. modele: skalarno-diagonalny, zintegrowany, BEKK i jego uproszczenia, czynnikowe modele GARCH. Trzecia grupa obejmuje modele powstałe jako rozszerzenie istniejących parametryzacji, np. rozszerzenia modelu CCC, model DCC i jego rozszerzenia oraz macierzowa postać modelu EGARCH. Zauważmy, że niektóre specyfikacje można zaliczyć do dwóch grup. Na przykład mogły one powstać jako rozszerzenie istniejących modeli, np. model GO-GARCH jako rozszerzenie modelu O-GARCH, a z drugiej strony można je wyprowadzić poprzez odpowiednie restrykcje z istniejących specyfikacji, tak jest w przypadku czynnikowych modeli GARCH (a więc i modelu GO-GARCH), które są szczególnymi przypadkami modelu BEKK.

Ze względu na rodzaj informacji, jakie można uzyskać na podstawie modelu, wielorównaniowe parametryzacje można podzielić na dwie grupy.

---

<sup>40</sup> Koncepcja ta została omówiona w podrozdziale 3.3.

Pierwsza grupa obejmuje modele, których głównym celem jest opis dynamiki warunkowych wariancji i kowariancji szeregów czasowych. Możemy tutaj zaliczyć np. model BEKK, model  $K$ -czynnikowy czy model DCC. Druga grupa to modele, które dodatkowo mają za zadanie opisać inne własności szeregów finansowych. Najczęściej modele te mają swoje odpowiedniki w postaci modeli jednorównaniowych. Do tej kategorii możemy zaliczyć dwurównaniowy model BEKK GJR (Hafner i Herwartz, 1998), dwurównaniowy model FI-GARCH (Brunetti i Gilbert, 2000) oraz macierzową postać modelu EGARCH (Kawakatsu, 2006).

Istotny z praktycznego punktu widzenia wydaje się podział na modele, których parametry szacuje się jednostopniowo oraz modele, których parametry można szacować za pomocą procedur dwustopniowych, korzystając z jednorównaniowych modeli GARCH<sup>41</sup>. Do pierwszej kategorii możemy zaliczyć model BEKK, do drugiej natomiast – model  $K$ -czynnikowy, ortogonalny lub DCC. W przypadku diagonalnego modelu VECM nie stosuje się co prawda procedury dwustopniowej, ale parametry tego modelu można oszacować oddzielnie dla każdego równania, czyli estymuje się parametry jednorównaniowych modeli GARCH i ich odpowiedników dla warunkowych kowariancji.

Z ekonomicznego punktu widzenia ważne może być, czy parametry modelu posiadają bezpośrednią interpretację. Niestety parametry większości złożonych parametryzacji modeli GARCH nie mają prostej interpretacji parametrów, dotyczy to w szczególności ogólnych postaci modeli VECM i BEKK. Do modeli, których parametry mają bezpośrednią interpretację można zaliczyć diagonalny BEKK, diagonalny VECM, skalarno-diagonalny, zintegrowany, stałych warunkowych współczynników korelacji.

Jeszcze inną klasyfikację modeli przedstawiają Silvennoinen i Teräsvirta (2008). Dzielą oni modele na cztery grupy. Pierwsza obejmuje modele, w których bezpośredniej parametryzacji podlega macierz kowariancji, np. modele VECM, BEKK i macierzowa postać modelu EGARCH. Do drugiej grupy zaliczają modele czynnikowe, np.  $K$ -czynnikowy, O-GARCH, GO-GARCH, GOF-GARCH oraz pełnoczynnikowy. Trzecia grupa to modele, w których bezpośredniej parametryzacji podlegają warunkowe wariancje i korelacje, np. modele stałych warunkowych współczynników korelacji i DCC wraz z ich rozszerzeniami oraz STCC-GARCH (ang. *smooth transition conditional correlation*) (Silvennoinen i Teräsvirta, 2005). Najwięcej modeli, powstałych w ostatnich kilku latach, należy właśnie do tej grupy. Silvennoinen i Teräsvirta

<sup>41</sup> Estymacja została szczegółowo przedstawiona w następnym podrozdziale.

(2008) oczekują, że podobnie będzie w najbliższym czasie i w tym kierunku spodziewają się dalszego rozwoju wielorównaniowych parametryzacji modeli GARCH. Do czwartej grupy zaliczają podejścia semiparametryczne i nieparametryczne.

Wybór odpowiedniej parametryzacji modelu GARCH jest sprawą kluczową we wszystkich zastosowaniach empirycznych. Przyjęcie określonej postaci modelu może w istotny sposób wpłynąć na wyniki analiz aplikacji modeli (patrz Kroner i Ng, 1998). Niestety nie ma jednej uniwersalnej metody selekcji odpowiedniej specyfikacji. Podobnie jak dla modeli jednorównaniowych, ważną rolę przy wyborze postaci modelu odgrywają testy diagnostyczne. Z jednej strony pozwalają wyeliminować z rozważań pewne postacie modelu, często bez konieczności ich estymacji, co w przypadku modeli wielorównaniowych jest dużym ułatwieniem. Z drugiej strony umożliwiają dokonanie oceny poprawności przyjętych specyfikacji.

Przy wyborze postaci wielorównaniowego modelu GARCH można korzystać z kryteriów podobnych do tych, jakie stosuje się przy wyborze jednorównaniowych modeli. Na przykład można wykorzystać kryteria informacyjne, a w przypadku modeli zagnieżdżonych – test ilorazu wiarygodności (np. w modelu GDC). Można również zastosować inne miary, związane bezpośrednio z konkretnym zastosowaniem. Na przykład w niniejszej pracy oceniano różne postacie wielorównaniowych modeli GARCH ze względu na, między innymi, liczbę przekroczeń VaR (podrozdział 4.2), odchylenie standardowe stopy zwrotu portfela (podrozdziały 4.3 oraz 5.1) i redukcję ryzyka zabezpieczonego portfela (podrozdział 6.2).

Wybór postaci modelu wielorównaniowego jest zadaniem trudniejszym niż wybór modelu jednorównaniowego. W odróżnieniu od modeli jednorównaniowych, jak na razie (w przypadku większej liczby szeregów czasowych), podstawowym kryterium jest najczęściej łatwość estymacji, a dopiero w drugiej kolejności zdolność do opisywania określonych własności szeregów czasowych. Poniżej podano orientacyjne liczby szeregów, dla których estymacja określonych postaci modelu ma sens wyłącznie z praktycznego punktu widzenia. Wraz z rozwojem nowych algorytmów należy oczekiwać, że każdą z postaci modelu będzie można oszacować dla większej liczby szeregów. Dla dwóch, trzech lub czterech szeregów można zastosować wszystkie przedstawione wyżej modele<sup>42</sup>. Dla liczby szeregów większej niż cztery estymacja wielu postaci jest często zbyt czasochłonna, żeby wykorzystywać je w prak-

<sup>42</sup> Poza specyfikacjami, gdzie wyraźnie zaznaczono, że jest to model dwurównaniowy i modelem VECH.

tyce (np. model BEKK). Dla kilkudziesięciu aktywów można zastosować zintegrowany wielorównaniowy model GARCH, upraszczającą parametryzację modelu kowariancyjnie stacjonarnego dla modelu skalarno-diagonalnego, model stałych współczynników korelacji, ortogonalne modele GARCH oraz model DCC i  $K$ -czynnikiowy model GARCH, szacowane w dwóch krokach. Dla kilkunastu szeregów można dodatkowo stosować upraszczającą parametryzację modelu kowariancyjnie stacjonarnego dla diagonalnej postaci modelu BEKK. Dla liczby szeregów od pięciu do około dziesięciu, poza wspomnianymi modelami, można zastosować także diagonalną postać modelu BEKK. Dla kilkuset aktywów w zasadzie można wykorzystać tylko modele, których parametry szacowane są w dwóch krokach i w pierwszym kroku dla każdego szeregu czasowego estymowane są parametry jednorównaniowych modeli GARCH, mianowicie: model stałych współczynników korelacji, ortogonalny model GARCH, model DECO-DCC i  $K$ -czynnikiowy model GARCH.

Warto podkreślić, że w badaniach empirycznych często proste postacie modeli GARCH wypadają lepiej niż złożone parametryzacje. Na przykład w badaniu Dinga i Engle'a (2001) modele skalarno-diagonalny, zintegrowany oraz stałych współczynników korelacji okazały się najlepsze ze względu na wyniki testów diagnostycznych (patrz formuły (2.4.2–2.4.4))<sup>43</sup> w przypadku pięciu spółek z rynku amerykańskiego.

W kolejnych rozdziałach pracy pokazano, że wybór najlepszej postaci modelu GARCH zależy przede wszystkim od rodzaju zastosowania modeli, miary, na podstawie której dokonuje się oceny i własności badanych szeregów finansowych. Nasuwa się zatem pytanie, czy jest w ogóle możliwe wytypowanie modeli, które będą lepiej się sprawdzały w określonych aplikacjach finansowych. Wyniki przeprowadzonych analiz sugerują, że wybór takiego modelu bez przeprowadzenia odpowiednich badań może być obciążony bardzo dużym błędem. Można natomiast na podstawie analizy wewnątrz próby dla tej samej miary, na podstawie której dokonuje się oceny poza próbą, wskazać postacie modeli, które będą prawdopodobnie lepiej zachowywały się w konkretnym zastosowaniu. Takie badanie wewnątrz próby ma większe szanse na wybór najlepszej parametryzacji niż analiza statystycznych własności szeregów czasowych i kryteriów informacyjnych.

---

<sup>43</sup> Testy diagnostyczne dotyczące wielorównaniowych modeli GARCH przedstawiono w podrozdziale 2.4.

## 2.3. ESTYMACJA PARAMETRÓW ZA POMOCĄ MNW

Dla niektórych specyfikacji wielorównaniowych modeli GARCH, jak np. modeli VECM, BEKK( $p, q, K$ ) czy  $K$ -czynnikowego modelu GARCH może wystąpić problem identyfikowalności. Różne parametryzacje dają tę samą reprezentację modelu. Na przykład, dla modelu BEKK(1,1) (formuła 2.1.14 z  $K = 1$ ) macierze  $\mathbf{D}_1$  i  $-\mathbf{D}_1$  jak i  $\mathbf{E}_1$  i  $-\mathbf{E}_1$  prowadzą do tej samej postaci  $\mathbf{H}_t$  (patrz Engle i Kroner, 1995; Osiewalski, Pajor i Pipień, 2007). Problem ten można stosunkowo łatwo rozwiązać, zakładając na przykład, że elementy diagonalne macierzy  $\mathbf{C}$  oraz elementy  $d_{11}$  oraz  $e_{11}$  w macierzach  $\mathbf{D}_1$  i  $\mathbf{E}_1$  są dodatnie. Przykładowe restrykcje dla modelu BEKK( $p, q, K$ ) dla  $K > 1$  zapewniające identyfikowalność można znaleźć w pracy Engle'a i Kronera (1995).

Najczęściej stosowaną metodą estymacji wielorównaniowych modeli GARCH jest metoda największej wiarygodności. Generalnie procedury, stosowane przy estymacji modeli wielorównaniowych, są analogiczne do procedur stosowanych przy estymacji modeli jednorównaniowych. Załóżmy, że  $y_t$  jest realizacją wielowymiarowego procesu stochastycznego, dla którego warunkowa wartość oczekiwana, warunkowa macierz kowariancji oraz warunkowy rozkład są równe odpowiednio  $\boldsymbol{\mu}_t(\boldsymbol{\theta}_0)$ ,  $\mathbf{H}_t(\boldsymbol{\theta}_0)$  oraz  $p(y_t | \boldsymbol{\zeta}_0, \psi_{t-1})$ , gdzie  $\boldsymbol{\zeta}_0' = (\boldsymbol{\theta}_0', \boldsymbol{\eta}_0')$  oznacza wektor zawierający prawdziwe parametry dla warunkowych wartości oczekiwanych i warunkowej macierzy kowariancji ( $\boldsymbol{\theta}_0$ ) oraz parametry ( $\boldsymbol{\eta}_0$ ) funkcji gęstości rozkładu prawdopodobieństwa  $\mathbf{z}_t$ . Przy estymacji za pomocą MNW zakłada się, że standaryzowane reszty  $\mathbf{z}_t$  mają identyczne niezależne rozkłady. Dodatkowo należy przyjąć określoną postać funkcji gęstości  $g(\mathbf{z}_t(\boldsymbol{\theta}); \boldsymbol{\eta})$ . Estymacja parametrów za pomocą MNW sprowadza się do maksymalizacji logarytmu funkcji wiarygodności  $L_T(\boldsymbol{\zeta})$  dla próby zawierającej  $T$  obserwacji  $(y_1, y_2, \dots, y_T)$ , względem wektora parametrów  $\boldsymbol{\zeta}' = (\boldsymbol{\theta}', \boldsymbol{\eta}')$ , gdzie

$$L_T(\boldsymbol{\zeta}) = \sum_{t=1}^T \ln f(y_t | \boldsymbol{\zeta}, \psi_{t-1}), \quad (2.3.1)$$

$$f(y_t | \boldsymbol{\zeta}, \psi_{t-1}) = |\mathbf{H}_t|^{-1/2} g(\mathbf{H}_t^{-1/2}(y_t - \boldsymbol{\mu}_t) | \boldsymbol{\eta}). \quad (2.3.2)$$

Jeżeli  $g(\cdot)$  należy do klasy rozkładów eliptycznych, to znaczy jest funkcją  $\mathbf{z}'_t \mathbf{z}_t$ , to estymator MNW jest niezależny od wyboru metody dekompozycji  $\mathbf{H}_t^{-1/2}$ , ponieważ  $\mathbf{z}'_t \mathbf{z}_t = (y_t - \boldsymbol{\mu}_t)' \mathbf{H}_t^{-1} (y_t - \boldsymbol{\mu}_t)$ .

Najczęściej jako  $g(\mathbf{z}_t(\boldsymbol{\theta}); \boldsymbol{\eta})$  przyjmuje się wielowymiarowy rozkład normalny, który jak wiadomo jest jednoznacznie określony przez dwa pierwsze momenty, dlatego w funkcji wiarygodności znajdują się wyłącznie parametry dla warunkowych wartości oczekiwanych i macierzy kowariancji, a zatem wektor nieznanych parametrów jest równy  $\boldsymbol{\zeta} = \boldsymbol{\theta}$ . Logarytm funkcji wiarygodności dla wielorównaniowego modelu GARCH o warunkowym rozkładzie normalnym, może być wyrażony jako:

$$L_T(\boldsymbol{\theta}) = -\frac{1}{2} \left[ TN \ln(2\pi) + \sum_{t=1}^T (\ln |\mathbf{H}_t| + (\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_t)' \mathbf{H}_t^{-1} (\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_t)) \right]. \quad (2.3.3)$$

Wartości pochodnych cząstkowych wykorzystywane w procesie estymacji są na ogół przybliżane za pomocą metod numerycznych. Alternatywnie pochodne cząstkowe mogą być wyznaczone analitycznie, co zwiększa dokładność szacunku i przyspiesza estymację (patrz Hafner i Herwartz, 2008).

Podobnie jak w przypadku jednorównaniowych modeli GARCH do estymacji parametrów modeli GARCH można zastosować metodę quasi-największej wiarygodności (patrz Bollerslev i Wooldridge, 1992). Ideą wnioskowania na podstawie estymacji quasi-MNW jest wykorzystanie estymatora MNW parametrów w sytuacji, gdy funkcja wiarygodności jest budowana na podstawie gęstości rozkładu normalnego, a nie na podstawie gęstości wynikających z założeń o typie rozkładu  $\mathbf{z}_t$ .

Asymptotyczne własności estymatorów MNW i quasi-MNW, dla wielorównaniowych modeli GARCH, są trudne do wyprowadzenia na podstawie tylko podstawowych warunków regularności. Gourieroux (1997) udowodnił asymptotyczną normalność estymatora quasi-MNW bez precyzowania parametryzacji warunkowej macierzy kowariancji na podstawie bardzo rozszerzonych warunków regularności dotyczących między innymi pochodnych funkcji wiarygodności oraz stacjonarności obserwowanego procesu. Własności dotyczące określonych specyfikacji wielorównaniowych modeli GARCH zostały udowodnione często przy restrykcyjnych założeniach, na przykład dotyczących istnienia określonych momentów  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  lub  $\mathbf{z}_t$ . Jeantheau (1998) udowodnił zgodność estymatora quasi-MNW parametrów  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_T$  dla zaproponowanej przez niego postaci modelu GARCH:

$$\mathbf{Y}_t = E(\mathbf{Y}_t | \psi_{t-1}) + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t = \mathbf{D}_t \boldsymbol{\eta}_t, \quad (2.3.4)$$

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{W} + \sum_{i=1}^q \mathbf{A}_i \boldsymbol{\varepsilon}_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \mathbf{B}_j \mathbf{H}_{t-j}, \quad (2.3.5)$$

gdzie  $\mathbf{D}_t$  oznacza macierz diagonalną o wymiarach  $N \times N$ , której elementami są warunkowe odchylenia standardowe, opisane za pomocą jednorównaniowych modeli GARCH,  $\boldsymbol{\eta}_t$  jest wektorem składników losowych o wymiarach  $N \times 1$ , o średnich równych zero i stałej macierzy warunkowych współczynników korelacji  $\boldsymbol{\Gamma}$ ,  $\mathbf{H}_t$  w tym przypadku oznacza wektor  $\mathbf{H}_t = (h_{1t}, \dots, h_{Nt})'$ . Model ten można określić jako rozszerzenie modelu CCC Bollersleva (1990). Zgodność estymatora została udowodniona dla następujących założeń:

- A1) Przestrzeń parametrów  $\Theta$  jest zwarta.
- A2) Dla każdego  $\boldsymbol{\theta}_0 \in \Theta$  model posiada dokładnie jedno silnie stacjonarne i ergodyczne rozwiązanie o rozkładzie stacjonarnym  $P_{\boldsymbol{\theta}_0}$ .
- A3) Istnieje stała  $c$ , taka, że dla każdego  $t$  oraz każdego  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$  zachodzi  $\det(\mathbf{H}_{t,\boldsymbol{\theta}}) \geq c$ .
- A4) Dla każdego  $\boldsymbol{\theta}_0 \in \Theta$  zachodzi  $E_{\boldsymbol{\theta}_0} \left( \left| \log(\det(\mathbf{H}_{t,\boldsymbol{\theta}_0})) \right| \right) < \infty$ .
- A5) Model jest identyfikowalny<sup>44</sup>.
- A6)  $\mathbf{H}_{t,\boldsymbol{\theta}}$  jest ciągłą funkcją  $\boldsymbol{\theta}$ .

Ling i McAleer (2003) dowiedli asymptotycznej normalności estymatora quasi-MNW parametrów  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_T$  dla modelu w postaci (2.3.4–2.3.5) rozszerzonego dodatkowo o wektor ARMA, tj.  $\sqrt{T}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T - \boldsymbol{\theta}_0) \rightarrow N(0, \mathbf{F}_0^{-1} \mathbf{G}_0 \mathbf{F}_0^{-1})$  dla  $T \rightarrow \infty$ , gdzie macierze  $\mathbf{F}_0$  i  $\mathbf{G}_0$  określone są jako<sup>45</sup>  $\mathbf{G}_0 = E[(\partial l_t(\boldsymbol{\theta}_0) / \partial \boldsymbol{\theta})(\partial l_t(\boldsymbol{\theta}_0) / \partial \boldsymbol{\theta})']$ ,  $\mathbf{F}_0 = -E \left[ \frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \boldsymbol{\theta}_i \partial \boldsymbol{\theta}_j} \right]$ ,  $l_t(\boldsymbol{\theta}_0)$  – logarytm naturalny czynnika funkcji wiarygodności odpowiadającego  $t$ -tej obserwacji. Powyższa własność została udowodniona dla następujących założeń:

- B1)  $\mathbf{Y}_t$  jest procesem kowariancyjnie stacjonarnym.
- B2)  $E \|\mathbf{Y}_t\|^6 < \infty$ , gdzie  $\|\mathbf{Y}_t\|$  oznacza normę euklidesową wektora.
- B3)  $\mathbf{G}_0$  jest macierzą dodatnio określoną oraz  $\boldsymbol{\Gamma}_0^{-1} \odot \boldsymbol{\Gamma}_0 \geq \mathbf{I}_N$ <sup>46</sup>.
- B4) Model jest identyfikowalny.

Comte i Lieberman (2003) wykazali zgodność estymatora quasi-MNW parametrów  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_T$  dla modelu BEKK (postać (2.1.14)), który przedstawiają w nieco zmienionej postaci:

$$\text{vech}(\mathbf{H}_t) = \text{vech}(\mathbf{C}) + \sum_{i=1}^q \tilde{\mathbf{A}}_i \text{vech}(\boldsymbol{\varepsilon}_{t-i} \boldsymbol{\varepsilon}'_{t-i}) + \sum_{j=1}^p \tilde{\mathbf{B}}_j \text{vech}(\mathbf{H}_{t-j}). \quad (2.3.6)$$

<sup>44</sup> Szczegółowe warunki podaje Jeantheau (1998).

<sup>45</sup> Macierze  $\mathbf{F}_0$  i  $\mathbf{G}_0$  mogą być oszacowane na podstawie formuł zawartych w pracy Linga i McAleera (2003), gdzie przedstawiono ich zgodne estymatory.

<sup>46</sup> Iloczyn Hadamarda jest określony w następujący sposób  $\{\mathbf{A} \odot \mathbf{B}\}_{ij} \equiv \{\mathbf{A}\}_{ij} \{\mathbf{B}\}_{ij}$ , natomiast  $\mathbf{A} \geq \mathbf{B}$  oznacza, że dla każdego  $i$  oraz  $j$  zachodzi  $\{\mathbf{A}\}_{ij} \geq \{\mathbf{B}\}_{ij}$ .

Dowód opierał się na następujących założeniach:

- C1) Przestrzeń parametrów  $\Theta$  jest zwarta, macierze  $\mathbf{C}$ ,  $\tilde{\mathbf{A}}_i$  oraz  $\tilde{\mathbf{B}}_j$  są ciągłymi funkcjami  $\boldsymbol{\theta}$  oraz istnieje  $c > 0$  takie, że  $\inf_{\boldsymbol{\theta} \in \Theta} \det \mathbf{C}(\boldsymbol{\theta}) \geq c$ .
- C2) Model jest identyfikowalny.
- C3) Składniki losowe  $\mathbf{z}_t$  mają rozkład ciągły względem miary Lebesgue'a o dodatniej gęstości w otoczeniu początku układu współrzędnych.
- C4) Dla każdego  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ , zachodzi  $\rho \left( \sum_{i=1}^q \tilde{\mathbf{A}}_i(\boldsymbol{\theta}) + \sum_{j=1}^p \tilde{\mathbf{B}}_j(\boldsymbol{\theta}) \right) < 1$ , gdzie  $\rho(\mathbf{A})$  oznacza promień spektralny  $\mathbf{A}$ , tj. największą co do modułu wartość własną danej macierzy  $\mathbf{A}$ .

Comte i Lieberman (2003) udowodnili również asymptotyczną normalność estymatora parametrów  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_T$  dla modelu BEKK, tj.  $\sqrt{T}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T - \boldsymbol{\theta}_0) \rightarrow N(0, \mathbf{F}_0^{-1} \mathbf{G}_0 \mathbf{F}_0^{-1})$  dla  $T \rightarrow \infty$ , gdzie macierze  $\mathbf{F}_0$  i  $\mathbf{G}_0$  określone są jako  $\mathbf{G}_0 = E[(\partial l_t(\boldsymbol{\theta}_0) / \partial \boldsymbol{\theta})(\partial l_t(\boldsymbol{\theta}_0) / \partial \boldsymbol{\theta})']$ ,  $\mathbf{F}_0 = -E \left[ \frac{\partial^2 l_t(\boldsymbol{\theta}_0)}{\partial \boldsymbol{\theta}_i \partial \boldsymbol{\theta}_j} \right]$ .

Przy wyprowadzeniu tej własności przyjęli następujące założenia:

- D1) Spełnione są warunki C1–C4, natomiast macierze  $\mathbf{C}(\boldsymbol{\theta})$ ,  $\tilde{\mathbf{A}}_i(\boldsymbol{\theta})$  oraz  $\tilde{\mathbf{B}}_j(\boldsymbol{\theta})$  mają ciągłe pochodne aż do rzędu trzeciego na  $\Theta$ .
- D2)  $\mathbf{z}_t$  są niezależne.
- D3) Istnieją skończone momenty ósmego rzędu  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ .

Wyniki dotyczące własności estymatora quasi-MNW dla modelu BEKK odnoszą się również do wszystkich parametryzacji, będących szczególnymi przypadkami modelu BEKK (jak np.  $K$ -czynnikowy model GARCH i (G) O-GARCH, patrz van der Weide, 2002). Cały czas prowadzone są intensywne badania nad własnościami estymatorów MNW i quasi-MNW, dlatego należy się spodziewać, że w kolejnych latach zostaną opublikowane wyniki dla coraz to innych specyfikacji modeli oraz ewentualnie złączone zostaną konieczne do wyprowadzenia własności warunki.

Zarówno metoda MNW, jak i quasi-MNW opierają się na założeniu normalności wielowymiarowego rozkładu  $\mathbf{z}_t$ . W pewnych sytuacjach wskazane jest jednak zastosowanie modeli GARCH o warunkowym rozkładzie, który lepiej opisuje rzeczywiste stopy zwrotu. Na przykład, jeżeli celem jest uzyskanie prognoz gęstości predyktywnych (patrz Diebold, Hahn i Tay, 1999) lub konstrukcja prognoz VaR, to pożądane może być złączenie założenia o warunkowej normalności i zastosowanie na przykład rozkładu mającego grubsze ogony.



Jeżeli rozkład warunkowy  $\varepsilon_t$  jest rozkładem t-Studenta, to logarytm funkcji wiarygodności można zapisać w następującej formie:

$$L_T(\zeta) = T \left[ \ln \Gamma \left( \frac{\nu + N}{2} \right) - \ln \Gamma \left( \frac{\nu}{2} \right) - \frac{N}{2} \ln((\nu - 2)\pi) \right] - \frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \ln |\mathbf{H}_t| - \frac{\nu + N}{2} \sum_{t=1}^T \ln \left( 1 + (\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_t)' \mathbf{H}_t^{-1} (\mathbf{y}_t - \boldsymbol{\mu}_t) / (\nu - 2) \right), \quad (2.3.7)$$

gdzie  $\Gamma$  oznacza funkcję gamma, a  $\boldsymbol{\eta}$  w tym przypadku jest równe  $\nu$ . Niestety własności estymatora MNW nie zostały tu jeszcze w pełni określone. Możliwe są również inne specyfikacje rozkładu warunkowego (patrz punkt 2.1.7).

Alternatywne podejście polega na zastosowaniu semiparametrycznych metod estymacji (patrz Hafner i Rombouts, 2007). W pierwszej kolejności szacowane są parametry modelu za pomocą quasi-MNW. Oszacowane na podstawie otrzymanego modelu reszty są wykorzystywane w drugim kroku do estymacji nieparametrycznej funkcji  $g(\cdot)$ . Następnie parametry modelu GARCH są szacowane z zastosowaniem  $\hat{g}(\cdot)$ , w celu określenia funkcji wiarygodności.

Na podstawie przedstawionych powyżej formuł na funkcje wiarygodności (wzory (2.3.1–2.3.2), (2.3.3) oraz (2.3.7)) estymacja parametrów warunkowych wartości oczekiwanych i warunkowej macierzy kowariancji odbywa się jednocześnie<sup>47</sup>. Zauważmy, że parametry równań dla warunkowych wartości oczekiwanych mogą być szacowane oddzielnie, bez estymacji parametrów warunkowej macierzy kowariancji. Nie dotyczy to modelu GARCH-M, dla którego macierz informacji nie jest macierzą blokowo-diagonalną ze względu na parametry warunkowych wartości oczekiwanych i warunkowej macierzy kowariancji. Przy łącznym szacowaniu parametrów dla warunkowych wartości oczekiwanych i warunkowej macierzy kowariancji estymatory są jednakże efektywniejsze. Łączna estymacja dla wielu parametryzacji, przy większej liczbie szeregów, jest niestety bardzo trudna, dlatego albo przyjmuje się prostą specyfikację warunkowych wartości oczekiwanych, albo parametry modelu GARCH są szacowane na podstawie reszt  $\hat{\varepsilon}_t = \mathbf{y}_t - \hat{\boldsymbol{\mu}}_t$ . Określenie wpływu dwustopniowego podejścia na własności estymatorów parametrów różnych specyfikacji modelu GARCH w skończonych próbach wymaga dalszych badań. Estymacja  $K$ -czynnikowego modelu GARCH, zastosowanego do testo-

<sup>47</sup> W miejsce  $\boldsymbol{\mu}_t$  wystarczy wstawić odpowiednie formuły dla warunkowych wartości oczekiwanych.

wania modelu APT ze szczególnym uwzględnieniem metody dwustopniowej, została przedstawiona w punkcie 5.3.

Parametry modelu DCC mogą być oszacowane za pomocą metody dwustopniowej, co znacznie ułatwia estymację. Niech  $\boldsymbol{\theta}' = (\boldsymbol{\theta}'_1, \boldsymbol{\theta}'_2)$  oznacza wektor parametrów, gdzie  $\boldsymbol{\theta}_1$  to parametry dla warunkowych wartości oczekiwanych i wariancji,  $\boldsymbol{\theta}_2$  to parametry w macierzy  $\mathbf{Q}_t$  (postać (2.1.22)) Logarytm naturalny funkcji wiarygodności może być zapisany jako suma dwóch składników:

$$L_T(\boldsymbol{\theta}) = L_{VT}(\boldsymbol{\theta}_1) + L_{CT}(\boldsymbol{\theta}_2 | \boldsymbol{\theta}_1), \quad (2.3.8)$$

gdzie  $L_{VT}(\boldsymbol{\theta}_1)$  to składnik związany ze zmiennością:

$$L_{VT}(\boldsymbol{\theta}_1) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left( N \ln(2\pi) + \ln |\mathbf{D}_t|^2 + \boldsymbol{\varepsilon}_t' \mathbf{D}_t^{-2} \boldsymbol{\varepsilon}_t \right), \quad (2.3.9)$$

natomiast  $L_{CT}(\boldsymbol{\theta}_2 | \boldsymbol{\theta}_1)$  to składnik związany z korelacją:

$$L_{CT}(\boldsymbol{\theta}_2 | \boldsymbol{\theta}_1) = -\frac{1}{2} \sum_{t=1}^T \left( \ln |\mathbf{R}_t| + \mathbf{z}'_t \mathbf{R}_t^{-1} \mathbf{z}_t - \mathbf{z}'_t \mathbf{z}_t \right). \quad (2.3.10)$$

$L_{VT}(\boldsymbol{\theta}_1)$  można zapisać jako:

$$L_{VT}(\boldsymbol{\theta}_1) = -\frac{1}{2} \sum_{i=1}^N \left( T \ln(2\pi) + \sum_{t=1}^T \left( \ln(h_{it}) + \frac{\varepsilon_{it}^2}{h_{it}} \right) \right), \quad (2.3.11)$$

czyli jako sumę logarytmów funkcji wiarygodności jednorównaniowych modeli GARCH. Oznacza to, że w pierwszym kroku jednorównaniowe modele GARCH mogą być szacowane oddzielnie dla każdego aktywa. Ponieważ  $\mathbf{z}_t$  nie zależą od parametrów  $\boldsymbol{\theta}_2$ , przy estymacji w  $L_{CT}(\boldsymbol{\theta}_2 | \boldsymbol{\theta}_1)$  można pominąć  $\mathbf{z}'_t \mathbf{z}_t$ . Zatem w pierwszym kroku maksymalizowana jest funkcja  $L_{VT}(\boldsymbol{\theta}_1)$  względem  $\boldsymbol{\theta}_1$ , a następnie w drugim kroku  $L_{CT}(\boldsymbol{\theta}_2 | \boldsymbol{\theta}_1)$  względem  $\boldsymbol{\theta}_2$  pod warunkiem, że znane są szacunki parametrów  $\boldsymbol{\theta}_1$ , otrzymane w pierwszym kroku. Estymatory parametrów są wówczas zgodne (patrz Engle i Sheppard, 2001). Własność ta może być udowodniona przy spełnieniu następujących założeń:

E1) (i) Dla każdego  $\boldsymbol{\theta}_1 \in \Theta_1$  istnieje  $E[\log f_1(\boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\theta}_1)]$  i jest skończona dla  $t = 1, 2, \dots$

(ii)  $\{\log f_1(\boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\theta}_1)\}$  spełnia mocne jednostajne funkcyjne prawo wielkich liczb<sup>48</sup> (ULLN ang. *uniform law of large numbers*).

<sup>48</sup> Ścisłe rzecz biorąc, chodzi tu o funkcyjne mocne prawo wielkich liczb jednostajne względem supremum-normy na przestrzeni parametrów.

- (iii) Dla każdego  $\boldsymbol{\theta}' = (\boldsymbol{\theta}'_1, \boldsymbol{\theta}'_2) \in \Theta$ , gdzie  $\Theta = \Theta_1 \times \Theta_2$  istnieje  $E[\log f_1(\boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\theta}_1)]$  i jest skończona dla  $t = 1, 2, \dots$
- (iv)  $\{\log f_2(\boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\theta})\}$  spełnia mocne ULLN.
- E2) (i)  $\boldsymbol{\theta}_0' = (\boldsymbol{\theta}'_{1,0}, \boldsymbol{\theta}'_{2,0})$  jest jednoznacznie wyznaczonym wektorem parametrów, leżącym we wnętrzu  $\Theta = \Theta_1 \times \Theta_2$  jednostajnie względem  $t$ , zbiór  $\Theta$  jest zwarty, a  $\boldsymbol{\theta}_0$  spełnia warunki dodatniej określoności macierzy  $\mathbf{H}_t$  podane przez Engle'a i Shepparda (2001).
- (ii)  $\{\bar{L}_{VT}(\boldsymbol{\theta}_1) = E(T^{-1} \sum_{t=1}^T \log f_1(\boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\theta}_1))\}$  jest jednostajnie ograniczony na  $\Theta_1$ .
- (iii)  $\{\bar{L}_{CT}(\boldsymbol{\theta}) = E(T^{-1} \sum_{t=1}^T \log f_2(\boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\theta}))\}$  jest jednostajnie ograniczony na  $\Theta$ .
- E3) (i) Dla wszystkich  $\boldsymbol{\theta}_1 \in \Theta_1$ ,  $\nabla \bar{L}_{VT}(\boldsymbol{\theta}_1) = E(\nabla L_{VT}(\boldsymbol{\varepsilon}^T, \boldsymbol{\theta}_1)) < \infty$ , gdzie  $\boldsymbol{\varepsilon}^T = (\varepsilon_1, \varepsilon_2, \dots, \varepsilon_T)$ .
- (ii) Dla wszystkich  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ ,  $\nabla \bar{L}_{CT}(\boldsymbol{\theta}) = E(\nabla L_{CT}(\boldsymbol{\varepsilon}^T, \boldsymbol{\theta})) < \infty$ .
- E4) (i) Dla wszystkich  $\boldsymbol{\theta}_1 \in \Theta_1$ ,  $\nabla^2 \bar{L}_{VT}(\boldsymbol{\theta}_1) = E(\nabla^2 L_{VT}(\boldsymbol{\varepsilon}^T, \boldsymbol{\theta}_1)) < \infty$ .
- (ii) Rodzina funkcji  $E(\nabla^2 L_{VT}(\boldsymbol{\varepsilon}^T, \cdot))$ ,  $T = 1, 2, \dots$ , jest jednakowo ciągła na  $\Theta_1$  względem  $T$ .
- (iii)  $\{\nabla^2 \log f_1(\boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\theta}_1)\}$  spełnia mocne ULLN.
- (iv) Dla wszystkich  $\boldsymbol{\theta} \in \Theta$ ,  $\nabla^2 \bar{L}_{CT}(\boldsymbol{\theta}) = E(\nabla^2 L_{CT}(\boldsymbol{\varepsilon}^T, \boldsymbol{\theta})) < \infty$ .
- (v) Rodzina funkcji  $E(\nabla^2 L_{CT}(\boldsymbol{\varepsilon}^T, \cdot))$ ,  $T = 1, 2, \dots$ , jest jednakowo ciągła na  $\Theta$  względem  $T$ .
- (vi)  $\{\nabla^2 \log f_2(\boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\theta})\}$  spełnia mocne ULLN.
- E5) (i)  $\{\mathbf{A}_{11,T} = \nabla_{\boldsymbol{\theta}_1} \bar{L}_{VT}(\boldsymbol{\theta}_{1,0})\}$  jest ograniczony i jednostajnie ujemnie określony.
- (ii)  $\{\mathbf{A}_{22,T} = \nabla_{\boldsymbol{\theta}_2} \bar{L}_{CT}(\boldsymbol{\theta}_0)\}$  jest ograniczony i jednostajnie ujemnie określony.

Dwustopniowa estymacja parametrów wymaga modyfikacji formuły na macierz kowariancji parametrów  $\boldsymbol{\theta}_2$ . Dodatkowe założenie zostało przyjęte do dowodu asymptotycznej normalności estymatora:

- E6)  $\{T^{-1/2} \nabla'_{\boldsymbol{\theta}_1} \ln f_1(\boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\theta}_{1,0}), T^{-1/2} \nabla'_{\boldsymbol{\theta}_2} \ln f_2(\boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\theta}_{1,0}, \boldsymbol{\theta}_{2,0})\}$  spełnia warunki centralnego twierdzenia granicznego z macierzą kowariancji  $\mathbf{B}_{0T}$ , oraz  $\mathbf{B}_{0T}$  jest ograniczony i jednostajnie dodatnio określony.

Jeżeli spełnione są warunki E1–E6, to rozkład estymatora quasi-MNW parametrów  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_T$  jest asymptotycznie normalny, tj.  $\sqrt{T}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_T - \boldsymbol{\theta}_0) \rightarrow N(0, \mathbf{A}_0^{-1} \mathbf{B}_0 \mathbf{A}_0^{-1})$  dla  $T \rightarrow \infty$ , gdzie:

$$\mathbf{A}_0 = \begin{bmatrix} \nabla_{\boldsymbol{\theta}_1} \ln f_1(\boldsymbol{\theta}_{1,0}) & 0 \\ \nabla_{\boldsymbol{\theta}_1} \ln f_2(\boldsymbol{\theta}_0) & \nabla_{\boldsymbol{\theta}_2} \ln f_2(\boldsymbol{\theta}_0) \end{bmatrix},$$

$$\mathbf{B}_0 = \text{var} \left[ \sum_{t=1}^T \left\{ T^{-1/2} \nabla'_{\theta_1} \ln f_1(\boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\theta}_{1,0}), T^{-1/2} \nabla'_{\theta_2} \ln f_2(\boldsymbol{\varepsilon}_t, \boldsymbol{\theta}_{1,0}, \boldsymbol{\theta}_{2,0}) \right\} \right].$$

Estymatory parametrów  $\boldsymbol{\theta}_1$  i  $\boldsymbol{\theta}_2$ , otrzymane przez oddzielną maksymalizację  $L_{VT}(\boldsymbol{\theta}_1)$  i  $L_{CT}(\boldsymbol{\theta}_2|\boldsymbol{\theta}_1)$ , nie są najefektywniejsze. Jeżeli  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_* = \hat{\boldsymbol{\theta}}_{2S} + \hat{\mathbf{A}}_{00}^{-1} \nabla_0 \ln \hat{f}_2(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\theta}_{1,0}, \boldsymbol{\theta}_{2,0})$ , gdzie  $\hat{\boldsymbol{\theta}}_*$  oznacza estymator parametrów otrzymany przez jedną iterację algorytmu Newtona-Raphsona,  $\hat{\mathbf{A}}_{00}$  jest zgodnym estymatorem drugiej pochodnej  $L_{CT}$ , a  $\nabla_0 \ln \hat{f}_2(\boldsymbol{\varepsilon}, \boldsymbol{\theta}_{1,0}, \boldsymbol{\theta}_{2,0})$  jest zgodnym estymatorem gradienta funkcji  $L_{CT}$ , wówczas  $T^{1/2}(\hat{\boldsymbol{\theta}}_* - \boldsymbol{\theta}_0)$  ma ten sam rozkład graniczny co  $T^{1/2}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}_0)$ , gdzie  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  oznacza estymator parametrów przy estymacji jednostopniowej.

Znaczne uproszczenie funkcji wiarygodności można uzyskać przez przyjęcie założenia, że warunkowe współczynniki korelacji są równe dla wszystkich par szeregów. Takie podejście zaproponowali Engle i Kelly (2008) dla modelu DECO-DCC. Ciekawą propozycję estymacji parametrów modelu DCC, określoną mianem metody MacGyvera, przedstawił Engle (2007). W drugim kroku zamiast estymować parametry związane z korelacją jednocześnie dla wszystkich szeregów czasowych, zaproponował estymację dla wszystkich par szeregów, a następnie wyznaczenie median ocen parametrów. Taki sposób estymacji jest możliwy do zastosowania dla dowolnie dużej liczby szeregów czasowych. Dużym plusem takiego podejścia jest fakt, że długość szeregów czasowych nie musi być taka sama dla wszystkich badanych aktywów. Uzyskane w ten sposób estymatory są zgodne<sup>49</sup>, ale nie są asymptotycznie efektywne. Na razie nie jest możliwe wyznaczenie średnich błędów szacunku parametrów dla tej metody estymacji.

Parametry modelu CCC również mogą być oszacowane za pomocą metody dwustopniowej. W pierwszym kroku szacowane są parametry jednorównaniowych modeli GARCH, oddzielnie dla każdego aktywa, następnie w drugim kroku szacuje się parametry macierzy  $\boldsymbol{\Gamma}$  na podstawie standaryzowanych reszt  $\mathbf{z}_t = \mathbf{D}_t^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_t$  według formuły:

$$\boldsymbol{\Gamma} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{z}_t \mathbf{z}_t'. \quad (2.3.12)$$

Parametry diagonalnego modelu VECH można oszacować oddzielnie dla każdego równania. Estymuje się parametry jednorównaniowych modeli GARCH i ich odpowiedniki dla warunkowych kowariancji (patrz Silvennoinen i Teräsvirta, 2008).

<sup>49</sup> Pod warunkiem, że estymatory dwurównaniowych modeli DCC były zgodne.

Nakładane podczas estymacji restrykcje na parametry wielorównaniowych modeli GARCH, mające zapewnić dodatnią określoność warunkowej macierzy kowariancji, są często restrykcjami wystarczającymi, ale nie koniecznymi. Wyniki Nelsona i Cao (1992) nie zostały jeszcze rozszerzone na wielorównaniowe modele GARCH. Może się zatem zdarzyć, że nakładając restrykcje, odrzucamy prawdziwe wartości parametrów jako niedopuszczalne.

Engle i Mezrich (1996) zwracają uwagę, że można znacznie ograniczyć liczbę parametrów w wielorównaniowym modelu GARCH, wyrażając warunkową macierz kowariancji za pomocą bezwarunkowej macierzy kowariancji oraz innych parametrów. Procedura ta jest określana mianem celowania w wariancję (ang. *variance targeting*) i można ją stosować w przypadku procesów kowariancyjnie stacjonarnych. Za bezwarunkową macierz kowariancji należy przyjąć jej zgodny estymator. W ogólnym przypadku, czyli dla modelu VECH(1,1), macierz wyrazów wolnych jest równa:

$$\mathbf{W} = (\mathbf{I}_{N^*} - \mathbf{A}_1 - \mathbf{B}_1) \text{vech}(\mathbf{S}), \quad (2.3.13)$$

gdzie  $\hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t'$ ,  $N^* = N(N+1)/2$ .

Na przykład dla diagonalnego modelu BEKK(1,1) iloczyn macierzy wyrazów wolnych dany jest formułą:

$$\mathbf{CC}' = \mathbf{S} \otimes (\mathbf{ii}' - \mathbf{d}_1 \mathbf{d}_1' - \mathbf{e}_1 \mathbf{e}_1'), \quad (2.3.14)$$

gdzie  $\mathbf{i}$  jest kolumnowym wektorem o  $N$  składowych, przy czym każda z nich równa jest jedności. W modelu występuje wówczas tylko  $N(p+q)$  parametrów. Dla skalarno-diagonalnego modelu BEKK(1,1) iloczyn macierzy wyrazów wolnych określony jest jako:

$$\mathbf{CC}' = (1 - \alpha_1 - \beta_1) \mathbf{S}. \quad (2.3.15)$$

Estymacja upraszczającej parametryzacji modelu przebiega w dwóch krokach<sup>50</sup>. W pierwszym kroku estymuje się bezwarunkową macierz kowariancji  $\hat{\mathbf{S}} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t'$ , a uzyskane szacunki podstawia się do estymacji wielorównaniowego modelu GARCH w drugim kroku. Macierz kowariancji estymatora parametrów powinna zostać poprawiona, tak aby uwzględnić niepewność

<sup>50</sup> Dla modelu DCC estymacja będzie wówczas przebiegała w trzech krokach.

związaną z szacunkiem w pierwszym kroku<sup>51</sup>. Jeżeli proces  $\epsilon_t$  nie jest kowariancyjnie stacjonarny, to przyjęta parametryzacja modelu będzie błędna.

Alternatywne rozwiązanie, mające również na celu złagodzenie problemów związanych z dużą liczbą parametrów dla większej liczby aktywów, zaproponowali Ledoit, Santa-Clara i Wolf (2003). W podejściu określanym jako elastyczny model GARCH, zamiast szacować wszystkie parametry w modelu DVECH łącznie, estymacja jest przeprowadzana najpierw dla modeli jednorównaniowych w celu otrzymania szacunków warunkowych wariancji, następnie, przyjmując warunkowe wariancje jako dane, estymuje się parametry dotyczące warunkowych kowariancji w modelach dwurównaniowych. W kolejnym kroku uzyskane szacunki podlegają transformacji<sup>52</sup> do pełnego modelu, tak aby zapewnić dodatnią półokreśloność warunkowej macierzy kowariancji.

Estymacja parametrów najbardziej złożonych specyfikacji wielorównaniowego modelu GARCH, jak na przykład modelu BEKK, jest trudna i czasochłonna już nawet dla niedużej liczby szeregów. Trudność wynika przede wszystkim z dużej liczby parametrów, jakie należy oszacować. Często funkcja wiarygodności jest płaska wokół maksimum, mogą występować maksima lokalne, czasami natomiast numeryczna procedura estymacyjna jest wrażliwa na przyjęte wartości startowe. W celu ułatwienia estymacji, przy niektórych specyfikacjach modeli, stosuje się przeskalowanie danych, dzięki czemu można szybciej osiągnąć zbieżność bez konieczności posiadania „dobrych” wartości startowych. Ogromnie pomocne może być badanie funkcji wiarygodności przez losowe przeszukiwanie przestrzeni parametrów.

W większości podstawowych pakietów statystycznych i ekonometrycznych nie jest jeszcze możliwa estymacja parametrów wielorównaniowych modeli GARCH. W nielicznych programach, takich jak RATS i SAS oraz EViews, można estymować kilka podstawowych parametryzacji. W językach programowania Gauss, Matlab, S-PLUS i Ox dostępne są nakładki pozwalające na estymację wybranych specyfikacji modeli. Parametry wszystkich modeli stosowanych w badaniach w niniejszej książce były estymowane w Gaussie z wykorzystaniem kodów źródłowych napisanych przez autora.

<sup>51</sup> Co może być zadaniem trudnym na podstawie klasycznych metod estymacji.

<sup>52</sup> Transformacja polega na minimalizacji różnic normy Frobeniusa między odpowiednimi macierzami.

## 2.4. TESTY DIAGNOSTYCZNE

Testy specyfikacji dotyczące wielorównaniowych modeli GARCH można podzielić na dwie grupy. Pierwsza grupa to testy jednowymiarowe, stosowane oddzielnie dla każdego spośród badanych szeregów. Zostały one omówione w rozdziale pierwszym. Drugą grupę stanowią testy wielowymiarowe, stosowane do badanych szeregów łącznie. Jednowymiarowe testy dostarczają pewnych wskazówek, jednakże jednoczesna korelacja składników losowych powoduje, że statystyki szacowane dla pojedynczych równań nie są niezależne. Poniżej przedstawiono wybrane testy dotyczące wielorównaniowych modeli GARCH. W osobnych punktach omówiono ważne z praktycznego punktu widzenia testy stałości współczynników korelacji oraz testy przyczynowości w wariancji. Testy wykorzystywane w określonych zastosowaniach finansowych zostały również przedstawione w dalszych rozdziałach pracy.

Jeżeli warunkowy wielowymiarowy rozkład  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  jest normalny:

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t \mid \psi_{t-1} \sim N(0, \mathbf{H}_t) \quad (2.4.1)$$

i specyfikacja modelu jest prawidłowa, wówczas dla standaryzowanych reszt  $\mathbf{z}_t = \mathbf{H}_t^{-1/2} \boldsymbol{\varepsilon}_t$  powinny zachodzić następujące warunki (patrz Ding i Engle, 2001):

$$E(\mathbf{z}_t \mathbf{z}_t') = \mathbf{I}_N, \quad (2.4.2)$$

$$\text{Cov}(z_{it}^2 z_{jt}^2) = 0 \quad \text{dla } i \neq j, \quad (2.4.3)$$

$$\text{Cov}(z_{it}^2 z_{jt-k}^2) = 0 \quad \text{dla } k > 0. \quad (2.4.4)$$

Weryfikując warunki równania (2.4.2), można wykryć błędną specyfikację równań dla warunkowych wartości oczekiwanych lub kowariancji. Testowanie równania (2.4.3) pozwala na weryfikację hipotezy o warunkowej normalności rozkładu<sup>53</sup>. Testowanie równania (2.4.4) ma na celu sprawdzenie poprawności specyfikacji  $\mathbf{H}_t$  (niezależnie od prawdziwości założenia o warunkowym rozkładzie  $\mathbf{z}_t$ ). Test równania (2.4.4) dla modelu warunkowo homoskedastycznego (w  $H_0$ ) może być traktowany jako wielowymiarowy test na występowanie efektu ARCH. W celu wykrycia błędnych specyfikacji wszyst-

<sup>53</sup> Na przykład, jeżeli w (2.4.1) warunkowy wielowymiarowy rozkład  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  jest rozkładem t-Studenta, to  $E(z_t z_t') = [v/(v-2)]\mathbf{I}_N$  oraz  $\text{Cov}(z_{it}^2 z_{jt}^2) = 2v^2/[(v-4)(v-2)^2]$  dla  $i \neq j$ .

kie testy powinny być przeprowadzane równoległe. Warunki (2.4.2–2.4.4) mogą być weryfikowane za pomocą testu dla warunkowych momentów (Ney, 1985; Tauchen, 1985). Na przykład warunki (2.4.3) można zapisać, jako  $E(\mathbf{m}_t) = 0$ , gdzie  $\mathbf{m}_t$  jest wektorem o wymiarach  $N(N-1)/2 \times 1$ , którego  $i$ -tym elementem jest  $(e_{it}^2 - 1)(e_{jt}^2 - 1)$ , dla  $i \neq j$ . Hipoteza jest weryfikowana na podstawie statystyki  $d_T = TR^2$ , gdzie  $R^2$  jest współczynnikiem determinacji dla równania regresji stałej równej jeden względem  $[\mathbf{m}'_t, \mathbf{s}'_t]$ ,  $\mathbf{s}_t$  jest to wektor pierwszych pochodnych cząstkowych logarytmu funkcji wiarygodności o wymiarach  $l \times 1$  zakładający, że określone warunki są spełnione. Statystyka  $d_T$  ma asymptotyczny rozkład  $\chi^2$  o  $N(N+1)/2$  stopniach swobody. Inne specyfikacje testu można konstruować przez dodanie warunków dotyczących odpowiednich momentów (patrz Ding i Engle, 2001).

Zupełnie inne podejście polega na sprawdzeniu ogólnej adekwatności modelu, to jest zgodności zakładanej i „prawdziwej” funkcji gęstości, czyli  $f(\mathbf{y}_t | \boldsymbol{\theta}, \boldsymbol{\eta}, \psi_{t-1})$  i  $p(\mathbf{y}_t | \boldsymbol{\theta}_0, \boldsymbol{\eta}_0, \psi_{t-1})$  (dla wszystkich  $t$ ). Diebold, Hahn i Tay (1999) proponują procedurę bazującą na gęstości predyktywnej.

Tse (2002) dzieli testy diagnostyczne dla warunkowo heteroskedastycznych modeli na trzy kategorie: statystyki łączne (*portmanteau statistics*), testy mnożnika Lagrange’a oraz testy oparte na resztach modelu. Statystyki łączne to testy typu Boxa, Pierce’a i Ljunga. Są one najczęściej stosowane jako testy występowania efektu ARCH (zostały przedstawione w punkcie 2.4.1). Bollerslev, Engle i Wooldridge (1988) oraz Engle i Kroner (1995) proponują testy mnożnika Lagrange’a dla wielorównaniowych modeli GARCH. Z kolei Sentana i Fiorentini (2001) przedstawiają wstępny test na występowanie efektu ARCH dla czynników ukrytych. Do testów LM można również zaliczyć test Tse (2000) na stałość warunkowych współczynników korelacji (opisany w punkcie 2.4.2).

Testy oparte na resztach modelu polegają na badaniu istotności parametrów w równaniu regresji iloczynów (lub kwadratów) standaryzowanych reszt względem określonych zmiennych objaśniających<sup>54</sup>. Tse (2002) proponuje estymację następujących równań regresji:

$$\hat{u}_{it}^2 - 1 = \hat{\mathbf{d}}'_{it} \boldsymbol{\delta}_i + \varsigma_{it} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.4.5)$$

$$\hat{u}_{it} \hat{u}_{jt} - \hat{\rho}_{ijt} = \hat{\mathbf{d}}'_{ijt} \boldsymbol{\delta}_{ij} + \varsigma_{ijt} \quad \text{dla } 1 \leq i < j \leq N, \quad (2.4.6)$$

<sup>54</sup> Zauważmy, że zmienne objaśniające zależą od oszacowanych wcześniej parametrów modelu.



gdzie  $\hat{u}_{it} = \hat{\varepsilon}_{it} / \hat{h}_{it}^{1/2}$ ,  $\hat{\rho}_{ijt} = \hat{h}_{ijt} / (\hat{h}_{it}\hat{h}_{jt})^{1/2}$ ,  $\hat{\mathbf{d}}_{it}$  i  $\hat{\mathbf{d}}_{ijt}$  są szacunkami odpowiednio  $\mathbf{d}_{it} = (u_{it-1}^2, u_{it-2}^2, \dots, u_{it-M}^2)'$  i  $\mathbf{d}_{ijt} = (u_{it-1}u_{jt-1}, u_{it-2}u_{jt-2}, \dots, u_{it-M}u_{jt-M})'$ ,  $\hat{\boldsymbol{\delta}}_i$  oraz  $\hat{\boldsymbol{\delta}}_{ij}$  są wektorami parametrów.

Jako zmienne objaśniające mogą być wybrane inne zmienne, w zależności od celu konkretnej analizy. Jeżeli  $\hat{\boldsymbol{\delta}}_i$  (estymator MNK) i  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  (estymator MNW) mają asymptotyczny rozkład normalny oraz  $\hat{\boldsymbol{\theta}}$  jest asymptotycznie efektywne, szacunki MNW parametrów  $\boldsymbol{\theta}$  spełniają warunek  $\sqrt{T}(\hat{\boldsymbol{\theta}} - \boldsymbol{\theta}) \rightarrow N(0, \mathbf{K})$  oraz przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej, przyjmującej prawidłową specyfikację równań dla warunkowych wartości oczekiwanych i warunkowej macierzy kowariancji, statystyki  $T\hat{\boldsymbol{\delta}}_i' \hat{\mathbf{L}}_i \hat{\boldsymbol{\Omega}}_i^{-1} \hat{\mathbf{L}}_i \hat{\boldsymbol{\delta}}_i$  oraz  $T\hat{\boldsymbol{\delta}}_{ij}' \hat{\mathbf{L}}_{ij} \hat{\boldsymbol{\Omega}}_{ij}^{-1} \hat{\mathbf{L}}_{ij} \hat{\boldsymbol{\delta}}_{ij}$  mają asymptotyczny rozkład  $\chi^2$  o  $M$  stopniach swobody, gdzie

$$\mathbf{L}_i = \text{plim} \left( \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{d}_{it} \mathbf{d}_{it}' \right), \quad \mathbf{L}_{ij} = \text{plim} \left( \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{d}_{ijt} \mathbf{d}_{ijt}' \right), \quad (2.4.7)$$

$$\boldsymbol{\Omega}_i = E[(u_{it}^2 - 1)^2] \mathbf{L}_i - \mathbf{Q}_i \mathbf{K} \mathbf{Q}_i', \quad \boldsymbol{\Omega}_{ij} = E[(u_{it}u_{jt} - 1)^2] \mathbf{L}_{ij} - \mathbf{Q}_{ij} \mathbf{K} \mathbf{Q}_{ij}', \quad (2.4.8)$$

$$\mathbf{Q}_i = \text{plim} \left( \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{d}_{it} \frac{\partial u_{it}^2}{\partial \boldsymbol{\theta}'} \right), \quad \mathbf{Q}_{ij} = \text{plim} \left( \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \mathbf{d}_{ijt} \frac{\partial (u_{it}u_{jt} - \rho_{ijt})}{\partial \boldsymbol{\theta}'} \right). \quad (2.4.9)$$

Oczywiście w powyższych formułach odpowiednie elementy są szacowane na podstawie próby. Zaletą testów opartych na resztach modelu jest możliwość koncentracji na wybranych, przypuszczalnych przyczynach błędnej specyfikacji modelu.

W większości testów zakłada się warunkową normalność. Wrażliwość poszczególnych testów na odstępstwa od normalności rozkładu jest różna. Niektóre testy są niewrażliwe na występowanie rozkładów asymetrycznych o grubych ogonach, wrażliwość innych testów zależy od siły asymetrii oraz grubości ogonów rozkładów.

### 2.4.1. WIELOWYMIAROWE TESTY NA WYSTĘPOWANIE EFEKTU ARCH

Hosking (1980) przedstawia wielowymiarową wersję testu Ljunga-Boxa. Statystyka ma postać:

$$HM(M) = T^2 \sum_{j=1}^M (T-j)^{-1} \text{tr} \{ \mathbf{C}_{Y_t}^{-1}(0) \mathbf{C}_{Y_t}(j) \mathbf{C}_{Y_t}^{-1}(0) \mathbf{C}'_{Y_t}(j) \}, \quad (2.4.10)$$

gdzie  $\mathbf{Y}_t = \text{vech}(\mathbf{y}_t \mathbf{y}'_t)$ ,  $\mathbf{C}_{Y_t}(j)$  jest to szacunek macierzy autokowariancji rzędu  $j$ :

$$\mathbf{C}_{Y_t}(j) = T^{-1} \sum_{t=j+1}^n (\mathbf{Y}_t - \bar{\mathbf{Y}})(\mathbf{Y}_t - \bar{\mathbf{Y}})' \quad \text{dla } j = 0, 1, \dots, T-1. \quad (2.4.11)$$

Przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej o braku efektu ARCH statystyka  $HM(M)$  ma asymptotyczny rozkład  $\chi^2$  o  $K^2 M$  stopniach swobody. Duchesne i Lalancette (2003) uogólnili powyższą statystykę, przy wykorzystaniu analizy spektralnej, zwiększając asymptotyczną moc testu.

Ling i Li (1997) zaproponowali alternatywną statystykę łączną:

$$LL(M) = T \sum_{j=1}^M \tilde{R}^2(j), \quad (2.4.12)$$

$$\text{gdzie } \tilde{R}(h) = \frac{\sum_{t=h+1}^T (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_t \hat{\mathbf{H}}_t^{-1} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t - N)(\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_{t-h} \hat{\mathbf{H}}_{t-h}^{-1} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_{t-h} - N)}{\sum_{t=h+1}^T (\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_t \hat{\mathbf{H}}_t^{-1} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t - N)^2}.$$

Przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej o stałości warunkowej wariancji statystyka  $LL(M)$  ma asymptotyczny rozkład  $\chi^2$  o  $M$  stopniach swobody. Własności asymptotyczne testu nie zależą od specyfikacji warunkowego rozkładu, jednakże moc testu może być zmniejszona ze względu na stratę informacji wynikającą z transformacji reszt  $\hat{\boldsymbol{\varepsilon}}'_t \hat{\mathbf{H}}_t^{-1} \hat{\boldsymbol{\varepsilon}}_t$ . Duchesne i Lalancette (2003) twierdzą, że przy nieprawidłowym wyborze wartości  $M$  test może być nieefektywny, dlatego proponują mocniejszą wersję testu opartą na funkcji gęstości spektralnej. Test wykorzystujący również funkcję gęstości spektralnej przedstawili Hong i Shehadeh (1999).

### 2.4.2. TESTY STAŁOŚCI WSPÓŁCZYNNIKÓW KORELACJI W WIELORÓWNANIOWYM MODELU GARCH

Współczynniki korelacji pomiędzy procesami odgrywają istotną rolę w wielu analizach finansowych. Wystarczy choćby wspomnieć o analizie portfelowej, zarządzaniu ryzykiem czy wycenie portfela aktywów. Przy wyborze portfela ważne są nie tylko stopy zwrotu i zmienności, ale również współczynniki korelacji pomiędzy aktywami. W ostatnich kilkunastu latach zauważono, że współczynniki korelacji pomiędzy różnymi procesami finansowymi zmieniają się w czasie. Wzrost współczynników korelacji występuje najczęściej w okresach wzrostu zmienności i jest najbardziej widoczny w okresach kryzysów finansowych. Istnieją różne metody badania stałości korelacji. W pracy przedstawiono testy dotyczące wielorównaniowego modelu GARCH.

Ze względu na stosunkowo prostą postać macierzy warunkowych kowariancji oraz łatwość estymacji, model stałych warunkowych korelacji znalazł zastosowanie w wielu analizach empirycznych. Jednakże założenie o stałości współczynników korelacji jest najczęściej przyjmowane z góry i rzadko bywa testowane. Tymczasem niespełnienie powyższego założenia może prowadzić do błędów poznawczych i mieć istotny wpływ na wyniki analiz finansowych. Również w przypadku stosowania modeli uwzględniających zmieniające się w czasie warunkowe współczynniki korelacji warto rozważyć prostszą specyfikację modelu.

Testowanie stałości warunkowych współczynników korelacji dla procesów ze zmiennymi wariancjami jest trudne, ponieważ błędna parametryzacja równań dla wariancji może doprowadzić do podjęcia błędnych decyzji. Prace dotyczące stałości korelacji w wielorównaniowym modelu GARCH można podzielić na dwie grupy<sup>55</sup>. Pierwsza obejmuje wszystkie analizy dotyczące testowania stałości korelacji warunkowych przy założeniu, że bezwarunkowe wariancje badanych procesów są stałe. Druga grupa to prace, w których bada się stałość korelacji bezwarunkowych. W analizach tych przyjmuje się założenie, że wariancje bezwarunkowe procesów mogą zmieniać się w czasie. Ramchand i Susmel (1998) wprowadzili dwurównaniowy model pozwalający testować stałość korelacji bezwarunkowych. W modelu tym zakłada się, że w każdym z reżimów korelacja jest stała, natomiast różnice mogą występować pomiędzy reżimami. Reżimy są określane na podstawie zmienności wybranego procesu.

<sup>55</sup> Patrz Fiszeder (2003a).

Testy stałości warunkowych współczynników korelacji w wielorównaniowym modelu GARCH można podzielić na dwie grupy. Pierwsza grupa obejmuje wszystkie analizy, w których do podjęcia decyzji konieczna jest estymacja wielorównaniowego modelu GARCH, uwzględniającego zmieniające się w czasie warunkowe współczynniki korelacji. Procedura testowania stałości współczynników korelacji jest dwustopniowa. Najpierw szacowany jest wielorównaniowy model GARCH, uwzględniający zmieniające się w czasie warunkowe korelacje lub warunkowe kowariancje, a następnie, na podstawie otrzymanego modelu, szacowane są współczynniki korelacji, które poddaje się testowaniu. Baillie i Myers (1991), obliczając optymalny wskaźnik zabezpieczenia przy zastosowaniu kontraktów terminowych na towary, szacują dwurównaniowe diagonalne modele VECH. Dla wyliczonych w ten sposób wskaźników zabezpieczenia testują występowanie pierwiastków jednostkowych (w analogiczny sposób można by zbadać stałość współczynników korelacji). Ragunathan i Mitchell (1997) wyliczają zmieniające się w czasie współczynniki korelacji na podstawie diagonalnej postaci modelu VECH, a następnie testują występowanie trendu liniowego, szacując równanie regresji względem stałej i zmiennej czasowej  $t$ . Należy jednak zauważyć, że wyniki tak przeprowadzonych testów zależą w dużym stopniu od przyjętej w pierwszym kroku postaci wielorównaniowego modelu GARCH.

Stażość warunkowych współczynników korelacji może być również testowana pośrednio. Można dokonać wyboru między dwiema postaciami wielorównaniowych modeli GARCH: modelem zakładającym stałość warunkowych korelacji a modelem pozwalającym uwzględnić zmieniające się w czasie warunkowe korelacje. Longin i Solnik (1995) wprowadzają do modelu stałych warunkowych korelacji trend:

$$h_{ijt} = (\gamma_0 + \gamma_1 t) \sqrt{h_{it}} \sqrt{h_{jt}}, \quad (2.4.13)$$

a następnie, stosując test ilorazu wiarygodności, dokonują wyboru pomiędzy rozszerzonym modelem a modelem stałych warunkowych korelacji. Osiewalski i Pipień (2001, 2004a, b, 2005) dokonują estymacji i porównania różnych postaci wielorównaniowych modeli GARCH, stosując metody bayesowskie. Porównują oni prawdopodobieństwa a posteriori dla modeli o stałych i zmiennych współczynnikach korelacji.

Tse i Tsui (2002) testują stałość warunkowych współczynników korelacji bezpośrednio na podstawie sformułowanego przez nich modelu ze zmiennymi współczynnikami korelacji. Model stałych współczynników korelacji jest za-

gnieżdzony w modelu ze zmiennymi współczynnikami korelacji, dlatego weryfikując hipotezę  $\theta_1 = \theta_2 = 0$ , można testować założenie o stałości warunkowych współczynników korelacji.

Druga grupa testów stałości korelacji warunkowych to analizy, które nie wymagają estymacji modeli o zmieniających się współczynnikach korelacji, a decyzja podejmowana jest na podstawie statystyk obliczonych przy wykorzystaniu modelu stałych warunkowych współczynników korelacji. Poniżej omówiono cztery tego typu testy.

### Test Bollersleva

Bollerslev (1990) jako pierwszy zaproponował test na stałość korelacji warunkowych w wielorównaniowym modelu GARCH. Test jest oparty na statystyce Ljunga-Boxa, obliczonej dla iloczynów standaryzowanych reszt z poszczególnych równań modelu. Wartości krytyczne są odczytywane z rozkładu  $\chi^2$ . Li i Mak (1994) zwracają jednakże uwagę, że powyższa statystyka nie jest asymptotycznie zbieżna do rozkładu  $\chi^2$ , zatem przybliżenie rozkładem  $\chi^2$  jest nieodpowiednie. Poza tym test zaproponowany przez Bollersleva (1990) weryfikuje hipotezę o braku korelacji między  $\rho_t$  a  $\rho_{t-1}, \rho_{t-2}, \dots$  (gdzie  $\rho_t$  oznacza warunkowy współczynnik korelacji), a to nie gwarantuje stałości warunkowych współczynników korelacji (patrz Bera i Kim, 2002).

### Test Bery i Kima

Bera i Kim (2002) przedstawili test na stałość warunkowych korelacji w dwurównaniowym modelu GARCH. Niech  $\hat{\rho}$  oznacza ocenę współczynnika korelacji w modelu stałych warunkowych współczynników korelacji, uzyskaną metodą największej wiarygodności, a  $\hat{z}_{it}$  (dla  $i = 1, 2$ ) – standaryzowane reszty, obliczone na podstawie tego modelu. Statystyka  $IM$  (ang. *information matrix*) jest szacowana według następującej formuły:

$$IM = \frac{[\sum_{t=1}^T (\xi_{1t}^2 \xi_{2t}^2 - 1 - 2\hat{\rho}^2)]^2}{4 T (1 + 4\hat{\rho}^2 + \hat{\rho}^4)}, \quad (2.4.14)$$

gdzie  $\xi_{1t} = \frac{\hat{z}_{1t} - \hat{\rho} \hat{z}_{2t}}{\sqrt{1 - \hat{\rho}^2}}$  oraz  $\xi_{2t} = \frac{\hat{z}_{2t} - \hat{\rho} \hat{z}_{1t}}{\sqrt{1 - \hat{\rho}^2}}$ .

Zakładając, że  $\mathbf{z}_t$  ma rozkład normalny oraz prawdziwa jest hipoteza zerowa (hipoteza o stałości korelacji), statystyka  $IM$  ma asymptotyczny rozkład  $\chi^2$  o jednym stopniu swobody. Wyniki testu są wrażliwe na grube ogo-

ny rozkładu warunkowego, dlatego w przypadku leptokurtycznych rozkładów warunkowych należy korzystać ze skorygowanej statystyki, odpornej na odchylenia od rozkładu normalnego:

$$IM_s = \frac{\left[ \sum_{t=1}^T \eta_t \right]^2}{\sum_{t=1}^T (\eta_t - \bar{\eta})^2}, \quad (2.4.15)$$

gdzie  $\eta_t = \xi_{1t}\xi_{2t} - 1 - 2\hat{\sigma}^2$  oraz  $\bar{\eta} = \frac{1}{T} \sum_{t=1}^T \eta_t$ .

Test Bery i Kima jest testem typu macierzy informacji, zatem obok stałości warunkowych współczynników korelacji, weryfikuje jednocześnie inne cechy modelu.

### Test Tse

Kolejny test stałości korelacji warunkowej został zaproponowany przez Tse (2000). Konstrukcja testu oparta jest na statystyce  $LM$ . Stałość korelacji może być testowana przez badanie hipotezy  $H_0 : \delta_{ij} = 0$  (dla  $1 \leq i < j \leq N$ ), gdzie  $\delta_{ij}$  są parametrami w rozszerzonym modelu stałych warunkowych współczynników korelacji:

$$h_{it} = \alpha_{i0} + \alpha_{i1}\varepsilon_{it-1}^2 + \beta_{i1}h_{it-1} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, N, \quad (2.4.16)$$

$$h_{ijt} = \rho_{ijt} \sqrt{h_{it}} \sqrt{h_{jt}}, \quad (2.4.17)$$

$$\rho_{ijt} = \rho_{ij} + \delta_{ij} \varepsilon_{it-1} \varepsilon_{jt-1} \quad \text{dla } 1 \leq i < j \leq N. \quad (2.4.18)$$

W równaniu (2.4.16) założono, że wariancje warunkowe są opisane przez modele GARCH(1,1), jednakże cała procedura testu jest dalej rozszerzona na ogólny przypadek modelu GARCH( $p, q$ ). Oczywiście istnieje problem restrykcji, jakie muszą być nałożone na parametry  $\delta_{ij}$ , aby zapewnić dodatnią określoność warunkowej macierzy kowariancji oraz  $\rho_{ijt} \in (-1, 1)$  dla każdego  $t$ . Oznaczmy parametry modelu jako  $\boldsymbol{\theta} = (\alpha_{10}, \alpha_{11}, \beta_{11}, \dots, \alpha_{N0}, \alpha_{N1}, \beta_{N1}, \rho_{12}, \dots, \rho_{N-1, N}, \delta_{12}, \dots, \delta_{N-1, N})'$ . W rozszerzonym modelu ze zmieniającymi się w czasie współczynnikami korelacji występuje  $P = N^2 + 2N$  parametrów. Liczba niezależnych restrykcji wynosi zatem  $M = N(N-1)/2$ . Jeżeli  $\mathbf{s} = \partial L_T(\boldsymbol{\theta}) / \partial \boldsymbol{\theta}$  oznacza  $P$ -elementowy wektor pierwszych pochodnych cząstkowych logarytmu funkcji wiarygodności, a  $\mathbf{S}$  to macierz o wy-

miarach  $T \times P$ , w której wiersze są pochodnymi cząstkowymi  $\partial l_t(\boldsymbol{\theta}) / \partial \boldsymbol{\theta}'$  dla  $t = 1, \dots, T$ , to statystyka  $LM$  (oznaczana przez Tse jako  $LMC$ ) może być oszacowana według następujących formuł:

$$LMC = \hat{\mathbf{s}}'(\hat{\mathbf{S}}'\hat{\mathbf{S}})^{-1}\hat{\mathbf{s}} = \mathbf{1}'\hat{\mathbf{S}}(\hat{\mathbf{S}}'\hat{\mathbf{S}})^{-1}\hat{\mathbf{S}}'\mathbf{1}, \quad (2.4.19)$$

gdzie  $\hat{\mathbf{s}}$  i  $\hat{\mathbf{S}}$  są obliczane przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej,  $\mathbf{1}$  jest wektorem jedynek o wymiarach  $T \times 1$ .

Statystyka  $LMC$  ma asymptotyczny rozkład  $\chi^2$  o  $M$  stopniach swobody.

Wprowadzając następujące oznaczenia:

$$d_{it} = \frac{\partial h_{it}}{\partial \alpha_{i0}}, \quad e_{it} = \frac{\partial h_{it}}{\partial \alpha_{i1}}, \quad f_{it} = \frac{\partial h_{it}}{\partial \beta_{i1}}, \quad (2.4.20)$$

pochodne cząstkowe  $h_{it}$  względem  $\alpha_{i0}$ ,  $\alpha_{i1}$  oraz  $\beta_{i1}$  dla  $i = 1, 2, \dots, N$  mogą być obliczone według następujących wzorów rekurencyjnych:

$$\begin{aligned} d_{it} &= 1 + \beta_{i1}d_{i,t-1}, \\ e_{it} &= \varepsilon_{i,t-1}^2 + \beta_{i1}e_{i,t-1}, \\ f_{it} &= h_{i,t-1} + \beta_{i1}f_{i,t-1}, \end{aligned} \quad (2.4.21)$$

gdzie  $d_{i1} = 1$ ,  $e_{i1} = \varepsilon_{i0}^2$  oraz  $f_{i1} = h_{i0}$ .

Pochodne cząstkowe logarytmu funkcji gęstości dla  $t$ -tej obserwacji dane są następującymi wzorami:

$$\begin{aligned} \frac{\partial l_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_{i0}} &= \frac{(z_{it}^* z_{it} - 1)d_{it}}{2h_{it}}, \\ \frac{\partial l_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \alpha_{i1}} &= \frac{(z_{it}^* z_{it} - 1)e_{it}}{2h_{it}}, \\ \frac{\partial l_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \beta_{i1}} &= \frac{(z_{it}^* z_{it} - 1)f_{it}}{2h_{it}}, \\ \frac{\partial l_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \rho_{ij}} &= z_{it}^* z_{jt}^* - \rho_{ij}^{ij}, \end{aligned} \quad (2.4.22)$$

$$\frac{\partial l_t(\boldsymbol{\theta})}{\partial \delta_{ij}} = (z_{it}^* z_{jt}^* - \rho_t^{ij}) \varepsilon_{it-1} \varepsilon_{jt-1},$$

gdzie  $\mathbf{z}_t^* = (z_{1t}^*, \dots, z_{Nt}^*)' = \Gamma_t^{-1} \mathbf{z}_t$  oraz  $\Gamma_t^{-1} = \{\rho_t^{ij}\}$ . Jeżeli prawdziwa jest hipoteza zerowa, to  $\Gamma_t = \Gamma$  dla każdego  $t$ , a zatem  $\mathbf{z}_t^* = \Gamma^{-1} \mathbf{z}_t$  oraz  $\rho_t^{ij} = \rho^{ij}$ . W tym przypadku  $\mathbf{z}_t$  są standaryzowanymi resztami obliczonymi na podstawie modelu stałych warunkowych współczynników korelacji.

Jeżeli wariancje warunkowe byłyby opisane przez model GARCH( $p, q$ ), wówczas pochodne cząstkowe  $h_{it}$  względem  $\alpha_{i0}, \alpha_{ik}$  oraz  $\beta_{ih}$  mogą być obliczone według następujących wzorów rekurencyjnych:

$$\begin{aligned} d_{it} &= 1 + \sum_{h=1}^p \beta_{ih} d_{i,t-h}, \\ e_{ikt} &= \varepsilon_{i,t-k}^2 + \sum_{h=1}^p \beta_{ih} e_{ik,t-h}, \\ f_{iht} &= h_{i,t-h} + \sum_{h=1}^p \beta_{ih} f_{ih,t-h}, \end{aligned} \tag{2.4.23}$$

gdzie  $d_{it} = \partial h_{it} / \alpha_{i0}$ ,  $e_{ikt} = \partial h_{it} / \alpha_{ik}$  oraz  $f_{iht} = \partial h_{it} / \beta_{ih}$ . Pochodne cząstkowe  $l_t$  względem  $\alpha_{i0}, \alpha_{ik}$  oraz  $\beta_{ih}$  dane są wzorami (2.4.22), z tym że  $e_{it}$  oraz  $f_{it}$  należy zastąpić odpowiednio  $e_{ikt}$  oraz  $f_{iht}$ .

Jeżeli średnie warunkowe  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  są różne od zera, to macierz  $\mathbf{S}$  musi być rozszerzona o pochodne cząstkowe  $l_t$  względem parametrów występujących w równaniach dla średnich warunkowych. W przypadku gdy średnie warunkowe są funkcjami liniowymi ze względu na parametry, macierz informacji jest macierzą blokowo-diagonalną i statystyka *LMC* może być oszacowana tylko na podstawie parametrów występujących w równaniach dla wariancji warunkowych.

### Test Engle'a i Shepparda

W przypadku bardzo dużej liczby aktywów łatwiejszy do zastosowania może być test Engle'a i Shepparda (2001). Weryfikowana jest hipoteza  $H_0 : \mathbf{R}_t = \bar{\mathbf{R}}$  (dla  $t=1, 2, \dots, T$ ) wobec hipotezy alternatywnej  $H_1 : \text{vech}(\mathbf{R}_t) = \text{vech}(\bar{\mathbf{R}}) + \beta_1 \text{vech}(\mathbf{R}_{t-1}) + \dots + \beta_p \text{vech}(\mathbf{R}_{t-p})$ . Przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej wszystkie parametry w poniższym równaniu powinny być równe zeru:



$$\mathbf{Y}_t = \beta_0 + \beta_1 \mathbf{Y}_{t-1} + \beta_2 \mathbf{Y}_{t-2} + \dots + \beta_p \mathbf{Y}_{t-p} + \boldsymbol{\eta}_t, \quad (2.4.24)$$

gdzie  $\mathbf{Y}_t = \text{vech}^u [(\bar{\mathbf{R}}^{-1/2} \mathbf{D}_t^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_t)(\bar{\mathbf{R}}^{-1/2} \mathbf{D}_t^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_t)' - \mathbf{I}_N]$ ,  $\text{vech}^u$  oznacza modyfikację operatora  $\text{vech}$ , polegającą na wyborze tylko elementów poniżej przekątnej,  $\mathbf{D}_t = \text{diag}(h_{1t}^{1/2}, h_{2t}^{1/2}, \dots, h_{Nt}^{1/2})$ ,  $\bar{\mathbf{R}}$  jest macierzą korelacji dla standaryzowanych reszt.  $\bar{\mathbf{R}}^{-1/2} \mathbf{D}_t^{-1} \boldsymbol{\varepsilon}_t$  jest wektorem wspólnie standaryzowanych reszt (przy założeniu  $H_0$ ) o wymiarach  $N \times 1$ . Istotność parametrów w równaniu może być weryfikowana za pomocą statystyki:  $(\hat{\boldsymbol{\delta}} \mathbf{X}' \mathbf{X} \hat{\boldsymbol{\delta}}') / \hat{\sigma}^2$ , która jest asymptotycznie zbieżna do rozkładu  $\chi^2$  o  $s + 1$  stopniach swobody, gdzie  $\hat{\boldsymbol{\delta}}$  jest wektorem ocen parametrów równania (2.4.24), a  $\mathbf{X}$  macierzą wartości zmiennych objaśniających.

Test może być zastosowany dla standaryzowanych reszt na podstawie jednorównaniowych modeli GARCH, co powoduje, że jest łatwy w konstrukcji, nawet dla bardzo dużej liczby aktywów. Wadą natomiast jest niemożność rozróżnienia między zmieniającymi się warunkowymi współczynnikami korelacji a nieprawidłowymi specyfikacjami jednorównaniowych modeli wariancji warunkowych.

### 2.4.3. TESTY PRZYZYNOWOŚCI DLA WARIANCJI

Postępująca globalizacja, integracja oraz liberalizacja rynków finansowych, a także postęp technologiczny powodują coraz silniejsze powiązania między rynkami kapitałowymi całego świata. Coraz większą rolę w propagacji kryzysów i zjawisk szokowych zaczynają odgrywać powiązania przez rynki finansowe. Dlatego ważne z praktycznego punktu widzenia, szczególnie w kontekście efektu zarażania przedstawionego w podrozdziale 2.6, mogą być testy przyczynowości dla wariancji. Ponadto Vilasuso (2001) pokazuje, że przyczynowość w wariancji może wpływać na wyniki testowania przyczynowości dla średnich.

Poniżej przedstawiono dwa podejścia do testowania przyczynowości dla wariancji. Pierwsze podejście jest dwustopniowe i polega na wykorzystaniu jednorównaniowych modeli GARCH. Do tej grupy można zaliczyć test autorstwa Cheunga i Ng (1996). Drugie podejście polega na zastosowaniu wielorównaniowego modelu GARCH. Rozważane tutaj testy przyczynowości opierają się na koncepcji Grangera, którą należy rozumieć w kontekście korelacji między badanymi procesami ekonomicznymi. Decyzję o tym, czy badana relacja ma charakter przyczynowy podejmuje badacz na podstawie

wiedzy i doświadczenia<sup>56</sup>. Zatem rozpatrywane testy nie są w stanie wykryć siły sprawczej, mogą najwyżej weryfikować następstwo zdarzeń. Informacje o występowaniu przyczynowości w sensie Grangera mogą być jednakże z powodzeniem wykorzystane przy prognozowaniu, w tym przypadku przy prognozowaniu zmienności.

### Test Cheunga i Ng

Koncepcję przyczynowości dla drugich momentów można traktować jako naturalne rozszerzenie przyczynowości w sensie Grangera dla średnich. Niech  $X_t$  i  $Y_t$  oznaczają stacjonarne procesy stochastyczne i niech  $I_t$  i  $J_t$  oznaczają zbiory informacji określone jako  $I_t = \{X_{t-j}; j \geq 0\}$  i  $J_t = \{X_{t-j}, Y_{t-j}; j \geq 0\}$ .  $Y_t$  jest przyczyną  $X_t$  w wariancji, jeżeli:

$$E\{(X_{t+1} - \mu_{x,t+1})^2 | I_t\} \neq E\{(X_{t+1} - \mu_{x,t+1})^2 | J_t\}, \quad (2.4.25)$$

gdzie  $\mu_{x,t+1}$  jest warunkową wartością oczekiwaną zmiennej  $X_{t+1}$  (przy ustalonym  $I_t$ ).

Sprzężenie zwrotne występuje wtedy, gdy  $Y_t$  jest przyczyną  $X_t$ , a  $X_t$  jest przyczyną  $Y_t$ . Przyczynowość jednoczesna w wariancji występuje wtedy, gdy:

$$E\{(X_{t+1} - \mu_{x,t+1})^2 | J_t\} \neq E\{(X_{t+1} - \mu_{x,t+1})^2 | K_t\}, \quad (2.4.26)$$

gdzie  $K_t = \{J_t \cup Y_{t+1}\}$ .

Pojęcia (2.4.25) i (2.4.26) są zbyt ogólne, żeby można je testować empirycznie. Konieczne jest przyjęcie dodatkowych założeń dotyczących struktury procesów. Załóżmy, że

$$X_t = \mu_{X,t} + h_{X,t}^{0,5} \varepsilon_t, \quad (2.4.27)$$

$$Y_t = \mu_{Y,t} + h_{Y,t}^{0,5} \zeta_t, \quad (2.4.28)$$

gdzie  $\varepsilon_t$  i  $\zeta_t$  są niezależnymi procesami białoszumowymi o wariancji jeden. Przyjmijmy dodatkowo, że średnie warunkowe  $\mu_{X,t}$ ,  $\mu_{Y,t}$  są opisane równaniami ARMA, natomiast  $h_{X,t}$ ,  $h_{Y,t}$  – równaniami GARCH<sup>57</sup>. Niech  $U_t$  i  $V_t$

<sup>56</sup> Patrz Osińska (2006).

<sup>57</sup> Możliwe specyfikacje nie ograniczają się wyłącznie do modeli ARMA-GARCH (patrz Cheung i Ng, 1996).

oznaczają kwadraty standaryzowanych reszt:

$$U_t = (X_t - \mu_{X,t})^2 / h_{x,t} = \varepsilon_t^2, \quad (2.4.29)$$

$$V_t = (Y_t - \mu_{Y,t})^2 / h_{y,t} = \zeta_t^2, \quad (2.4.30)$$

natomiast  $\rho(k)$  jest współczynnikiem korelacji wzajemnej

$$\rho(k) = E(U_{t-k}, V_t) [E(U_t^2)E(V_t^2)]^{-0,5}, \quad k = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (2.4.31)$$

Hipoteza zerowa zakłada brak przyczynowości od opóźnienia  $j$  do  $k$ . Statystyka w postaci:

$$S = T \sum_{i=j}^k r(i)^2, \quad (2.4.32)$$

ma rozkład  $\chi^2$  o  $k - j + 1$  stopniach swobody.  $T$  oznacza liczebność próby. Jeżeli nie ma informacji a priori o kierunku przyczynowości, można przyjąć  $-j = k = m$ . Wartość parametru  $m$  powinna być na tyle duża, żeby objąć największe możliwe opóźnienie w związku przyczynowym. Dla jednokierunkowej zależności przyczynowej należy przyjąć  $j = 1$  oraz  $k = m$ .

Do zalet testu Cheunga i Ng można zaliczyć łatwość konstrukcji oraz odporność na asymetrię i leptokurtyczność warunkową rozkładów. Test posiada również kilka wad. Zależności przyczynowe dotyczące wartości oczekiwanych zmiennych mogą istotnie wpływać na wyniki testu. Wartość  $m$  musi być ustalona. W przypadku zbyt małej wartości  $m$  można pominąć istniejący związek przyczynowy o większym opóźnieniu, za duża wartość  $m$  powoduje natomiast obniżenie mocy testu. Hafner i Herwartz (2004) pokazują, że moc testu jest bardzo niska w przypadku, gdy hipoteza alternatywna zakłada wielorównaniowy proces GARCH. Hong (2001) zaproponował dwie modyfikacje testu polegające na nadaniu wyższych wag wartościom współczynników korelacji wzajemnej dla odstępów niższego rzędu, co może prowadzić do wzrostu mocy testu. Wyniki badania własności testów Cheunga i Ng (1996) oraz Honga (2001) można znaleźć w pracy Osińskiej (2008).

### Testy przyczynowości w wielorównaniowym modelu GARCH

Powstało kilka testów przyczynowości dla wariancji konstruowanych na podstawie wielorównaniowego modelu GARCH, między innymi w pracach Comte'a i Liebermana (2000), Caporale'a, Pittisa i Spagnolo (2002)

oraz Hafnera i Herwartza (2004). Testy te sprowadzają się do weryfikacji restrykcji, nałożonych na parametry wielorównaniowego modelu GARCH, najczęściej modelu BEKK<sup>58</sup>. Testy mają postać LR (patrz Caporale, Pittis i Spagnolo, 2002) lub Walda (patrz Hafner i Herwartz, 2004). Dla najprostszej postaci dwurównaniowego modelu BEKK (równie (2.1.14)) o wymiarach  $K = p = q = 1$  hipoteza o braku przyczynowości ma postać restrykcji, nałożonych na parametry w macierzach  $\mathbf{D}_1$  i  $\mathbf{E}_1$ , tak aby stały się one odpowiednio górnymi lub dolnymi macierzami trójkątnymi. W szczególności hipoteza  $H_0 : d_{21} = e_{21} = 0$  oznacza, że  $h_{2t}$  nie jest przyczyną  $h_{1t}$ , podczas gdy  $h_{1t}$  jest przyczyną  $h_{2t}$ . Testy oparte na wielorównaniowym modelu GARCH również nie są pozbawione wad. Przyjęcie błędnej parametryzacji modelu, np. pominięcie asymetrycznego wpływu dodatnich i ujemnych stóp zwrotu na wariancje i kowariancje, może powodować istotne zmniejszenie mocy testu.

## 2.5. ZALEŻNOŚCI MIĘDZY RYNKAMI AKCJI NA ŚWIECIE

Wielorównaniowe modele GARCH są stosowane do badania zależności między różnymi procesami finansowymi (np. cenami akcjami, wartościami indeksów, kursami walutowymi, stopami procentowymi, cenami surowców). Analizuje się między innymi: stałość korelacji między aktywami, wzrost korelacji w okresach wzrostu zmienności (patrz podrozdział 2.6), wzrost korelacji w długim okresie związany z globalizacją, liberalizacją rynków finansowych oraz postępem technologicznym, przepływ informacji między różnymi rynkami.

Wielorównaniowe modele GARCH są również stosowane do badania zależności między wariancjami aktywów. Analizy prowadzone na podstawie różnych postaci wielorównaniowych modeli GARCH pozwalają między innymi odpowiedzieć na pytania: czy zmienność jednego aktywów wpływa na zmienność innych aktywów; czy zmienność aktywów wpływa na zmienność innych aktywów bezpośrednio przez warunkową wariancję lub pośrednio przez warunkowe kowariancje; czy zjawisko szokowe wpływające na określony rynek (lub instrument finansowy) powoduje wzrost zmienności na innych rynkach (lub innych instrumentów finansowych) i w jakim stopniu; jeżeli tak, to czy pozytywne i negatywne zjawiska szokowe mają taki sam wpływ na zmienność aktywów?

<sup>58</sup> Hafner i Herwartz (2004) podają restrykcje również dla modelu VECM.

Bada się również wpływ tempa wzrostu i zmienności procesów ekonomicznych na stopy zwrotu aktywów oraz wpływ zmienności procesów ekonomicznych na zmienność aktywów finansowych (patrz punkt 5.3). W niektórych pracach analizuje się odwrotną zależność, tzn. wpływ zmienności rynków finansowych na zmienne makroekonomiczne, jak np. na wielkość eksportu czy tempo wzrostu produkcji (patrz Kim, 2000).

W podrozdziale 2.5 wielorównaniowe modele GARCH zastosowano do badania zależności między rynkami akcji. Zależności pomiędzy różnymi rynkami akcji na świecie były przedmiotem wielu analiz. Duża część z tych prac dotyczyła badania korelacji. Można analizować zarówno korelacje bezwarunkowe, jak i warunkowe. W większości prac dotyczących powiązań między rynkami akcji na świecie estymuje się bezwarunkowe współczynniki korelacji. Stałość korelacji bezwarunkowych może być testowana na podstawie szacunków współczynników korelacji, obliczonych dla różnych okresów. Wyniki tak przeprowadzonych badań są jednak niejednoznaczne. Na przykład Kaplanis (1988) nie udało się odrzucić hipotezy zerowej o stałości korelacji miesięcznych stóp zwrotu, obliczonych dla 10 wybranych rynków akcji w okresie 1967–1982. Podobne wyniki uzyskał Ratner (1992) dla okresu 1973–1989. Koch i Koch (1991) pokazują, że zależności pomiędzy rynkami były silniejsze w latach 1980 i 1987, w porównaniu z rokiem 1972. W wielu pracach dotyczących zależności pomiędzy rynkami akcji badano skutki krachu giełdowego w październiku 1987 roku. King i Wadhwani (1990), Bertero i Mayer (1990), Lee i Kim (1993), King, Sentana i Wadhwani (1994) pokazują, że po krachu giełdowym w Nowym Jorku nastąpił znaczny wzrost korelacji pomiędzy różnymi rynkami akcji na świecie.

Jedną z podstawowych własności finansowych szeregów stóp zwrotu jest zmienność warunkowych wariancji, dlatego też analiza korelacji powinna uwzględniać ten fakt empiryczny. Klaassen (1999) testuje stałość korelacji warunkowych na podstawie reszt z jednorównaniowych modeli AR-GARCH. Szacuje on równanie regresji dla współczynników korelacji obliczonych jako:  $\text{cov}(\hat{\varepsilon}_{it}, \hat{\varepsilon}_{jt}) / (h_{it} h_{jt})^{1/2}$  względem stałej oraz zmiennych czasowych  $t$  i  $t^2$ , gdzie:  $\hat{\varepsilon}_{it}$ ,  $\hat{\varepsilon}_{jt}$  oznaczają reszty z jednorównaniowych modeli AR-GARCH, a  $h_{it}$ ,  $h_{jt}$  – wariancje warunkowe, oszacowane na podstawie modeli GARCH. Wpływ zmiennych  $t$  i  $t^2$  na współczynniki korelacji bada za pomocą testu Walda. Tak skonstruowany test pozwala odrzucić hipotezę o stałości korelacji, ale tylko wówczas, gdy współczynniki korelacji zmieniają się zgodnie z funkcją liniową lub kwadratową.

Analiza zależności występujących pomiędzy rynkami akcji może być również przeprowadzona na podstawie wielorównaniowych modeli GARCH. Na przykład Hamao, Masulis i Ng (1990) pokazali występowanie silnych zależności dotyczących zarówno stóp zwrotu, jak i wariancji, pomiędzy rynkami akcji w Nowym Jorku, Tokio i Londynie. Z kolei Ramchand i Susmel (1998) zbadali korelacje pomiędzy tygodniowymi stopami zwrotu, obliczonymi dla rynku akcji w USA a stopami zwrotu, obliczonymi dla rynków w Japonii, Anglii, Niemczech i Kanadzie w okresie styczeń 1980 – styczeń 1990. Hipoteza zerowa o stałości korelacji została odrzucona w dwóch przypadkach: zależności pomiędzy rynkami w USA i Anglii oraz pomiędzy rynkami w USA i Kanadzie. Chesnay i Jondeau (2001) badali korelacje bezwarunkowe pomiędzy tygodniowymi stopami zwrotu indeksów S&P 500, DAX i FTSE 100 na podstawie trzyrównaniowego modelu MS-GARCH (ang. *Markov – switching GARCH*). W przeciwieństwie do pracy Ramchanda i Susmela (1998) reżimy zostały określone jednocześnie dla trzech indeksów. Wszystkie współczynniki korelacji, oszacowane dla reżimu o większej zmienności, były znacznie większe od korelacji uzyskanych dla reżimu o mniejszej zmienności.

W wielu pracach bada się również zależności między wariancjami stóp zwrotu na rynkach akcji na świecie. Badania z zastosowaniem modeli GARCH dotyczą zarówno jednorównaniowych, jak i wielorównaniowych modeli GARCH. Analizy przeprowadzane na podstawie jednorównaniowych modeli GARCH polegały najczęściej na modyfikacji równania dla wariancji warunkowej i wprowadzeniu dodatkowej zmiennej objaśniającej w postaci opóźnionych kwadratów (lub wartości bezwzględnych) stóp zwrotu (lub składników resztowych z modeli opisujących wewnętrzną strukturę) indeksów z innych rynków (patrz np. Susmel i Engle, 1994). Analizy z zastosowaniem wielorównaniowych modeli GARCH dotyczyły zarówno standardowych postaci, jak i rozszerzonych parametryzacji modeli (patrz np. Ng, 2000). Poza analizami dotyczącymi transmisji zmienności bada się również, czy stopy zwrotu indeksów rynku akcji mają wspólną wariancję (np. Engle i Susmel, 1993).

### 2.5.1. ANALIZA POWIĄZAŃ MIĘDZY INDEKSEM WIG A WYBRANYMI INDEKSAMI RYNKÓW AKCJI NA ŚWIECIE<sup>59</sup>

Sytuacja na innych rynkach akcji na świecie ma istotny wpływ na koniunkturę na GPW w Warszawie. W pracy zbadano zależności występujące pomiędzy indeksem WIG a wybranymi indeksami rynków akcji: S&P 500, DAX, FTSE 250, BUX. Indeks WIG to najstarszy i obejmujący największą liczbę spółek indeks charakteryzujący GPW w Warszawie. Pozostałe indeksy opisują klimat inwestycyjny w Stanach Zjednoczonych, Niemczech, Wielkiej Brytanii i na Węgrzech. Gospodarka amerykańska ma silny wpływ na gospodarkę światową, Niemcy są największym partnerem gospodarczym Polski, Węgry są przykładem kraju z Europy Środkowo-Wschodniej, natomiast spośród giełd europejskich największe znaczenie ma giełda w Londynie, dlatego analizowano indeks FTSE. Wymienione indeksy mają bardzo silny wpływ na koniunkturę na GPW w Warszawie (patrz np. Fiszeder, 2001b). Badanie można by również przeprowadzić na zupełnie innej grupie indeksów. Prezentowany jest tutaj punkt widzenia oparty na faktach i obserwacjach. Z metodologicznego punktu widzenia, używając terminologii Lakatosa (1995), oznacza to obracanie się w tzw. „pasie ochronnym”, nie zaś w „twardym rdzeniu”. Uwaga ta dotyczy również innych analiz prowadzonych w pracy. Zatem uzyskanych wyników nie można jednoznacznie uogólniać na dowolne procesy finansowe. Warto jednakże nadmienić, że w pracy badano na ogół spółki o największej kapitalizacji oraz indeksy giełdowe i inne instrumenty finansowe notowane na GPW w Warszawie o największym obrocie, zatem ich wybór nie jest przypadkowy. Powyższe zastrzeżenia odnoszą się do większości badań empirycznych dotyczących zastosowań modeli dla rzeczywistych szeregów czasowych. Stosując dalej terminologię Lakatosa proponowane w pracy modyfikacje metodologiczne można zaliczyć do heurystyki pozytywnej programu badawczego. To właśnie heurystyka pozytywna składa się z wyartykułowanego zbioru sugestii lub wskazówek, w jaki sposób zmieniać „obalane wersje” programu badawczego, jak modyfikować, udoskonalać „obalony” pas ochronny. Heurystyka pozytywna ustanawia program, tworzący łańcuch coraz bardziej skomplikowanych modeli naśladowujących rzeczywistość i wyjaśniających występujące anomalie.

W badaniu zastosowano dwurównaniowe modele VAR(1)-GARCH(1,1). Oczywiście można by estymować parametry modelu VAR-GARCH dla

<sup>59</sup> Punkt 2.5.1 opracowano na podstawie pracy Fiszeder (2008b).

wszystkich indeksów łącznie, ale w tym przypadku konieczne byłoby przyjęcie uproszczonej parametryzacji modelu GARCH, zakładającej na przykład stałość warunkowych współczynników korelacji lub brak zależności pomiędzy wariancją warunkową jednego indeksu a opóźnionymi wariancjami warunkowymi innych badanych indeksów. Jak pokazały przedstawione dalej wyniki, oba założenia nie są spełnione dla badanych indeksów. Model VAR pozwolił opisać występującą autokorelację stóp zwrotu oraz wzajemne relacje w czasie między stopami zwrotów indeksów. Zastosowanie wielorównaniowego modelu GARCH pozwoliło opisać zmieniające się w czasie warunkowe wariancje i kowariancje stóp zwrotu. Fiszeder (2001a) estymował parametry modelu AR-BEKK dla indeksu WIG i wybranych indeksów akcji na świecie, jednakże tamto badanie różniło się zasadniczo od analizy przedstawionej w tej pracy. Po pierwsze, we wcześniejszej pracy nie uwzględniono wzajemnych zależności między stopami zwrotu, co mogło wpłynąć na relacje dotyczące drugich momentów. Po drugie, nie przeprowadzono testów stałości warunkowych współczynników korelacji, a decyzja o wyborze parametryzacji modelu była nieformalna (na podstawie wykresów) i nie poparta testami. Po trzecie, nie zastosowano testów przyczynowości, dlatego nie określono dokładnych relacji między stopami zwrotu i wariancjami badanych procesów.

Analizowano dzienne, logarytmiczne stopy zwrotu z okresu od 3 października 1994 r.<sup>60</sup> do 31 stycznia 2008 roku. W pierwszej kolejności testowano stałość warunkowych współczynników korelacji pomiędzy stopami zwrotu badanych indeksów giełdowych. W badaniu zastosowano test Tse (2000), zaprezentowany punkcie 2.4.2. Estymowano parametry modelu stałych warunkowych współczynników korelacji. Wyniki testu Tse przedstawiono w tabeli 2.1. Dla modelu dwurównaniowego statystyka *LMC* ma asymptotyczny rozkład  $\chi^2$  o jednym stopniu swobody.

W tabeli 2.1 zaprezentowano również szacunki współczynników korelacji otrzymane na podstawie modelu stałych warunkowych współczynników korelacji. Najsilniejsza zależność występowała między stopami zwrotów indeksów WIG i BUX. Powiązania gospodarcze między gospodarkami Polski i Węgier nie są na tyle silne, aby tłumaczyć tak wysoką korelację, dlatego wynik ten może wydawać się zaskakujący. Tak silne zależności wynikają jednakże z przepływów międzynarodowego kapitału portfelowego, a Polska i Węgry należą do tego samego segmentu rynku. Duża wrażliwość giełdy w Budapeszcie na przepływy kapitału portfelowego wynika z bardzo znaczą-

<sup>60</sup> We wcześniejszym okresie notowania nie odbywały się codziennie.



cego udziału kapitału zagranicznego w obrotach na tej giełdzie. Koniunktura na większości rynków akcji na świecie jest w dużym stopniu uzależniona od koniunktury na rynku akcji w Nowym Jorku, dlatego najsłabsza korelacja między indeksami WIG i S&P 500 może również budzić zdziwienie. Notowania w Nowym Jorku kończą się po zamknięciu sesji na GPW w Warszawie, dlatego inwestorzy mogą zareagować na wydarzenia na NYSE dopiero następnego dnia. Końcowa część notowań w Warszawie odbywa się jednakże już w trakcie sesji w Nowym Jorku, dlatego część informacji, napływających na rynek, może być już zdyskontowana dzień wcześniej. Zatem wpływ giełdy nowojorskiej na giełdę warszawską rozkłada się na dwa dni i z tego względu w tabeli 2.1 podano wyniki dla obu relacji. Ze zrozumiałych względów zależność jednoczesna jest słabsza. Bardzo interesujący jest wynik testu Tse dla stóp zwrotu indeksów WIG i S&P 500. Inny charakter ma zależność jednoczesna, gdzie występuje stałość warunkowych współczynników korelacji, a inny – zależność między indeksem S&P 500 a notowaniami następnego dnia indeksu WIG, gdzie mamy do czynienia ze zmiennymi warunkowymi współczynnikami korelacji. Prawidłowe opisanie obu zależności jednocześnie nie jest możliwe za pomocą znanych modeli procesów stochastycznych, w tym również nie jest możliwe za pomocą modelu VAR-BEKK.

**TABELA 2.1. TESTOWANIE STAŁOŚCI WARUNKOWYCH WSPÓŁCZYNNIKÓW KORELACJI**

Badane indeksy	LMC	Współczynnik korelacji
$WIG_t - S\&P\ 500_t$	1,13	0,17
$WIG_t - S\&P\ 500_{t-1}$	5,71*	0,27
$WIG_t - BUX_t$	14,11*	0,42
$WIG_t - DAX_t$	5,56*	0,33
$WIG_t - FTSE\ 250_t$	4,61*	0,32

Gwiazdka oznacza wartości statystyk, w przypadku których hipoteza o stałości warunkowych współczynników korelacji została odrzucona na poziomie istotności 0,05.

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2008b).

Wyniki testu Tse (2000) wskazują, że dla wszystkich par indeksów, poza jednoczesną zależnością między indeksami WIG i S&P 500, należy odrzucić hipotezę o stałości warunkowych współczynników korelacji. Z dalszej analizy należało zatem wyeliminować model stałych warunkowych współczynni-

ków korelacji. Estymowano model BEKK, który zapewnia dodatnią określoność macierzy warunkowych kowariancji dla wszystkich możliwych realizacji i nie nakłada z góry na parametry zbyt kępujących ograniczeń. W przypadku analizy kilku szeregów czasowych model BEKK jest jedną z najczęściej stosowanych w badaniach empirycznych postaci wielorównaniowego modelu GARCH. Szacowano parametry modelu VAR(1)-BEKK(1,1) w postaci<sup>61</sup>:

$$r_{1t} = a_{10} + a_{11}r_{1t-1} + b_{11}r_{2t-1} + \varepsilon_{1t}, \quad (2.5.1)$$

$$r_{2t} = a_{20} + a_{21}r_{1t-1} + b_{21}r_{2t-1} + \varepsilon_{2t}, \quad (2.5.2)$$

$$\varepsilon_t \mid \psi_{t-1} \sim t_\nu(0, \mathbf{H}_t), \quad (2.5.3)$$

$$\begin{aligned} \begin{bmatrix} h_{11t} & h_{12t} \\ h_{21t} & h_{22t} \end{bmatrix} &= \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} \\ c_{21} & c_{22} \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t-1} \\ \varepsilon_{2t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \varepsilon_{1t-1} \\ \varepsilon_{2t-1} \end{bmatrix}' \\ &\times \begin{bmatrix} d_{11} & d_{12} \\ d_{21} & d_{22} \end{bmatrix}' + \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} h_{11t-1} & h_{12t-1} \\ h_{21t-1} & h_{22t-1} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e_{11} & e_{12} \\ e_{21} & e_{22} \end{bmatrix}'. \end{aligned} \quad (2.5.4)$$

Dla wszystkich par indeksów model z warunkowym rozkładem t-Studenta opisywał badane szeregi lepiej niż model z warunkowym rozkładem normalnym. Wyniki estymacji przedstawiono w tabeli 2.2. Na podstawie przedstawionych w tabeli 2.2 wyników można przypuszczać, że między indeksem WIG a badanymi indeksami giełd na świecie istnieją bardzo silne krótkookresowe powiązania dotyczące nie tylko średnich procesów, ale również wariancji. Oszacowane modele bardzo dobrze opisują zmienność i zależności między stopami zwrotu badanych indeksów (poza opisaną wyżej jednoczesną zależnością między indeksami WIG i S&P 500). Ze względu na złożoną parametryzację modelu GARCH nie jest do końca jasne, jak kształtują się zależności przyczynowe między wariancjami badanych indeksów. Dlatego zastosowano test przyczynowości dla wariancji. Analizę przeprowadzono na podstawie testu Caporale'a, Pittisa i Spagnolo (2002).

<sup>61</sup> Analiza własności standaryzowanych reszt pokazuje, że taka specyfikacja modelu jest wystarczająca.

TABELA 2.2. DWURÓWNANIOWE MODELE VAR(1)-BEKK(1,1)

Parametr	WIG-SP500	WIG-BUX	WIG-DAX	WIG-FTSE
$a_{10}$	6,13e-4* (2,05e-4)	6,94e-4* (2,02e-4)	8,11e-4* (2,07e-4)	7,56e-4* (2,05e-4)
$a_{11}$	0,0709* (0,0172)	0,0836* (0,0180)	0,0920* (0,0179)	0,0968* (0,0176)
$b_{11}$	0,3426* (0,0224)	0,0541* (0,0163)	0,0678* (0,0156)	0,1048* (0,0223)
$a_{20}$	7,13e-4* (1,36e-4)	8,84e-4* (2,07e-4)	9,55e-4* (1,75e-4)	5,46e-4* (1,34e-4)
$a_{21}$	-0,0113 (0,0087)	0,0555* (0,0147)	0,0150 (0,0124)	0,0078 (0,0096)
$b_{21}$	-0,0155 (0,0175)	0,0701* (0,0188)	-0,0234 (0,0179)	-0,0145 (0,0179)
$c_{11}$	0,24e-3 (32,16e-3)	1,52e-3 (4,70e-3)	1,49e-3 (5,28e-3)	0,93e-3 (24,26e-3)
$c_{12}$	-2,18e-3 (3,49e-3)	0,51e-3 (13,96e-3)	-0,65e-3 (12,09e-3)	1,29e-3 (17,61e-3)
$c_{21}$	0,81e-3 (0,85e-3)	1,84e-3 (21,13e-3)	0,90e-3 (6,00e-3)	0,88e-3* (0,28e-3)
$c_{22}$	0,05e-3 (11,31e-3)	2,30e-3 (16,87e-3)	0,74e-3 (7,28e-3)	0,01e-3 (16,61e-3)
$d_{11}$	0,2639* (0,0226)	0,2183* (0,0164)	0,2481* (0,0199)	0,2418* (0,0194)
$d_{12}$	-0,0340 (0,0237)	0,0416* (0,0181)	-0,0049 (0,0159)	0,0253 (0,0196)
$d_{21}$	0,0057 (0,0067)	0,0289* (0,0147)	0,0120 (0,0112)	0,0201* (0,0082)
$d_{22}$	0,2037* (0,0151)	0,3264* (0,0227)	0,2576* (0,0178)	0,2338* (0,0161)
$e_{11}$	0,9574* (0,0077)	0,9744* (0,0037)	0,9636* (0,0061)	0,9652* (0,0057)
$e_{12}$	0,0093 (0,0055)	-0,0196* (0,0070)	0,0008 (0,0043)	-0,0075 (0,0052)
$e_{21}$	-0,0013 (0,0019)	-0,0080* (0,0039)	-0,0037 (0,0031)	-0,0057* (0,0021)
$e_{22}$	0,9777* (0,0033)	0,9259* (0,0096)	0,9643* (0,0050)	0,9696* (0,0043)
$v$	8,3137* (0,7629)	7,3004* (0,5949)	9,6436* (0,9710)	9,6084* (0,9904)

Stopy zwrotu  $r_{1t}$ ,  $r_{2t}$  dotyczą indeksu WIG oraz drugiego indeksu w parze. W nawiasach, pod ocenami parametrów, podano średnie błędy szacunku. Gwiazdka oznacza oceny parametrów różniące się istotnie od zera na poziomie istotności 0,05, parametr  $v$  oznacza liczbę stopni swobody warunkowego rozkładu t-Studenta.

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

TABELA 2.3. TESTOWANIE PRZYCZYNOWOŚCI

Kierunek zależności	Dla średnich	Dla wariancji
WIG → S&P 500	0,43	1,51
S&P 500 → WIG	183,33*	14,58*
WIG → BUX	4,33*	8,12*
BUX → WIG	15,71*	26,56*
WIG → DAX	0,23	0,94
DAX → WIG	21,08*	1,40
WIG → FTSE 250	0,86	11,55*
FTSE 250 → WIG	40,97*	7,86*

Gwiazdka oznacza wartości statystyk, w przypadku których hipoteza zakładająca, że dany indeks nie jest przyczyną innego indeksu została odrzucona na poziomie istotności 0,05.

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2008b).

W pierwszej kolejności dodatkowo zastosowano również test przyczynowości Grangera. We wszystkich przypadkach hipoteza zakładająca, że stopy zwrotu badanych indeksów (badane pojedynczo) nie są przyczyną stóp zwrotu indeksu WIG została odrzucona. Natomiast przy badaniu odwrotnej zależności tylko hipoteza, według której stopy zwrotu indeksu WIG nie są przyczyną stóp zwrotu indeksu BUX została odrzucona.

Nieco inaczej wyglądają wyniki testowania przyczynowości dla wariancji. Hipoteza zakładająca, że wariancja warunkowa badanych indeksów nie jest przyczyną wariancji warunkowej indeksu WIG została odrzucona dla wszystkich szeregów poza indeksem DAX. W przypadku odwrotnych zależności odrzucona została hipoteza, według której wariancja warunkowa indeksu WIG nie jest przyczyną wariancji warunkowej indeksu BUX i osobno indeksu FTSE 250. Na podstawie wyników testów widać wyraźnie, że najbardziej złożone relacje występują między indeksami WIG i BUX. Przyczyną tych zależności są przepływy międzynarodowego kapitału portfelowego. Wzajemne powiązania dotyczące wariancji między indeksami WIG i FTSE 250 również wynikają z przepływu kapitału międzynarodowego, ponieważ duży udział w zagranicznym kapitale obecnym na polskim rynku mają inwestorzy z Londynu. Warto również podkreślić, że pomimo zbliżonych szacunków współczynników korelacji między indeksem WIG i indeksami FTSE 250 oraz DAX silniejsze powiązania występują między indeksami WIG i FTSE 250.

Dla nieco szerszej grupy indeksów (poza indeksami S&P 500 i BUX) analizę przyczynowości przeprowadziła Osińska (2004). W badaniu zależności między indeksem WIG a zagranicznymi indeksami rynku akcji, pomijając przyczynowość jednoczesną, tylko wariancja indeksu DJIA wpływała na wariancję indeksu WIG. Na uzyskane wyniki duży wpływ miał zapewne przyjęty test. Autorka zastosowała test Cheunga i Ng (1996), który jest konstruowany na podstawie jednorównaniowych modeli GARCH. Test jest stosunkowo łatwy w konstrukcji, jednakże moc testu jest bardzo niska w przypadku, gdy hipoteza alternatywna zakłada wielorównaniowy proces GARCH (patrz Hafner i Herwartz, 2004). Poza tym zależności przyczynowe dla średnich mogą istotnie wpływać na wyniki testu dla wariancji. Należy zatem przypuszczać, że rzeczywiste zależności przyczynowe między badanymi indeksami są znacznie silniejsze niż wynikałoby z przedstawionych przez Osińską (2004) wyników badań.

Na podstawie oszacowanych modeli VAR-BEKK wyliczono punktowe oceny warunkowych współczynników korelacji oraz warunkowych odchyłeń standardowych. Ich przebieg dla wybranej pary indeksów, mianowicie WIG<sub>t</sub> i S&P<sub>t-1</sub> 500, przedstawiono na rysunku 2.1. Oszacowane współczynniki korelacji znacząco zmieniały się w czasie. Obok okresów, kiedy zależności pomiędzy indeksami WIG i S&P 500 były bardzo silne, występowały również okresy, w których korelacje były bardzo słabe, a nawet ujemne. Znaczący wzrost zależności pomiędzy GPW w Warszawie a rynkiem akcji w Nowym Jorku nastąpił w listopadzie 1997 roku. Bardzo duży wpływ na zachowanie polskich inwestorów wywarł kryzys finansowy w krajach Dalekiego Wschodu, a szczególnie kryzys na giełdzie w Hongkongu (koniec października i listopad 1997 r.). Pokazał on, że koniunktura na GPW w Warszawie może w bardzo dużym stopniu zależeć od sytuacji na innych rynkach kapitałowych na świecie. Najsilniejsze korelacje występowały w okresach kryzysów finansowych (kryzys w krajach Dalekiego Wschodu, kryzys w Rosji). Występujące w tych okresach spadki cen akcji na większości rynków kapitałowych na świecie były związane z efektem zarażania (efekt ten oraz zagadnienia związane z transmisją zjawisk szokowych omówiono w następnym podrozdziale). Krótkotrwały wzrost współczynników korelacji jest najczęściej związany ze wzrostem wariancji warunkowej przynajmniej jednego z badanych indeksów. W latach 1997–2000 korelacja była znacznie silniejsza niż w pozostałych latach.

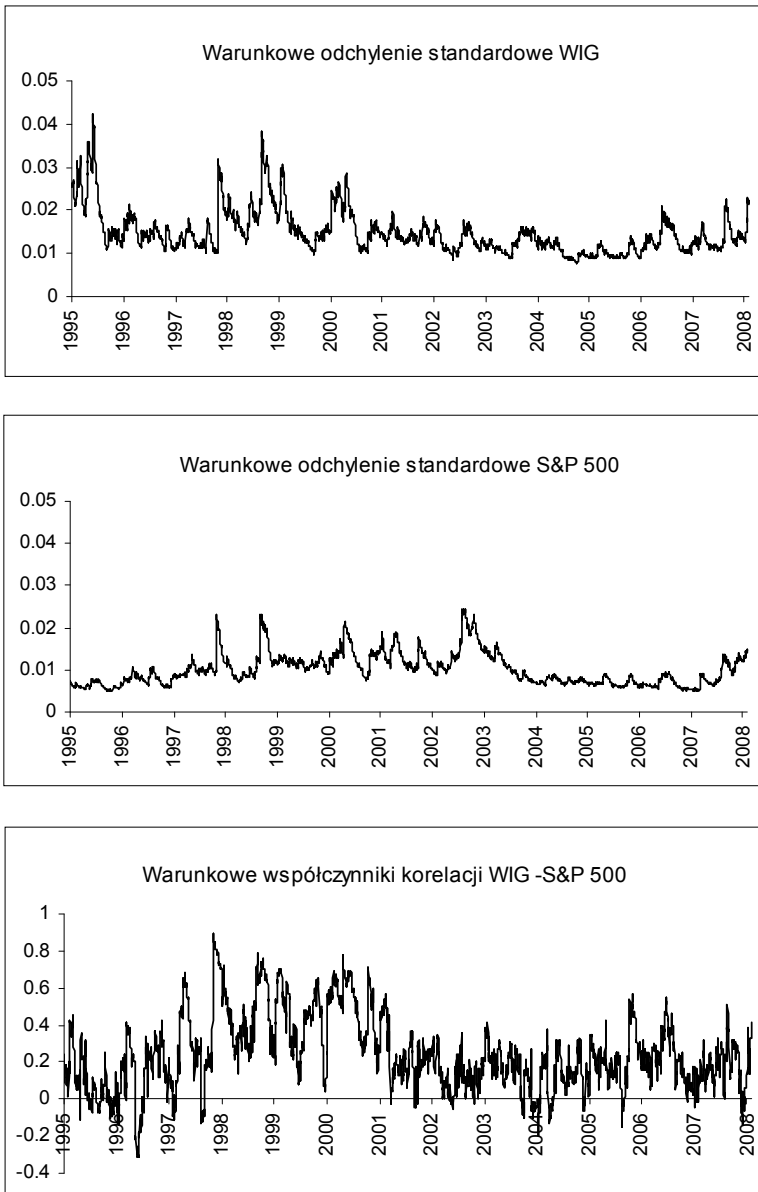
Wzrost warunkowej wariancji był prawie zawsze związany ze spadkami cen akcji. Zmienność indeksu WIG była zdecydowanie większa od zmienno-

ści indeksu S&P 500 (wyjątkiem był krótki okres w 2002 r.). Rynki wschodzące, a do takich zaliczana jest GPW w Warszawie, charakteryzują się większą zmiennością niż rynki rozwinięte. Warto podkreślić, że zamach na World Trade Center w dniu 11 września 2001 r. nie spowodował znaczącego wzrostu zmienności indeksu WIG, a w przypadku indeksu S&P 500 wzrost ten był znacznie słabszy niż ten, jaki obserwowano w trakcie kryzysów finansowych. Występujący pod koniec 2007 roku i na początku 2008 r. wzrost zmienności związany z kryzysem w sektorze kredytów hipotecznych w Stanach Zjednoczonych nie dorównywał jeszcze temu, co można było zaobserwować w poprzednich kryzysach finansowych<sup>62</sup>.

Porównując przebieg oszacowanych warunkowych odchyłeń standardowych, można zauważyć dość istotną różnicę między badanymi indeksami. Dla indeksu WIG odchylenia od poziomu średniego mają raczej krótkotrwały charakter i zmienność powraca do średniej (wielu autorów uznaje takie zachowanie się zmienności jako typowe dla procesów finansowych). Wpływ zjawisk szokowych na wariancję stóp zwrotu indeksu S&P 500 jest zdecydowanie bardziej długotrwały (odchylenia zmienności od poziomu średniego trwały nawet dłużej niż pięć lat). Konkluzja ta jest zgodna z wnioskami wynikającymi z analizy jednorównaniowych modeli GARCH, gdzie suma ocen parametrów  $\alpha_1 + \beta_1$  była większa dla indeksu S&P 500 (por. wyniki badania w podrozdziale 1.5). Wydaje się, że do opisu zmienności indeksu S&P 500 najlepiej nadawałby się model Spline-GARCH wprowadzony przez Engle'a i Rangela (2008). Na podstawie tego modelu, podobnie jak na podstawie składnikowego modelu GARCH zaproponowanego przez Engle'a i Lee (1999), można dokonać dekompozycji zmienności na dwa składniki. Pierwszy składnik opisuje krótkookresową dynamikę warunkowej zmienności związaną z krótkotrwałymi czynnikami, drugi natomiast powolne zmiany wariancji związane z czynnikami o długotrwałym wpływie. Długookresowy składnik określa bezwarunkową zmienność i może być interpretowany jako trend, wokół którego fluktuuje warunkowa zmienność. W modelu Spline-GARCH założenie o powrocie długookresowego składnika do stałego poziomu, zwanego zmiennością o niskiej częstotliwości, zostało złagodzone.

---

<sup>62</sup> Sytuacja zmieniła się znacząco w październiku 2008 r., gdy doszło do spektakularnych spadków na większości rynków akcji na świecie.



**RYСУNEK 2.1. WARUNKOWE WSPÓŁCZYNNIKI KORELACJI ORAZ WARUNKOWE ODCHYLENIA STANDARDOWE STÓP ZWROTU DLA INDEKSÓW WIG<sub>t</sub> I S&P<sub>t-1</sub>**

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2008b).

## 2.6. EFEKT ZARAŻANIA<sup>63</sup>

Postępująca globalizacja, integracja oraz liberalizacja rynków finansowych, a także postęp technologiczny powodują coraz silniejsze powiązania między rynkami kapitałowymi całego świata. Propagacja kryzysów i zjawisk szokowych była przedmiotem wielu badań i analiz. Po krachu giełdowym w październiku 1987 r. zauważono, że w okresie kryzysu nastąpił dość znaczny wzrost korelacji pomiędzy większością rynków akcji na świecie. Znaczne spadki na giełdach: w Meksyku w grudniu 1994 roku, w Hongkongu w październiku 1997 r. czy w Moskwie w sierpniu 1998 r. pokazały, że wzrost korelacji pomiędzy różnymi procesami finansowymi (nie tylko na rynkach akcji, ale np. na rynkach obligacji czy rynku walutowym) jest zjawiskiem charakterystycznym dla wielu kryzysów finansowych. Ucieczkę kapitałów z krajów Ameryki Łacińskiej, wywołaną kryzysem walutowym w Meksyku, nazwano „efektem tequili”. Podobny efekt w przypadku kryzysu w krajach Dalekiego Wschodu nazwano „grypą azjatycką”. Istotny wzrost zależności pomiędzy różnymi rynkami finansowymi na świecie, spowodowany transmisją zjawisk szokowych, jest określanej w literaturze anglojęzycznej jako *contagion*, czyli zaraza albo inaczej efekt zarażania. Należy jednak podkreślić, że nie jest to jedyna definicja pojęcia *contagion*. Wśród ekonomistów toczy się dyskusja o tym, które z kanałów transmisji zjawisk szokowych powinny być określane mianem efektu zarażania.

Efekt zarażania jest zjawiskiem ważnym co najmniej z kilku powodów. Po pierwsze, w okresach znacznego wzrostu korelacji pomiędzy różnymi rynkami finansowymi na świecie zanikają korzyści wynikające z międzynarodowej dywersyfikacji aktywów. Po drugie, w wielu modelach dotyczących zachowania inwestorów zakłada się, że reakcje inwestorów są inne po dużych spadkach cen niż reakcje po małych spadkach czy po wzrostach. Zrozumienie zachowania inwestorów w okresach kryzysów jest kluczowe w wyjaśnieniu międzynarodowej transmisji zjawisk szokowych. Po trzecie, negatywny szok dotyczący jednego kraju może spowodować odpływ kapitału z innego kraju, nawet jeśli sytuacja gospodarcza tego kraju jest dobra i handlowe powiązania pomiędzy tymi krajami są ograniczone. Nawet krótkotrwały efekt mógłby doprowadzić do kryzysu finansowego w innym kraju. Zatem istnienie efektu zarażania uzasadniałoby interwencje międzynarodowych instytucji finansowych, jak na przykład Międzynarodowego Funduszu Walutowego, w celu stabilizacji przepływów finansowych.

<sup>63</sup> Podrozdział 2.6 opracowano na podstawie pracy Fiszeder i Razik (2004).



W literaturze funkcjonuje co najmniej kilka różnych definicji efektu zarażania. W najbardziej ogólnym znaczeniu pod pojęciem efektu zarażania rozumie się transmisję zjawisk szokowych pomiędzy krajami. Efekt zarażania nie musi dotyczyć okresu kryzysu, może również występować w okresie dobrej koniunktury gospodarczej, jednakże najbardziej spektakularny przebieg przybiera właśnie w okresie kryzysów.

W węższym znaczeniu efekt zarażania definiuje się jako transmisję zjawisk szokowych pomiędzy krajami, której nie da się wyjaśnić przez powiązania fundamentalne. Powyższy efekt zarażania jest często określany w literaturze anglojęzycznej jako *pure contagion* lub *excess co-movement*. Przez powiązania fundamentalne rozumie się tutaj bowiem rzeczywiste powiązania finansowe, gospodarcze oraz polityczne. Jeżeli zjawisko szokowe dotyka jednocześnie wielu krajów, to nie jest traktowane jako *pure contagion*, ponieważ zjawisko szokowe jest wspólne dla kilku gospodarek. Na przykład wzrost międzynarodowych stóp procentowych czy spadek międzynarodowego popytu może wpłynąć na spowolnienie wzrostu gospodarczego w kilku krajach. Jako efekt zarażania w węższym znaczeniu traktuje się wszystkie zjawiska, których nie potrafimy zrozumieć lub wyjaśnić przez rzeczywiste powiązania finansowe, gospodarcze czy polityczne. Jest to oczywista wada powyższej definicji. Najczęściej jako przyczynę występowania efektu zarażania w węższym znaczeniu wymienia się zachowania stadne

W najbardziej restrykcyjnym znaczeniu przez efekt zarażania rozumie się wzrost korelacji pomiędzy procesami finansowymi, obserwowanymi w różnych krajach, w okresie kryzysu w stosunku do korelacji występującej przed kryzysem.

Jak dotąd, powstało kilka różnych teorii, próbujących wytłumaczyć występowanie efektu zarażania. Valdes (1997) dowodzi, że kryzys w jednym kraju może ograniczyć płynność inwestorów i zmusić ich do przebudowy portfeli oraz sprzedaży części aktywów w krajach nie dotkniętych przez kryzys. Według teorii równowagi przedstawionej przez Massona (1999) efekt zarażania wynika z nagłej zmiany oczekiwań inwestorów. Mullainathan (2002) koncentruje rozważania na czynnikach psychologicznych i twierdzi, że inwestorzy wybiórczo pamiętają zdarzenia z przeszłości. Z tego względu kryzys w jednym kraju może przywołać wspomnienia poprzednich kryzysów i zmienić oczekiwania inwestorów. Drazen (1999) sugeruje, że efekt zarażania może być związany z czynnikami politycznymi i jako przykład podaje dewaluację w 1993 roku w krajach Europejskiego Systemu Walutowego. Odstąpienie od przyjętych ustaleń przez jeden kraj zmniejsza polityczne koszty podjęcia ta-

kiej decyzji przez inne kraje i prowadzi do nagłych zmian w polityce gospodarczej. Borensztein i Gelos (2000) oraz Calvo i Mendoza (2000) twierdzą, że sposób oceniania zarządzających funduszami może być często przyczyną naśladowania strategii innych funduszy i przynajmniej w części odpowiadać za efekt zarażania. Przyczyną rozprzestrzeniania się kryzysów mogą być również zachowania stadne, jak i strategie inwestycyjne funduszy.

Należy jednakże podkreślić, że w praktyce bardzo trudno jest określić relatywne znaczenie poszczególnych przyczyn. Po pierwsze, dostępność informacji na temat niektórych kanałów transmisji jest bardzo ograniczona, po drugie, różne kanały transmisji są ze sobą ściśle powiązane.

### 2.6.1. STAŁOŚĆ WSPÓŁCZYNNIKÓW KORELACJI

Występowanie efektu zarażania można testować za pomocą wielu różnych metod matematycznych czy ekonometrycznych. W analizach empirycznych najczęściej bada się stałość współczynników korelacji i właśnie takie podejście zastosowano w niniejszej pracy. Poniżej przedstawiono zaproponowany test efektu zarażania konstruowany na podstawie modelu VAR i testu Tse (2000) na stałość współczynników korelacji w wielorównaniowym modelu GARCH. Idea testu opiera się na propozycji zawartej w pracy: Corsetti, Pericoli i Sbracia (2001), dlatego na wstępie wyjaśniono podstawowe założenia takiego podejścia.

Można badać efekt zarażania w najbardziej restrykcyjnym znaczeniu i testować istotność wzrostu współczynników korelacji w okresie kryzysu. Możliwe jest również badanie istotności wzrostu współczynnika korelacji po uwzględnieniu powiązań fundamentalnych. W większości prac, dotyczących powiązań między rynkami akcji na świecie, analizuje się korelacje bezwarunkowe. Stałość korelacji bezwarunkowych może być testowana na podstawie szacunków współczynników korelacji, obliczonych dla różnych okresów. Wyniki tak przeprowadzonych badań są jednak niejednoznaczne (patrz podrozdział 2.5). Boyer, Gibson i Loretan (1997), a także Forbes i Rigobon (2002) twierdzą, że testowanie stałości korelacji na podstawie szacunków współczynników korelacji, obliczonych dla różnych okresów, może być mylące, ponieważ mogła nastąpić zmiana wariancji. W okresach kryzysów następuje znaczny wzrost zmienności stóp zwrotu, dlatego szacunki współczynników korelacji są nieporównywalne z szacunkami, uzyskanymi dla okresów przed kryzysem. Forbes i Rigobon (2002) przedstawiają formułę korekty współ-

czynnika korelacji uwzględniającą zmianę wariancji. Skorygowany współczynnik korelacji oblicza się według wzoru:

$$\rho_s = \frac{\rho_c}{\sqrt{1 + \delta [1 - (\rho_c)^2]}}, \quad (2.6.1)$$

gdzie  $\delta = \sigma_h^2 / \sigma_l^2 - 1$ ,  $\sigma_h^2$  oraz  $\sigma_l^2$  oznaczają wariancje odpowiednio dla okresów o dużej i małej zmienności,  $\rho_c$  to współczynnik korelacji obliczony dla okresu o większej zmienności.

Testując występowanie efektu zarażania, hipotezy można zapisać w następujący sposób  $H_0 : \rho_s = \rho$  oraz  $H_1 : \rho_s > \rho$ , gdzie:  $\rho$  oznacza współczynnik korelacji dla okresu przed kryzysem. Hipoteza alternatywna zakłada wystąpienie efektu zarażania.

Corsetti, Pericoli i Sbracia (2001) pokazują jednakże na podstawie modelu jednoczynnikowego, że formuła (2.6.1) oznacza przyjęcie założenia, iż stopy zwrotu w kraju będącym źródłem kryzysu są funkcją czynnika globalnego i nie zależą od czynników lokalnych ( $\text{var}(\varepsilon_j) = 0$  w modelu (2.6.3)). W celu testowania efektu zarażania wprowadzają współczynnik współzależności zdefiniowany w następujący sposób:

$$\phi = \rho \left[ \frac{\left( \frac{1 + \lambda_j}{1 + \lambda_j^C} \right)^2 \frac{1 + \delta}{1 + \rho^2 \left[ (1 + \delta) \frac{1 + \lambda_j}{1 + \lambda_j^C} - 1 \right] (1 + \lambda_j)} \right]^{1/2}, \quad (2.6.2)$$

gdzie  $\lambda_j = \frac{\text{var}(\varepsilon_j)}{\gamma_j^2 \text{var}(f)}$ ,  $\lambda_j^C = \frac{\text{var}(\varepsilon_j | C)}{\gamma_j^2 \text{var}(f | C)}$  oraz

$$\begin{aligned} r_i &= \alpha_i + \gamma_i f + \varepsilon_i, \\ r_j &= \alpha_j + \gamma_j f + \varepsilon_j, \end{aligned} \quad (2.6.3)$$

$r_i$  oznacza stopy zwrotu indeksu rynku akcji w kraju  $i$ ,  $r_j$  – stopy zwrotu indeksu w kraju będącym źródłem kryzysu,  $f$  – czynnik globalny,  $\alpha_i$ ,  $\alpha_j$ ,  $\gamma_i$ ,  $\gamma_j$  – parametry strukturalne,  $\varepsilon_i, \varepsilon_j$  – składniki losowe, które w tym przypadku są związane z czynnikami lokalnymi,  $\rho$  – współczynnik korelacji obliczony dla okresu przed kryzysem,  $\delta = \text{var}(r_j | C) / \text{var}(r_j) - 1$ ,  $C$  oznacza wystąpienie kryzysu.

Jeżeli wzrost korelacji można wyjaśnić za pomocą modelu w postaci (2.6.3), to jest on określany jako współzależność. W przeciwnym wypadku, tzn. gdy wzrost korelacji jest zbyt silny, aby można było go wyjaśnić za pomocą tego modelu, występuje efekt zarażania. Z taką sytuacją mamy do czynienia wówczas, gdy pewien czynnik lokalny staje się w pewnym momencie czynnikiem globalnym. Testując występowanie efektu zarażania, hipotezy można zapisać w następujący sposób  $H_0: \rho^C = \phi$  (współzależność) oraz  $H_1: \rho^C > \phi$  (efekt zarażania), gdzie:  $\rho^C$  oznacza współczynnik korelacji dla okresu kryzysu. Największą trudnością w przeprowadzeniu powyższego testu jest uzyskanie szacunków  $\lambda_j$  i  $\lambda_j^C$ . Corsetti, Pericoli i Sbracia (2001) proponują dwa podejścia. Pierwsze to przyjęcie za czynnik globalny „indeksu światowego” lub innego indeksu, dobrze odzwierciedlającego zmiany na najważniejszych rynkach akcji na świecie. Drugie podejście to zastosowanie analizy głównych składowych.

Jedną z podstawowych własności procesów finansowych jest zmienność warunkowych macierzy kowariancji stóp zwrotu, stąd analiza korelacji powinna również uwzględniać ten fakt empiryczny. W niniejszej pracy zaproponowano test efektu zarażania oparty na modelu VAR i teście Tse (2000) na stałość współczynników korelacji w wielorównaniowym modelu GARCH. Przez efekt zarażania rozumie się tutaj istotny wzrost współczynników korelacji pomiędzy procesami finansowymi, obserwowanymi w różnych krajach, po uwzględnieniu wpływu czynnika globalnego. Tak określony efekt zarażania jest bliższy definicji w węższym sensie, według której efekt zarażania definiuje się jako transmisję zjawisk szokowych pomiędzy krajami, niemożliwej do wyjaśnienia poprzez powiązania fundamentalne.

Szacowany jest następujący model VAR( $k$ )-CCC-GARCH( $p, q$ ):

$$r_{1t} = a_{10} + a_{11}r_{1t-1} + b_{11}r_{2t-1} + \dots + a_{1k}r_{1t-k} + b_{1k}r_{2t-k} + \varepsilon_{1t}, \quad (2.6.4)$$

$$r_{2t} = a_{20} + a_{21}r_{1t-1} + b_{21}r_{2t-1} + \dots + a_{2k}r_{1t-k} + b_{2k}r_{2t-k} + \varepsilon_{2t}, \quad (2.6.5)$$

$$\varepsilon_t \mid \psi_{t-1} \sim N(0, \mathbf{H}_t), \quad (2.6.6)$$

$$\mathbf{H}_t = \begin{bmatrix} \sqrt{h_{11,t}} & 0 \\ 0 & \sqrt{h_{22,t}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{h_{11,t}} & 0 \\ 0 & \sqrt{h_{22,t}} \end{bmatrix}, \quad (2.6.7)$$

gdzie  $r_{1t}$  i  $r_{2t}$  to stopy zwrotu badanych instrumentów finansowych (najczęściej są to indeksy giełdowe),  $\boldsymbol{\varepsilon}_t = (\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t})'$ ,  $\psi_{t-1}$  oznacza zbiór wszystkich informacji dostępnych w chwili  $t-1$ ,  $\mathbf{H}_t$  to warunkowa macierz kowariancji,  $h_{11,t}$  i  $h_{22,t}$  to warunkowe wariancje opisane za pomocą jednorównaniowych modeli GARCH,  $\rho$  jest współczynnikiem korelacji pomiędzy  $\varepsilon_{1t}$  a  $\varepsilon_{2t}$ .

Przyjęcie postaci modelu VAR ma na celu wyeliminowanie wpływu autokorelacji oraz zależności między stopą zwrotu jednego indeksu a opóźnionymi stopami zwrotu drugiego indeksu. Jako wielorównaniowy model GARCH przyjęto model stałych warunkowych współczynników korelacji, w którym zakłada się, że zmieniające się w czasie warunkowe kowariancje są proporcjonalne do iloczynu odpowiednich warunkowych odchyłeń standardowych. Hipoteza o stałości warunkowych współczynników korelacji jest weryfikowana za pomocą testu Tse (2000), który nie wymaga estymacji parametrów modelu o zmieniających się współczynnikach korelacji. Jeżeli warunkowe współczynniki korelacji w wielorównaniowym modelu GARCH w postaci (2.6.7) są stałe, to efekt zarażania nie występuje. W przeciwnym wypadku, tzn. gdy warunkowe współczynniki korelacji zmieniają się w czasie, testuje się stałość współczynników korelacji w następującym modelu:

$$r_{1t} = a_{10} + a_{11}r_{1t-1} + b_{11}r_{2t-1} + \dots + a_{1k}r_{1t-k} + b_{1k}r_{2t-k} + c_1r_{Gt} + \varepsilon_{1t}, \quad (2.6.8)$$

$$r_{2t} = a_{20} + a_{21}r_{1t-1} + b_{21}r_{2t-1} + \dots + a_{2k}r_{1t-k} + b_{2k}r_{2t-k} + c_2r_{Gt} + \varepsilon_{2t}, \quad (2.6.9)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t \mid \psi_{t-1} \sim N(0, \mathbf{H}_t), \quad (2.6.10)$$

$$\mathbf{H}_t = \begin{bmatrix} \sqrt{h_{11,t}} & 0 \\ 0 & \sqrt{h_{22,t}} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \rho \\ \rho & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \sqrt{h_{11,t}} & 0 \\ 0 & \sqrt{h_{22,t}} \end{bmatrix}, \quad (2.6.11)$$

gdzie  $r_{Gt}$  to stopa zwrotu czynnika globalnego. Wprowadzenie do modelu  $r_{Gt}$  powoduje usunięcie wpływu czynnika globalnego. Jeżeli hipoteza o stałości warunkowych współczynników korelacji w wielorównaniowym modelu GARCH w postaci (2.6.11) zostanie odrzucona, to w badanym okresie występuje efekt zarażania. Z badania należy wykluczyć sytuacje, gdy pomiędzy badanymi szeregami występował znaczny spadek warunkowych współczynników korelacji nie poprzedzony ich wcześniejszym wzrostem (np. spadek współczynników korelacji do wartości ujemnych). Takie sytuacje występują bardzo rzadko i są najczęściej związane ze znaczącą przebudową indeksów lub nagłymi zmianami w postrzeganiu atrakcyjności określonych rynków lub segmentów rynku

akcji. Znaczący spadek warunkowych współczynników korelacji bez wcześniejszego wzrostu zdarzył się na przykład pod koniec „hossy internetowej” w okresie styczeń–marzec 2000 roku w Stanach Zjednoczonych. Inwestorzy zaczęli postrzegać spółki należące do indeksu DJIA jako przewartościowane w stosunku do wartości fundamentalnej, co spowodowało ich spadek. W tym czasie ceny spółek należących do indeksu Nasdaq Composite kontynuowały wzrosty<sup>64</sup>, w efekcie czego nastąpił znaczący spadek współczynników korelacji między tymi indeksami (patrz Fiszeder, 2003a). Konstrukcja powyższego testu oznacza, że nie każda zmiana warunkowych współczynników korelacji musi oznaczać występowanie efektu zarażania. Po pierwsze, zmiana korelacji może nie być istotna statystycznie, po drugie, może być wynikiem działania czynnika globalnego. Na przykład wzrost korelacji pomiędzy indeksami giełdowymi różnych rynków akcji na świecie, spowodowany zjawiskiem szokowym dotykającym jednocześnie większość gospodarek na świecie, nie będzie traktowany jako efekt zarażania. Jeżeli badanie dotyczy rynków akcji, to za czynnik globalny proponuje się przyjęcie indeksu dobrze odzwierciedlającego zmiany na najważniejszych rynkach akcji na świecie.

## 2.6.2. ANALIZA EFEKTU ZARAŻANIA DLA INDEKSU WIG

Analizą efektu zarażania dla polskiego rynku akcji zajmowali się między innymi Fiszeder i Razik (2003), (2004) oraz Serwa i Bohl (2005). W niniejszym badaniu zastosowano przedstawiony w punkcie 2.6.1 test konstruowany na podstawie wielorównaniowego modelu VAR(1)-GARCH(1,1)<sup>65</sup>. Analizę przeprowadzono dla podobnych indeksów, które były przedmiotem badania w podrozdziale 2.5. Zamiast indeksu S&P 500 zastosowano indeksy DJIA i Nasdaq Composite, a zamiast FTSE 250 – indeks FTSE 100. Wybrane indeksy należą do jednych z najsilniej skorelowanych z indeksem WIG (patrz Fiszeder, 2001b). Stosowane procedury estymacyjne i testy wymagają relatywnie długich szeregów czasowych, stąd niemożliwe jest przeprowadzenie badania dotyczącego bardzo krótkiego okresu. Z tego względu analiza efektu zarażania została przeprowadzona dla okresów rocznych. W tabeli 2.4 przedstawiono szacunki współczynników korelacji pomiędzy stopami zwrotu indeksu WIG a stopami zwrotu badanych indeksów w latach 1997–2003.

<sup>64</sup> Mimo jeszcze większego ich przewartościowania.

<sup>65</sup> Wyniki weryfikacji dla pozostałych dwóch testów zaprezentowanych w punkcie 2.6.1 przedstawiono w pracach Fiszedera i Razika (2003, 2004).

Najsilniejsze zależności występowały w latach 1997 i 1998 i były związane z kryzysami finansowymi w krajach Dalekiego Wschodu i Rosji.

**TABELA 2.4. WSPÓŁCZYNNIKI KORELACJI MIĘDZY INDEKSEM WIG A BADANYMI INDEKSAMI**

Lata	DJIA		Nasdaq		BUX		DAX		FTSE 100	
	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)	(1)	(2)
1997	0,53	0,21	0,52	0,23	0,55	0,48	0,34	0,15	0,35	0,14
1998	0,55	0,17	0,52	0,14	0,55	0,41	0,47	0,20	0,48	0,21
1999	0,47	0,11	0,44	0,07	0,40	0,36	0,24	0,12	0,25	0,13
2000	0,50	0,20	0,52	0,23	0,32	0,23	0,26	0,10	0,31	0,19
2001	0,23	0,11	0,26	0,17	0,52	0,37	0,38	0,06	0,36	0,07
2002	0,13	0,02	0,18	0,11	0,51	0,44	0,37	0,18	0,37	0,21
2003	0,16	0,17	0,12	0,05	0,42	0,38	0,33	0,12	0,28	0,08

W kolumnach oznaczonych (1) i (2) przedstawiono szacunki współczynników korelacji, odpowiednio przed i po usunięciu wpływu czynnika globalnego. Oceny większe od 0,12 są statystycznie istotne.

ŹRÓDŁO: FISZEDER I RAZIK (2004).

W tabeli 2.4 podano również szacunki współczynników korelacji po usunięciu wpływu czynnika globalnego. Jako czynnik globalny przyjęto stopy zwrotu indeksu ACWI (ang. *All Country World Index*). Powyższy indeks jest obliczany przez firmę Morgan Stanley Capital International i w 2004 roku konstruowany był na podstawie akcji notowanych w 49 krajach. Obejmuje on zarówno wszystkie najważniejsze rynki rozwinięte, jak i rynki rozwijające się. Współczynniki korelacji szacowano na podstawie składników resztowych w równaniach (2.6.4) i (2.6.5). Szacunki współczynników korelacji pomiędzy stopami zwrotu indeksu WIG a stopami zwrotu indeksów DJIA, Nasdaq Composite, DAX i FTSE 100 były średnio ponad dwukrotnie większe od szacunków współczynników korelacji po usunięciu wpływu czynnika globalnego. W przypadku zależności pomiędzy indeksami WIG i BUX te różnice były znacznie mniejsze. Nawet po usunięciu wpływu czynnika globalnego korelacje pomiędzy tymi indeksami były stosunkowo silne. Warto również zwrócić uwagę na słabszą korelację pomiędzy indeksem WIG a indeksami DJIA i Nasdaq Composite w latach 2001–2003 (efekt ten jest również dobrze widoczny na rysunku 2.1 dla indeksu S&P 500). Przedstawione w tabeli 2.4 szacunki współczynników korelacji dotyczą rozkładów brzegowych, natomiast zaproponowany w niniejszej pracy test efektu zarażania opiera się na warunkowych współczynnikach korelacji. Najpierw estymowano parametry modelu VAR(1)-GARCH(1,1) w postaci (2.6.4–2.6.7). Hipoteza o stałości warun-

kowych współczynników korelacji w wielorównaniowym modelu GARCH w postaci (2.6.7) była weryfikowana za pomocą testu Tse (2000) (statystyka *LM1* w tabeli 2.5). Warunkowe współczynniki korelacji pomiędzy indeksem WIG a indeksami DJIA, Nasdaq Composite, BUX, DAX i FTSE 100 w roku 1997 oraz pomiędzy indeksem WIG a indeksami DJIA i Nasdaq Composite w roku 1998 znacząco zmieniały się w czasie. W pozostałych okresach nie było podstaw do odrzucenia hipotezy o stałości warunkowych współczynników korelacji. We wszystkich przypadkach, gdy warunkowe współczynniki korelacji zmieniały się istotnie w czasie, estymowano parametry modeli VAR(1)-GARCH(1,1) w postaci (2.6.8–2.6.11). Hipoteza o stałości warunkowych współczynników korelacji w modelu GARCH w postaci (2.6.11) była również weryfikowana za pomocą testu Tse (statystyka *LM2* w tabeli 2.5). Dla zależności pomiędzy indeksem WIG a indeksami Nasdaq Composite i BUX w roku 1997 hipoteza o stałości korelacji została odrzucona. Analiza warunkowych współczynników korelacji oszacowanych na podstawie modelu VAR(1)-BEKK(1,1) wskazuje, że w badanych okresach nastąpił wzrost korelacji, co w połączeniu z wynikami zaproponowanego testu oznacza, że tylko w tych dwóch przypadkach występował efekt zarażania. Zaobserwowany efekt zarażania był związany z kryzysami finansowymi w krajach Dalekiego Wschodu. We wszystkich innych badanych przypadkach wzrost korelacji albo nie był istotny statystycznie, albo wynikał z wpływu czynnika globalnego (jak na przykład podczas kryzysu finansowego w Rosji w 1998 roku).

TABELA 2.5. TEST EFEKTU ZARAŻANIA

Lata	DJIA		Nasdaq		BUX		DAX		FTSE 100	
	LM1	LM2	LM1	LM2	LM1	LM2	LM1	LM2	LM1	LM2
1997	7,94*	3,24	9,29*	5,78*	10,35*	4,47*	4,48*	2,42	7,56*	2,39
1998	6,79*	1,97	6,45*	1,54	3,07	–	3,76	–	3,83	–
1999	1,63	–	2,84	–	0,13	–	0,31	–	3,67	–
2000	0,81	–	0,97	–	0,25	–	2,76	–	0,64	–
2001	0,17	–	0,35	–	1,46	–	0,42	–	3,83	–
2002	0,80	–	0,69	–	3,04	–	1,65	–	2,79	–
2003	1,61	–	3,29	–	0,83	–	2,30	–	1,18	–

LM1 i LM2 to statystyki testu Tse (2000) na stałość warunkowych współczynników korelacji odpowiednio w modelach (2.6.7) i (2.6.11). Gwiazdka oznacza oceny statystyk, w przypadku których hipoteza o stałości warunkowych współczynników korelacji została odrzucona na poziomie istotności 0,05.

ŹRÓDŁO: FISZEDER I RAZIK (2004).



Zaproponowany test oparty na wielorównaniowym modelu GARCH uwzględnia zarówno wpływ czynnika globalnego, jak i zmienność warunkowych macierzy kowariancji, jednakże z uwagi na stosowane metody estymacyjne może być stosowany tylko w przypadku długich szeregów czasowych. W pracy Fiszедера i Razika (2004) zbadano krótkookresowe efekty kryzysów finansowych na podstawie pozostałych dwóch testów przedstawionych w punkcie 2.6.1, dla tych samych indeksów akcji, które stosowano w niniejszym opracowaniu. Według testu konstruowanego na podstawie wielorównaniowego modelu GARCH efekt zarażania występował najrzadziej.

## Rozdział III

# PROGNOZOWANIE PROCESÓW FINANSOWYCH

Prognozowanie jest jednym z najważniejszych, jeśli nie najważniejszym zastosowaniem modeli GARCH. W większości zastosowań finansowych przedstawionych w dalszej części pracy (np. szacowanie VaR, konstrukcja portfela optymalnego, szacowanie współczynnika zabezpieczenia) wykorzystuje się prognozy wariancji lub kowariancji, dlatego temu tematowi poświęcono nieco więcej uwagi. Przy omawianiu prognozowania można rozróżnić: estymację warunkowych momentów (wartości oczekiwanej, wariancji, kowariancji) na pierwszy okres poza obserwacją (są one funkcjami parametrów przy znanych przeszłych danych), prognozowanie tych momentów na dalsze okresy (momenty te zależą także od nieznanymi przyszłych obserwacji) oraz prognozowanie poziomu zjawiska (przyszłych wartości procesu) bez względu na horyzont<sup>66</sup>. Modele AR-GARCH (VAR-GARCH)<sup>67</sup> znajdują zastosowanie w budowie prognoz, zarówno poziomu procesu (prognozuje się ceny lub stopy zwrotu), jak i wariancji warunkowej (prognozuje się zmienność) lub kowariancji warunkowej (rzadziej współczynników korelacji).

W podrozdziale 3.1 przedstawiono skrótowo wpływ efektu ARCH na konstrukcję prognoz poziomu procesu (przyszłych wartości procesu). Uwzględnienie efektu ARCH przy konstrukcji prognoz stóp zwrotu ma najczęściej niewielki wpływ na uzyskane prognozy, a zwiększenie trafności prognoz może wynikać z uzyskania efektywniejszych estymatorów parametrów modeli, na podstawie których buduje się prognozę. Prognozowanie cen i stóp zwrotu nie było przedmiotem badań autora, dlatego temu tematowi poświęcono niewiele miejsca w pracy.

Zasadniczą część tego rozdziału, podrozdział 3.2, dotyczy prognozowania zmienności. Omówiono w niej zagadnienia związane z pomiarem zmienności, przedstawiono najczęściej stosowane do prognozowania zmienności modele

---

<sup>66</sup> Więcej na temat konstrukcji prognoz na podstawie modeli nieliniowych można znaleźć np. w pracy Bruzdy (2007).

<sup>67</sup> Ewentualnie inne parametryzacje równań dla średnich warunkowych.

oraz metody oceny trafności prognoz zmienności. Zagadnienia te były już częściowo omawiane w pracach Doman i Doman (2004), oraz Fiszeder (2004c), jednakże tutaj zostały znacząco rozszerzone. Wybór miary zmienności może mieć wpływ na ocenę trafności poszczególnych metod prognozowania. Przyjęcie do oceny trafności prognoz zmienności kwadratów dziennych stóp zwrotu jako realizacji zmienności może prowadzić do błędnych wniosków.

W pracy przedstawiono następujące modele i metody prognozowania zmienności: modele GARCH, metoda zmienności historycznej, model błędzenia przypadkowego dla wariancji, metoda wariancji ruchomej, metoda wyrównywania wykładniczego dla wariancji, model stochastycznej zmienności. Omówiono również zagadnienia związane z modelowaniem danych o częstotliwości wyższej niż dzienna, modelowanie zmienności zrealizowanej i zmienność implikowaną. Zaproponowano również nowy sposób wykorzystania informacji o maksymalnych i minimalnych notowaniach do estymacji parametrów modelu GARCH. Prognozy, budowane na podstawie tak oszacowanego modelu, są na ogół trafniejsze od prognoz konstruowanych na podstawie modelu GARCH szacowanego w sposób tradycyjny, czyli z wykorzystaniem danych obejmujących jedynie ceny zamknięcia. W pracy zaprezentowano również podstawowe metody oceny trafności prognoz zmienności. Wybór odpowiedniego kryterium oceny jest równie ważny, jak wybór metody prognozowania. Nie istnieje jedna miara oceny trafności prognoz zmienności, która byłaby powszechnie akceptowana we wszystkich zastosowaniach. Okazuje się, że wybór metody oceny trafności prognoz może wpływać w dużym stopniu na ocenę trafności.

W tej części pracy spróbowano również sformułować szersze wnioski z dotychczas przeprowadzonych badań empirycznych dotyczących prognozowania zmienności na podstawie modeli GARCH. Przeprowadzono dziesiątki badań dotyczących oceny trafności prognoz zmienności. Wyniki dotychczasowych analiz nie wskazują jednoznacznie określonej klasy modeli, na podstawie których uzyskiwaloby się najtrafniejsze prognozy. Autorzy badań bardzo rzadko porównują uzyskane przez siebie wyniki z wynikami podobnych analiz i na ogół nie próbują wyjaśniać różnic w uzyskanych rezultatach. Do nielicznych prac, w których dokonuje się oceny porównania trafności różnych metod prognozowania zmienności można zaliczyć pracę Poona i Grangera (2003). Niniejsza praca jest rozszerzeniem oceny przedstawionej przez powyższych autorów, w kierunku zastosowania modeli GARCH. Część dotyczącą prognozowania zmienności zamyka badanie empiryczne przeprowadzone dla GPW w Warszawie dotyczące prognozowania zmienności dziennych i tygodnio-

wych stóp zwrotu. Jest ono znaczącym rozszerzeniem analiz przedstawionych w pracy Fiszdera (2007b). Przeprowadzone badanie jest jednym z najszerzych w literaturze ze względu na modele GARCH, rozszerzone o dodatkowe informacje, między innymi o prawdziwy zakres zmiany, różnicę między logarytmami z maksymalnej i minimalnej ceny w ciągu dnia, sumę kwadratów stóp zwrotu o częstotliwości wyższej niż dzienna, kwadrat stopy zwrotu indeksu giełdy w Stanach Zjednoczonych. Poza tradycyjnie stosowanymi postaciami modeli GARCH, jak: IGARCH, GARCH-M, EGARCH, GJR-GARCH, TGARCH, FIGARCH, modele GARCH z warunkowym rozkładem normalnym i t-Studenta analizowano również modele opisujące wahania sezonowe, efekt dnia tygodnia oraz efekt związany z okresami świątecznymi, model GARCH z progowym efektem GARCH-M, model GARCH z indeksem giełdy w Stanach Zjednoczonych w średniej oraz model GARCH szacowany na podstawie przeskalowanego prawdziwego zakresu zmiany. Dodatkowo zastosowano również inne metody prognozowania zmienności, w tym również metody stosowane przez praktyków rynku finansowego: model błędzenia przypadkowego dla wariancji, metodę zmienności historycznej, metodę wariancji ruchomej, metodę wyrównywania wykładniczego dla wariancji, model zmienności stochastycznej, model błędzenia przypadkowego dla zmienności zrealizowanej oraz zmienność implikowaną, wyznaczoną na podstawie cen opcji.

W celu sformułowania ogólnych wniosków z przeprowadzonych badań uzyskane wyniki dotyczące trafności prognoz poszczególnych specyfikacji modeli porównano z własnościami badanych szeregów czasowych, rankingiem modeli według kryterium informacyjnego Schwarza oraz z wynikami analizy trafności prognoz zmienności wewnątrz próby. Pokazano, że można, przeprowadzając analizę wewnątrz próby dla tej samej miary, na podstawie której dokonuje się oceny poza próbą, wskazać postacie modeli umożliwiające skonstruowanie trafniejszych prognoz zmienności. Takie badanie wewnątrz próby ma większe szanse na wybór najlepszej parametryzacji modeli niż analiza statystycznych własności szeregów czasowych i kryteriów informacyjnych.

W podrozdziale 3.3 przedstawiono modele i metody najczęściej wykorzystywane do prognozowania macierzy kowariancji stóp zwrotu: wielowymiarowe modele GARCH, bezwarunkową macierz kowariancji, ruchomą macierz kowariancji, metodę wyrównywania wykładniczego dla macierzy kowariancji, wielowymiarowy model stochastycznej zmienności. Omówiono również modelowanie danych o częstotliwości wyższej niż dzienna, modelowanie kowariancji zrealizowanej, korelację implikowaną i redukcję do sze-

regu jednowymiarowego. W odróżnieniu od zmienności, prognoza macierzy kowariancji bardzo rzadko jest celem ostatecznym badania. Oceny trafności prognoz macierzy kowariancji dokonuje się na ogół na podstawie miar, które wykorzystuje się w określonych zastosowaniach. Z tego względu w podrozdziale tym nie ma analizy empirycznej dotyczącej prognozowania macierzy kowariancji. Wyniki takich badań zostały przedstawione w rozdziale 4 (prognozowanie VaR), w rozdziale 5 (konstrukcja portfela optymalnego) oraz w rozdziale 6 (zabezpieczanie przed ryzykiem).

### 3.1. PROGNOZOWANIE POZIOMU PROCESU

Obecność efektu ARCH wprawdzie nie wpływa na sposób budowy prognoz punktowych poziomu procesu dla symetrycznej funkcji straty<sup>68 69</sup>, ale wpływa na: ocenę dokładności prognoz, konstrukcję prognoz przedziałowych, konstrukcję prognoz poziomu procesu dla asymetrycznej funkcji straty oraz konstrukcję prognoz prawdopodobieństwa przyjęcia przez zmienną określonych wartości (por. Baillie i Bollerslev, 1992; Andersen, Bollerslev, Christoffersen i Diebold, 2006). Poniżej wyjaśniano te zagadnienia na przykładach.

Niech  $y_t$  będzie procesem ARMA( $k, l$ ):

$$\phi(B)y_t = \theta(B)\varepsilon_t, \quad (3.1.1)$$

gdzie:  $\phi(B) = 1 - \phi_1 B - \dots - \phi_k B^k$ ,  $\theta(B) = 1 + \theta_1 B + \dots + \theta_l B^l$ ,  $B$  jest operatorem przesunięcia. Predyktor o najmniejszym błędzie średniokwadratowym ma postać (patrz Box i Jenkins, 1983; Bera i Higgins, 1993):

$$E(y_{t+s} \mid \psi_t) = \sum_{i=1}^k \phi_i E(y_{t+s-i} \mid \psi_t) + \sum_{j=1}^l \theta_j E(\varepsilon_{t+s-j} \mid \psi_t), \quad (3.1.2)$$

gdzie:  $E(y_{t+s-i} \mid \psi_t)$  dla  $i < s$ , oblicza się rekurencyjnie według formuły (3.1.2),  $E(y_{t+s-i} \mid \psi_t) = y_{t+s-i}$  dla  $i \geq s$ ,  $E(\varepsilon_{t+s-j} \mid \psi_t) = 0$  dla  $j < s$ ,  $E(\varepsilon_{t+s-j} \mid \psi_t) = \varepsilon_{t+s-j}$  dla  $j \geq s$ .

<sup>68</sup> O ile wariancja warunkowa nie wpływa na średnią warunkową, a taka sytuacja występuje w przypadku wielu procesów finansowych, ponieważ wyższej oczekiwanej stopie zwrotu towarzyszy na ogół większe ryzyko (patrz model GARCH-M).

<sup>69</sup> Pod pojęciem funkcji straty rozumie się tutaj funkcję realizacji procesu oraz predyktora, reprezentującą ilościowo skutki błędu predykcji.

Zakładając, że moduły pierwiastków równania charakterystycznego części AR są większe od jedności, błąd prognozy na  $s$  okresów w przód dany jest wzorem:

$$e_{t,s} = y_{t+s} - E(y_{t+s} \mid \psi_t) = \sum_{i=0}^{s-1} \gamma_i \varepsilon_{t+s-i}, \quad (3.1.3)$$

gdzie parametry  $\gamma_i$  wynikają z rozwinięcia  $\phi(B)^{-1}\theta(B)$ .

Wariancja błędu prognozy wynosi:

$$\text{var}(e_{t,s} \mid \psi_t) = \sum_{i=0}^{s-1} \gamma_i^2 E(\varepsilon_{t+s-i}^2 \mid \psi_t). \quad (3.1.4)$$

Jeżeli proces ma wariancję warunkowo homoskedastyczną oraz  $E(\varepsilon_{t+s-i} \mid \psi_t) = \sigma^2$ , to formuła (3.1.4) ma następującą postać:

$$\text{var}(e_{t,s} \mid \psi_t) = \sigma^2 \sum_{i=0}^{s-1} \gamma_i^2. \quad (3.1.5)$$

Wariancja predykcji jest rosnącą funkcją horyzontu prognozy i nie zależy od zbioru informacji  $\psi_t$ . Jeżeli jednak występuje efekt ARCH i proces ma wariancję warunkowo heteroskedastyczną, wówczas wariancja predykcji zmienia się w czasie zgodnie ze wzorem (3.1.4) i może nawet się zdarzyć, że nastąpi jej spadek wraz ze wzrostem horyzontu prognozy<sup>70</sup>. Sytuacja taka występuje, gdy prognoza jest budowana w okresie o bardzo dużej zmienności (por. Bera i Higgins, 1993).

W przypadku, gdy funkcja straty jest asymetryczna, wówczas zmienność wariancji ma również istotny wpływ na budowę prognoz dla poziomu zjawiska. Załóżmy, że  $y_{t+1}$  dane jest formułą:

$$y_{t+1} = \mu_{t+1|t} + \sigma_{t+1|t} z_{t+1}, \quad z_t \sim \text{IID } D, \quad (3.1.6)$$

gdzie  $\mu_{t+1|t} = E(y_{t+1} \mid \psi_t)$ ,  $\sigma_{t+1|t}^2 = \text{var}(y_{t+1} \mid \psi_t)$ ,  $D$  oznacza rozkład o średniej równej zero i wariancji jeden. Rozważmy przykładową asymetryczną funkcję straty postaci:

$$L(e_{t+1}) = a|e_{t+1}|I(e_{t+1} > 0) + b|e_{t+1}|I(e_{t+1} \leq 0), \quad (3.1.7)$$

gdzie  $a, b > 0$ ,  $I(\cdot)$  oznacza zmienną zero-jedynkową przyjmującą wartość jeden, gdy spełniony jest odpowiedni argument.

<sup>70</sup> Formuła na  $E(\varepsilon_{t+s}^2 \mid \psi_t)$  w przypadku występowania efektu ARCH została przedstawiona w postaci wzoru (3.2.26).

Optymalna prognoza  $y_t$  jest dana formułą:

$$\hat{y}_{t+1|t} = \mu_{t+1|t} + \sigma_{t+1|t} D^{-1}(a / (a + b)) \quad (3.1.8)$$

i jest równa średniej warunkowej wtedy i tylko wtedy, gdy  $D^{-1}(a / (a + b)) = 0$ , gdzie  $D(\cdot)$  oznacza dystrybuantę.

Zmienność wariancji ma również wpływ na konstrukcję prognoz przedziałowych. Przedział prognozy dla prawdopodobieństwa  $p$  można zapisać jako:

$$\left( \mu_{t+1|t} + \sigma_{t+1|t} D^{-1}(p / 2); \mu_{t+1|t} + \sigma_{t+1|t} D^{-1}(1 - p / 2) \right). \quad (3.1.9)$$

W wielu zastosowaniach praktycznych decydent jest zainteresowany prognozami, czy określona zmienna przyjmie wartości powyżej (alternatywnie poniżej) pewnego progno. Funkcję straty można zapisać na przykład jako:

$$L(y_{t+1}, \hat{y}_{t+1|t}) = \left( I(y_{t+1} > c) - \hat{y}_{t+1|t} \right)^2. \quad (3.1.10)$$

Prognoza prawdopodobieństwa jest w tym przypadku równa:

$$\hat{y}_{t+1|t} = 1 - F\left( (c - \mu_{t+1|t}) / \sigma_{t+1|t} \right). \quad (3.1.11)$$

Zmienność wariancji wpływa na prognozę, jeżeli tylko  $c - \mu_{t+1|t} \neq 0$ . Szczególnym, ważnym przypadkiem jest sytuacja, gdy  $c = 0$  i związana jest z prognozowaniem znaku zmiennej.

### 3.2. PROGNOZOWANIE ZMIENNOŚCI

Zmienność jest jednym z ważniejszych pojęć współczesnych finansów. Znaczenie zmienności wynika zarówno z teorii finansów, jak i z zastosowań praktycznych. Zmienność stóp zwrotu instrumentów finansowych spowodowana jest po części docierającymi do inwestorów informacjami, wpływającymi na przyszłe stopy zwrotu, po części jest efektem rynkowego obrotu walorami (patrz Hull, 1998). Prognozy zmienności odgrywają ważną rolę, między innymi w wycenie aktywów finansowych, w wyborze strategii inwestycyjnej, w zarządzaniu ryzykiem, w polityce pieniężnej państwa. Literatura dotycząca prognozowania zmienności instrumentów finansowych jest niezwykle bogata (patrz Poon i Granger, 2003), ale ciągle nie ma jednoznacznych wska-

zówek dotyczących wyboru najlepszej metody prognozowania zmienności. Wyniki badań empirycznych są niejednoznaczne, a często nawet sprzeczne. W ostatnich dwudziestu latach powstało wiele uogólnień i rozszerzeń modelu GARCH, jednakże jak dotąd, nie ma zgody, co do jakości konstruowanych na ich podstawie prognoz zmienności. Wyniki dotychczasowych badań nie wskazują jednoznacznie określonej klasy modeli, na podstawie których użyłaby się najlepsze prognozy zmienności dla procesów finansowych.

### 3.2.1. POMIAR ZMIENNOŚCI

Zmienność nie jest bezpośrednio obserwowalna i jest pojęciem niejednoznacznym<sup>71</sup>. Najczęściej pod pojęciem zmienności instrumentu finansowego (lub portfela instrumentów finansowych) rozumie się miarę niepewności co do cen lub stóp zwrotu instrumentu finansowego. W pracy najczęściej zakłada się, że szeregi czasowe cen lub stóp zwrotu są realizacjami procesów stochastycznych z czasem dyskretnym<sup>72</sup>. Zmienność instrumentu finansowego można rozpatrywać zarówno w odniesieniu do cen instrumentu finansowego, jak i stóp zwrotu instrumentu finansowego. Najczęściej procesy cen instrumentów finansowych są niestacjonarne<sup>73</sup>, dlatego w niniejszej pracy bada się zmienność stóp zwrotu. Istnieje wiele miar zmienności stóp zwrotu, na przykład: wariancja, odchylenie standardowe, semiwariancja, semiodchylenie standardowe<sup>74</sup>, odchylenie przeciętne, odchylenie międzykwartyłowe, rozstęp i współczynniki zmienności. Najbardziej znanymi i najczęściej stosowanymi miarami zmienności stóp zwrotu są z pewnością wariancja i odchylenie standardowe<sup>75</sup>. Wariancja stóp zwrotu może być oszacowana na podstawie formuły:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t (r_i - \bar{r})^2, \quad (3.2.1)$$

gdzie  $\bar{r}$  jest to średnia arytmetyczna stóp zwrotu.

<sup>71</sup> Punkt 3.2.1 jest rozszerzeniem rozważań przedstawionych w pracy Fiszедера (2004c).

<sup>72</sup> Takie podejście jest przyjmowane zwykle w ekonometrii finansowej (wyjątkiem są formuły na wycenę opcji).

<sup>73</sup> Na przykład większość cen akcji, kursów walutowych oraz cen surowców.

<sup>74</sup> Semiwariancję i semiodchylenie standardowe zalicza się również do miar zagrożenia.

<sup>75</sup> Ostatnie wyniki badań wskazują, że odchylenie przeciętne może być lepszą miarą zmienności niż wariancja.



Równanie (3.2.1) może być przedstawione w postaci:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t r_i^2 - \bar{r}^2. \quad (3.2.2)$$

Dla większości szeregów finansowych, obserwowanych z częstotliwością dzienną lub wyższą, drugi człon równania jest bardzo mały w stosunku do pierwszego i może być pominięty<sup>76</sup>. Dodatkowo należy wspomnieć, że szacunek średniej stóp zwrotu, dla danych o wysokiej częstotliwości, bardzo rzadko różni się istotnie od zera.

Praktycy rynku zajmujący się na co dzień inwestowaniem podają często zmienność w skali roku. Wariancję dla okresu jednego roku obliczają na podstawie formuły:

$$\sigma_r^2[r_t(n)] = n\sigma_d^2(r_t), \quad (3.2.3)$$

gdzie  $r_t(n)$  –  $n$ -okresowa stopa zwrotu,  $\sigma_r^2[r_t(n)]$  – wariancja stóp zwrotu dla okresu jednego roku,  $\sigma_d^2(r_t)$  – wariancja stóp zwrotu dla danych dziennych,  $n$  – liczba dni sesyjnych w roku (najczęściej przyjmuje się 250 lub 252).

Oczywiście jest to wzór przybliżony. Przy konstrukcji formuły (3.2.3) zakłada się, że dni, podczas których nie ma sesji mogą być pominięte przy obliczaniu zmienności<sup>77</sup>.

Początkowo do szacowania wariancji i odchylenia standardowego wykorzystywano daneienne lub ewentualnie dane o mniejszej częstotliwości. Jako realizacje dziennej zmienności, do oceny prognoz, przyjmowano natomiast kwadraty (rzadziej wartości bezwzględne) dziennych stóp zwrotu. Pomimo tego, że kwadrat stopy zwrotu jest nieobciążonym estymatorem zmienności, to jest zanieczyszczony szumem (patrz Andersen i Bollerslev, 1998). Kwadrat składnika losowego z równania dla warunkowej średniej można zapisać jako:

$$\varepsilon_t^2 = h_t z_t^2 = h_t + h_t (z_t^2 - 1). \quad (3.2.4)$$

Wartość oczekiwana drugiego składnika po prawej stronie jest równa zeru, jednakże w zastosowaniach empirycznych, dla danych dziennych lub tygodniowych, wariancja  $z_t^2$  jest o cały rząd większa niż wariancja  $h_t$  (czyli

<sup>76</sup> W wielu zastosowaniach finansowych, dla danych o wysokiej częstotliwości, szacunek oczekiwanej stopy zwrotu, na podstawie średniej stopy zwrotu z próby, prowadzi do obniżenia skuteczności metod (patrz np. Figlewski, 1994). Wynika to z błędów związanych z estymacją oczekiwanej stopy zwrotu.

<sup>77</sup> Na temat innych założeń patrz punkt 4.1.

$var(h_t)$ ). W związku z tym panowało powszechne przekonanie, że prognozy zmienności konstruowane na podstawie modeli GARCH charakteryzują się słabą jakością (patrz np. Pagan i Schwert, 1990; Day i Lewis, 1992; Cumby, Figlewski i Hasbrouck, 1993; West i Cho, 1995; Jorion, 1995). Do oceny trafności prognoz można zastosować współczynnik determinacji  $R^2$ , oszacowany dla następującego równania<sup>78</sup>:

$$r_T^2 = \varphi_0 + \varphi_1 h_T + \varepsilon_T, \quad (3.2.5)$$

gdzie  $r_T$  oznacza stopę zwrotu w momencie prognozowanym  $T$ ,  $h_T$  to prognoza wariancji warunkowej dla momentu  $T$  skonstruowana na podstawie modelu GARCH. Badania empiryczne pokazały, że szacunki współczynnika  $R^2$  dla modelu w postaci (3.2.5), gdzie za  $r_T$  przyjęto dzienną stopę zwrotu, a model GARCH był szacowany na podstawie danych dziennych, przyjmują zaskakująco niskie wartości, rzadko przekraczające 0,05. Jednakże Andersen i Bollerslev (1998) dowodzą teoretycznie, że niskie szacunki współczynnika  $R^2$  nie świadczą o słabej jakości konstruowanych prognoz, lecz są naturalne dla tego typu modeli, przy tak określonej realizacji zmienności. Z tego względu jako zmienność zrealizowaną lepiej jest przyjąć sumę kwadratów stóp zwrotu o częstotliwości wyższej niż dzienna (dane o częstotliwości wyższej niż dzienna określane są mianem danych intraday)<sup>79 80</sup>:

$$RV1_t = \sum_{m=1}^M r_{m,t}^2, \quad (3.2.6)$$

gdzie  $r_{m,t}$  jest to stopa zwrotu dla danych o wysokiej częstotliwości,  $M$  – liczba obserwacji w ciągu dnia.

Występuje tu analogia do tego, jak szacowano wcześniej zmienność dla danych o częstotliwości mniejszej niż dzienna (np. zmienność miesięczną), wykorzystując dane dzienne (np. French, Schwert i Stambaugh, 1987; Schwert, 1990). Oceny trafności prognoz zmienności można wówczas dokonać, szacując współczynnik  $R^2$  dla równania:

$$RV1_T = \varphi_0 + \varphi_1 h_T + \varepsilon_T. \quad (3.2.7)$$

<sup>78</sup> Metody oceny trafności prognoz zmienności zostały opisane w punkcie 3.2.3.

<sup>79</sup> W najnowszych pracach sugeruje się przyjmowanie wartości bezwzględnych zamiast kwadratów stóp zwrotu, jednakże ta kwestia wymaga dalszych badań.

<sup>80</sup> Takie podejście było już stosowane wcześniej w literaturze, zanim zastosowali je Andersen i Bollerslev (1998), patrz np. Hsieh (1989a).

Badania empiryczne pokazują, że wraz ze wzrostem częstotliwości obserwacji (do pewnego momentu), zwiększają się szacunki współczynnika  $R^2$  (patrz np. Andersen i Bollerslev, 1998, Martens, 2001). Na przykład dla danych dotyczących kursów walutowych, obserwowanych z częstotliwością dzienną,  $R^2$  oszacowany dla równania (3.2.5) kształtował się na poziomie zaledwie 0,05. Dla danych obserwowanych co godzinę ( $M = 24$ ), szacunek  $R^2$  dla równania (3.2.7) wzrasta do 0,2–0,3, a dla danych obserwowanych w okresach 5-minutowych ( $M = 288$ ) wzrasta do 0,4–0,5 (patrz Andersen i Bollerslev, 1998). Znaczącą poprawę trafności prognoz można również zaobserwować na podstawie innych miar oceny jakości prognoz (patrz Andersen, Bollerslev i Lange, 1999). Poprawę wyników można wyjaśnić wzrostem ilości informacji, jakie zawiera szereg czasowy o większej częstotliwości informacji. Przyjęcie, jako realizacji zmienności, sum kwadratów stóp zwrotu o częstotliwości wyższej niż dzienna, zamiast kwadratów dziennych stóp zwrotu, wydaje się intuicyjnie uzasadnione. Rozważmy następujący przykład: cena aktywu w ciągu sesji rośnie o 3%, a następnie spada do ceny zamknięcia z poprzedniej sesji. Kwadrat dziennej stopy zwrotu informuje o braku zmienności, podczas gdy cena zmieniała się znacząco w ciągu sesji.

Również badania teoretyczne przy założeniu, że proces cen instrumentu finansowego jest procesem z czasem ciągłym, uzasadniają aproksymowanie nieobserwowalnej zmienności sumą kwadratów stóp zwrotu o częstotliwości wyższej niż dzienna (patrz np. Andersen, Bollerslev, Diebold i Labys, 2001). Użyteczne może być przyjęcie założenia, że ceny instrumentów finansowych można opisać przez procesy stochastyczne z czasem ciągłym. Przy ogólnych założeniach proces logarytmu ceny może być wówczas określony przez następujące stochastyczne równanie różniczkowe:

$$dp(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t), \quad (3.2.8)$$

gdzie  $\mu(t)$  to proces oznaczający dryf (średnią),  $\sigma(t)$  – proces oznaczający zmienność, a  $W(t)$  oznacza standardowy proces Browna.

Jednookresowa stopa zwrotu dana jest formułą:

$$r(t) = p(t) - p(t-1) = \int_{t-1}^t \mu(s)ds + \int_{t-1}^t \sigma(s)dW(s). \quad (3.2.9)$$

Formalną miarą ex-post zmienności stóp zwrotu, wyprowadzoną na podstawie teorii zmienności kwadratowej, dla semimartynała może być zmienność zintegrowana (patrz Andersen, Bollerslev, Christoffersen i Diebold, 2006):

$$IV(t) = \int_{t-1}^t \sigma^2(s) ds. \quad (3.2.10)$$

Przy dyskretyzacji procesu, dla małego przedziału czasowego  $\Delta$ , można zapisać:

$$r(t, \Delta) \equiv p(t) - p(t - \Delta) \approx \mu(t - \Delta)\Delta + \sigma(t - \Delta)\Delta W(t), \quad (3.2.11)$$

gdzie  $\Delta W(t) \equiv W(t) - W(t - \Delta) \sim N(0, \Delta)$ .

Zmienność zrealizowaną można wówczas zdefiniować jako:

$$RV(t, \Delta) = \sum_{j=1}^{1/\Delta} r^2(t-1 + j\Delta, \Delta). \quad (3.2.12)$$

Zmienność zrealizowana jest zgodnym (a zatem asymptotycznie nieobciążonym) estymatorem zmienności zintegrowanej:

$$RV(t, \Delta) \rightarrow IV(t), \text{ jeśli } \Delta \rightarrow 0. \quad (3.2.13)$$

W przypadku występowania nieciągłości cen, związanych ze skokami (ang. *jumps*), możemy zapisać:

$$dp(t) = \mu(t)dt + \sigma(t)dW(t) + j(t)dq(t), \quad t \in [0, T], \quad (3.2.14)$$

gdzie  $q(t)$  przyjmuje wartość jeden, gdy skok występuje i zero – w przeciwnym wypadku,  $j(t)$  odpowiada za intensywność skoku.

W takiej sytuacji formalną miarą ex-post zmienności stóp zwrotu może być zmienność kwadratowa<sup>81</sup>:

$$QV(t) = \int_{t-1}^t \sigma^2(s) ds + \sum_{t-1 < s \leq t} \kappa^2(s), \quad (3.2.15)$$

gdzie  $\kappa(t) = j(t)I(q(t) = 1)$ ,  $I(\cdot)$  oznacza zmienną zero-jedynkową.

Zmienność zrealizowana jest zgodnym (a zatem asymptotycznie nieobciążonym) estymatorem zmienności kwadratowej:

$$RV(t, \Delta) \rightarrow QV(t), \text{ jeśli } \Delta \rightarrow 0. \quad (3.2.16)$$

<sup>81</sup> W przypadku procesu bez skoków zmienność kwadratowa redukuje się do zmienności zintegrowanej.

Wiadomo również, że w przypadku, gdy proces logarytmu ceny jest procesem Browna, to zmienność zrealizowana jest efektywniejszym estymatorem wariacji niż kwadrat dziennej stopy zwrotu.

Badania Pattona (2006b) oraz Hansena i Lunde'a (2006) pokazują, że w zależności od zastosowanej miary zmienności, błędy w ocenie trafności poszczególnych metod prognozowania mogą przyjmować rozmiary od znaczących (w przypadku kwadratu dziennej stopy zwrotu) do nieistotnych (w przypadku kwadratów 5-minutowych stóp zwrotu). Na płynnych rynkach z ciągłym systemem notowań opisywanie cen instrumentów finansowych jako procesów stochastycznych z czasem ciągłym, mimo oczywistej idealizacji, może zatem dostarczać cennych informacji, nie tylko z teoretycznego, ale również z praktycznego punktu widzenia.

Istotną kwestią przy analizie danych o częstotliwości wyższej niż dzienna jest wybór odpowiedniej częstotliwości danych. Analizy teoretyczne pokazują, że im wyższa częstotliwość danych, tym suma kwadratów odpowiednich stóp zwrotu (postać (3.2.6)) lepiej aproksymuje nieobserwowalną zmienność. Jednakże czynniki związane z mikrostrukturą rynku (np. płynność, różnice między ofertą kupna a ofertą sprzedaży, interwencje specjalistów) powodują, że zwiększanie częstotliwości ma sens, ale tylko do pewnego momentu. Andersen, Bollerslev, Diebold i Labys (2000) oraz Oomen (2001) pokazują, że występowanie dodatniej (ujemnej) autokorelacji stóp zwrotu powoduje, iż miara w postaci (3.2.6) niedoszacowuje (przeszacowuje) „prawdziwą” zmienność. Ponieważ dla danych o częstotliwości wyższej niż dzienna autokorelacja jest stosunkowo silna (dla indeksów najczęściej występuje dodatnia autokorelacja, a dla pojedynczych akcji – częściej ujemna autokorelacja), dlatego niedoszacowanie lub przeszacowanie zmienności może być stosunkowo duże. Oomen (2001) szacuje, że dla indeksu FTSE-100, obserwowanego w okresach 1-minutowych, zmienność jest niedoszacowana w około 35%. Ustalając częstotliwość obserwacji, należy zatem dokonać kompromisu pamiętając, że zwiększanie częstotliwości z jednej strony powoduje lepszą aproksymację nieznaną zmienności (wskazują na to badania teoretyczne), a z drugiej strony powoduje wzrost błędów związanych z mikrostrukturą rynku. Z tego względu wybrana częstotliwość obserwacji może być różna dla różnych rynków finansowych, a nawet pojedynczych instrumentów finansowych. Zaproponowano różne metody wyboru „optymalnej” częstotliwości obserwacji. Niektórzy autorzy przedstawiają również szereg propozycji, mających na celu wyeliminowanie błędów, związanych z mikrostrukturą rynku, jak np. filtrowanie danych czy podpróbkiowanie (ang. *subsampling*).

Wyniki badań Andersena, Bollersleva i Langego (1999) pokazują, że przyjmując za realizacje zmienności sumy kwadratów stóp zwrotu o częstotliwości wyższej niż dzienna, uzyskuje się znaczny wzrost trafności prognoz konstruowanych na podstawie modelu GARCH, nie tylko w przypadku jednodniowego horyzontu prognozy, ale również w przypadku dłuższego horyzontu prognozy (tydzień i miesiąc).

Miara zmienności zrealizowanej, zdefiniowana w równaniu (3.2.6), może być stosowana tylko w przypadku rynków finansowych, na których notowania odbywają się przez całą dobę (np. niektóre rynki walutowe). Ponieważ na większości rynków finansowych czas pracy jest ograniczony, dlatego miara ta powinna być wówczas skorygowana w następujący sposób:

$$RV2_t = r_{n,t}^2 + \sum_{d=1}^D r_{d,t}^2, \quad (3.2.17)$$

gdzie  $r_{n,t}$  jest to tzw. nocna stopa zwrotu (ang. *overnight return*), tzn. stopa zwrotu obliczana od ceny zamknięcia w dniu  $t - 1$  do ceny otwarcia w dniu  $t$ ,  $r_{d,t}$  to stopa zwrotu dla danych o częstotliwości wyższej niż dzienna.

Odstęp czasowy między ostatnim notowaniem danego dnia a pierwszym notowaniem następnego dnia jest długi w porównaniu z odstępem czasowym dla stopy zwrotu o częstotliwości wyższej niż dzienna, co powoduje, że w tym czasie publikowanych jest relatywnie więcej informacji gospodarczych (niektóre informacje są publikowane celowo po zamknięciu notowań, z kolei informacje dotyczące zagranicznych rynków finansowych mogą pojawiać się po zamknięciu notowań, ze względu na różnice czasowe pomiędzy krajami). Z tego powodu nocne stopy zwrotu mają inne własności. Mianowicie charakteryzują się zdecydowanie większą zmiennością i jednocześnie są trudniejsze do prognozowania. Dlatego też zaczęto konstruować miary zmienności, w których pomija się nocną stopę zwrotu. Najprostsza postać jest równa sumie kwadratów stóp zwrotu o częstotliwości wyższej niż dzienna, z pominięciem nocnej stopy zwrotu:

$$RV3_t = \sum_{d=1}^D r_{d,t}^2. \quad (3.2.18)$$

Miara w postaci (3.2.18) daje jednakże zaniżone szacunki zmienności. W związku z tym Martens (2002) proponuje przeskalowanie  $RV3_t$  za pomocą pewnego współczynnika  $c$ :

$$RV4_t = (1 + c) \sum_{d=1}^D r_{d,t}^2. \quad (3.2.19)$$

Za współczynnik  $c$  przyjmuje następujący iloraz:

$$c = \frac{\sigma_{co}^2}{\sigma_{oc}^2}, \quad (3.2.20)$$

gdzie  $\sigma_{co}^2 = \text{var}(r_{n,t})$ ,  $\sigma_{oc}^2 = \text{var}\left(\sum_{d=1}^D r_{d,t}\right)$ .

Badania empiryczne pokazują, że przyjęcie jako realizacje zmienności miar w postaci (3.2.18) i (3.2.19) powoduje dalszy wzrost trafności prognoz konstruowanych na podstawie modelu GARCH (Martens, 2002; Doman, 2004). Należy jednakże zauważyć, że pominięcie nocnych stóp zwrotu powoduje wygładzenie szeregu realizacji zmienności, dlatego wzrost trafności prognoz konstruowanych na podstawie modelu GARCH nie jest zaskoczeniem. Wydaje się jednak, że rozumowanie polegające na dopasowywaniu miary realizacji zmienności do wariancji konstruowanej na podstawie modelu GARCH, jest błędne, ponieważ proces GARCH nie jest procesem generującym rzeczywiste dane finansowe, lecz jest dalekim od ideału przybliżeniem procesów generujących te dane. Zdają się to po części również potwierdzać rezultaty badań przeprowadzonych przez Martensa, gdzie wyniki uzyskane dla kontraktów terminowych na indeks S&P 500 były niezgodne z wynikami symulacji.

W przypadku, gdy nie są dostępne odpowiednie dane o wysokiej częstotliwości alternatywą może być wykorzystanie danych o cenach maksymalnych i minimalnych w ciągu dnia. Takie dane są powszechnie dostępne dla większości aktywów finansowych. Na przykład dla geometrycznego ruchu Browna zachodzi następujące równanie:

$$E\left[\left(\max\{p(\tau)|t-1 \leq \tau \leq t\} - \min\{p(\tau)|t-1 \leq \tau \leq t\}\right)^2\right] = 4\log(2)\sigma^2. \quad (3.2.21)$$

Zatem jako przybliżenie realizacji zmienności w chwili  $t$  można przyjąć:

$$\sigma_t^2 = \frac{1}{4\log(2)} \left(\max\{p(\tau)|t-1 \leq \tau \leq t\} - \min\{p(\tau)|t-1 \leq \tau \leq t\}\right)^2. \quad (3.2.22)$$

Przybliżenie wynika z faktu, że dla rzeczywistych procesów czynnik, przez który mnożony jest kwadrat rozstępu jest na ogół różny od  $1/4\log(2)$ . Miara ta może być również z powodzeniem stosowana w przypadku, gdy dane intraday są dostępne, ale czynniki związane z mikrostrukturą rynku mają istotny wpływ na kwotowania. Najczęściej jest tak w przypadku mało płynnych akty-

wów. Badania Pattona (2006b) pokazują dodatkowo, że miara (3.2.22) stosowana jako przybliżenie zmienności daje podobne wyniki jak zmienność zrealizowana, wyznaczona na podstawie czterech, pięciu lub sześciu obserwacji w ciągu dnia.

Miarą opartą również na wykorzystaniu informacji o cenach maksymalnych i minimalnych jest prawdziwy zakres zmian ( $TR$  – ang. *true range*). W analizie technicznej miara ta jest stosowana między innymi do oceny zmienności cen. Pojęcie  $TR$  zostało wprowadzone przez Wildera (1978). Dla danego instrumentu finansowego i chwili  $t$  prawdziwy zakres zmiany jest obliczany jako:

$$TR_t = \max\{H_t - L_t, |C_{t-1} - H_t|, |C_{t-1} - L_t|\}, \quad (3.2.23)$$

gdzie  $H_t$  i  $L_t$  oznaczają odpowiednio cenę maksymalną i minimalną w chwili  $t$ ,  $C_{t-1}$  to cena zamknięcia w chwili  $t-1$ .

Prawdziwy zakres zmian daje wyższe szacunki zmienności niż suma kwadratów stóp zwrotu o częstotliwości wyższej niż dzienna, dlatego powinien być przeskalowany<sup>82</sup>.

W praktycznych zastosowaniach nigdy nie uda się uzyskać idealnej miary zmienności, nawet korzystając z danych o bardzo wysokiej częstotliwości. Jednakże pomimo wielu wad, suma kwadratów stóp zwrotu o częstotliwości wyższej niż dzienna, jest zdecydowanie lepszą miarą zmienności niż suma kwadratów dziennych stóp zwrotu i dlatego w pierwszej kolejności powinna być stosowana do oceny jakości prognoz zmienności.

### 3.2.2. MODELE ZMIENNOŚCI I METODY PROGNOZOWANIA ZMIENNOŚCI

Jednym z najczęściej wykorzystywanych, do prognozowania zmienności stóp zwrotu modelem, jest model GARCH. Stosowane w niniejszej pracy postacie jednorównaniowych modeli GARCH zostały zaprezentowane w podrozdziale 1.2. Poniżej przedstawiono sposób konstrukcji prognoz dla tych parametryzacji modeli. W dalszej części omówiono również najczęściej stosowane przez praktyków rynku oraz inne wybrane metody prognozowania zmienności: metodę zmienności historycznej, model błędzenia przypad-

<sup>82</sup> Patrz formuła (3.2.41).



kowego, metodę wariancji ruchomej, metodę wyrównywania wykładniczego, a także model stochastycznej zmienności.

Załóżmy, że proces stóp zwrotu można przedstawić w postaci:

$$r_t = \mu_t + \varepsilon_t. \quad (3.2.24)$$

Na ogół analizę prognozowania zmienności stóp zwrotu przeprowadza się dla  $\varepsilon_t$ , czyli pomija się oczekiwaną zmienność  $\mu_t$ . W niektórych zastosowaniach finansowych może się jednak okazać, że należy również dodatkowo uwzględnić zmienność bezwarunkową, wynikającą z  $\mu_t$  (patrz Fiszeder, 2006c).

### Modele GARCH

Przyjmując za  $\nu_t = \varepsilon_t^2 - h_t$ , model GARCH  $(p, q)$  można przedstawić w postaci modelu ARMA  $(m, p)$  dla  $\varepsilon_t^2$ :

$$\varepsilon_{t+s}^2 = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i) \varepsilon_{t+s-i}^2 - \sum_{j=1}^p \beta_j \nu_{t+s-j} + \nu_{t+s}, \quad (3.2.25)$$

gdzie:  $m = \max \{p, q\}$ ,  $\alpha_i = 0$  dla  $i > q$  oraz  $\beta_j = 0$  dla  $j > p$ . Korzystając z formuły (3.2.25), predyktor dla warunkowej wariancji dla modelu GARCH  $(p, q)$ , na  $s$  okresów w przód, można zapisać w następującej formie:

$$E(\varepsilon_{t+s}^2 \mid \psi_t) = \alpha_0 + \sum_{i=1}^m (\alpha_i + \beta_i) E(\varepsilon_{t+s-i}^2 \mid \psi_t) - \sum_{j=1}^p \beta_j E(\nu_{t+s-j} \mid \psi_t), \quad (3.2.26)$$

gdzie:  $E(\varepsilon_{t+s-i}^2 \mid \psi_t)$  dla  $i < s$ , oblicza się rekurencyjnie według formuły (3.2.26),  $E(\varepsilon_{t+s-i}^2 \mid \psi_t) = \varepsilon_{t+s-i}^2$  dla  $i \geq s$ ,  $E(\nu_{t+s-j} \mid \psi_t) = 0$  dla  $j < s$ ,  $E(\nu_{t+s-j} \mid \psi_t) = \nu_{t+s-j}$  dla  $j \geq s$ .

Formuła (3.2.26) może być również wykorzystywana przy konstrukcji przedziałów ufności dla wartości średniej procesu.

Prognoza wariancji warunkowej na  $s$  okresów w przód może być skonstruowana na podstawie szacunku wariancji warunkowej na jeden okres w przód. Oznaczmy predyktor warunkowej wariancji jako  $E(\varepsilon_{t+s}^2 \mid \psi_t) = h_{t+s|t, p}$ . Na przykład dla modelu GARCH(1,1), dokonując kolejnych podstawień w (3.2.26), otrzymamy formułę:

$$\begin{aligned} h_{t+s|t, p} &= \sum_{i=0}^{s-2} \alpha_0 (\alpha_1 + \beta_1)^i + (\alpha_1 + \beta_1)^{s-1} h_{t+1|t, p} \\ &= \frac{\alpha_0 [1 - (\alpha_1 + \beta_1)^{s-1}]}{1 - \alpha_1 - \beta_1} + (\alpha_1 + \beta_1)^{s-1} h_{t+1|t, p}. \end{aligned} \quad (3.2.27)$$

Dla procesu kowariancyjnie stacjonarnego, podstawiając za  $\alpha_0 / (1 - \alpha_1 - \beta_1) = \sigma^2$ , otrzymamy wzór na prognozę z wykorzystaniem wariancji bezwarunkowej:

$$h_{t+s|t,p} = \sigma^2 + (\alpha_1 + \beta_1)^{s-1} (h_{t+1|t,p} - \sigma^2). \quad (3.2.28)$$

Kolejne prognozy wygasają w tempie wykładniczym do poziomu wariancji bezwarunkowej. Prognozy konstruowane na podstawie modelu GARCH uwzględniają zatem własność procesów kowariancyjnie stacjonarnych, polegającą na powrocie zmienności do średniej.

Analogiczne wzory dla prognoz wariancji warunkowej można wyznaczyć dla innych postaci jednorównaniowych modeli GARCH. Formuły prognoz na jeden okres w przód wynikają na ogół z samego zapisu modelu i są funkcjami parametrów przy znanych przeszłych danych. Predyktory dla parametryzacji modeli GARCH stosowanych w niniejszej pracy podano w tabeli 3.1. Predyktory dla innych, bardziej złożonych specyfikacji modeli GARCH podają Angelidis i Degiannakis (2006). Trudniejsze jest na ogół wyprowadzenie wzorów dla dłuższego horyzontu prognozy. Poniżej podano formuły tylko dla podstawowych postaci modeli GARCH.

Dla modelu IGARCH(1,1) wystarczy skorzystać z równania (3.2.27), pamiętając, że  $\alpha_1 + \beta_1 = 1$ . Prognoza wariancji warunkowej dana jest zatem formułą:

$$h_{t+s|t,p} = (s-1) \alpha_0 + h_{t+1|t,p}. \quad (3.2.29)$$

Jeżeli  $\alpha_0 \neq 0$ , to prognozy wariancji rosną do nieskończoności wraz ze wzrostem horyzontu. W przeciwnym wypadku prognozy są takie same dla wszystkich horyzontów.

Nie zawsze jest możliwe wyprowadzenie prostej formuły dla prognoz na  $s$  okresów w przód, bez przyjęcia dodatkowych założeń. Na przykład, aby wyznaczyć prognozę dla modelu GJR-GARCH(1,1) (patrz tabela 1.1), można przyjąć, że  $P(z_{t+1} \equiv h_{t+1|t}^{-1/2} \varepsilon_{t+1} < 0) = 0,5^{83}$ . Wówczas prognoza wariancji jest równa:

$$h_{t+s|t,p} = \sigma^2 + (\alpha_1 + 0,5\omega_1 + \beta_1)^{s-1} (h_{t+1|t,p} - \sigma^2), \quad (3.2.30)$$

gdzie  $\sigma^2 = \alpha_0 / (1 - \alpha_1 - 0,5\omega_1 - \beta_1)$ .

<sup>83</sup> Założenie jest prawdziwe dla rozkładów symetrycznych.

Dla modelu EGARCH (patrz tabela 1.1) można łatwo wyprowadzić wzory na prognozy na  $s$  okresów w przód, jednakże dla logarytmu wariancji warunkowej, to jest  $E(\ln(h_{t+s})|\psi_t)$ . Niestety transformacja prognozy  $E(\ln(h_{t+s})|\psi_t)$  na  $E(h_{t+s}|\psi_t)$  nie jest prosta, ponieważ zależy od całego rozkładu  $f(y_{t+h}|\psi_t)$ , który na ogół nie jest dostępny w jawnej postaci (można go aproksymować za pomocą symulacji Monte Carlo). Tsay (2005) podaje formuły na prognozy wariancji warunkowej dla modelu EGARCH(1,1) z warunkowym rozkładem normalnym.

Dla modelu FIGARCH(1,d,1) (patrz tabela 1.1) prognozy najlepiej wyliczyć rekurencyjnie:

$$h_{t+s|t+s-1p} = \alpha_0(1 - \beta_1)^{-1} + \lambda(L)h_{t+s-1|t+s-2p}, \quad (3.2.31)$$

gdzie  $h_{t+s|t+s-1p} = \varepsilon_t^2$  dla  $s < 0$ ,  $\lambda(L) = \lambda_1 L + \lambda_2 L^2 + \dots$ , a parametry  $\lambda$  odnoszą się do przedstawienia procesu FIGARCH w postaci nieskończonego procesu ARCH:  $h_t = \alpha_0(1 - \beta(1))^{-1} + \lambda(L)\varepsilon_t^2$ .

W przypadku estymacji parametrów modelu metodą quasi-MNW, dla większości specyfikacji modeli GARCH opisywanych powyżej, formuły dla prognoz warunkowych wariancji nie zależą od przyjętej specyfikacji rozkładu  $z_t$ , pod warunkiem, że  $E(z_t|\psi_{t-1}) = 0$  oraz  $E(z_t^2|\psi_{t-1}) = 1$ . To oznacza, że punktowa prognoza wariancji może być skonstruowana na podstawie szacunków parametrów, uzyskanych za pomocą quasi-MNW (tzn. przyjmując rozkład normalny  $z_t$ ). Oczywiście przez przyjęcie właściwego rozkładu  $z_t$  można zwiększyć efektywność estymatorów parametrów modelu i przez to dokładność prognoz punktowych zmienności. Jednakże z punktu widzenia prognozowania główna przewaga trudniejszej estymacji, będącej następstwem przyjęcia bardziej złożonego rozkładu  $z_t$ , polega nie tyle na wzroście efektywności punktowych prognoz zmienności, co na lepszej aproksymacji ogonów rozkładu predyktywnego  $f(r_{t+s p}|\psi_t; \hat{\theta})$ .

W przypadku modeli GARCH jednookresowy rozkład predyktywny  $r_t$  jest bezpośrednio określony przez rozkład  $z_t$ . Na przykład zakładając, że  $z_t$  jest IID o standaryzowanym rozkładzie normalnym:

$$g(z_t) = (2\pi)^{-1/2} \exp(-z_t^2 / 2), \quad (3.2.32)$$

warunkowy rozkład  $r_t$  jest dany formułą:

$$g(r_t|\psi_{t-1}) = (2\pi)^{-1/2} \sigma_{t|t-1}^{-1} \exp\left(-1/2\sigma_{t|t-1}^{-2}(r_t - \mu_{t|t-1})^2\right), \quad (3.2.33)$$

gdzie  $\sigma_{t|t-1}^{-1}$  jest związane z Jakobianem przy transformacji z  $z_t$  do  $r_t$ .

### Modele GARCH z dodatkową zmienną objaśniającą

Prognozy zmienności mogą być konstruowane na podstawie modelu GARCH, rozszerzonego przez wprowadzenie do równania dla wariancji warunkowej dodatkowej zmiennej objaśniającej (lub zmiennych objaśniających):

$$h_{t+1|t,p} = \alpha_o + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i+1}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j+1} + \gamma J_{t-k+1}. \quad (3.2.34)$$

Jako  $J_{t-k+1}$  przyjmuje się na przykład zmienność zrealizowaną, aproksymowaną na podstawie danych o częstotliwości wyższej niż dzienna, wielkość obrotów, zmienność innych aktywów finansowych. Wprowadzenie do modelu GARCH opóźnionych wartości sum kwadratów stóp zwrotu o częstotliwości wyższej niż dzienna, prowadzi często do znacznego wzrostu trafności skonstruowanych prognoz (patrz Martens, 2002; Hol i Koopman, 2002; Blair, Poon i Taylor, 2001; Doman, 2004). Konstrukcja prognoz na dwa i więcej okresów w przód wymaga najczęściej znajomości przyszłych wartości dodatkowej zmiennej objaśniającej. Niestety wartości te nie są na ogół znane. W takiej sytuacji jedną z możliwości jest przyjęcie założenia, że wartości dodatkowych zmiennych nie zmieniają się w kolejnych okresach.

Ważną kwestią jest rozróżnienie między modelami statystycznymi procesów brzegowych (modelami brzegowymi, użytecznymi w opisie dynamiki i prognozowaniu) oraz modelami warunkowymi (służącymi badaniu wpływu natychmiastowego bądź opóźnionego, ale kłopotliwymi w prognozowaniu). W kontekście ekonometrii finansowej i wielorównaniowych modeli GARCH zwracają na to uwagę Osiewalski i Pipień (2004b). Należy podkreślić, że porównywanie własności prognostycznych modeli warunkowych i brzegowych nie ma większego sensu, jeśli nie uwzględni się formalnie niepewności o przyszłych wartościach zmiennych objaśniających w modelu warunkowym. Uwzględnienie tej niepewności może pokazać, że prognozy konstruowane na podstawie modeli warunkowych z dodatkowymi zmiennymi objaśniającymi nie są istotnie trafniejsze. Widać to również po części w wynikach badania przedstawionego w punkcie 3.2.5. Model uwzględniający indeks S&P 500 w równaniu dla średniej warunkowej wypada bardzo dobrze w rankingu modeli według kryterium informacyjnego Schwarza, jednakże trafność prognoz konstruowanych na podstawie tego modelu jest już znacznie mniejsza.

### Predyktory dla modeli zmienności

W tabeli 3.1 przedstawiono predyktory dla jednorównaniowych parametryzacji modeli GARCH oraz innych metod prognozowania zmienności

stosowanych w badaniach empirycznych przedstawionych w dalszej części pracy. Estymacja wariancji warunkowych (lub wariancji) przeprowadzana jest na pierwszy okres poza obserwacją (są one funkcjami parametrów przy znanych przeszłych danych). Prognozy na  $s$  okresów w przód można wyliczyć rekurencyjnie na podstawie formuł podanych w tabeli 3.1 i przyjmując

$$\varepsilon_{t+s|t+s-1p}^2 = h_{t+s|t+s-1p}.$$

**TABELA 3.1. PREDYKTORY DLA WYBRANYCH METOD PROGNOZOWANIA ZMIENNOŚCI**

Model lub metoda	Postać modelu	Predyktor
GARCH(1,1)	$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$	$h_{t+\lfloor t \rfloor p} = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_t^2 + \beta_1 h_t$
EGARCH(1,1)	$\ln h_t = \alpha_0 + \theta z_{t-1} + \gamma( z_{t-1}  - \sqrt{2/\pi}) + \beta_1 \ln h_{t-1}$	$h_{t+\lfloor t \rfloor p} = \exp[\alpha_0 + \theta z_t + \gamma( z_t  - \sqrt{2/\pi}) + \beta_1 \ln h_t]$
TGARCH(1,1)	$\sqrt{h_t} = \alpha_0 + (\alpha_1^+ \varepsilon_{t-1}^+ - \alpha_1^- \varepsilon_{t-1}^-) + \beta_1 \sqrt{h_{t-1}}$	$h_{t+\lfloor t \rfloor p} = [\alpha_0 + (\alpha_1^+ \varepsilon_t^+ - \alpha_1^- \varepsilon_t^-) + \beta_1 \sqrt{h_t}]^2$
GJR-GARCH(1,1)	$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \omega_1 I_{t-1} \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1}$	$h_{t+\lfloor t \rfloor p} = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_t^2 + \omega_1 I_t \varepsilon_t^2 + \beta_1 h_t$
AGARCH(1,1)	$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 (\varepsilon_{t-1} - \gamma_1 \sqrt{h_{t-1}})^2 + \beta_1 h_{t-1}$	$h_{t+\lfloor t \rfloor p} = \alpha_0 + \alpha_1 (\varepsilon_t - \gamma_1 \sqrt{h_t})^2 + \beta_1 h_t$
IGARCH(1,1)	$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + (1 - \alpha_1) h_{t-1}$	$h_{t+\lfloor t \rfloor p} = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_t^2 + (1 - \alpha_1) h_t$
FIGARCH(1,d,1)	$\varphi(L)(1-L)^d \varepsilon_t^2 = \alpha_0 + [1 - \beta(L)] \nu_t$	$h_{t+\lfloor t \rfloor p} = \alpha_0 (1 - \beta_1)^{-1} + \lambda(L) h_t$
GARCH(1,1) z dodatkową zmienną	$h_t = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_{t-1}^2 + \beta_1 h_{t-1} + \gamma J_{t-k}$	$h_{t+\lfloor t \rfloor p} = \alpha_0 + \alpha_1 \varepsilon_t^2 + \beta_1 h_t + \gamma J_{t-k+1}$
Zmienności historycznej	$\sigma_t^2 = \frac{1}{t-2} \sum_{i=1}^{t-1} r_i^2$	$\sigma_{t+\lfloor t \rfloor p}^2 = \frac{1}{t-1} \sum_{i=1}^t r_i^2$
Błądzenia przypadkowego	$\sigma_t^2 = r_{t-1}^2$	$\sigma_{t+\lfloor t \rfloor p}^2 = r_t^2$
Wariancji ruchomej	$\sigma_t^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=t-k}^{t-1} r_i^2$	$\sigma_{t+\lfloor t \rfloor p}^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=t-k+1}^t r_i^2$
Wyrównania wykładniczego dla wariancji	$\sigma_t^2 = \lambda \sigma_{t-1}^2 + (1 - \lambda) r_{t-1}^2$	$\sigma_{t+\lfloor t \rfloor p}^2 = \lambda \sigma_t^2 + (1 - \lambda) r_t^2$
Stochastycznej zmienności	$r_t = \sigma \exp(0,5 p_t) \varepsilon_t,$ $p_t = \phi p_{t-1} + \eta_t$	$p_{t+\lfloor t \rfloor p} = \phi p_t,$ $h_{t+\lfloor t \rfloor p} = \sigma^2 \exp(p_{t+\lfloor t \rfloor p})$

Opis modeli GARCH przedstawiono w rozdziale pierwszym, pozostałe metody i modele omówiono poniżej.

ŹRÓDŁO: OPRACOWANIE WŁASNE.

Dla modeli EGARCH, GJR-GARCH i GARCH z dodatkową zmienną objaśniającą trzeba przyjąć dodatkowe założenia, np. te, które przedstawiono wyżej. W przypadku prognoz konstruowanych na podstawie metody zmienności historycznej, modelu błędzenia przypadkowego dla wariancji, metody warian-

cji ruchomej i wyrównywania wykładniczego dla wariancji przyjmuje się często, że prognozy zmienności dla okresów  $t+1, t+2, \dots, t+k$  są równe.

### Metoda zmienności historycznej

Przy konstrukcji prognozy zmienności na podstawie metody zmienności historycznej przyjmuje się, że prognoza wariancji jest średnią ze wszystkich dostępnych w danej chwili realizacji wariancji w okresach wcześniejszych:

$$\sigma_{t+s|tp}^2 = \frac{1}{t-1} \sum_{i=1}^t \sigma_i^2, \quad (3.2.35)$$

gdzie  $\sigma_{t+s|tp}^2$  jest to prognoza wariancji w chwili  $t+s$ , a  $\sigma_i^2$  to realizacja wariancji w chwili  $i$ .

Jeżeli jako realizacje wariancji przyjmiemy  $\varepsilon_i^2$ , to prognozy konstruowane na podstawie metody zmienności historycznej są prognozami wariancji bezwarunkowej  $\varepsilon_i$ . Prognozy takie mogą być trafne, jeżeli wariancja jest stała. W przypadku występowania efektu ARCH, jest to najmniej polecana metoda konstrukcji prognoz zmienności.

### Model błędzenia przypadkowego dla wariancji

Prognoza wariancji, budowana na podstawie modelu błędzenia przypadkowego bez dryfu, jest wyznaczana na poziomie zaobserwowanej wariancji w okresie poprzedzającym konstrukcję prognozy:

$$\sigma_{t+s|tp}^2 = \sigma_t^2. \quad (3.2.36)$$

Prognoza konstruowana na podstawie modelu błędzenia przypadkowego jest często określana mianem prognozy naiwnej i wykorzystuje się ją najczęściej do porównania innych bardziej zaawansowanych metod.

### Metoda wariancji ruchomej

Praktycy rynku finansowego już dawno zauważyli, że nowsze dane zawierają bardziej aktualne informacje o procesach finansowych, dlatego bardzo często posługują się metodami średniej ruchomej i wygładzania wykładniczego. Prognoza wariancji, budowana na podstawie metody wariancji ruchomej, jest konstruowana na poziomie średniej z  $k$  ostatnich realizacji wariancji:

$$\sigma_{t+s|tp}^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=t-k+1}^t \sigma_i^2. \quad (3.2.37)$$

Liczba obserwacji ( $k$ ), na podstawie których szacuje się średnią, jest nazywana stałą wygładzania. Zamiast metody średniej ruchomej prostej można stosować metodę średniej ruchomej ważonej. Uważa się, że ponieważ nowsze dane zawierają bardziej aktualne informacje o prognozowanym zjawisku, powinny im być nadawane większe wagi niż obserwacjom starszym. Przy konstrukcji prognozy na podstawie modelu średniej ruchomej dla okresu  $t + 1$  nie uwzględnia się obserwacji pochodzących z okresów wcześniejszych od  $t - k + 1$ , które także dostarczają pewnych informacji o kształtowaniu się wartości zmiennej prognozowanej w przeszłości. Dodatkowo nie wiadomo, przy jakich założeniach estymator jest zgodnym estymatorem warunkowej wariancji.

### Metoda wyrównywania wykładniczego dla wariancji

Metoda wyrównywania wykładniczego (EWMA – ang. *exponentially weighted moving average*) uwzględnia obserwacje pochodzące z okresów wcześniejszych, a jednocześnie nadaje nowszym danym większe wagi:

$$\sigma_{t+s|t,p}^2 = \lambda \sigma_p^2 + (1 - \lambda) \sigma_t^2. \quad (3.2.38)$$

Parametr  $\lambda$  jest nazywany parametrem wygasania (ang. *decay factor*) i przyjmuje wartości z przedziału  $(0,1)$ . Wadą tej metody jest niejednoznaczność przy określaniu wartości parametru  $\lambda$ . Jego wybór zależy od charakteru prognozowanego procesu. Jeżeli nie ma częstych i znacznych zmian „trendu w wariancji”, to większą wagę trzeba przywiązywać do prognoz w poprzednim okresie (parametr  $\lambda$  bliski jedności).

Metoda wyrównywania wykładniczego jest czasami określana w literaturze finansowej jako model RiskMetrics<sup>84</sup>. Praktycy rynku finansowego przyjmują najczęściej stałe wartości stałej wygładzania i parametru wygasania. Analitycy JP Morgan, dla dziennych stóp zwrotu, przyjmowali  $k = 25$  oraz  $\lambda = 0,94$ <sup>85</sup>. Wartości te zostały wybrane na podstawie badań jako średnie dla spółek, notowanych na giełdzie w Nowym Jorku. Stała wygładzania równa 0,94 oznacza, że przy estymacji efektywnie korzysta się z okresu obserwacji, wynoszącego około trzydziestu dni. W pracach Fiszdera (2004c, 2004d, 2005b) wyboru stałej wygładzania, w metodzie średniej ruchomej oraz parametru wygasania, w metodzie wyrównywania wykładniczego, dokonywano dla każdego okresu, na podstawie próbki wstępnej. Wy-

<sup>84</sup> Koncepcja RiskMetrics została opracowana przez bank inwestycyjny JP Morgan w celu pomiaru ryzyka rynkowego za pomocą wartości zagrożonej.

<sup>85</sup> Dla danych miesięcznych często przyjmuje się  $k = 60$  i  $\lambda = 0,97$ .

bierano te wartości, dla których pierwiastek błędu średniokwadratowego był najmniejszy w próbie wstępnej<sup>86</sup>. W wyniku takiego wyboru parametrów  $k$  i  $\lambda$  konstruowane prognozy zmienności są na ogół trafniejsze.

Jeżeli przyjmiemy, że realizacją  $\sigma_t^2$  jest  $\varepsilon_t^2$  oraz  $\varepsilon_t = \sigma_t z_t$ , wówczas model (3.2.38) można traktować jako model IGARCH(1,1) bez stałej  $\alpha_0$  (bez dryfu). Zatem najlepszym rozwiązaniem (lepszym niż przyjmowanie z góry określonych wartości) powinna być estymacja parametru  $\lambda$ .

### Modele stochastycznej zmienności

W ostatnich kilku latach coraz większą popularnością cieszy się model stochastycznej zmienności (ang. *stochastic volatility* – SV). W najprostszej postaci model ten można przedstawić w formie:

$$r_t = \sigma \exp(0,5 p_t) \varepsilon_t, \quad (3.2.39)$$

$$p_t = \phi p_{t-1} + \eta_t, \quad (3.2.40)$$

gdzie  $|\phi| \leq 1$ , a  $\varepsilon_t$ ,  $\eta_t$  są procesami białoszumowymi:  $\varepsilon_t \sim N(0,1)$ ,  $\eta_t \sim N(0, \sigma_\eta^2)$ .

Model SV lepiej opisuje zmienność finansowych szeregów czasowych niż modele klasy GARCH, ponieważ w modelu tym występuje dodatkowy składnik losowy, przez co zmienność nie jest określona w sposób deterministyczny. Badania empiryczne pokazują jednakże, że lepsze dopasowanie tego modelu w próbie niekoniecznie przekłada się na trafniejsze prognozy zmienności. Więcej informacji o różnych specyfikacjach modeli SV można znaleźć między innymi w pracach Taylora (1994), Ghyselsa, Harvey'a i Renaulta (1996), Shepharda (1996) oraz Pajora (2003). Parametry modelu SV można oszacować za pomocą metody quasi-największej wiarygodności, w której do budowy funkcji wiarygodności wykorzystuje się filtr Kalmana<sup>87</sup>. Uzyskane w ten sposób estymatory parametrów są zgodne, jednakże estymatory są nieefektywne. Znacznie efektywniejsze estymatory parametrów można uzyskać za pomocą efektywnej metody momentów (EMM) oraz metody Monte Carlo, opartej na łańcuchach Markowa (MCMC). Jeżeli parametry modelu były szacowane z wykorzystaniem filtru Kalmana, to prognozę warunkowej wariancji dla chwili  $t + s$  można stosunkowo łatwo wyznaczyć na podstawie filtru Kalmana.

<sup>86</sup> Szczegółowy opis tego podejścia został przedstawiony w punkcie 3.2.5.

<sup>87</sup> Ogólna postać filtru Kalmana została przedstawiona w punkcie 4.4.1.



### **Modelowanie danych o częstotliwości wyższej niż dzienna**

Dane o częstotliwości wyższej niż dzienna mogą być wykorzystane nie tylko do oceny trafności prognoz, ale również do samej konstrukcji prognoz zmienności. Można to zrobić na dwa sposoby. Pierwszy sposób polega na bezpośrednim szacowaniu parametrów modeli i konstrukcji prognoz zmienności na podstawie stóp zwrotu, obserwowanych z częstotliwością wyższą niż dzienna. Można tutaj zastosować wszystkie modele, które wykorzystuje się dla danych dziennych, w tym modele GARCH. Badania Andersena, Bollersleva i Langego (1999) pokazują, że w przypadku modeli GARCH zwiększanie częstotliwości obserwacji do jednej godziny powoduje wzrost trafności konstruowanych prognoz zmienności (parametry modeli GARCH dla danych o częstotliwości wyższej niż dzienna zostały oszacowane na podstawie modelu dla danych dziennych, przy założeniu, że proces cen instrumentu finansowego jest ciągłym procesem dyfuzji). Dalsze zwiększanie częstotliwości prowadzi jednakże do pogorszenia wyników. Dla danych obserwowanych w okresach krótszych niż godzina relatywnie duże znaczenie mają wahania cykliczne oraz krótkie wzrosty zmienności po publikacji informacji makroekonomicznych (terminy publikacji takich danych są wcześniej znane). Przewidywanie takich wahań nie jest możliwe na podstawie klasycznych modeli GARCH. Z tego względu na bazie modelu GARCH powstało wiele alternatywnych postaci, służących modelowaniu i prognozowaniu zmienności, a mających zastosowanie wyłącznie w przypadku danych o bardzo wysokiej częstotliwości. Tego typu modele nie były jednak przedmiotem analiz w niniejszej pracy.

### **Modelowanie zmienności zrealizowanej**

Drugi sposób wykorzystania danych o częstotliwości wyższej niż dzienna polega na bezpośrednim modelowaniu zmienności zrealizowanej (najczęściej logarytmu zmienności zrealizowanej, aby zapewnić bezwarunkową homoskedastyczność). Jako zmienność zrealizowaną przyjmuje się sumę kwadratów stóp zwrotu dla danych o częstotliwości wyższej niż dzienna. Do opisu zmienności zrealizowanej można zastosować większość modeli, które wykorzystuje się do opisu wartości średniej stóp zwrotu w przypadku dziennych stóp zwrotu, np. modele AR, ARMA czy ARFIMA. Charakterystyczną własnością zmienności zrealizowanej jest długa pamięć. Problemy dotyczące pomiaru zmienności zrealizowanej zostały przedstawione w punkcie 3.2.1.

### Wykorzystanie informacji o maksymalnych i minimalnych notowaniach

Zamiast danych intraday można wykorzystać informacje o maksymalnej i minimalnej cenie w ciągu dnia. Dane takie są powszechnie dostępne dla większości aktywów. Powstało co najmniej kilka różnych metod szacowania zmienności, opartych na tego typu danych. Kilka z nich przedstawia Tsay (2005). Jedną z możliwości jest przyjęcie miary (3.2.22) jako realizację zmienności i bezpośrednie modelowanie oraz prognozowanie za pomocą takich samych metod, jak w przypadku modelowania zmienności zrealizowanej.

Fiszeder (2005b) zaproponował, aby estymację modelu GARCH przeprowadzić na podstawie przeskalowanego prawdziwego zakresu zmiany. Prawdziwy zakres zmiany (patrz formuła (3.2.23)) daje zawyżone szacunki zmienności. Skalowanie można przeprowadzić na dwa sposoby, korzystając z kwadratów stóp zwrotu lub wartości bezwzględnych stóp zwrotu. Przeskalowania TR dokonuje się na podstawie formuły:

$$STR_t = \frac{a}{b} TR_t, \quad (3.2.41)$$

gdzie  $a = \sqrt{\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t r_i^2}$ ,  $b = \sqrt{\frac{1}{t} \sum_{i=1}^t TR_i^2}$  lub  $a = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t |r_i|$ ,  $b = \frac{1}{t} \sum_{i=1}^t |TR_i|$  w zależności od przyjętej metody skalowania<sup>88</sup>.

Skalowanie dla wartości bezwzględnych stóp zwrotu prowadzi na ogół do zaniżonych szacunków prognoz, dlatego sugerujemy stosowanie skalowania dla kwadratów stóp zwrotu. Prognozy budowane na podstawie modelu GARCH, szacowanego dla przeskalowanego prawdziwego zakresu zmiany, są na ogół znacząco trafniejsze od prognoz konstruowanych na podstawie modelu GARCH szacowanego w sposób tradycyjny, czyli z wykorzystaniem danych obejmujących jedynie ceny zamknięcia.

### Zmienność implikowana

Jeżeli dana jest cena opcji oraz formuła wyceny opcji, to można wyliczyć odchylenie standardowe stóp zwrotu ( $\sigma$ ) aktywu, dla którego została wystawiona opcja. Nie pozwala to jednakże uniknąć problemu oceny zmienności na podstawie danych historycznych, ponieważ do oceny trafności wycen opcji konstruowanych na podstawie określonych modeli wyceny konieczna jest znajomość odchylenia standardowego stóp zwrotu. Nie jest zatem możliwa ocena poprawności formuły wyceny opcji dla rzeczywistych danych finansowych bez oceny zmien-

<sup>88</sup> We wszystkich formułach zakłada się, że średnia stopa zwrotu nie różni się istotnie od zera.

ności na podstawie danych historycznych. Wyznaczone na podstawie ceny opcji i formuły wyceny opcji odchylenie standardowe stóp zwrotu jest określane mianem implikowanego odchylenia standardowego i stanowi rynkowe oszacowanie zmienności instrumentu bazowego. Na przykład dla modelu Blacka i Scholesa (BS, Black i Scholes, 1973)<sup>89</sup> niemożliwe jest przedstawienie odchylenia standardowego jako funkcji pozostałych parametrów, dlatego wyznaczenia zmienności dokonuje się metodami numerycznymi. W klasycznej formule BS zakłada się, że  $\sigma$  jest stałe. Merton (1973) uogólnił ten model, dopuszczając zmienność  $\sigma$ . Przy takim założeniu implikowane odchylenie standardowe jest średnim odchyleniem dla całego okresu, do wygaśnięcia opcji. Ponieważ formuła BS na cenę opcji jest nieliniową funkcją  $\sigma$ , dlatego implikowane odchylenie standardowe może być obciążonym szacunkiem  $\sigma$ . Bodie i Merton (1995) pokazali, że dla opcji o krótkim czasie do wygaśnięcia obciążenie to może być zminimalizowane przez wybór opcji z ceną wykonania równą bieżącej cenie rynkowej instrumentu pierwotnego. Z tego względu do obliczania zmienności implikowanej wybierane są opcje at-the-money (więcej informacji na ten temat można znaleźć w podrozdziale 6.1). Należy także pamiętać, że ceny opcji uwzględniają również premię za ryzyko zmienności, przed którym nie można się zabezpieczyć (Bollerslev i Zhou, 2006). Zmienność implikowana może być również obciążonym szacunkiem zmienności, ze względu na przykład na błędną specyfikację modelu wyceny opcji lub z uwagi na fakt, że ceny nie odpowiadają równowadze rynkowej (rynek jest nieefektywny). Przy obliczaniu zmienności implikowanej należy również pamiętać o występowaniu efektów uśmiechu zmienności czy grymasu zmienności, których występowanie może w znaczącym stopniu wpłynąć na uzyskane szacunki zmienności. W takich przypadkach można zastosować średnią arytmetyczną ważoną z implikowanych odchyłeń standardowych, obliczonych z opcji o różnych terminach do wygaśnięcia lub różnych cenach wykonania. Na ogół nie daje to jednakże trafniejszych prognoz zmienności niż zmienność implikowana, obliczona z opcji będących w cenie i o najkrótszym terminie do wygaśnięcia. Można spodziewać się, że prognozy zmienności uzyskane na podstawie cen opcji będą trafniejsze niż prognozy konstruowane na podstawie modeli szacowanych wyłącznie dla danych historycznych, ponieważ uwzględniają oczekiwania inwestorów (na przykład terminy publikacji wielu istotnych danych makroekonomicznych czy finansowych są wcześniej znane). Ważną kwestią jest oczywiście odpowiednia płynność rynku, która w przypadku opcji dla wielu instrumentów bazowych nie jest wystarczająca.

<sup>89</sup> Zagadnienia dotyczące wyceny opcji przedstawiono w podrozdziale 6.1.

O popularności zmienności implikowanej wśród inwestorów może świadczyć fakt, że giełda CBOE (Chicago Board of Options Exchange) już w 1993 roku wprowadziła na bazie zmienności implikowanej indeks zmienności VIX, wyznaczany na podstawie opcji ATM dla indeksu S&P 100 i średnim czasie do wykonania 30 dni. Podobne indeksy wprowadzono później dla indeksów Nasdaq 100 (VXN) i DJIA (VXD), a także na wielu innych giełdach akcji, np. na indeks DAX (VDAX).

### Prognozy wielookresowe

W przypadku prostych metod prognozowania zmienności, takich jak model błędzenia przypadkowego dla wariancji, metoda wariancji ruchowej, metoda wyrównywania wykładniczego dla wariancji, przyjmuje się na ogół, że prognozy zmienności dla okresów  $t+1, t+2, \dots, t+k$  są równe, tzn.  $\sigma_{t+1|t,p}^2 = \sigma_{t+2|t,p}^2 = \dots = \sigma_{t+k|t,p}^2$ . Konstruowane w ten sposób prognozy zmienności nie uwzględniają ważnej cechy procesów kowariancyjnie stacjonarnych, mianowicie powrotu zmienności do średniej, czyli do poziomu wariancji bezwarunkowej. Zakładając, że nie występuje autokorelacja stóp zwrotu, prognoza zmienności dla okresu  $[t+1, t+k]$ , jest wówczas równa:

$$\sigma_{[t+1, t+k]|t,p}^2 = k\sigma_{t+1|t,p}^2. \quad (3.2.42)$$

Własność powrotu zmienności do średniej jest uwzględniana przy konstrukcji prognoz na podstawie modelu GARCH (patrz formuła (3.2.28)). Zakładając, że nie występuje autokorelacja stóp zwrotu, prognoza zmienności dla okresu  $[t+1, t+k]$ , na podstawie modelu GARCH(1,1), jest dana formułą:

$$h_{[t+1, t+k]|t,p} = k\sigma^2 + (h_{t+1|t,p} - \sigma^2)(1 - (\alpha_1 + \beta_1)^k)(1 - \alpha_1 - \beta_1)^{-1}. \quad (3.2.43)$$

Zatem im dłuższy horyzont prognoz wielookresowych (większa wartość  $k$ ), tym mniejsza zmienność prognoz na jednostkę czasu. Zmienność prognoz wariancji, konstruowanych za pomocą prostego przeskalowania prognoz jednookresowych, będzie przeszacowana (patrz Andersen, Bollerslev, Christoffersen i Diebold, 2006).

W przypadku prognozowania na podstawie modeli GARCH z dodatkową zmienną objaśniającą często występują problemy z uzyskaniem wartości

zmiennych objaśniających dla dalszych okresów i konieczne jest ich prognozowanie<sup>90</sup>.

Konstrukcja rozkładu predyktywnego dla przedziału czasowego jest znacznie bardziej złożona, niż w przypadku jednookresowego horyzontu. Wielookresowy rozkład predyktywny może być zdefiniowany przez jednookresowe rozkłady:

$$f(r_{t+s}|\psi_t) = \int \int \dots \int f(r_{t+s}|\psi_{t+s-1})f(r_{t+s-1}|\psi_{t+s-2}) \dots f(r_{t+1}|\psi_t) dr_{t+s-1} dr_{t+s-2} \dots dr_t. \quad (3.2.44)$$

Niestety rozkładu tego nie daje się przedstawić w postaci prostych formuł analitycznych. Można zastosować metody numeryczne (Monte Carlo; zob. prace o bayesowskim prognozowaniu na podstawie modeli GARCH i SV) lub przybliżać rozkład za pomocą parametrycznych lub nieparametrycznych metod estymacji, opartych na warunkowej średniej i wariancji.

### 3.2.3. METODY OCENY TRAFNOŚCI PROGNOZ ZMIENNOŚCI

Nie istnieje jedno kryterium trafności prognoz, które byłoby powszechnie akceptowane we wszystkich zastosowaniach (patrz Diebold, Gunther i Tay, 1998). Ten problem dotyczy szczególnie prognozowania zmienności, gdzie mamy do czynienia z nieliniowością i heteroskedastycznością. Stąd w badaniach empirycznych wykorzystywane są bardzo różne miary jakości prognoz, w tym również specyficzne miary oparte na ekonomicznych kryteriach, mające zastosowanie tylko w ściśle określonych sytuacjach.

Miary oceny dokładności prognoz można podzielić na dwie grupy:

- miary symetryczne – oparte na symetrycznej funkcji straty, przeszacowane i niedoszacowane prognozy mają taki sam wpływ na ocenę trafności prognoz;
- miary asymetryczne – oparte na asymetrycznej funkcji straty, w odmienny sposób uwzględniają przeszacowane i niedoszacowane prognozy.

#### Miary symetryczne

Najczęściej stosowane w przypadku oceny jakości prognoz zmienności

<sup>90</sup> Patrz wcześniejsze uwagi na temat uwzględnienia przy ocenie trafności prognoz niepewności o przyszłych wartościach takich zmiennych.

miary symetryczne przedstawiono w tabeli 3.2<sup>91</sup>. Średni absolutny błąd prognozy skorygowany o heteroskedastyczność i pierwiastek błędu średniokwadratowego skorygowany o heteroskedastyczność są również określane odpowiednio jako średni absolutny błąd procentowy – MAPE (ang. *mean absolute percentage error*) i pierwiastek procentowego błędu średniokwadratowego – RMSPE (ang. *root mean squared percentage error*).

Obserwacje nietypowe wywierają mniejszy wpływ na logarytmiczną funkcję straty niż na pozostałe miary (patrz Poon i Granger, 2003). Miernik ten należy stosować wówczas, gdy nie chcemy, aby kilka skrajnych dużych wartości miało decydujący wpływ na ocenę trafności prognoz.

**TABELA 3.2. SYMETRYCZNE MIARY OCENY DOKŁADNOŚCI PROGNOZ**

Lp.	Miara	Postać miary
1	Błąd średni (ang. <i>mean error</i> )	$ME = \frac{1}{m} \sum_{T=1}^m (\sigma_T^2 - \sigma_{Tp}^2)$
2	Względny błąd średni (ang. <i>relative mean error</i> )	$RME = ME / \frac{1}{m} \sum_{T=1}^m \sigma_T^2$
3	Średni absolutny błąd (ang. <i>mean absolute error</i> )	$MAE = \frac{1}{m} \sum_{T=1}^m  \sigma_T^2 - \sigma_{Tp}^2 $
4	Błąd średniokwadratowy (ang. <i>mean squared error</i> )	$MSE = \frac{1}{m} \sum_{T=1}^m (\sigma_T^2 - \sigma_{Tp}^2)^2$
5	Pierwiastek błędu średniokwadratowego (ang. <i>root mean squared error</i> )	$RMSE = \sqrt{MSE}$
6	Średni absolutny błąd prognozy skorygowany o heteroskedastyczność (ang. <i>heteroscedasticity adjusted mean absolute error</i> )	$HMAE = \frac{1}{m} \sum_{T=1}^m \left  1 - \frac{\sigma_{Tp}^2}{\sigma_T^2} \right $
7	Pierwiastek błędu średniokwadratowego skorygowany o heteroskedastyczność (ang. <i>heteroscedasticity adjusted root mean squared error</i> )	$HRMSE = \sqrt{\frac{1}{m} \sum_{T=1}^m \left( 1 - \frac{\sigma_{Tp}^2}{\sigma_T^2} \right)^2}$
8	Logarytmiczna funkcja straty	$LL = \frac{1}{m} \sum_{T=1}^m (\ln(\sigma_{Tp}^2) - \ln(\sigma_T^2))^2$
9	QLIKE	$QLIKE = \frac{1}{m} \sum_{T=1}^m \ln \sigma_{Tp}^2 + \frac{\sigma_T^2}{\sigma_{Tp}^2}$

$\sigma_T^2$  jest to realizacja wariancji w okresie prognozowanym  $T$ ,  $\sigma_{Tp}^2$  – prognoza wariancji w okresie  $T$ ,  $m$  – liczba prognoz.

ŹRÓDŁO: OPRACOWANIE WŁASNE.

<sup>91</sup> We wszystkich poniższych wzorach na miary oceny dokładności prognoz, zamiast wariancji  $\sigma_T^2$  i  $\sigma_{Tp}^2$ , można również przyjąć odchylenia standardowe  $\sigma_T$  i  $\sigma_{Tp}$ , jednakże może to prowadzić w niektórych sytuacjach do wyboru niewłaściwej metody prognozowania (tzn. takiej, dla której optymalne prognozy znacząco różnią się od prawdziwych wariancji warunkowych) jako najbardziej trafnej (patrz Patton, 2006b).

### Miary asymetryczne

W niektórych zastosowaniach bardziej właściwe wydaje się użycie asymetrycznych miar oceny trafności prognoz. Na przykład niedoszacowanie zmienności stopy zwrotu z akcji prowadzi do zaniżonego szacunku ceny opcji call wystawionej na daną akcję. Niedoszacowanie zmienności ma zatem większe znaczenie dla wystawcy niż dla nabywcy opcji call. Odwrotna sytuacja występuje w przypadku przeszacowania zmienności. Preferencje inwestorów najczęściej nie są symetryczne. Jest to dodatkowy argument za tym, aby do oceny trafności prognoz zmienności przyjmować miary asymetryczne. Najczęściej stosowane w przypadku oceny jakości prognoz zmienności miary asymetryczne, to funkcja straty LINEX oraz średnie mieszane błędy prognoz.

### Funkcja straty LINEX:

$$LINEX = \frac{1}{m} \sum_{T=1}^m \{ \exp[a(\sigma_T^2 - \sigma_{Tp}^2)] - a(\sigma_T^2 - \sigma_{Tp}^2) - 1 \}. \quad (3.2.45)$$

Jeżeli  $a > 0$ , to funkcja (3.2.45) jest w przybliżeniu liniowa w przypadku przeszacowania zmienności ( $\sigma_{Tp}^2 > \sigma_T^2$ ) oraz wykładnicza w przypadku niedoszacowania zmienności ( $\sigma_{Tp}^2 < \sigma_T^2$ ). Oznacza to, że błędy niedoszacowania zmienności mają większy wpływ na funkcję niż błędy przeszacowania. Dla  $a < 0$  sytuacja jest dokładnie odwrotna. Wybór parametru  $a$  jest subiektywny i zależy od konkretnego zastosowania. Christoffersen i Diebold (1997) przedstawiają analityczne rozwiązanie dla optymalnej predykcji na podstawie funkcji LINEX, przy założeniu, że proces jest warunkowo normalny.

**Średnie mieszane błędy prognozy** (ang. *mean mixed error*, patrz Brailsford i Faff, 1996):

$$MME(U) = \frac{1}{m} \left[ \sum_{T=1}^m |(\sigma_T^2 - \sigma_{Tp}^2) K_m| + \sum_{T=1}^m |(\sigma_T^2 - \sigma_{Tp}^2) L_m|^{0.5} \right], \quad (3.2.46)$$

$$MME(O) = \frac{1}{m} \left[ \sum_{T=1}^m |(\sigma_T^2 - \sigma_{Tp}^2) L_m| + \sum_{T=1}^m |(\sigma_T^2 - \sigma_{Tp}^2) K_m|^{0.5} \right], \quad (3.2.47)$$

gdzie  $K_m = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \sigma_T^2 < \sigma_{Tp}^2, \\ 0 & \text{gdy } \sigma_T^2 \geq \sigma_{Tp}^2, \end{cases}$   $L_M = \begin{cases} 1 & \text{gdy } \sigma_T^2 > \sigma_{Tp}^2, \\ 0 & \text{gdy } \sigma_T^2 \leq \sigma_{Tp}^2. \end{cases}$

Błędy niedoszacowania zmienności mają większy wpływ na miarę  $MME(U)$ , a błędy przeszacowania – na miarę  $MME(O)$ .

### Model regresji

Do oceny prognoz wykorzystuje się bardzo często model regresji. Można testować, czy określone zmienne mają wpływ na uzyskane prognozy. Oceny prognoz można dokonać na podstawie równania regresji:

$$\frac{\partial L(\sigma_T^2, \sigma_{Tp}^2)}{\partial \sigma^2} = \alpha + \gamma' x_{t-1} + \varepsilon_T, \quad (3.2.48)$$

gdzie  $L(\sigma_T^2, \sigma_{Tp}^2)$  oznacza zastosowaną do oceny prognoz funkcję straty,  $x_{t-1}$  to wektor zmiennych objaśniających, należący do  $\psi_{t-1}$ ,  $\gamma$  oznacza wektor współczynników regresji.

Jeżeli współczynnik regresji jest istotnie różny od zera, to można uzyskać trafniejsze prognozy, wykorzystując przy konstrukcji prognoz informacje o odpowiedniej zmiennej  $x_{t-1}$ . Można zatem powiedzieć, że model, na podstawie którego konstruowano prognozę nie jest optymalny. Ponieważ w równaniu (3.2.48) występuje najczęściej autokorelacja oraz zmienna wariancja składnika losowego, dlatego przy estymacji błędów standardowych współczynników regresji należy zastosować estymator odporny na tego typu charakterystyki (patrz np. Newey i West, 1987). Jeżeli w badaniu zastosowano nachodzące na siebie okresy (np. miesięczne stopy zwrotu rozpatrywane codziennie), to estymatory MNK parametrów równania regresji mogą być niezgodne za sprawą na przykład regresji pozornej (patrz Christensen i Prabhala, 1998; Fleming, 1998), dlatego należy wówczas zastosować inną metodę estymacji, np. uogólnioną metodę momentów. Taka sytuacja może wystąpić na przykład przy analizie zmienności implikowanej, ponieważ wyznaczona zmienność dotyczy całego okresu do wygaśnięcia opcji.

Przyjmując kwadratową funkcję straty postaci  $L(\sigma_T^2, \sigma_{Tp}^2) = (\sigma_T^2 - \sigma_{Tp}^2)^2$  oraz  $x_t = \sigma_{Tp}^2$ , otrzymamy równanie regresji, które jest bardzo często stosowane do oceny trafności prognoz:

$$\sigma_T^2 = \gamma_0 + \gamma_1 \sigma_{Tp}^2 + \varepsilon_T. \quad (3.2.49)$$

Pagan i Schwert (1990) podają, że warunkiem koniecznym i dostatecznym na to, aby prognoza zmienności była nieobciążona, jest:  $\gamma_0 = 0$  i  $\gamma_1 = 1$ . Jednakże Taylor (1999) twierdzi, że powyższe warunki są dostateczne, ale niekonieczne. Jeżeli  $\mu_{\sigma^2}$  oznacza bezwarunkową średnią  $\sigma_T^2$ , wówczas  $\gamma_0 = (1 - \gamma_1)\mu_{\sigma^2}$  jest warunkiem na nieobciążoność prognozy. Należy również pamiętać, że prawdziwa wartość  $\sigma_T^2$  jest nieznaną i należy ją oszacować, dlatego szacunki parametrów  $\gamma_0$  i  $\gamma_1$  są obciążone ( $E(\hat{\gamma}_0) > 0$  oraz  $E(\hat{\gamma}_1) < 1$ ).



Jedną z miar, która jest najczęściej stosowana przy porównywaniu różnych metod prognozowania zmienności jest **współczynnik determinacji  $R^2$** . Niestety współczynnik determinacji nie penalizuje prognoz obciążonych, dlatego dla obciążonych prognoz zmienności szacunki współczynnika  $R^2$  mogą być wyższe niż dla prognoz nieobciążonych. Blair, Poon i Taylor (2001) stosują nieco inną miarę współczynnika:

$$P = 1 - \frac{\sum_{T=1}^m (\sigma_T^2 - \sigma_{Tp}^2)^2}{\sum_{T=1}^m (\sigma_T^2 - \mu_{\sigma^2})^2}. \quad (3.2.50)$$

Współczynnik  $P$  przyjmuje na ogół wartości mniejsze niż tradycyjnie stosowany współczynnik  $R^2$ , a w niektórych sytuacjach może nawet przybierać wartości ujemne (patrz Poon i Granger, 2003).

Porównania dwóch (lub więcej) prognoz można również dokonać bezpośrednio na podstawie jednego równania regresji (patrz np. Canina i Figlewski, 1993 lub Jorion, 1995):

$$\sigma_T^2 = \gamma_0 + \gamma_1 \sigma_{(1)Tp}^2 + \gamma_2 \sigma_{(2)Tp}^2 + \varepsilon_T, \quad (3.2.51)$$

gdzie  $\sigma_{(i)Tp}^2$  oznacza prognozę wariancji dla okresu  $T$  skonstruowaną na podstawie  $i$ -tej metody. Jeżeli prognozy  $\sigma_{(2)Tp}^2$  zawierają dodatkową informację różną od tej, która zawarta jest w prognozach  $\sigma_{(1)Tp}^2$ , pozwalającą wyjaśnić przyszłą zmienność, to ocena parametru  $\gamma_2$  powinna być istotna statystycznie. W przypadku prognoz silnie skorelowanych (a taka zależność istnieje między prognozami konstruowanymi na podstawie większości modyfikacji modelu GARCH) występuje jednakże problem współliniowości.

W badaniach empirycznych do oceny trafności prognoz zmienności wykorzystywane są również miary oparte na określonej postaci funkcji użyteczności (patrz np. West, Edison i Cho, 1993 oraz Fleming, Kirby i Ostdiek, 2001 stosują takie miary przy budowie portfeli papierów wartościowych) lub specyficzne miary oparte na ekonomicznych kryteriach, które można wykorzystać tylko w ściśle określonych zastosowaniach (np. Engle, Hong, Kane i Noh, 1993 do oceny przyjmują zyskowność określonej strategii inwestycyjnej). W niniejszej pracy oceny trafności prognoz zmienności dokonano poza metodami czysto statystycznymi (punkt 3.2.5), również ze względu na trafność prognoz wartości zagrożonej (punkt 4.2.3), w odniesieniu do konstrukcji

portfeli efektywnych (punkty 5.1.2 i 5.1.3) oraz w odniesieniu do wyceny instrumentów pochodnych (punkt 6.1.3).

Przy ocenie prognoz zmienności na ogół nie bierze się pod uwagę błędów szacunku związanych z estymacją parametrów modelu, na podstawie którego konstruowana jest prognoza. W zastosowaniach praktycznych długość próby, na podstawie której estymuje się parametry jest bardzo duża w porównaniu z horyzontem prognozy, dlatego wpływ błędu, związanego z estymacją parametrów, będzie prawdopodobnie relatywnie mały w porównaniu z błędem, jaki wynika z prognozowania na podstawie modelu. Zastosowanie metod bayesowskich pozwala uwzględnić bezpośrednio błędy związane z estymacją parametrów modelu.

Badania Fiszdera (2005b), Hansena i Lunde'a (2006) oraz Pattona (2006b) pokazały, że rankingi metod prognozowania zmienności zależą w dużym stopniu od przyjętej miary zmienności. Patton pokazuje, że spośród powszechnie stosowanych miar oceny prognoz zmienności tylko błąd średniokwadratowy jest funkcją straty niewrażliwą na błąd wynikający z zastosowania niedoskonałego estymatora prawdziwej wariancji warunkowej. Na przykład przyjęcie jako realizacje zmienności kwadratów dziennych stóp zwrotu, dla większości kryteriów trafności prognoz, może prowadzić do wyboru mniej trafnych metod prognozowania zmienności. Patton (2006b) oraz Hansen i Lunde (2006) podają warunki, jakie muszą być spełnione, aby funkcja straty była niewrażliwa na błąd związany z przybliżaniem prawdziwej zmienności. Patton przedstawia rodzinę funkcji, która przy spełnieniu pewnych warunków dotyczących odpowiednich momentów jest niewrażliwą funkcją straty:

$$L(\sigma_T^2, \sigma_{Tp}^2; b) = \begin{cases} \frac{1}{(b+1)(b+2)} (\sigma_T^{2b+4} - (\sigma_{Tp}^2)^{b+2}) - \frac{1}{b+1} (\sigma_{Tp}^2)^{b+1} (\sigma_T^2 - (\sigma_{Tp}^2)^{b+2}) & \text{dla } b \notin \{-1, -2\}, \\ \sigma_{Tp}^2 - \sigma_T^2 + \sigma_T^2 \ln(\sigma_T^2 / \sigma_{Tp}^2) & \text{dla } b = -1, \\ \sigma_T^2 / \sigma_{Tp}^2 - \ln(\sigma_T^2 / \sigma_{Tp}^2) - 1 & \text{dla } b = -2. \end{cases} \quad (3.2.52)$$

Dla  $b = 0$  otrzymujemy błąd średniokwadratowy, natomiast dla  $b = -2$  – funkcję straty QLIKE (z dokładnością do stałych).

### Badanie istotności różnic między miarami trafności prognoz

Nawet znaczna różnica w szacunkach określonej miary oceny trafności prognoz między różnymi metodami konstrukcji nie gwarantuje, że jest ona statystycznie istotna. Można testować równość szacunków miar trafności pro-

gnoz konstruowanych na podstawie różnych metod lub wyższość określonej metody, czy też metod nad wybranym benchmarkiem. Do pierwszej grupy można zaliczyć testy zaproponowane przez Diebolda i Mariano (1995), Westa (1996) oraz Giacomini i White'a (2006), do drugiej natomiast test skonstruowany przez White'a (2000). Test zaproponowany przez Diebolda i Mariano (1995) nie uwzględnia niepewności związanej z estymacją parametrów modeli, na podstawie których konstruuje się prognozę. Niepewność ta została uwzględniona w teście Westa (1996), opisanym poniżej w odniesieniu do wariancji i błędu średniokwadratowego. W teście Giacomini i White'a (2006) weryfikuje się hipotezę dotyczącą warunkowej równości szacunków miar trafności prognoz konstruowanych na podstawie różnych metod. Zaproponowano również szereg dodatkowych testów będących rozszerzeniami lub modyfikacjami powyższych testów. Do drugiej grupy testów można zaliczyć procedurę przedstawioną przez Hansena, Lunde'a i Nasona (2003, 2005), która polega na konstrukcji zbioru ufności modelu, na podstawie którego wybiera się najlepszą metodę lub grupę metod prognozowania zmienności<sup>92</sup>.

West i Cho (1995) przedstawiają procedurę testowania istotności różnic dla błędu średniokwadratowego. Niech  $\sigma_{lTp}^2$  oznacza prognozę  $\sigma_T^2$  skonstruowaną na podstawie  $l$ -tej metody,  $\delta$  to wektor zawierający wszystkie parametry, we wszystkich rozważanych modelach,  $u_{lT} = \sigma_T^2 - \sigma_{lTp}^2$ ,  $\zeta_l = E(u_{lT}^2)$ ,  $\hat{\zeta}_l = m^{-1} \sum_{T=1}^m (\sigma_T^2 - \sigma_{lTp}^2)^2$ ,  $\hat{\theta} = (\hat{\zeta}_1, \hat{\zeta}_2, \dots, \hat{\zeta}_l)'$ ,  $\mathbf{g}_T(\hat{\theta}, \hat{\delta}) = (\hat{u}_{1T}^2 - \hat{\zeta}_1, \hat{u}_{2T}^2 - \hat{\zeta}_2, \dots, \hat{u}_{lT}^2 - \hat{\zeta}_l)'$ ,  $\mathbf{B}$  to macierz o wymiarach  $(l-1) \times l$ , której pierwsza kolumna jest równa  $(-1, -1, \dots, -1)'$ , a pozostałe kolumny zawierają macierz jednostkową,  $\hat{\mathbf{S}} = \hat{\Gamma}_0 + \sum_{j=1}^k [1 - j / (k+1)] (\hat{\Gamma}_j + \hat{\Gamma}'_j)$ ,  $\hat{\Gamma}_j = m^{-1} \sum_{T=1+j}^m \hat{\mathbf{g}}_T \hat{\mathbf{g}}'_{T+j}$ . Wartość  $k$  jest ustalana na podstawie automatycznej reguły jako część całkowita z liczby  $1,1447 (\hat{s}^{(1)} / \hat{s}^{(0)})^{2/3} m^{1/3}$ , gdzie  $\hat{s}^{(0)} = \hat{\omega}_0 + 2 \sum_{j=1}^n \hat{\omega}_j$ ,  $\hat{s}^{(1)} = 2 \sum_{j=1}^n j \hat{\omega}_j$ ,  $\hat{\omega}_j = \mathbf{w}' \hat{\Gamma}_j \mathbf{w}$ ,  $\mathbf{w}$  jest wektorem jedynek, a  $n$  jest częścią całkowitą z  $4(m/100)^{2/9}$ . Przy założeniu prawdziwości hipotezy zerowej  $\mathbf{B}\theta = 0$  statystyka dana formułą:

$$m \hat{\theta}' \mathbf{B}' (\mathbf{B} \hat{\mathbf{S}} \mathbf{B}')^{-1} \mathbf{B} \hat{\theta} \quad (3.2.53)$$

ma asymptotyczny rozkład  $\chi^2$  o  $l-1$  stopniach swobody.

<sup>92</sup> W teście korzysta się z metod bootstrapowych.

### 3.2.4. TRAFNOŚĆ METOD PROGNOZOWANIA ZMIENNOŚCI NA PODSTAWIE MODELI GARCH W ŚWIETLE BADAŃ EMPIRYCZNYCH

Przeprowadzono dziesiątki badań empirycznych, w których oceniano trafność prognoz zmienności. Duża część tych badań dotyczyła między innymi modelu GARCH. Wyniki dotychczasowych badań nie wskazują jednoznacznie określonej klasy modeli, na podstawie których uzyskiwałoby się najtrafniejsze prognozy zmienności dla procesów finansowych. Niektórzy autorzy preferują prostsze modele, jak na przykład modele regresji (np. Dimson i Marsh, 1990), inni bardziej złożone, jak modele GARCH (np. Akgi-ray, 1989) czy modele stochastycznej zmienności (np. Yu, 2002); jeszcze inni twierdzą, że najlepsze prognozy zmienności można uzyskać na podstawie cen opcji (tzw. zmienność implikowana, np. Jorion, 1995). Wyniki zależą w dużej mierze od przyjętego do oceny kryterium oraz od miary zmienności. Badania Pattona (2006b) pokazują, że różnice w rankingach, uzyskiwane dla różnych kryteriów oceny prognoz, mogą wynikać z przyjęcia zbyt mało dokładnej miary realizacji zmienności (np. kwadratu dziennej stopy zwrotu).

Większość analiz ogranicza się jednak do kilku wybranych modeli, co nie upoważnia do wyciągania szerszych wniosków. Duży wpływ na otrzymane wyniki ma również przyjęta do badania częstotliwość danych oraz okres, dla którego buduje się prognozę. Prognozy zmienności, uzyskane na podstawie modeli GARCH, są bardziej dokładne w przypadku danych o wysokiej częstotliwości i bardzo krótkiego horyzontu prognozy (patrz np. West i Cho, 1995; Andersen i Bollerslev, 1998; Christoffersen i Diebold, 2000), w przeciwieństwie do długiego horyzontu, dla którego prognozy obliczone na podstawie innych modeli, są bardzo często dokładniejsze (np. Lamoureux i Lastrapes, 1993). W przypadku długiego horyzontu prognozy wyniki trafności mogą być znacznie zniekształcone przez stosowanie wzorów przybliżających, jak np. reguła pierwiastka kwadratowego z czasu (patrz formuła (4.1.1)). W prognozowaniu zmienności dla długiego horyzontu pomocne są inne zmienne ekonomiczne, jak np. spread stóp procentowych czy wskaźniki finansowe (patrz Andersen, Bollerslev, Christoffersen i Diebold, 2006). Interesujący jest fakt, że zwiększanie próby do estymacji modelu, na podstawie którego buduje się prognozę, nie powoduje wzrostu dokładności prognoz (patrz West i Cho, 1995), co jest sprzeczne z obserwowanym długoterminowym wpływem zjawisk szokowych na wariancję.

Na podstawie wielu przeprowadzonych badań można spróbować sformułować pewne wnioski dotyczące trafności prognoz konstruowanych na pod-

stawie modeli GARCH. Prognozy te są najczęściej trafniejsze od prostych metod konstrukcji, takich jak model zmienności historycznej, model błędzenia przypadkowego, metoda wariancji ruchomej czy metoda wyrównywania wykładniczego dla szeregów będących realizacjami procesów kowariancyjnie stacjonarnych (patrz Poon i Granger, 2003). W przypadku procesów niestacjonarnych trafniejsze prognozy od modelu GARCH można często uzyskać na podstawie metody wyrównywania wykładniczego. Na ogół modele GARCH uwzględniające asymetryczny wpływ stopy zwrotu na wariancję (poza modelem EGARCH, gdzie występuje logarytm wariancji) wypadają lepiej w rankingach niż modele GARCH. Prognozy konstruowane na podstawie modeli GARCH są najczęściej przeszacowane, szczególnie w okresach o obniżonej zmienności. Rozszerzenie równania dla wariancji warunkowej w modelu GARCH o dodatkową zmienną (np. zmienność zrealizowaną aproksymowaną na podstawie danych o częstotliwości wyższej niż dzienna) często prowadzi do wzrostu trafności prognoz.

Dotychczasowe wyniki porównania trafności modeli GARCH i stochastycznej zmienności nie są jednoznaczne. Porównanie modeli w próbie wypadła zdecydowanie na korzyść modelu SV (patrz Osiewalski, Pajor i Pipień, 2004), co wynika z faktu, że brany jest pod uwagę cały model statystyczny. Rezultaty dotyczące trafności prognoz zmienności są już jednakże zróżnicowane (patrz Poon i Granger, 2003). Wynika to z faktu, że ocenia się jedynie wybrany aspekt modelu, w tym przypadku trafność prognoz zmienności, konstruowanych na podstawie tego modelu.

Na wyniki estymacji parametrów modeli GARCH duży wpływ mają wartości ekstremalne związane z kryzysami finansowymi czy załamaniami rynkowymi, dlatego takie zdarzenia mają również istotny wpływ na wyniki analiz trafności prognoz zmienności.

Prognozy zmienności, konstruowane na podstawie cen opcji, są na ogół obciążone (częściej przeszacowane), jednakże mimo to są często trafniejsze niż prognozy konstruowane na podstawie innych modeli szacowanych dla danych dziennych, w tym modeli GARCH (patrz Poon i Granger, 2003). Przewaga zmienności implikowanej uwidacznia się szczególnie w prognozowaniu dużego i nagłego wzrostu zmienności. Warunkiem koniecznym trafnych prognoz jest odpowiednia płynność rynku opcji. W przeciwnym wypadku czynniki związane z mikrostrukturą rynku, takie jak na przykład różnice między ofertą kupna i sprzedaży mogą powodować znaczne obciążenie szacunków. Niestety tylko wybrane instrumenty finansowe spełniają warunek odpowiedniej płynności. Ważna jest także dostępność opcji o okresach ważności zbli-

zonych do horyzontu prognozy. W badaniu Xu i Taylora (1995) oraz Christensena i Prabhala (1998) zastosowano takie opcje i prognozy wyznaczone na podstawie zmienności implikowanej były zdecydowanie trafniejsze niż prognozy konstruowane na podstawie danych historycznych. Natomiast Day i Lewis (1992), Lamoureux i Lastrapes (1993) oraz Canina i Figlewski (1993) nie zastosowali takich danych i nie zaobserwowali przewagi zmienności implikowanej. Niestety przy prognozach krótkookresowych bardzo rzadko można skorzystać z takich opcji.

W ostatnich kilku latach zaczęto bezpośrednio modelować zmienność zrealizowaną za pomocą modeli, które tradycyjnie stosuje się do opisu wartości średniej. Dotychczasowe wyniki badań wskazują, że prognozy zmienności skonstruowane na podstawie tak oszacowanych modeli (szczególnie uwzględniających długą pamięć) są często trafniejsze niż prognozy konstruowane na podstawie modeli szacowanych na podstawie dziennych stóp zwrotu, w tym modeli GARCH, a także niż prognozy konstruowane na podstawie cen opcji (patrz np. Andersen, Bollerslev, Diebold i Labys, 2003; Pong, Shackleton, Taylor i Xu, 2004). Pong, Shackleton, Taylor i Xu (2004) twierdzą, że przewaga takich prognoz wynika z samego modelowania zmienności zrealizowanej, a nie z zastosowania modeli opisujących długą pamięć.

Prognozy zmienności konstruowane na podstawie modeli szacowanych dla danych o częstotliwości wyższej niż dzienna powinny być teoretycznie dokładniejsze niż dla danych dziennych, ponieważ przy ich konstrukcji wykorzystuje się znacznie większą ilość informacji. Potwierdzają to na ogół wyniki badań empirycznych. Wniosek ten dotyczy nie tylko modeli GARCH. Wzrost częstotliwości danych powoduje wzrost trafności prognoz, ale tylko do pewnego momentu. Dla danych o bardzo wysokiej częstotliwości większe znaczenie mają wahania cykliczne oraz czynniki związane z mikrostrukturą rynku (dla mało płynnych aktywów czynniki związane z mikrostrukturą rynku wpływają znacznie na własności takich stóp zwrotu, utrudniając ich wykorzystanie). Głównym problemem z zastosowaniem danych o wysokiej częstotliwości jest ich dostępność. Dane takie są dostępne najczęściej tylko dla najbardziej płynnych instrumentów finansowych. Koszty pozyskania danych o wysokiej częstotliwości są na ogół wyższe niż danych dziennych, które są powszechnie dostępne. Konieczność przetwarzania dużej ilości informacji wydłuża znacznie czas estymacji parametrów modeli.

Konstruowanie prognoz na podstawie danych o częstotliwości mniejszej niż dzienna prowadzi na ogół do spadku trafności prognoz zmienności dla krótkiego horyzontu w stosunku do konstrukcji prognoz na podstawie danych

dziennych. Jest to związane ze zmniejszeniem się ilości informacji. Z drugiej strony, przy prognozach dla bardzo odległych horyzontów prognozy wykorzystanie danych dziennych prowadzi do większych błędów prognozy niż konstrukcja prognoz bezpośrednio na podstawie danych o mniejszej częstotliwości (patrz np. Figlewski, 1997).

Uśrednianie prognoz konstruowanych na podstawie różnych metod, czyli konstrukcja tzw. prognoz kombinowanych, prowadzi najczęściej do wzrostu trafności prognoz. Natomiast specyfikacja równania dla średniej ma nieistotny wpływ na trafność prognoz zmienności (patrz np. Hansen i Lunde, 2005).

### **3.2.5. PROGNOZOWANIE ZMIENNOŚCI STÓP ZWROTU DLA GPW W WARSZAWIE**

Literatura dotycząca prognozowania zmienności z zastosowaniem modeli GARCH dotycząca polskiego rynku finansowego, jest już stosunkowo bogata. Pierwsze badania w tym zakresie prowadzili między innymi Piontek (2003a), Doman i Doman (2004), Fiszeder (2004c, 2004d, 2005b, 2007b), Osiewalski, Pajor i Pipień (2004) oraz Pipień (2006). Pojawiają się kolejne prace, w których bada się trafność prognoz wybranej specyfikacji modelu. Tylko w pracach Doman i Doman oraz Fiszedera do oceny jakości prognoz wykorzystano dane o wysokiej częstotliwości. Zastosowanie do oceny danych intraday jest o tyle ważne, że wykorzystanie w badaniu tylko danych dziennych może spowodować błędną ocenę wyników (patrz punkt 3.2.3). W pracy Doman i Doman (2004) przedstawiono wyniki dotyczące prognozowania tylko dla wybranych specyfikacji modeli GARCH, najczęściej najlepszych według kryteriów informacyjnych, przez co niemożliwe jest porównanie trafności prognoz dla wszystkich rozważanych specyfikacji modeli GARCH. Niniejsze badanie obejmuje szerszą klasę modeli GARCH, szczególnie modeli rozszerzonych o dodatkowe informacje oraz dotyczy znacznie szerszego okresu badania, co może mieć znaczący wpływ na uzyskane wyniki<sup>93</sup>. Ponadto przeprowadzono analizę własności wariancji oraz zbadano, jaki jest wpływ tych własności na trafność prognoz zmienności.

Ocena trafności wybranych metod prognozowania zmienności została przeprowadzona dla indeksu WIG20 oraz spółki PKN Orlen. Indeks WIG20 obejmuje dwadzieścia największych i najbardziej płynnych spółek notowa-

<sup>93</sup> Przyjęty w pracy Doman i Doman (2004) okres porównań prognoz charakteryzuje się stosunkowo niską zmiennością rynku.

nych na GPW w Warszawie<sup>94</sup>. Spółka PKN Orlen została wybrana jako spółka o największym obrocie w okresie konstrukcji prognoz. Wybór indeksu oraz spółki jest celowy i został podyktowany chęcią uniknięcia problemów związanych z mikrostrukturą rynku, a będących następstwem wykorzystania danych o wysokiej częstotliwości. W przypadku mało płynnych aktywów nie wiadomo dokładnie, jaki wpływ na uzyskane wyniki analizy trafności metod prognozowania ma mikrostruktura rynku (badania teoretyczne i symulacyjne pokazują, że wpływ ten może być znaczący). Do analizy przyjęto dzienne stopy zwrotu od 2 stycznia 2001 roku do 29 grudnia 2006 roku (1504 obserwacje). Prognozy wariancji konstruowano na jedną sesję oraz osobno na pięć sesji do przodu, dla okresu od 2 stycznia 2004 roku do 29 grudnia 2006 roku (757 dziennych oraz 151 tygodniowych stóp zwrotu). Parametry wszystkich analizowanych modeli estymowano 757 razy, dodając za każdym razem kolejną obserwację. Dla danych dziennych ocena trafności prognoz zmienności została zatem dokonana dla stosunkowo długiego okresu (757 obserwacji dziennych, 151 obserwacji tygodniowych<sup>95</sup>, 57 tys. obserwacji 5-minutowych). Własności procesów w krótkim okresie mogą znacznie odbiegać od własności długookresowych (np. kilka miesięcy o znacznie podwyższonej zmienności związanej z kryzysem finansowym), dlatego ocena trafności powinna być przeprowadzana dla dłuższego okresu.

Badano procentowe logarytmiczne stopy zwrotu, obliczane według formuły<sup>96</sup>:  $r_t = 100 \ln(P_t / P_{t-1})$ , gdzie  $P_t$  jest ceną zamknięcia w chwili  $t$ . Dla indeksu WIG20, dla całego badanego okresu, występowała słaba autokorelacja pierwszego rzędu o niestabilnej strukturze w czasie<sup>97</sup>, nieistotna statystycznie przy oddzielnym badaniu dla okresu estymacji i prognozowania. Stopy zwrotu spółki PKN Orlen pozbawione były autokorelacji. W obu przypadkach przyjęto następującą specyfikację równania dla średniej:  $r_t = \mu + \varepsilon_t$ .

Głównym celem badania była ocena trafności prognoz zmienności konstruowanych na podstawie różnych specyfikacji modeli GARCH, których parametry są estymowane na podstawie danych dziennych. W pracy nie rozważano modeli

<sup>94</sup> Indeks WIG20 obok indeksu WIG jest najbardziej znanym i analizowanym indeksem rynku akcji w Polsce. W odróżnieniu od indeksu WIG obejmuje tylko spółki najbardziej płynne.

<sup>95</sup> W przypadku dłuższego horyzontu prognozy niewskazane jest stosowanie nachodzących na siebie okresów, np. tygodniowe stopy zwrotu rozpatrywane codziennie, ponieważ sąsiednie stopy zwrotu zawierają zbliżone informacje o aktywach.

<sup>96</sup> Przeskalowanie stóp zwrotu nie wpływa na uzyskane wyniki, przyspiesza natomiast często znacząco estymację parametrów za pomocą metod numerycznych.

<sup>97</sup> Podobny wniosek uzyskano w pracy Doman i Doman (2004) dla indeksu WIG, który ma bardzo zbliżone własności do indeksu WIG20.



dla danych o częstotliwości wyższej niż dzienna ani modeli zmienności zrealizowanej. W dwóch przypadkach korzystano z danych intraday w postaci zagregowanej. Ze względu na cel pracy przy wyborze metod prognozowania zmienności największy nacisk położono na modele klasy GARCH. Dodatkowo zbadano, czy możliwe jest zwiększenie trafności prognoz zmienności konstruowanych na podstawie modeli GARCH przez wykorzystanie dodatkowych informacji.

Analizowane metody prognozowania zmienności można podzielić na trzy grupy. Pierwsza grupa obejmuje modele klasy GARCH, których parametry były estymowane na podstawie dziennych stóp zwrotu, z wykorzystaniem wyłącznie cen zamknięcia: GARCH, model GARCH z warunkowym rozkładem t-Studenta (oznaczony jako GARCH-t), IGARCH, GARCH-M, model GARCH z progowym efektem GARCH-M (GARCH-MT), EGARCH, GJR-GARCH, TGARCH i FIGARCH<sup>98</sup>. Druga grupa obejmuje inne metody, które zastosowano również dla dziennych stóp zwrotu<sup>99</sup>: model błędzenia przypadkowego dla wariancji (RW), metodę zmienności historycznej (HA), metodę wariancji ruchomej (MA), metodę wyrównywania wykładniczego dla wariancji (ES) oraz model stochastycznej zmienności (SV). Trzecia grupa obejmuje metody<sup>100</sup>, w których wykorzystuje się dodatkowe informacje: model GARCH szacowany na podstawie przeskalowanego prawdziwego zakresu zmiany (GARCH dla TR – formuła (3.2.41)), model GARCH rozszerzony o dodatkowe zmienne objaśniające w chwili  $t - 1$  (formuła 3.2.34) – kwadrat prawdziwego zakresu zmiany (GARCH z TR), kwadrat różnicy między logarytmami z maksymalnej i minimalnej ceny w ciągu dnia (GARCH z HL), sumę kwadratów stóp zwrotu o częstotliwości wyższej niż dzienna (GARCH z 5MR)<sup>101</sup> oraz kwadrat stopy zwrotu indeksu S&P 500 (GARCH z S&P). Badano również modele GARCH opisujące wahania sezonowe (GARCH z sez.), efekt dnia tygodnia (GARCH z tyg.) oraz efekt związany z okresami świątecznymi (GARCH z św.), model GARCH z indeksem S&P 500 w średniej (S&P w średniej), model błędzenia przypadkowego dla zmienności zrealizowanej, obliczanej jako suma kwadratów stóp zwrotu o częstotliwości wyższej niż dzienna (RW intra) oraz zmienność implikowaną wyznaczoną na podstawie cen, osobno opcji call (ZI call) i opcji put (ZI put)<sup>102</sup>. Indeks S&P 500 został uwzględ-

<sup>98</sup> Modele te zostały omówione w podrozdziale 1.2.

<sup>99</sup> W nawiasach podano przyjęte w dalszej części pracy oznaczenia.

<sup>100</sup> Metody i modele należące do grupy drugiej i trzeciej zostały przedstawione w punkcie 3.2.2. Wyjątkiem są modele z wahaniami cyklicznymi przedstawione w podrozdziale 1.6.

<sup>101</sup> Ze względu na ograniczoną dostępność danych intraday dla spółki PKN Orlen pominięto analizę modelu GARCH rozszerzonego o zmienność zrealizowaną.

<sup>102</sup> Zmienność implikowaną badano tylko dla indeksu WIG20, ponieważ opcje na akcje

niony w badaniach, ponieważ koniunktura na GPW podobnie jak i na innych rynkach akcji na świecie jest w dużym stopniu uzależniona od koniunktury na rynku akcji w Nowym Jorku (patrz Fiszeder, 2001b, 2003a). Indeks S&P 500 dobrze mierzy koniunkturę na szerokim rynku akcji i jest jednym z najczęściej analizowanych indeksów rynku akcji w Stanach Zjednoczonych. Poszerzenie równania dla wariancji o sumę kwadratów stóp zwrotu o częstotliwości wyższej niż dzienna oraz różnicę między logarytmami z maksymalnej i minimalnej ceny w ciągu dnia powodowało często wzrost trafności prognoz zmienności w innych badaniach.

Estymacji parametrów modeli GARCH dokonano metodą quasi-największej wiarygodności. Wyjątkiem jest model GARCH z warunkowym rozkładem t-Studenta, w przypadku którego zastosowano metodę największej wiarygodności. Na podstawie kryterium informacyjnego Schwarza i testów na występowanie efektu ARCH jako wystarczający do opisu zmienności warunkowej wariancji przyjęto model GARCH(1,1). Parametry modelu stochastycznej zmienności estymowano za pomocą metody quasi-największej wiarygodności, w której do budowy funkcji wiarygodności wykorzystuje się filtr Kalmana. Wyboru stałej wygładzania w metodzie wariancji ruchomej oraz parametru wygasania w metodzie wyrównywania wykładniczego dokonywano dla każdego okresu na podstawie próbki wstępnej. Wybierano te wartości, dla których pierwiastek błędu średniokwadratowego był najmniejszy w próbie wstępnej. Próbkę wstępną miała 150 obserwacji, stała wygładzania mogła przyjmować wartości od 5 do 120, a parametr wygasania od 0,01 do 0,99<sup>103</sup> (co 0,01). Wartości stałej wygładzania ograniczono do 120, aby ruchoma wariancja szybciej odzwierciedlała aktualne zmiany na rynku<sup>104</sup>. Na ogół równolegle w badaniu stosuje się również wariancję bezwarunkową, której szacunek może być traktowany jako ruchoma wariancja o bardzo dużej wartości stałej wygładzania. Dodatkowo badano metodę MA ze stałą wygładzania równą 25 oraz metodę wyrównywania wykładniczego z parametrem wygasania równym 0,94, określaną dalej jako model RiskMetrics.

Jako realizacje wariancji do oceny trafności prognoz dla indeksu WIG20 przyjęto sumy kwadratów 5-minutowych stóp zwrotu (formuła (3.2.17)), natomiast dla spółki PKN – sumy kwadratów godzinnych stóp zwrotu. Zmien-

---

wprowadzono dopiero 17 października 2005 roku. Z powodu niskiej płynności 4 lipca 2007 r. zawieszono obrót wszystkimi seriami opcji na akcje.

<sup>103</sup> W metodzie wyrównywania wykładniczego dla wariancji bardzo rzadko się zdarza, aby wyznaczony parametr wygasania przyjmował wartości poniżej 0,9.

<sup>104</sup> Wartość stałej wygładzania równą 120 przyjmowali inni badacze (patrz np. Hendricks, 1996; Walter i Lopez, 2000).

ność szacowana jako suma kwadratów stóp zwrotu o częstotliwości 5, 10, 15, 30 i 60 minut była w przypadku stóp zwrotu spółki PKN przeszacowana w stosunku do zmienności obliczanej na podstawie danych dziennych, odpowiednio o 38,8%, 21,3%, 13,3%, 6,0% oraz 3,3%. W dużej mierze było to związane z niską płynnością oraz ujemną autokorelacją stóp zwrotu dla danych intraday<sup>105</sup>.

Zmienność implikowana była obliczana na podstawie cen opcji notowanych na GPW w Warszawie<sup>106</sup>. Zastosowano opcje at-the-money (ATM) o najbliższym terminie do wygaśnięcia oraz model Blacka i Scholesa (BS). Dla takich opcji obciążenie wynikające z zastosowania modelu BS jest minimalne, poza tym opcje te należą do najbardziej płynnych, dzięki czemu minimalizuje się negatywny wpływ niesynchronicznych transakcji. Dla mało płynnych instrumentów ceny zamknięcia opcji i instrumentu bazowego mogą pochodzić z odległych momentów w ciągu dnia, w związku z czym cena opcji w danym momencie odpowiadała innej cenie instrumentu bazowego niż wynikałoby to z cen zamknięcia. Aby wyeliminować wpływ wygasania opcji, na tydzień przed wygaśnięciem analizowano kolejną serię opcji ATM o najbliższym terminie do wygaśnięcia. W badaniu uwzględniono wypłacone w okresie ważności opcji dywidendy<sup>107</sup>. Przyjęto stosowany przez GPW w Warszawie sposób obliczania stopy procentowej wolnej od ryzyka. W obliczeniach wykorzystuje się stopy procentowe WIBOR i WIBID<sup>108</sup>.

Badania dotyczące zmienności implikowanej dla instrumentów pochodnych na polskim rynku finansowym prowadzili między innymi Piontek (1999), Majewska (2004) oraz Płuciennik i Buszkowska (2008). W badaniu Majewskiej (2004) porównano zmienność implikowaną z szacunkami zmienności otrzymanymi na podstawie innych podstawowych metod. Badanie to zatem nie dotyczyło trafności prognoz zmienności. Płuciennik i Buszkowska modelowali i prognozowali zmienność implikowaną, traktując ją jako zmienną obserwowalną i nie porównywali wyników z rzeczywistą zmiennością instrumentu finansowego. W pracy Piontka (1999) prognozy zmienności obliczone na podstawie cen opcji dla kursu USD/PLN dla 10 obserwacji miesięcznych,

<sup>105</sup> Warto zwrócić uwagę, że tak silny wpływ czynników związanych z mikrostrukturą rynku występuje nawet w przypadku najbardziej płynnej w badanym okresie spółki notowanej na GPW w Warszawie.

<sup>106</sup> Są to opcje europejskie.

<sup>107</sup> Wartość indeksu została zmniejszona o wartość bieżącą wypłaconych w okresie ważności opcji dywidend, w odpowiedniej proporcji, zgodnej ze składem indeksu.

<sup>108</sup> Szczegółowy opis procedury można znaleźć na stronach GPW w Warszawie: [www.gpw.com.pl](http://www.gpw.com.pl).

nie były trafniejsze niż prognozy skonstruowane na podstawie modelu zmienności historycznej (odchylenia standardowego stóp zwrotu).

Oceny trafności prognoz dokonano na podstawie następujących miar: względnego błędu średniego (RME), średniego absolutnego błędu (MAE), pierwiastka błędu średniokwadratowego (RMSE), logarytmicznej funkcji straty (LL), średniego absolutnego błędu prognozy skorygowanego o heteroskedastyczność (HMAE), pierwiastka błędu średniokwadratowego skorygowanego o heteroskedastyczność (HRMSE), współczynnika determinacji  $R^2$  dla funkcji regresji realizacji wariancji względem prognoz wariancji, funkcji straty LINEX<sup>109</sup>. W badaniu zastosowano stosunkowo dużą liczbę miar oceny dokładności prognoz, ponieważ każda z tych miar kładzie nacisk na inne charakterystyki przy ocenie prognoz. Z pewnymi wyjątkami rankingi badanych modeli były zbliżone<sup>110</sup> według odpowiednio MAE i HMAE oraz RMSE i HRMSE, dlatego pominięto prezentacje wyników dla miar HMAE i HRMSE. W pominiętych rankingach bardzo dobrze wypadł model SV, co sugeruje, że prognozy konstruowane na jego podstawie są trafniejsze dla małych wartości zmienności. Odwrotna sytuacja wystąpiła w przypadku modelu GARCH dla TR.

Dla każdego modelu podano również procent prognoz przeszacowanych, oceny parametrów w równaniu regresji realizacji wariancji względem prognoz wariancji, ocenę współczynnika korelacji liniowej Pearsona dla prognoz wariancji warunkowych skonstruowanych na podstawie modelu GARCH i prognoz skonstruowanych na podstawie innych modeli. Ponadto testowano istotność różnic dla błędu średniokwadratowego (patrz West i Cho, 1995).

### Ocena trafności dziennych prognoz zmienności dla indeksu WIG20<sup>111</sup>

W pierwszej kolejności zaprezentowano wyniki dla dziennych prognoz dla indeksu WIG20. W poniższych analizach prognozowana jest zawsze wariancja stóp zwrotu<sup>112</sup>. W tabeli 3.3 podano procent prognoz przeszacowanych oraz szacunki dla: RME, MAE, RMSE oraz logarytmicznej funkcji straty. Dla większości metod prognozy zmienności są częściej przeszacowane, jednakże

<sup>109</sup> Dla funkcji straty LINEX badano wartości współczynników równe: -2, -1, 1, 2. Wyniki zaprezentowano tylko dla wartości -1 i 1, ponieważ rankingi były prawie identyczne do rankingów dla wartości odpowiednio -2 i 2.

<sup>110</sup> Modele, które plasowały się wysoko (nisko) w rankingu według MAE lub RMSE, zajmowały na ogół wysokie (dalekie) pozycje w rankingach według odpowiednio HMAE lub HRMSE.

<sup>111</sup> Część wyników dotyczących dziennych prognoz indeksu WIG20 została opublikowana w pracy Fiszera (2007b).

<sup>112</sup> W przypadku modeli GARCH i SV prognozuje się wariancję warunkową.

sumarycznie niedoszacowane. Prognozy obliczane na podstawie ZI put oraz na podstawie wariancji bezwarunkowej (metoda HA) były znacząco przeszacowane<sup>113</sup>, natomiast prognozy konstruowane na podstawie modelu SV – znacząco niedoszacowane. Najdokładniejsze prognozy według kryteriów MAE i RMSE są konstruowane odpowiednio na podstawie metody wariancji ruchomej optymalizowanej dla każdego okresu i modelu GARCH dla TR. Najmniej dokładne prognozy budowane są na podstawie modelu RW, ZI put i modelu HA.

**TABELA 3.3. OCENA DOKŁADNOŚCI DZIENNYCH PROGNOZ ZMIENNOŚCI DLA INDEKSU WIG20: PROCENT PROGNOZ PRZESZACOWANYCH, RME, MAE, RMSE I LOGARYTMICZNA FUNKCJA STRATY**

Model	% przeszac.	RME w %	MAE		RMSE		LL	
			Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.
GARCH	62,75	3,90	0,835	11	1,850	12	0,310	9
GARCH-t	62,75	3,31	0,837	13	1,844	10	0,310	9
IGARCH	62,22	2,59	0,849	16	1,844	10	0,314	15
GARCH-M	61,96	4,14	0,835	11	1,855	15	0,310	9
GARCH-MT	62,09	5,54	0,828	7	1,869	19	0,308	7
GJR-GARCH	62,75	3,53	0,837	13	1,851	13	0,312	13
TGARCH	65,26	2,69	0,855	19	1,882	20	0,323	17
FIGARCH	57,07	8,93	0,828	7	1,867	18	0,306	5
RW	30,78	9,04	1,794	27	3,148	27	7,673	27
HA	78,34	-23,34	1,282	25	2,184	24	0,674	26
MA	52,84	8,58	0,806	1	1,745	2	0,302	3
MA k = 25	51,39	9,49	0,848	15	1,810	4	0,325	18
ES	58,26	6,00	0,831	10	1,816	7	0,312	13
RiskMetrics	53,37	8,93	0,811	2	1,811	5	0,295	2
SV	48,61	19,69	0,825	6	1,933	22	0,331	21
GARCH dla TR	66,05	-2,35	0,813	3	1,721	1	0,284	1
GARCH z TR	66,05	-1,73	0,859	20	1,802	3	0,311	12
GARCH z HL	65,65	-1,28	0,854	18	1,812	6	0,309	8
GARCH z 5MR	65,26	-2,29	0,879	22	1,827	8	0,330	20
GARCH z S&P	60,11	6,79	0,821	4	1,851	13	0,303	4
GARCH z sez.	61,43	5,15	0,863	21	1,883	21	0,328	19
GARCH z tyg.	59,45	6,02	0,853	17	1,865	16	0,337	22
GARCH ze św.	61,56	4,66	0,830	9	1,838	9	0,317	16
S&P w średniej	61,03	7,15	0,821	4	1,865	16	0,307	6
RW intra	49,27	0,07	1,054	23	2,320	26	0,433	23
ZI call	52,05	5,97	1,064	24	2,173	23	0,610	24
ZI put	81,11	-41,38	1,387	26	2,186	25	0,665	25

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2007B) ORAZ OBLICZENIA WŁASNE.

<sup>113</sup> Prognozy te były również najczęściej przeszacowane.

Rankingi modeli uzyskane na podstawie kryteriów MAE i RMSE, z pewnymi wyjątkami, są zbliżone. Duże wartości nietypowe mają większe znaczenie w przypadku miary RMSE. Modele S&P w średniej, SV, GARCH-MT oraz FIGARCH wypadają lepiej wtedy, gdy duże różnice między prognozą a wartością rzeczywistą mają nieco mniejsze znaczenie. Z kolei modele GARCH rozszerzone o dodatkowe informacje: GARCH z TR, GARCH z 5MR i GARCH z HL plasują się wyżej w rankingu dla RMSE. Według logarytmicznej funkcji straty najdokładniejsze prognozy są konstruowane na podstawie modelu GARCH dla TR, natomiast najmniej dokładne – na podstawie modelu RW.

W tabeli 3.4 przedstawiono oceny parametrów funkcji regresji realizacji wariancji względem prognoz wariancji, szacunki współczynnika determinacji dla tej funkcji oraz szacunki funkcji straty LINEX. Dla modeli RW, HA, RW intra oraz ZI oceny parametrów  $\gamma_0$  i  $\gamma_1$  w równaniu regresji różniły się istotnie odpowiednio od zera i jedności. Największy szacunek współczynnika determinacji otrzymano dla modelu GARCH dla TR, najmniejszy natomiast – dla modelu HA. Należy podkreślić, że niskie szacunki współczynnika  $R^2$  – w granicach 0,2–0,3 – nie świadczą o słabej jakości prognoz, ale są charakterystyczne dla prognoz zmienności.

Znacząco różne rankingi otrzymano stosując do oceny prognoz miary asymetryczne. Jeżeli większą wagę przywiązuje się do błędów przeszacowania zmienności niż do błędów niedoszacowania ( $a = -1$  dla funkcji LINEX), to pierwsze miejsce w rankingu zajmuje model SV. Na ostatnich miejscach w rankingach, według tego kryterium, znalazły się modele RW i RW intra. Jeżeli natomiast większą wagę przypisać błędom niedoszacowania zmienności ( $a = 1$ ), to najdokładniejsze prognozy są konstruowane na podstawie modelu MA, a najmniej dokładne – na podstawie ZI call. Modele, które zajmują wysokie (odległe) miejsca w rankingu dla  $a < 0$ , zajmują najczęściej odległe (wysokie) miejsca w rankingu dla  $a > 0$ . Wyjątkiem są tutaj modele RW, HA i ZI call, które w obu rankingach plasują się na ostatnich miejscach. Wyniki funkcji straty LINEX i wcześniejszych miar wyraźnie wskazują, że prognozy konstruowane na podstawie modelu SV są niedoszacowane w przypadku dużej zmienności.

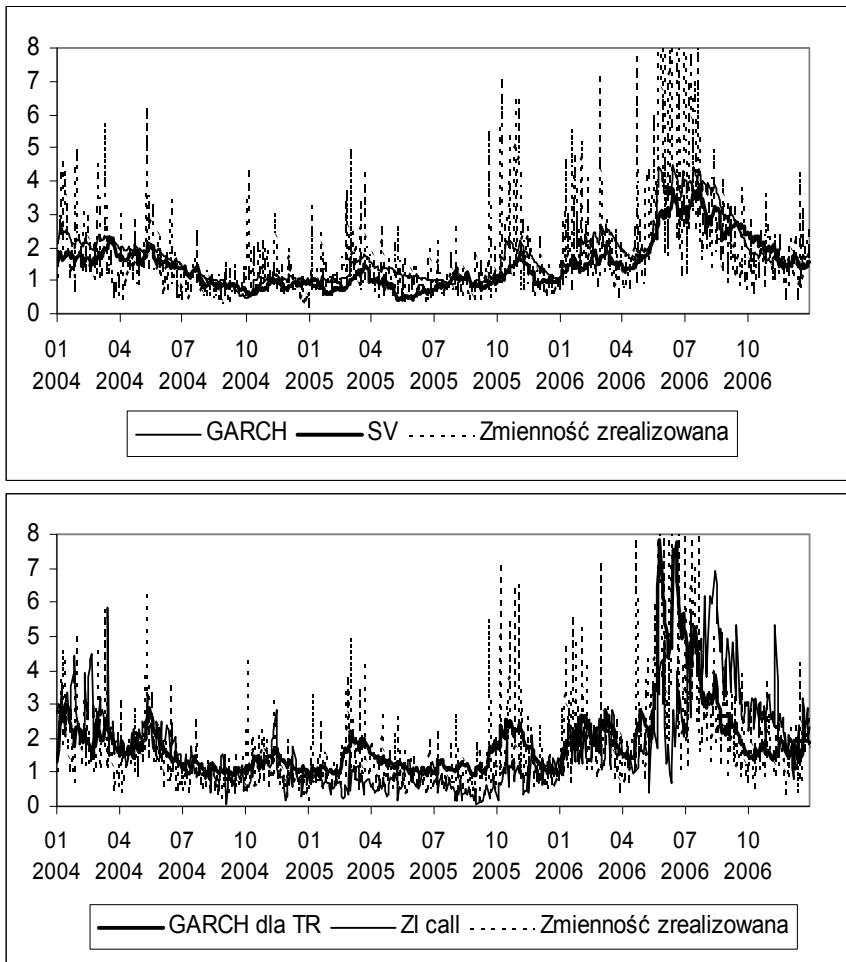
**TABELA 3.4. OCENA DOKŁADNOŚCI DZIENNYCH PROGNOZ ZMIENNOŚCI DLA INDEKSU WIG20: WSPÓŁCZYNNIK DETERMINACJI  $R^2$ , FUNKCJA STRATY LINEX**

Model	$\gamma_0$	$\gamma_1$	$R^2$		LINEX a = -1		LINEX a = 1 ( $\times 10^9$ )	
			Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.
GARCH	-0,371	1,253	0,248	12	0,598	6	2,453	15
GARCH-t	-0,330	1,223	0,250	10	0,615	9	2,243	13
IGARCH	-0,125	1,097	0,244	14	0,695	17	1,846	11
GARCH-M	-0,328	1,232	0,242	15	0,599	7	2,727	18
GARCH-MT	-0,368	1,274	0,233	17	0,566	4	3,509	23
GJR-GARCH	-0,397	1,264	0,246	13	0,599	7	2,497	16
TGARCH	-0,387	1,247	0,218	20	0,620	11	3,118	20
FIGARCH	-0,036	1,120	0,230	19	0,638	15	3,148	21
RW	1,462*	0,212*	0,094	25	7,3e+6	26	15,379	25
HA	4,567*	-1,234*	0,011	27	1,257	23	17,516	26
MA	-0,107	1,159	0,332	2	0,615	9	0,459	1
MA k = 25	0,094	1,048	0,275	4	0,751	18	0,707	4
ES	-0,063	1,101	0,269	6	0,663	16	1,337	9
RiskMetrics	-0,042	1,124	0,277	3	0,625	12	1,525	10
SV	-0,163	1,357	0,208	22	0,506	1	4,576	24
GARCH dla TR	-0,319	1,149	0,345	1	1,180	22	0,659	2
GARCH z TR	-0,087	1,030	0,275	4	1,082	21	0,867	5
GARCH z HL	-0,083	1,032	0,268	7	0,931	20	1,078	6
GARCH z 5MR	-0,109	1,036	0,256	9	0,915	19	1,203	7
GARCH z S&P	-0,331	1,269	0,249	11	0,565	3	2,631	17
GARCH z sez.	-0,218	1,181	0,215	21	0,626	13	3,027	19
GARCH z tyg.	-0,185	1,173	0,232	18	0,628	14	2,044	12
GARCH ze św.	-0,369	1,263	0,259	8	0,575	5	2,407	14
S&P w średniej	-0,336	1,277	0,238	16	0,558	2	3,160	22
RW intra	1,088*	0,399*	0,160	23	1,5e+9	27	0,668	3
ZI call	1,092*	0,422*	0,059	26	1,947	24	43,684	27
ZI put	0,300	0,590*	0,113	24	3,990	25	1,277	8

Parametry  $\gamma_0$  i  $\gamma_1$  oraz  $R^2$  dotyczą równania regresji realizacji wariancji względem prognoz wariancji. Gwiazdką oznaczono oceny parametrów  $\gamma_0$  i  $\gamma_1$  istotnie różniące się odpowiednio od zera i jedności na poziomie 0,05. Średnie błędy szacunku estymowane były na podstawie formuły Newey i West.

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2007B) ORAZ OBLICZENIA WŁASNE.

Interesująca może być również analiza dokładności prognoz w czasie, tzn. w jakich okresach poszczególne modele dają trafne prognozy. Na rysunku 3.1 przedstawiono realizacje zmienności wraz z prognozami wariancji dla wybranych czterech metod: modelu GARCH, SV, modelu GARCH dla TR oraz ZI call.



**RYСУNEK 3.1. DZIENNE PROGNOZY WARIANCJI STÓP ZWROTU DLA INDEKSU WIG20**

ŹRÓDŁO: OPRACOWANIE WŁASNE.

Dla większej przejrzystości pominięto kilka obserwacji nietypowych zmienności zrealizowanej z czerwca 2006 r. (pominięto dane z 13 i 16 czerwca 2006 r. wynoszące odpowiednio 32,197 oraz 30,209 oraz kilka wartości zbliżonych do 11). W okresach o dużej zmienności związanej najczęściej ze spadkami na rynku, np. październik 2005 r., luty 2006 r., maj–czerwiec 2006 r., prognozy konstruowane na podstawie modelu GARCH są znacznie trafniejsze od prognoz skonstruowanych na podstawie modelu SV, choć również znacząco niedoszacowane. Najbardziej trafne są w tych sytuacjach prognozy konstruowane na podstawie modelu GARCH dla TR. Z kolei w okre-



sach o niższej zmienności występujących najczęściej w okresach powolnych wzrostów na rynku, np. sierpień 2004 r., maj–czerwiec 2005 r., najbardziej trafne są prognozy konstruowane na podstawie modelu SV. Na bardzo słabą trafność prognoz wyznaczanych na podstawie cen opcji call miał wpływ okres sierpień–wrzesień 2006 r., podczas którego nastąpiło zmniejszenie wahań po wcześniejszych dużych zmianach, wbrew oczekiwaniom większości uczestników rynku opcji. Poza tym okresem prognozy są najczęściej niedoszacowane.

Podsumowując różne kryteria oceny prognoz, można stwierdzić, że miejsce w rankingu badanych modeli zależy w dużym stopniu od przyjętego kryterium. Nie można wskazać modelu, na podstawie którego można by konstruować najdokładniejsze prognozy według wszystkich rozważanych miar trafności. Pomijając funkcję straty LINEX dla  $a = -1$ , która przywiązuje większą wagę do błędów przeszacowania zmienności niż do błędów niedoszacowania, najlepiej w rankingach wypada model GARCH dla TR. Drugą najlepszą metodą wydaje się wykorzystanie wariancji ruchomej, gdzie stała wygładzania jest wybierana dla każdego okresu na podstawie próbki wstępnej. W innych tego typu badaniach wartość tego parametru jest ustalana na ogół arbitralnie, co znacznie zwiększa błędy prognoz. Zauważmy, że model MA z  $k = 25$  wypada w rankingach już znacznie gorzej. Stosunkowo wysoko w rankingach plasuje się również stosowany przez praktyków rynku model RiskMetrics. Najmniej dokładne prognozy, według większości miar oceny trafności, są konstruowane na podstawie modeli RW, RW intra oraz HA. Zatem prognozy konstruowane na podstawie najprostszych metod są najmniej trafne.

Bardzo słabo w rankingach wypadły również prognozy konstruowane na podstawie zmienności implikowanej. ZI prognozowana na podstawie opcji put jest znacząco większa niż zmienność obliczona na podstawie opcji call. Wynik ten jest zgodny z rezultatami innych badań dotyczących np. rynku w Stanach Zjednoczonych (patrz Noh, Engle, Kane, 1993). Przyczyną wyższej ZI dla opcji put może być fakt, że opcje te są często stosowane przez inwestorów do zabezpieczenia portfela, dlatego są oni skłonni zapłacić za nie relatywnie więcej niż za opcje call. Dodatkowo analizowano zmienność średnią obliczoną jako średnia z ZI call i ZI put. Wyniki zostały pominięte, ponieważ wskazywały na słabszą trafność prognoz niż w przypadku ZI wyznaczonej tylko na podstawie opcji call. Słaba trafność ZI może wynikać co najmniej z kilku powodów (patrz punkt 3.2.2). Najważniejsza, jak się wydaje w tym przypadku, jest różnica między horyzontem prognozy a okresem ważności opcji oraz

niska płynność rynku opcji. Wyznaczona ZI dotyczy całego okresu ważności opcji i jej przeskalowanie do danych dziennych nie rozwiązuje tego problemu. W badaniu należałoby uwzględnić strukturę terminową ZI<sup>114</sup>, co przy jeszcze niższej płynności na innych seriach kontraktów, mogłoby się wiązać z jeszcze większymi błędami szacunku<sup>115</sup>.

Wykorzystanie dodatkowych informacji w modelu GARCH daje mieszane rezultaty. Badanie pokazało, że wyniki zależą nie tylko od rodzaju informacji, ale również od sposobu ich wykorzystania (por. w tabelach np. GARCH dla TR i GARCH z TR czy GARCH z S&P i S&P w średniej).

Prognozy zmienności skonstruowane na podstawie większości metod są bardzo silnie skorelowane z prognozami konstruowanymi na podstawie modelu GARCH (patrz tabela 3.5). Podobnie różnice w szacunkach wielu miar oceny trafności prognoz między różnymi metodami są często niewielkie. Na przykład w przypadku tylko pięciu metod: RW, HA, modelu GARCH opisującego efekt dnia tygodnia oraz ZI call i put błędy średniokwadratowe różniły się istotnie od błędów dla modelu GARCH (patrz tabela 3.5). Z drugiej strony niektóre różnice są znaczące z ekonomicznego punktu widzenia. Gdyby dodatkowy błąd w szacunku zmienności potraktować jako dodatkowe ryzyko, to na przykład różnica między szacunkami RMSE, między modelem GARCH szacowanym w tradycyjny sposób a modelem szacowanym na podstawie przeskalowanego prawdziwego zakresu zmiany (0,129), dodaje około 5,8 punktu procentowego dodatkowego ryzyka (mierzonego odchyleniem standardowym) w skali roku, w przypadku tradycyjnej metody estymacji. Uzyskane wyniki raczej sugerują słabą moc testu na równość MSE.

### **Badanie własności statystycznych**

W większości prac na temat prognozowania zmienności bardzo ogólnikowo analizuje się własności badanych szeregów czasowych, przez co niemożliwe jest sformułowanie bardziej ogólnych wniosków dotyczących poszczególnych metod prognozowania. W badaniu przeprowadzono szereg testów dotyczących prawidłowości przyjętych specyfikacji modeli GARCH (patrz tabela 3.6). Wyniki testowania restrykcji nakładanych na parametry modeli GARCH, omawiane w dalszej części pracy, były niewrażliwe na przyjętą specyfikację rozkładu warunkowego. Wnioski płynące z wyników testów są często zgodne z rezultatami analizy kryterium informacyjnego Schwarza (SIC, patrz tabela 3.5). Interesujące jest również porównanie pozycji poszczególnych specyfikacji modeli

<sup>114</sup> Patrz podrozdział 6.1.

<sup>115</sup> Na wielu seriach przez długi czas nie dochodziło do żadnych transakcji.

GARCH w rankingach przy prognozowaniu zmienności i odniesienie uzyskanych rezultatów do wyników testowania i kryterium SIC.

**TABELA 3.5. WSPÓŁCZYNNIK KORELACJI DZIENNYCH PROGNOZ ZMIENNOŚCI DLA INDEKSU WIG20, TEST ISTOTNOŚCI RÓŻNIC BŁĘDU ŚREDNIOKWADRATOWEGO ORAZ KRYTERIUM INFORMACYJNE SCHWARZA**

Model	$\rho$	$\chi^2$	SIC	SIC ranking
GARCH	1	–	5305,6	10
GARCH-t	0,999	0,945	5290,6	3
IGARCH	0,998	0,121	5302,2	9
GARCH-M	0,999	0,984	5308,9	11
GARCH-MT	0,997	1,083	5299,1	5
GJR-GARCH	0,998	1,389	5312,9	14
TGARCH	0,986	2,522	5318,9	16
FIGARCH	0,968	2,407	5300,3	6
RW	0,364	21,394*	–	–
HA	-0,055	6,626*	–	–
MA	0,932	1,640	–	–
MA k = 25	0,958	0,523	–	–
ES	0,981	0,719	–	–
RiskMetrics	0,984	1,520	5298,3	4
SV	0,933	2,458	5266,9	2
GARCH dla TR	0,890	2,183	–	–
GARCH z TR	0,967	0,771	5302,1	8
GARCH z HL	0,972	0,777	5301,1	7
GARCH z 5MR	0,988	0,321	5310,3	12
GARCH z S&P	0,999	0,150	5311,7	13
GARCH z sez.	0,955	3,577	5373,6	18
GARCH z tyg.	0,967	7,858*	5327,3	17
GARCH ze św.	0,987	2,907	5316,3	15
S&P w średniej	0,998	1,280	5259,7	1
RW intra	0,526	2,510	–	–
ZI call	0,759	5,281*	–	–
ZI put	0,753	14,793*	–	–

Kolumna  $\rho$  przedstawia oceny współczynników korelacji prognoz zmienności konstruowanych na podstawie modelu GARCH i innych analizowanych metod prognozowania. Kolumna  $\chi^2$  zawiera wyniki dotyczące weryfikacji hipotezy o równości błędów MSE dla modelu GARCH i osobno pozostałych metod prognozowania. Gwiazdką oznaczono oceny statystyk, w przypadku których hipoteza zerowa została odrzucona na poziomie 0,05.

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2007B) ORAZ OBLICZENIA WŁASNE.

Model GARCH z warunkowym rozkładem normalnym jest zdecydowanie odrzucany przez wyniki testu LR, jak i kryterium SIC na korzyść modelu z rozkładem t-Studenta, a mimo to oba modele plasują się na zbliżonych

pozycjach w rankingach przy prognozowaniu zmienności. Większość kryteriów oceny prognoz wskazuje, że prognozy konstruowane na podstawie modelu GARCH są dokładniejsze niż na podstawie modelu IGARCH. Rezultat ten jest zgodny z wynikami testu LR, według którego hipoteza o równości  $\alpha_1 + \beta_1 = 1$  została odrzucona. Kryterium SIC wskazuje w tym przypadku na nieznaczną przewagę modelu IGARCH<sup>116</sup>. Efekt GARCH-M jest nieistotny statystycznie w badanym szeregu, a model GARCH-M plasuje się na dalszych miejscach w rankingach niż model GARCH.

**TABELA 3.6. ANALIZA WŁASNOŚCI STÓP ZWROTU I WARIANCJI INDEKSU WIG20**

Weryfikowane hipotezy	Statystyka	Ocena statystyki	Istotność ocen parametrów
Brak autokorelacji	LB(12)	13,81	–
Brak efektu ARCH	LM(12)	75,51*	–
Normalność rozkł. bezwarunkowego	JB	67,53*	–
Normalność rozkł. warunk. w modelu GARCH	LR	22,34*	v istotny
$\beta_1 = 1 - \alpha_1$ w modelu GARCH	LR	3,94*	–
d = 0 w modelu FIGARCH	LR	12,66*	d istotny
$\delta = 0$ w modelu GARCH–M	LR	4,05*	$\delta$ nieistotny
$\delta^+, \delta^- = 0$ w modelu GARCH–MT	LR	21,18*	$\delta^-$ istotny
$\omega_1 = 0$ w modelu GJR–GARCH	LR	0,05	$\omega_1$ nieistotny
$\alpha_1 = 0,06$ w modelu IGARCH	LR	17,99*	–
$\gamma = 0$ w modelu GARCH z HL	LR	11,76*	$\gamma$ istotny
$\gamma = 0$ w modelu GARCH z TR	LR	10,79*	$\gamma$ istotny
$\gamma = 0$ w modelu GARCH z 5MR	LR	2,65	$\gamma$ nieistotny
$\gamma = 0$ w modelu GARCH z S&P	LR	1,21	$\gamma$ nieistotny
$\delta_k = 0$ w modelu GARCH z sez.	LR	12,46	Niektóre istotne
$\gamma_k = 0$ w modelu GARCH z tyg.	LR	7,51	Niektóre istotne
$\varphi_1, \varphi_2 = 0$ w modelu GARCH ze św.	LR	3,89	$\varphi_2$ istotny
$\delta = 0$ w modelu z S&P w średniej	LR	53,25*	$\delta$ istotny

LB to statystyka testu Ljunga-Boxa, LM to statystyka testu Engle'a, JB to statystyka testu Jarque-Bera. Gwiazdką oznaczono oceny statystyk, w przypadku których weryfikowana hipoteza została odrzucona na poziomie istotności 0,05. Oznaczenia parametrów odnoszą się do specyfikacji przedstawionych podrozdziałach 1.2 i 1.6.

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

<sup>116</sup> Należy pamiętać, że przy zbliżonych wartościach funkcji wiarygodności preferowanym według kryterium SIC jest model mniej sparametryzowany, czyli w tym przypadku model IGARCH.

Uzyskane wyniki wskazują na występowanie asymetrycznego efektu GARCH-M i długiej pamięci w zmienności, jednakże prognozy konstruowane zarówno na podstawie modelu GARCH-TM, jak i modelu FIGARCH, nie są znacząco dokładniejsze niż prognozy konstruowane na podstawie modelu GARCH. W przypadku indeksu WIG20 nie występuje asymetryczny wpływ dodatnich i ujemnych stóp zwrotu na wariancję, a modele GJR-GARCH i TGARCH plasują się we wszystkich rankingach, w tym również według kryterium SIC, na dalszych miejscach niż model GARCH. Prognozy konstruowane na podstawie modelu GJR-GARCH były zawsze nieznacznie dokładniejsze niż na podstawie modelu TGARCH. Rozważany był również model EGARCH, jednakże ze względu na problemy z estymacją parametrów dla niektórych okresów (płaska funkcja wiarygodności), pominięto prezentację wyników<sup>117</sup>. Według testu LR model RiskMetrics został zdecydowanie odrzucony na korzyść modelu IGARCH, a mimo to prognozy konstruowane na podstawie modelu RiskMetrics okazały się dokładniejsze według wszystkich kryteriów. Taki sam wynik uzyskano dla kryterium SIC.

Wyniki testów wskazują, że istotnie statystycznie jest rozszerzenie modelu GARCH o prawdziwy zakres zmiany, różnicę między logarytmami z maksymalnej i minimalnej ceny w ciągu dnia oraz wprowadzenie stóp zwrotu indeksu S&P 500 do równania dla średniej. Modele te plasują się wyżej w rankingu według kryterium SIC i wypadają lepiej przy ocenie prognoz zmienności. Pozostałe metody rozszerzenia modelu, czyli GARCH z 5MR, GARCH z S&P, GARCH z sezonowością, efektem dnia tygodnia oraz okresem świątecznym, były nieistotne statystycznie i prognozy konstruowane na ich podstawie były na ogół mniej trafne niż prognozy konstruowane na podstawie modelu GARCH.

Prognozy konstruowane na podstawie modelu SV są dokładne w przypadku małej zmienności, jednakże według większości rozważanych kryteriów oceny, prognozy te są mniej trafne niż prognozy konstruowane na podstawie modelu GARCH<sup>118</sup>. Ten wynik jest niezgodny z rezultatami innych badań (na przykład Yu, 2002; Hol i Koopman, 2002). Yu (2002) prognozował miesięczną zmienność indeksu rynku akcji w Nowej Zelandii – NZSE 40, natomiast Hol i Koopman (2002) prognozowali dzienną zmienność dla

---

<sup>117</sup> Dla skróconego okresu prognozy konstruowane na podstawie tego modelu były znacząco mniej trafne niż prognozy konstruowane na podstawie modelu GARCH (były częściej przeszacowane).

<sup>118</sup> Warto zwrócić uwagę, że model SV wypada zdecydowanie lepiej niż model GARCH według kryterium SIC.

indeksu rynku akcji w Stanach Zjednoczonych – S&P 100. Zmienność warunkowych wariancji dla stóp zwrotu indeksów NZSE 40 (dane miesięczne) i S&P 100 (dane dzienne) była istotnie mniejsza niż zmienność warunkowej wariancji<sup>119</sup> stóp zwrotu indeksu WIG20 (dane dzienne) i prawdopodobnie dlatego model stochastycznej zmienności wypadł w powyższych badaniach relatywnie lepiej.

### Ocena trafności prognoz wewnątrz próby

Wnioski wynikające z przeprowadzonych testów oraz analizy kryterium SIC nie zawsze pokrywają się z wynikami trafności modeli w prognozowaniu zmienności. Przy konstrukcji kryteriów informacyjnych i często przy testowaniu restrykcji bierze się pod uwagę cały model (np. równanie dla średniej, dla wariancji, rozkład warunkowy). Uwzględnienie w modelowaniu określonych charakterystyk szeregu czasowego stóp zwrotu nie zawsze prowadzi do wzrostu trafności prognoz zmienności konstruowanych na podstawie tych modeli. Okazuje się, że niektóre charakterystyki są istotne przy ocenie ogólnego dopasowania modelu w próbie, natomiast nie mają dużego wpływu na trafność prognoz. Wystarczy zauważyć, że pierwsze trzy miejsca w rankingu według kryterium SIC zajmują modele S&P w średniej, SV i GARCH-t, które plasują się na dalszych miejscach w rankingach oceny prognoz zmienności. W celu poszukiwania lepszego kryterium wyboru metod prognozowania przeprowadzono analizę trafności prognoz zmienności wewnątrz próby (ang. *in-sample forecasts*) dla całego badanego okresu, na podstawie tych samych kryteriów, które były stosowane w badaniu poza próbą. Wyniki przedstawiono w tabelach 3.7 i 3.8. Okazuje się, że rankingi modeli dla prognoz wewnątrz próby są bardzo zbliżone do rankingów modeli dla prognoz poza próbą. Wydaje się, że wybór najlepszego do prognozowania zmienności modelu powinien być w pierwszej kolejności dokonywany na podstawie analizy wewnątrz próby dla tej samej miary oceny trafności prognoz, na podstawie której dokonuje się oceny poza próbą. Wybór miary powinien zależeć przede wszystkim od celu badania i zastosowania prognoz. Ważna jest również analiza własności wariancji badanych szeregów, ponieważ pozwala na wstępnie wyeliminować z dalszych badań niektóre specyfikacje modeli.

<sup>119</sup> Wydaje się, że istotny jest nie tyle poziom zmienności, co charakter tej zmienności, a w szczególności persystencja zmienności, która w przypadku rynków rozwiniętych jest silniejsza (patrz Fiszeder i Romański, 2002).

**TABELA 3.7. OCENA DOKŁADNOŚCI DZIENNYCH PROGNOZ ZMIENNOŚCI DLA INDEKSU WIG20 WEWNĄTRZ PRÓBY: MAE, RMSE I LOGARYTMICZNA FUNKCJA STRATY**

Model	MAE		RMSE		LL	
	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.
GARCH	1,067	14	1,831	11	0,441	12
GARCH-t	1,076	16	1,834	14	0,447	15
IGARCH	1,132	21	1,866	20	0,481	21
GARCH-M	1,064	12	1,830	10	0,438	10
GARCH-MT	1,052	7	1,831	13	0,432	9
GJR-GARCH	1,067	13	1,830	9	0,441	12
TGARCH	1,086	18	1,856	18	0,454	19
FIGARCH	1,151	22	1,930	22	0,497	22
RW	2,068	25	3,504	25	7,043	25
HA	1,518	24	2,153	23	0,807	24
MA	0,924	1	1,706	1	0,405	3
MA k = 25	1,105	20	1,861	19	0,460	20
ES	1,034	5	1,819	8	0,443	14
RiskMetrics	0,981	2	1,783	3	0,399	2
SV	1,011	3	1,883	21	0,408	4
GARCH dla TR	1,013	4	1,740	2	0,392	1
GARCH z TR	1,062	11	1,806	4	0,425	6
GARCH z HL	1,059	10	1,810	6	0,422	5
GARCH z 5MR	1,057	8	1,807	5	0,426	7
GARCH z S&P	1,074	15	1,838	16	0,449	17
GARCH z sez.	1,091	19	1,855	17	0,449	16
GARCH z tyg.	1,079	17	1,837	15	0,450	18
GARCH ze św.	1,057	9	1,818	7	0,438	10
S&P w średniej	1,044	6	1,831	12	0,427	8
RW intra	1,189	23	2,259	24	0,517	23

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

**TABELA 3.8. OCENA DOKŁADNOŚCI DZIENNYCH PROGNOZ ZMIENNOŚCI DLA INDEKSU WIG20 WEWNĄTRZ PRÓBY: WSPÓŁCZYNNIK DETERMINACJI  $R^2$ , FUNKCJA STRATY LINEX**

Model	$R^2$		LINEX $a = -1$		LINEX $a = 1$ ( $\times 10^9$ )	
	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.
GARCH	0,194	11	1,223	9	1,317	15
GARCH-t	0,193	13	1,289	14	1,234	12
IGARCH	0,186	18	1,749	20	0,892	10
GARCH-M	0,194	11	1,240	10	1,427	16
GARCH-MT	0,191	14	1,169	5	1,827	21
GJR-GARCH	0,195	10	1,219	8	1,290	13
TGARCH	0,171	20	1,197	6	1,598	19
FIGARCH	0,134	24	1,930	21	1,833	22

CD. TABELI 3.8

RW	0,139	23	5,6e+6	24	7,746	24
HA	0,005	25	2,263	23	8,822	25
MA	0,236	3	0,922	2	0,281	1
MA k = 25	0,197	9	2,076	22	0,362	3
ES	0,214	7	1,281	13	0,762	7
RiskMetrics	0,241	2	1,353	16	0,868	9
SV	0,150	21	0,813	1	2,252	23
GARCH dla TR	0,273	1	1,537	19	0,376	4
GARCH z TR	0,220	4	1,506	18	0,512	5
GARCH z HL	0,217	5	1,399	17	0,639	6
GARCH z 5MR	0,216	6	1,262	12	0,768	8
GARCH z S&P	0,188	17	1,259	11	1,437	17
GARCH z sez.	0,176	19	1,347	15	1,558	18
GARCH z tyg.	0,188	16	1,202	7	1,074	11
GARCH ze św.	0,204	8	1,159	4	1,306	14
S&P w średniej	0,189	15	1,099	3	1,696	20
RW intra	0,145	22	7,4e+8	25	0,336	2

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

### Ocena trafności tygodniowych prognoz zmienności dla indeksu WIG20

Wraz ze wzrostem horyzontu prognozy większość prognoz zmienności konstruowanych na podstawie omawianych modeli zbiega do wariancji bezwarunkowej, zatem wyższa trafność prognoz konstruowanych na podstawie metod pozwalających opisać zmienność warunkowych wariancji, powinna maleć. Poniżej zbadano trafność prognoz zmienności na pięć sesji do przodu (prognozy te będą dalej określane jako tygodniowe). Zastosowano te same modele, co przy prognozach dziennych, z wyjątkiem modeli GARCH opisujących efekt dnia tygodnia, efekt związany z okresem świątecznym<sup>120</sup> oraz wahania sezonowe<sup>121</sup>. Dodatkowo zastosowano prognozy konstruowane na podstawie modelu GARCH szacowanego dla tygodniowych stóp zwrotu (oznaczony jako GARCH tyg.). W tabeli 3.9 podano procent prognoz przeszacowanych oraz szacunki dla: RME, MAE, RMSE i logarytmicznej funkcji straty.

<sup>120</sup> Dla danych tygodniowych te efekty są na ogół nieobserwowalne.

<sup>121</sup> Model ten pominięto ze względu na tygodnie leżące na przełomie miesięcy.



**TABELA 3.9. OCENA DOKŁADNOŚCI TYGODNIOWYCH PROGNOZ ZMIENNOŚCI INDEKSU WIG20: PROCENT PROGNOZ PRZESZACOWANYCH, RME, MAE, RMSE I LOGARYTMICZNA FUNKCJA STRATY**

Model	% przesz.	RME w %	MAE		RMSE		LL	
			Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.
GARCH	57,62	3,48	3,060	11	5,668	11	0,156	8
GARCH tyg.	76,82	-16,69	4,127	21	6,445	20	0,247	21
GARCH-t	56,95	2,83	3,060	11	5,634	10	0,155	6
IGARCH	62,25	-1,26	3,181	16	5,632	9	0,158	9
GARCH-M	58,28	3,77	3,064	14	5,701	14	0,158	9
GARCH-MT	58,94	5,10	3,060	11	5,803	16	0,159	13
GJR-GARCH	60,26	2,95	3,094	15	5,693	13	0,158	9
TGARCH	65,56	-0,98	3,302	19	5,886	17	0,169	16
FIGARCH	50,99	8,68	2,893	2	5,502	6	0,148	4
RW	27,81	14,67	8,968	25	14,635	25	10,752	25
HA	76,16	-23,41	5,380	23	7,921	23	0,451	22
MA	41,06	9,35	2,931	3	5,604	8	0,179	17
MA k = 25	38,41	9,64	3,201	17	5,427	4	0,190	18
ES	51,66	6,24	3,007	7	5,600	7	0,168	15
RiskMetrics	44,37	9,02	2,944	4	5,438	5	0,158	9
SV	39,74	19,56	3,261	18	6,297	19	0,204	20
GARCH dla TR	65,56	-3,38	2,719	1	4,968	1	0,124	1
GARCH z TR	60,26	-1,61	3,055	10	5,329	3	0,143	3
GARCH z HL	59,60	-1,68	3,024	8	5,257	2	0,141	2
GARCH z 5MR	66,89	-14,46	3,706	20	6,628	21	0,197	19
GARCH z S&P	55,63	6,63	3,006	6	5,688	12	0,155	6
S&P w średniej	54,97	6,70	3,043	9	5,792	15	0,162	14
RW intra	52,98	0,04	2,963	5	6,194	18	0,154	5
ZI call	43,05	5,75	4,583	22	7,768	22	0,463	23
ZI put	80,79	-38,71	6,193	24	9,139	24	0,499	24

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

Podobnie jak dla prognoz dziennych, dla większości metod prognozy są częściej przeszacowane, jednakże sumarycznie niedoszacowane. Prognozy konstruowane na podstawie modelu GARCH tygodniowego są wyraźnie przeszacowane.

W tabeli 3.10 przedstawiono oceny parametrów funkcji regresji realizacji wariacji względem prognoz wariacji, szacunki współczynnika determinacji dla tej funkcji oraz szacunki funkcji straty LINEX. Porównując uzyskane wyniki dla prognoz tygodniowych z prognozami dziennymi, można zauważyć dużą zbieżność rankingów modeli. Istotnym wyjątkiem są modele FIGARCH

i RW intra, które wypadają lepiej w przypadku prognoz tygodniowych<sup>122</sup> oraz model MA, zajmujący dalsze pozycje<sup>123</sup>.

**TABELA 3.10. OCENA DOKŁADNOŚCI TYGODNIOWYCH PROGNOZ ZMIENNOŚCI DLA INDEKSU WIG20: WSPÓŁCZYNNIK DETERMINACJI R<sup>2</sup>, FUNKCJA STRATY LINEX**

Model	$\gamma_0$	$\gamma_1$	R <sup>2</sup>		LINEX a = -1 ( $\times 10^3$ )		LINEX a = 1 ( $\times 10^{17}$ )	
			Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.
GARCH	-0,933	1,143	0,428	12	0,211	6	3,583	11
GARCH tyg.	0,615	0,799	0,310	21	8,966	18	26,585	18
GARCH-t	-0,743	1,114	0,432	10	0,328	9	2,516	9
IGARCH	-0,098	0,998	0,427	13	1,616	15	0,618	7
GARCH-M	-0,767	1,127	0,420	16	0,336	10	3,842	12
GARCH-MT	-0,915	1,160	0,403	18	0,094	3	11,101	17
GJR-GARCH	-1,011	1,146	0,422	15	0,217	7	4,212	13
TGARCH	-0,961	1,095	0,377	19	0,706	14	7,473	15
FIGARCH	-0,136	1,111	0,469	6	0,229	8	2,624	10
RW	7,735*	0,171*	0,126	22	4,1e+28	25	1,7e+8	25
HA	23,641	-1,305	0,025	25	0,519	11	6,0e+3	22
MA	1,213	0,955	0,446	7	0,131	4	148,201	21
MA k = 25	1,163	0,965	0,482	4	0,618	13	0,016	1
ES	0,930	0,957	0,440	9	0,579	12	0,969	8
RiskMetrics	0,723	1,011	0,477	5	2,142	16	0,535	6
SV	-0,004	1,244	0,353	20	0,033	1	116,791	20
GARCH dla TR	-0,576	1,029	0,556	1	43,251	20	0,100	3
GARCH z TR	0,559	0,923	0,490	3	42,421	19	0,115	4
GARCH z HL	0,414	0,939	0,503	2	7,368	17	0,056	2
GARCH z 5MR	2,899*	0,594*	0,444	8	1,0e+9	23	0,189	5
GARCH z S&P	-0,740	1,158	0,430	11	0,145	5	5,553	14
S&P w średniej	-0,720	1,157	0,408	17	0,089	2	11,039	16
RW intra	3,142*	0,653*	0,427	13	2,3e+9	24	65,401	19
ZI call	5,352*	0,434*	0,123	23	503,372	21	2,2e+4	24
ZI put	5,522*	0,281*	0,052	24	4,7e+5	22	7,3e+3	23

Parametry  $\gamma_0$  i  $\gamma_1$  oraz R<sup>2</sup> dotyczą równania regresji realizacji wariacji względem prognoz wariacji. Gwiazdką oznaczono oceny parametrów  $\gamma_0$  i  $\gamma_1$  istotnie różniące się odpowiednio od zera i jedności na poziomie 0,05. Średnie błędy szacunku estymowane były na podstawie formuły Newey i West.

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

<sup>122</sup> Być może efekty długiej pamięci w zmienności uwidaczniają się silniej przy dłuższym horyzoncie prognozy. Model RW intra był natomiast szacowany na podstawie danych pięciominutowych, zagregowanych w ciągu tygodnia.

<sup>123</sup> Słabsza trafność prognoz konstruowanych na podstawie modelu MA wynika z faktu, że stała wygładzania była wybierana na podstawie próbki wstępnej, tak aby minimalizować RMSE dla prognoz dziennych.

Dla modeli RW, GARCH z 5MR, RW intra, ZI call oraz ZI put oceny parametrów  $\gamma_0$  i  $\gamma_1$  w równaniu regresji różniły się istotnie odpowiednio od zera i jeden. Szacunki współczynników  $R^2$  są wyraźnie większe dla prognoz tygodniowych, co wskazuje, że łatwiejsze jest prognozowanie zmienności dla horyzontu tygodniowego<sup>124</sup>. Bardzo słabo we wszystkich rankingach wypadł model GARCH szacowany na podstawie danych tygodniowych. Modelowanie danych tygodniowych zamiast dziennych prowadzi do utraty istotnych informacji, pomimo tego, że horyzont prognozy jest tygodniowy.

**TABELA 3.11. WSPÓŁCZYNNIK KORELACJI TYGODNIOWYCH PROGNOZ ZMIENNOŚCI DLA INDEKSU WIG20 ORAZ TEST ISTOTNOŚCI RÓŻNIC BŁĘDU ŚREDNIOKWADRATOWEGO**

Model	$\rho$	$\chi^2$
GARCH	1	-
GARCH tyg.	0,869	8,573*
GARCH-t	0,999	0,545
IGARCH	0,997	0,032
GARCH-M	0,999	1,331
GARCH-MT	0,998	1,048
GJR-GARCH	0,998	3,742
TGARCH	0,986	3,585
FIGARCH	0,981	2,131
RW	0,550	3,127
HA	-0,053	5,647*
MA	0,931	0,217
MA k = 25	0,961	0,393
ES	0,973	0,138
RiskMetrics	0,983	0,952
SV	0,934	1,855
GARCH dla TR	0,890	2,087
GARCH z TR	0,964	0,821
GARCH z HL	0,962	0,958
GARCH z 5MR	0,894	2,657
GARCH z S&P	0,999	0,147
S&P w średniej	0,998	1,201
RW intra	0,735	0,736
ZI call	0,791	4,409*
ZI put	0,685	7,778*

Kolumna  $\rho$  przedstawia oceny współczynników korelacji prognoz zmienności konstruowanych na podstawie modelu GARCH i innych analizowanych metod prognozowania. Kolumna  $\chi^2$  zawiera wyniki dotyczące weryfikacji hipotezy o równości błędów MSE dla modelu GARCH i osobno pozostałych metod prognozowania. Gwiazdką oznaczono oceny statystyk, w przypadku których hipoteza zerowa została odrzucona na poziomie 0,05.

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

<sup>124</sup> Dla danych tygodniowych mniejsze znaczenie mają wahania przypadkowe.

Podobnie jak dla horyzontu dziennego, prognozy zmienności skonstruowane na podstawie większości metod są bardzo silnie skorelowane z prognozami skonstruowanymi na podstawie modelu GARCH (patrz tabela 3.11). Dla czterech metod: modelu GARCH na danych tygodniowych, HA oraz ZI call i ZI put błędy średniokwadratowe różniły się istotnie od błędu dla modelu GARCH (patrz tabela 3.11).

Przeprowadzone badanie pokazało, że większość wniosków płynących z analizy prognoz dziennych odnosi się również do prognoz tygodniowych. Zwiększenie horyzontu prognozy do tygodnia nie zmniejsza trafności prognoz konstruowanych na podstawie metod pozwalających opisać zmienność warunkowych wariancji w stosunku do metod zakładających stałą wariancję.

### **Ocena trafności dziennych prognoz zmienności dla spółki PKN**

Przedstawiona wyżej analiza dotyczyła indeksu dwudziestu największych i najbardziej płynnych spółek. Nie oznacza to jednakże, że uzyskane wnioski dla indeksu WIG20 dotyczą wszystkich spółek wchodzących w skład tego indeksu. Własności statystyczne stóp zwrotu indeksów najczęściej różnią się znacząco od własności pojedynczych spółek (patrz np. Lo i MacKinlay, 1988, 1990). To samo dotyczy własności wariancji (patrz Fiszeder, 2001c). Poniżej przedstawiono wyniki badań dla najbardziej płynnej w okresie analizy spółki PKN Orlen. Zastosowano te same metody, co w badaniu dla indeksu WIG20, z wyjątkiem modelu GARCH z 5MR oraz ZI<sup>125</sup>. W tabeli 3.12 podano procent prognoz przeszacowanych oraz szacunki dla: RME, MAE, RMSE oraz logarytmicznej funkcji straty.

Podobnie jak w przypadku indeksu WIG20, dla większości metod prognozy zmienności są częściej przeszacowane, jednakże sumarycznie niedoszacowane. Prognozy konstruowane na podstawie modelu SV były znacząco niedoszacowane. Najdokładniejsze prognozy według kryteriów MAE i RMSE są szacowane odpowiednio na podstawie modeli GARCH z S&P i GARCH dla TR. Najmniej dokładne prognozy budowane są natomiast na podstawie modeli RW, RW intra i HA.

---

<sup>125</sup> Dane intraday nie są dostępne dla całego badanego okresu, natomiast opcje na akcje tej spółki wprowadzono dopiero 17 października 2005 roku.

**TABELA 3.12. OCENA DOKŁADNOŚCI DZIENNYCH PROGNOZ ZMIENNOŚCI DLA SPÓŁKI PKN: PROCENT PROGNOZ PRZESZACOWANYCH, RME, MAE, RMSE I LOGARYTMICZNA FUNKCJA STRATY**

Model	% przeszac.	RME w %	MAE		RMSE		LL	
			Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.
GARCH	63,01	5,09	2,535	7	4,757	9	1,082	12
GARCH-t	62,75	5,16	2,534	6	4,755	7	1,081	10
IGARCH	66,31	-3,14	2,652	22	4,801	17	1,146	22
GARCH-M	62,62	5,21	2,536	8	4,764	12	1,081	10
GARCH-MT	62,35	5,76	2,541	11	4,770	14	1,083	13
EGARCH	61,96	7,06	2,557	15	4,759	10	1,094	18
GJR-GARCH	62,35	5,59	2,528	4	4,748	5	1,077	9
TGARCH	63,41	5,26	2,540	10	4,756	8	1,089	16
FIGARCH	61,56	6,59	2,543	12	4,797	16	1,076	8
RW	40,29	3,14	4,116	25	7,534	25	17,511	25
HA	62,35	8,68	2,655	23	4,914	23	1,165	23
MA	62,75	2,03	2,640	20	4,835	20	1,118	21
MA k = 25	61,69	2,84	2,618	19	4,822	19	1,071	5
ES	61,96	3,07	2,609	18	4,813	18	1,102	19
RiskMetrics	62,48	2,60	2,554	14	4,773	15	1,061	3
SV	57,86	17,89	2,519	2	4,879	22	1,036	1
GARCH dla TR	65,52	-0,33	2,561	17	4,676	1	1,073	6
GARCH z TR	65,79	0,82	2,539	9	4,708	2	1,088	15
GARCH z HL	65,26	1,57	2,557	15	4,744	4	1,093	17
GARCH z S&P	60,77	8,69	2,501	1	4,762	11	1,048	2
GARCH z sez.	61,03	7,68	2,651	21	4,869	21	1,108	20
GARCH z tyg.	63,14	4,11	2,544	13	4,750	6	1,084	14
GARCH ze św.	61,03	6,17	2,524	3	4,741	3	1,061	3
S&P w średniej	62,09	6,39	2,531	5	4,769	13	1,074	7
RW intra	50,46	0,02	3,260	24	6,001	24	1,883	24

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

Rankingi modeli uzyskane na podstawie kryteriów MAE i RMSE są zbliżone. Wyjątek stanowią modele SV, GARCH dla TR i modele GARCH rozszerzone o dodatkowe informacje. Model SV wypada zdecydowanie lepiej w rankingu według MSE, a GARCH dla TR według RMSE. Według logarytmicznej funkcji straty najdokładniejsze prognozy są konstruowane na podstawie modelu SV, natomiast najmniej dokładne – na podstawie modelu RW.

W tabeli 3.13 przedstawiono oceny parametrów funkcji regresji realizacji wariancji względem prognoz wariancji, szacunki współczynnika determinacji dla tej funkcji oraz szacunki funkcji straty LINEX.

**TABELA 3.13. OCENA DOKŁADNOŚCI DZIENNYCH PROGNOZ ZMIENNOŚCI DLA SPÓŁKI PKN: WSPÓŁCZYNNIK DETERMINACJI  $R^2$ , FUNKCJA STRATY LINEX**

Model	$\gamma_0$	$\gamma_1$	$R^2$		LINEX a = -1		LINEX a = 1 ( $\times 10^{24}$ )	
			Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.
GARCH	-0,883	1,301	0,067	11	7,365	10	1,116	15
GARCH-t	-0,976	1,328	0,069	7	7,231	9	1,161	16
IGARCH	0,764	0,772	0,050	18	17,556	20	0,420	5
GARCH-M	-0,688	1,248	0,064	14	7,590	11	1,232	18
GARCH-MT	-0,903	1,316	0,063	15	7,169	8	1,342	19
EGARCH	-2,289	1,731	0,079	3	5,568	3	1,023	14
GJR-GARCH	-1,119	1,374	0,073	4	7,043	6	0,964	13
TGARCH	-1,243	1,404	0,070	6	6,381	4	0,799	11
FIGARCH	0,655	0,884	0,050	18	14,698	19	0,735	10
RW	3,343*	0,115*	0,023	24	5,13e+32	25	17,087	25
HA	-9,240	3,786	0,009	25	5,119	2	3,732	24
MA	1,239	0,684	0,040	22	14,527	18	0,507	7
MA k = 25	1,460*	0,630	0,057	17	50,960	23	0,185	2
ES	0,997	0,758	0,046	20	13,185	15	0,577	8
RiskMetrics	1,070	0,734	0,065	12	30,397	22	0,428	6
SV	-1,625	1,744	0,041	21	3,711	1	1,874	22
GARCH dla TR	0,371	0,898	0,095	1	21,663	21	0,146	1
GARCH z TR	-0,262	1,078	0,082	2	13,587	16	0,216	3
GARCH z HL	-0,001	1,016	0,068	9	14,018	17	0,316	4
GARCH z S&P	-0,680	1,293	0,069	7	6,572	5	1,187	17
GARCH z sez.	1,424*	0,673	0,028	23	11,005	14	2,827	23
GARCH z tyg.	-0,437	1,164	0,068	9	8,724	13	0,917	12
GARCH ze św.	-0,333	1,160	0,073	4	8,283	12	1,370	20
S&P w średniej	-0,781	1,290	0,063	15	7,084	7	1,376	21
RW intra	2,806*	0,254*	0,065	12	5,95e+17	24	0,585	9

Parametry  $\gamma_0$  i  $\gamma_1$  oraz  $R^2$  dotyczą równania regresji realizacji wariacji względem prognoz wariacji. Gwiazdką oznaczono oceny parametrów  $\gamma_0$  i  $\gamma_1$  istotnie różniące się odpowiednio od zera i jedności na poziomie 0,05. Średnie błędy szacunku szacowane były na podstawie formuły Newey i West.

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

Dla modeli RW, MA z  $k = 25$ , GARCH z sezonowością oraz RW intra oceny przynajmniej jednego z parametrów  $\gamma_0$  i  $\gamma_1$  w równaniu regresji różniły się istotnie odpowiednio od zera i jedności. Największy szacunek współczynnika determinacji  $R^2$  otrzymano dla modelu GARCH dla TR, najmniejszy natomiast – w przypadku modelu HA. Szacunki współczynnika  $R^2$  są znacznie niższe niż dla indeksu WIG20. Wynika to z dwóch powodów: po pierwsze, dla spółki jako realizacje wariacji zastosowano sumy kwadratów

godzinnych stóp zwrotu, a dla indeksu pięciominutowych<sup>126</sup>, po drugie, znacznie trudniej jest prognozować zmienność pojedynczej spółki niż indeksu<sup>127</sup>.

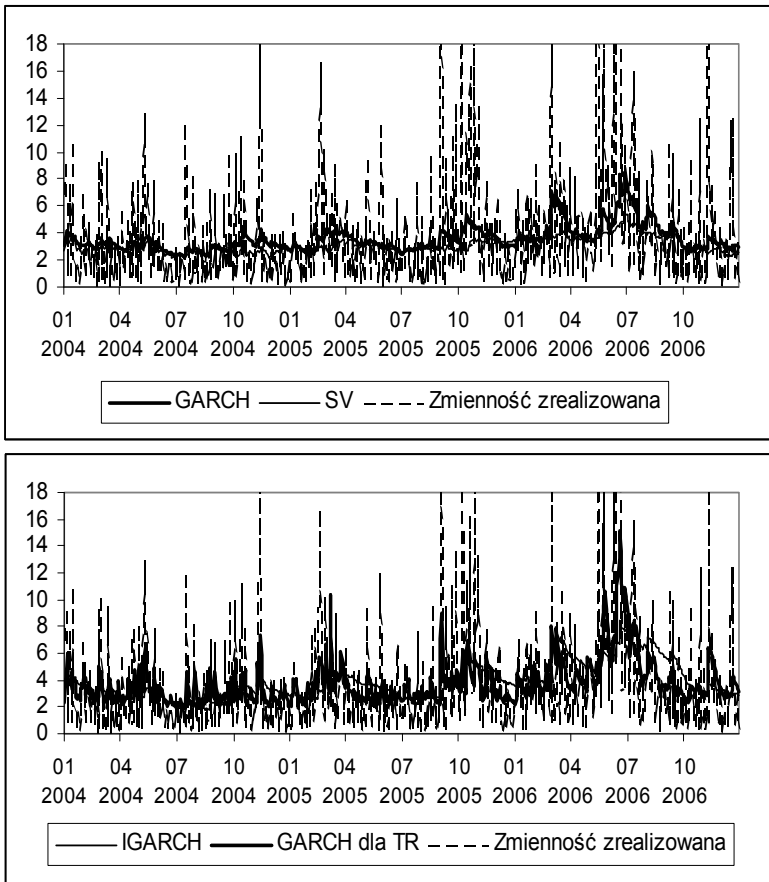
Jeżeli większą wagę przywiązuje się do błędów przeszacowania zmienności niż do błędów niedoszacowania ( $a = -1$  dla funkcji LINEX), to pierwsze miejsce w rankingu zajmuje model SV. Na ostatnich miejscach w rankingach według tego kryterium znalazły się modele RW i RW intra. Jeżeli natomiast większą wagę przypisać błędom niedoszacowania zmienności ( $a = 1$ ), to najdokładniejsze prognozy są konstruowane na podstawie modelu GARCH dla TR, a najmniej dokładne – na podstawie RW i HA. Modele, które zajmują wysokie (odległe) miejsca w rankingu dla  $a < 0$  zajmują najczęściej odległe (wysokie) miejsca w rankingu dla  $a > 0$ . Wyjątkiem jest model RW, który w obu rankingach plasuje się na ostatnich miejscach.

Według miar, które przywiązują mniejszą wagę do dużych wartości nietypowych, model SV zajmuje wyższe pozycje w rankingach, a jednocześnie model ten zajmuje pierwsze miejsce według funkcji LINEX, przykładającej większą wagę do błędów przeszacowania zmienności. Te wyniki sugerują, że prognozy konstruowane na podstawie modelu SV są niedoszacowane w przypadku dużej zmienności.

Interesująca może być również analiza dokładności prognoz w czasie. Na rysunku 3.2 przedstawiono realizacje zmienności wraz z prognozami wariacji dla wybranych czterech modeli: GARCH, SV, GARCH dla TR oraz IGARCH. Dla większej przejrzystości pominięto kilka obserwacji nietypowych zmienności zrealizowanej, w tym dwie największe wartości 13 czerwca i 9 listopada 2006 r., wynoszące odpowiednio 66,742 oraz 52,502 oraz kilka wartości zbliżonych do 20 i 30. Widoczne są tutaj dużo większe wahania zmienności zrealizowanej w porównaniu z indeksem WIG20. Znacznie więcej jest wahań przypadkowych. W okresach o dużej zmienności, związanej najczęściej ze spadkami na rynku, np. październik 2005 r., maj–czerwiec 2006 r., prognozy konstruowane na podstawie modelu GARCH są znacznie trafniejsze od prognoz skonstruowanych na podstawie modelu SV, choć również znacząco niedoszacowane. Najbardziej trafne są w tych sytuacjach prognozy konstruowane na podstawie modelu GARCH dla TR. Niska trafność prognoz konstruowanych na podstawie modelu IGARCH wynika z bardzo powolnej reakcji na spadek zmienności. Po okresach dużej zmienności prognozy jeszcze przez długi czas są przeszacowane.

<sup>126</sup> Zastosowanie danych o większej częstotliwości prowadzi zawsze do wzrostu trafności prognoz, o ile wpływ czynników związanych z mikrostrukturą rynku nie jest silny.

<sup>127</sup> Wahania przypadkowe mają mniejsze znaczenie w przypadku indeksu.



**RYСУNEK 3.2. DZIENNE PROGNOZY WARIANCJI STÓP ZWROTU DLA SPÓŁKI PKN**

ŹRÓDŁO: OPRACOWANIE WŁASNE.

Podobnie jak dla indeksu WIG20, miejsce w rankingu badanych modeli zależy w dużym stopniu od przyjętego kryterium. Nie ma modelu, na podstawie którego można by konstruować najdokładniejsze prognozy według wszystkich rozważanych miar trafności. Dobrze wypada w rankingach model GARCH dla TR, jednakże jego przewaga nie jest już tak oczywista, jak dla indeksu WIG20. Wysoko w rankingach plasują się również model GARCH opisujący efekt związany z okresami świątecznymi i GARCH z S&P. Model MA, na podstawie którego konstruowano trafne prognozy zmienności dla indeksu WIG20, zajmuje odległe miejsca według prawie wszystkich miar oceny dla spółki PKN. Najmniej dokładne prognozy są konstruowane na podstawie modeli RW, RW intra oraz HA.



W tabeli 3.14. przedstawiono szacunki współczynników korelacji między prognozami skonstruowanymi na podstawie modelu GARCH i innych analizowanych metod.

**TABELA 3.14. WSPÓŁCZYNNIK KORELACJI DZIENNYCH PROGNOZ ZMIENNOŚCI DLA SPÓŁKI PKN, TEST ISTOTNOŚCI RÓŻNIC BŁĘDU ŚREDNIOKWADRATOWEGO ORAZ KRYTERIUM INFORMACYJNE SCHWARZA**

Model	$\rho$	$\chi^2$	SIC	SIC ranking
GARCH	1	–	6184,3	7
GARCH-t	0,999	1,529	6161,5	2
IGARCH	0,925	0,874	6190,8	13
GARCH-M	0,999	1,546	6189,5	10
GARCH-MT	0,998	2,133	6189,8	11
EGARCH	0,890	0,009	6202,1	16
GJR-GARCH	0,992	0,726	6190,3	12
TGARCH	0,963	0,008	6186,9	8
FIGARCH	0,924	4,600*	6178,6	4
RW	0,401	8,380*	–	–
HA	0,370	2,727	–	–
MA	0,831	2,916	–	–
MA k = 25	0,919	0,680	–	–
ES	0,892	3,181	–	–
RiskMetrics	0,990	0,076	6187,0	9
SV	0,819	3,736	6150,9	1
GARCH dla TR	0,823	0,815	–	–
GARCH z TR	0,915	0,686	6179,7	5
GARCH z HL	0,879	0,970	6180,5	6
GARCH z S&P	0,999	0,453	6191,1	14
GARCH z sez.	0,724	2,641	6241,3	18
GARCH z tyg.	0,968	0,435	6208,8	17
GARCH ze św.	0,932	1,201	6191,1	15
S&P w średniej	0,997	1,743	6171,7	3
RW intra	0,386	10,636*	–	–

Kolumna  $\rho$  przedstawia oceny współczynników korelacji prognoz zmienności konstruowanych na podstawie modelu GARCH i innych analizowanych metod prognozowania. Kolumna  $\chi^2$  zawiera wyniki dotyczące weryfikacji hipotezy o równości błędów MSE dla modelu GARCH i osobno pozostałych metod prognozowania. Gwiazdką oznaczono oceny statystyk, w przypadku których hipoteza zerowa została odrzucona na poziomie 0,05.

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

Dla większości modeli GARCH szacunki te przekraczają 0,9, jednakże są niższe niż analogiczne szacunki dla indeksu WIG20. Różnice w szacunkach wielu miar oceny trafności prognoz między różnymi metodami są często niewielkie.

Tylko dla trzech metod: FIGARCH, RW i RW intra błędy średniokwadratowe różniły się istotnie od błędu dla modelu GARCH (patrz tabela 3.14).

Z drugiej strony niektóre różnice są znaczące z ekonomicznego punktu widzenia. Gdyby dodatkowy błąd w szacunku zmienności potraktować jako dodatkowe ryzyko, to na przykład różnica między szacunkami RMSE, między modelem GARCH szacowanym w tradycyjny sposób a modelem szacowanym na podstawie przeskalowanego prawdziwego zakresu zmiany (0,081), dodaje około 4,6 punktu procentowego dodatkowego ryzyka (mierzonego odchyleniem standardowym) w skali roku, w przypadku tradycyjnej metody estymacji.

### **Badanie własności statystycznych**

W badaniu przeprowadzono szereg testów dotyczących prawidłowości przyjętych specyfikacji modeli GARCH (patrz tabela 3.15). Wyniki testowania restrykcji nakładanych na parametry modeli GARCH, omawiane w dalszej części pracy, były niewrażliwe na przyjętą specyfikację rozkładu warunkowego. Wnioski płynące z wyników testów są często zgodne z wnioskami wynikającymi z analizy kryterium SIC (patrz tabela 3.14). Model GARCH z warunkowym rozkładem normalnym jest zdecydowanie odrzucany przez wyniki testu LR, jak i kryterium SIC na korzyść modelu z rozkładem t-Studenta, jednakże model z rozkładem t-Studenta plasuje się tylko nieznacznie wyżej w rankingach przy prognozowaniu zmienności. Prawie wszystkie kryteria oceny prognoz wskazują, że dokładniejsze prognozy są konstruowane na podstawie modelu GARCH niż modelu IGARCH, co jest zgodne z wynikami testu LR i kryterium SIC. Zarówno efekt GARCH-M<sup>128</sup>, jak i asymetryczny efekt GARCH-M są nieistotne statystycznie w badanym szeregu, a modele GARCH-M i GARCH-TM plasują się na dalszych miejscach w rankingach niż model GARCH.

Uzyskane wyniki wskazują na występowanie długiej pamięci w zmienności, jednakże prognozy konstruowane na podstawie modelu FIGARCH są mniej dokładne niż prognozy konstruowane na podstawie modelu GARCH. W przypadku spółki PKN nie występuje asymetryczny wpływ dodatnich i ujemnych stóp zwrotu na wariancję<sup>129</sup>, a modele EGARCH i TGARCH zaj-

<sup>128</sup> Efekt GARCH-M jest nieistotny dla większości spółek i indeksów notowanych na GPW w Warszawie (więcej na ten temat patrz w podrozdziale 4.4).

<sup>129</sup> Podobnie jest w przypadku wielu spółek i indeksów notowanych na GPW (patrz np. Fiszeder, 2001c).

mują na ogół dalsze miejsca<sup>130</sup> w rankingach (włącznie z kryterium SIC) niż model GARCH. Inaczej wygląda sytuacja z modelem GJR-GARCH, który wypadł znacznie lepiej od modelu GARCH.

Według testu LR, model RiskMetrics został zdecydowanie odrzucony na korzyść modelu IGARCH, a mimo to, według większości kryteriów, prognozy konstruowane na podstawie modelu RiskMetrics okazały się dokładniejsze. Model RiskMetrics jest również preferowanym modelem według kryterium SIC.

Wyniki dotyczące modeli GARCH rozszerzonych o dodatkowe informacje są niejednoznaczne. Warto zwrócić uwagę na stosunkowo wysokie miejsca w rankingach przy prognozowaniu modeli GARCH z S&P i GARCH uwzględniający efekt z okresami świątecznymi, dla których rozszerzenia były nieistotne według testu t-Studenta i zajmowały one dalekie miejsca według kryterium SIC.

**TABELA 3.15. ANALIZA WŁASNOŚCI STÓP ZWROTU I WARIANCJI SPÓŁKI PKN**

Weryfikowane hipotezy	Statystyka	Ocena statystyki	Istotność ocen parametrów
Brak autokorelacji	LB(12)	12,40	–
Brak efektu ARCH	LM(12)	38,90*	–
Normalność rozkł. bezwarunkowego	JB	101,21*	–
Normalność rozkł. warunk. w modelu GARCH	LR	30,14*	v istotny
$\beta_1 = 1 - \alpha_1$ w modelu GARCH	LR	13,80*	–
d = 0 w modelu FIGARCH	LR	13,07*	d istotny
$\delta = 0$ w modelu GARCH-M	LR	2,14	$\delta$ nieistotny
$\delta^+, \delta^- = 0$ w modelu GARCH-MT	LR	9,15*	$\delta^+, \delta^-$ nieistotne
$\theta = 0$ w modelu EGARCH	-	-	$\theta$ nieistotny
$\omega_1 = 0$ w modelu GJR-GARCH	LR	1,34	$\omega_1$ nieistotny
$\alpha_1 = 0,06$ w modelu IGARCH	LR	18,09*	–
$\gamma = 0$ w modelu GARCH z HL	LR	11,19*	$\gamma$ istotny
$\gamma = 0$ w modelu GARCH z TR	LR	11,97*	$\gamma$ istotny
$\gamma = 0$ w modelu GARCH z S&P	LR	0,58	$\gamma$ nieistotny
$\delta_k = 0$ w modelu GARCH z sez.	LR	23,47*	niektóre istotne
$\gamma_k = 0$ w modelu GARCH z tyg.	LR	4,76	niektóre istotne
$\varphi_1, \varphi_2 = 0$ w modelu GARCH ze św.	LR	7,87*	$\varphi_1, \varphi_2$ nieistotne
$\delta = 0$ w modelu z S&P w średniej	LR	19,92*	$\delta$ istotny

LB to statystyka testu Ljung-Boxa, LM to statystyka testu Engle'a, JB to statystyka testu Jarque-Bera. Gwiazdką oznaczono oceny statystyk, w przypadku których weryfikowana hipoteza została odrzucona na poziomie istotności 0,05. Oznaczenia parametrów odnoszą się do specyfikacji przedstawionych w podrozdziałach 1.2 i 1.6.

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

<sup>130</sup> Prognozy konstruowane na podstawie modelu EGARCH są najmniej trafne.

Prognozy konstruowane na podstawie modelu SV są dokładne w przypadku małej zmienności. Model SV wypadł znacznie lepiej w przypadku spółki PKN niż indeksu WIG20, choć uzyskane wyniki nie rozstrzygają, czy prognozy konstruowane na jego podstawie są trafniejsze niż te, które wyznacza się na podstawie modelu GARCH<sup>131</sup>.

### Ocena trafności prognoz wewnątrz próby

Podobnie jak w badaniu indeksu WIG20, wnioski wynikające z przeprowadzonych testów oraz analizy kryterium SIC nie zawsze pokrywają się z trafnością modeli w prognozowaniu zmienności. Pierwsze trzy miejsca w rankingu według SIC zajmują te same modele, co w przypadku indeksu WIG20, tylko w innej kolejności: SV, GARCH-t i S&P w średniej i plasują się one na dalszych miejscach w rankingach oceny prognoz zmienności. Poszukując lepszego kryterium wyboru metod do prognozowania, przeprowadzono analizę trafności prognoz zmienności wewnątrz próby dla całego badanego okresu, na podstawie tych samych kryteriów, które były stosowane w badaniu poza próbą. Wyniki przedstawiono w tabelach 3.16 i 3.17.

**TABELA 3.16. OCENA DOKŁADNOŚCI DZIENNYCH PROGNOZ ZMIENNOŚCI DLA SPÓŁKI PKN WEWNĄTRZ PRÓBY: MAE, RMSE I LOGARYTMICZNA FUNKCJA STRATY**

Model	MAE		RMSE		Log	
	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.
1	2	3	4	5	6	7
GARCH	2,545	11	4,753	9	1,090	14
GARCH-t	2,545	12	4,753	10	1,090	15
IGARCH	2,652	22	4,784	17	1,144	22
GARCH-M	2,544	10	4,757	13	1,089	12
GARCH-MT	2,550	14	4,766	14	1,089	13
EGARCH	2,556	17	4,734	4	1,094	18
GJR-GARCH	2,538	7	4,738	6	1,086	9
TGARCH	2,549	13	4,743	8	1,093	17
FIGARCH	2,537	6	4,753	11	1,088	11
RW	4,116	25	7,534	25	10,354	25
HA	2,655	23	4,914	23	1,165	23
MA	2,640	21	4,835	22	1,118	21
MA k = 25	2,618	20	4,822	20	1,071	3
ES	2,609	19	4,813	19	1,102	20
RiskMetrics	2,554	16	4,773	16	1,061	2
SV	2,488	2	4,831	21	1,013	1
GARCH dla TR	2,044	1	2,537	1	1,071	4
GARCH z TR	2,536	5	4,707	2	1,087	10
GARCH z HL	2,553	15	4,738	7	1,091	16

<sup>131</sup> Według kryterium SIC model SV wypada zdecydowanie lepiej niż model GARCH.

CD. TABELI 3.16

1	2	3	4	5	6	7
GARCH z S&P	2,531	3	4,754	12	1,076	6
GARCH z sez.	2,606	18	4,786	18	1,101	19
GARCH z tyg.	2,534	4	4,735	5	1,080	7
GARCH ze św.	2,538	8	4,733	3	1,074	5
S&P w średniej	2,542	9	4,766	15	1,082	8
RW intra	3,260	24	6,001	24	1,725	24

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

**TABELA 3.17. OCENA DOKŁADNOŚCI DZIENNYCH PROGNOZ ZMIENNOŚCI DLA SPÓŁKI PKN WEWNĄTRZ PRÓBY: WSPÓLCZYNNIK DETERMINACJI  $R^2$ , FUNKCJA STRATY LINEX**

Model	$R^2$		LINEX $a = -1$		LINEX $a = 1$ ( $\times 10^{24}$ )	
	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.
GARCH	0,070	10	7,670	9	1,034	15
GARCH-t	0,070	11	7,510	8	1,088	16
IGARCH	0,057	19	19,832	20	0,352	4
GARCH-M	0,067	14	7,832	10	1,097	18
GARCH-MT	0,065	15	7,489	7	1,252	20
EGARCH	0,088	2	6,199	3	0,714	11
GJR-GARCH	0,077	4	8,259	11	0,762	12
TGARCH	0,077	5	6,675	4	0,589	10
FIGARCH	0,068	13	8,335	12	0,899	14
RW	0,023	24	5,1e+32	25	17,087	25
HA	0,009	25	5,119	2	3,732	24
MA	0,040	23	14,527	19	0,507	7
MA k = 25	0,057	20	50,960	22	0,185	2
ES	0,046	22	13,185	18	0,577	8
RiskMetrics	0,065	16	30,397	21	0,428	6
SV	0,074	8	3,720	1	1,561	22
GARCH dla TR	0,169	1	85,159	23	8,2e-17	1
GARCH z TR	0,086	3	10,057	15	0,257	3
GARCH z HL	0,072	9	10,676	17	0,358	5
GARCH z S&P	0,070	12	7,193	5	1,091	17
GARCH z sez.	0,053	21	10,147	16	1,801	23
GARCH z tyg.	0,076	6	8,426	13	0,828	13
GARCH ze św.	0,076	7	8,501	14	1,229	19
S&P w średniej	0,065	17	7,373	6	1,292	21
RW intra	0,065	18	6,0e+17	24	0,585	9

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

Tak jak dla indeksu WIG20, rankingi modeli dla prognoz wewnątrz próby są bardzo zbliżone do rankingów modeli dla prognoz poza próbą. Zatem przy wyborze najlepszej metody prognozowania zmienności powinno się uwzględnić analizę wewnątrz próby, dla tej samej miary oceny trafności prognoz, na podstawie której dokonuje się oceny poza próbą.

### Ocena trafności tygodniowych prognoz zmienności dla spółki PKN

W badaniu zastosowano te same metody, co w analizie dziennych prognoz, z wyjątkiem modelu EGARCH<sup>132</sup> oraz modeli GARCH opisujących efekt dnia tygodnia, efekt związany z okresem świątecznym oraz wahania sezonowe. Dodatkowo zastosowano prognozy konstruowane na podstawie modelu GARCH szacowanego dla tygodniowych stóp zwrotu. W tabeli 3.18 podano procent prognoz przeszacowanych oraz szacunki dla: RME, MAE, RMSE oraz logarytmicznej funkcji straty. Dla większości metod prognozy są częściej przeszacowane, jednakże sumarycznie niedoszacowane.

**TABELA 3.18. OCENA DOKŁADNOŚCI TYGODNIOWYCH PROGNOZ ZMIENNOŚCI DLA SPÓŁKI PKN: PROCENT PROGNOZ PRZESZACOWANYCH, RME, MAE, RMSE I LOGARYTMICZNA FUNKCJA STRATY**

Model	% przeszac.	RME w %	MAE		RMSE		LL	
			Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.
GARCH	60,26	5,35	8,118	5	13,976	7	0,310	5
GARCH tyg.	50,99	9,94	8,625	15	14,963	20	0,339	15
GARCH-t	60,26	5,43	8,087	3	13,973	6	0,310	5
IGARCH	63,58	-4,47	9,288	20	14,311	13	0,355	17
GARCH-M	60,26	5,50	8,128	7	14,022	10	0,311	8
GARCH-MT	58,94	6,02	8,142	9	14,070	11	0,313	10
GJR-GARCH	58,94	5,78	8,138	8	13,897	5	0,308	4
TGARCH	62,25	1,79	8,353	13	13,851	4	0,322	12
FIGARCH	57,62	7,61	8,240	11	14,019	9	0,307	2
RW	35,76	9,86	16,492	22	25,855	22	7,758	22
HA	57,62	8,89	8,569	14	14,895	19	0,367	19
MA	58,94	2,84	9,254	18	14,704	18	0,378	20
MA k = 25	54,30	3,08	9,278	19	14,659	16	0,364	18
ES	60,26	3,37	8,952	17	14,390	15	0,351	16
RiskMetrics	60,26	2,64	8,888	16	14,342	14	0,334	14
SV	47,68	18,26	8,070	2	14,674	17	0,325	13
GARCH dla TR	62,91	0,15	8,335	12	13,735	3	0,320	11
GARCH z TR	64,90	1,04	8,121	6	13,528	1	0,307	2
GARCH z HL	63,58	1,54	8,187	10	13,697	2	0,312	9
GARCH z S&P	56,95	9,20	8,000	1	14,011	8	0,300	1
S&P w średniej	58,94	6,65	8,108	4	14,079	12	0,310	5
RW intra	50,33	0,26	9,554	21	16,286	21	0,427	21

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

<sup>132</sup> Model ten zajmował dalsze miejsca w rankingach dla prognoz dziennych.

W tabeli 3.19 przedstawiono oceny parametrów funkcji regresji realizacji wariancji względem prognoz wariancji, szacunki współczynnika determinacji dla tej funkcji oraz szacunki funkcji straty LINEX.

**TABELA 3.19. OCENA DOKŁADNOŚCI TYGODNIOWYCH PROGNOZ ZMIENNOŚCI DLA SPÓŁKI PKN: WSPÓŁCZYNNIK DETERMINACJI  $R^2$ , FUNKCJA STRATY LINEX**

Model	$\gamma_0$	$\gamma_1$	$R^2$		LINEX a = -1 ( $\times 10^5$ )		LINEX a = 1 ( $\times 10^4$ )	
			Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.
GARCH	-1,259	1,127	0,123	9	0,841	9	1,267	12
GARCH tyg.	10,221*	0,508	0,056	20	2,5e+5	18	23,265	20
GARCH-t	-1,767	1,157	0,124	8	0,550	6	1,632	14
IGARCH	5,722	0,667	0,103	16	2,0e+4	17	0,005	4
GARCH-M	-0,441	1,083	0,117	12	1,665	10	1,415	13
GARCH-MT	-1,158	1,129	0,112	14	0,458	5	2,773	16
GJR-GARCH	-2,480	1,201	0,136	6	0,339	3	0,852	11
TGARCH	-3,275	1,195	0,137	5	0,832	8	0,247	10
FIGARCH	3,681	0,871	0,123	9	289,991	11	0,154	9
RW	17,069*	0,105*	0,028	21	1,5e+58	22	1,4e+6	22
HA	-39,889	3,421	0,019	22	0,099	2	187,412	21
MA	8,739*	0,552	0,070	19	525,954	12	0,014	6
MA k = 25	9,009*	0,539*	0,113	13	1,0e+6	20	0,001	1
ES	6,948	0,653	0,091	18	1,9e+3	13	0,024	7
RiskMetrics	7,721*	0,606*	0,123	9	3,8e+5	19	0,008	5
SV	-6,931	1,673	0,095	17	0,052	1	17,787	19
GARCH dla TR	2,914	0,847	0,152	4	4,8e+3	14	0,047	8
GARCH z TR	1,564	0,927	0,174	1	9,1e+3	15	0,003	2
GARCH z HL	2,280	0,893	0,154	3	1,6e+4	16	0,003	2
GARCH z S&P	-0,439	1,127	0,128	7	0,672	7	1,787	15
S&P w średniej	-0,543	1,102	0,112	14	0,445	4	3,624	17
RW intra	11,322*	0,400*	0,160	2	1,2e+14	21	8,499	18

Parametry  $\gamma_0$  i  $\gamma_1$  oraz  $R^2$  dotyczą równania regresji realizacji wariancji względem prognoz wariancji. Gwiazdką oznaczono oceny parametrów  $\gamma_0$  i  $\gamma_1$  istotnie różniące się odpowiednio od zera i jedności na poziomie 0,05. Średnie błędy szacunku wyznaczane były na podstawie formuły Newey i West.

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

Porównując uzyskane wyniki dla prognoz tygodniowych z prognozami dziennymi, można zauważyć dużą zbieżność rankingów modeli. Istotnym wyjątkiem, tak jak dla indeksu WIG20, jest model FIGARCH, który wypada lepiej w przypadku prognoz tygodniowych. Dla modeli GARCH tyg., RW, MA, MA z  $k = 25$ , RiskMetrics i RW intra przynajmniej jedna z ocen parametrów  $\gamma_0$  i  $\gamma_1$  w równaniu regresji różniła się istotnie od odpowiednio zera i je-

den. Szacunki współczynników  $R^2$  są wyraźnie wyższe dla prognoz tygodniowych<sup>133</sup>, jednakże wyniki testów dotyczących istotności parametrów  $\gamma_0$  i  $\gamma_1$  sugerują, że dla dużej grupy metod prognozy mogą być obciążone. Bardzo słabo we wszystkich rankingach wypadł model GARCH szacowany na podstawie danych tygodniowych. Modelowanie danych tygodniowych zamiast dziennych prowadzi do utraty istotnych informacji.

**TABELA 3.20. WSPÓŁCZYNNIK KORELACJI TYGODNIOWYCH PROGNOZ ZMIENNOŚCI DLA SPÓŁKI PKN ORAZ TEST ISTOTNOŚCI RÓŻNIC BŁĘDU ŚREDNIOKWADRATOWEGO**

Model	$\rho$	$\chi^2$
GARCH	1	-
GARCH tyg.	0,673	2,162
GARCH-t	0,999	0,025
IGARCH	0,930	0,458
GARCH-M	0,999	1,651
GARCH-MT	0,998	1,852
GJR-GARCH	0,991	0,906
TGARCH	0,966	0,447
FIGARCH	0,954	0,049
RW	0,357	9,050*
HA	0,382	1,651
MA	0,831	2,312
MA k = 25	0,923	1,291
ES	0,900	1,278
RiskMetrics	0,989	0,605
SV	0,816	2,180
GARCH dla TR	0,841	0,274
GARCH z TR	0,912	0,775
GARCH z HL	0,886	0,361
GARCH z S&P	0,998	0,295
S&P w średniej	0,998	1,646
RW intra	0,602	5,592*

Kolumna  $\rho$  przedstawia oceny współczynników korelacji prognoz zmienności konstruowanych na podstawie modelu GARCH i innych analizowanych metod prognozowania. Kolumna  $\chi^2$  zawiera wyniki dotyczące weryfikacji hipotezy o równości błędów MSE dla modelu GARCH i osobno pozostałych metod prognozowania. Gwiazdką oznaczono oceny statystyk, w przypadku których hipoteza zerowa została odrzucona na poziomie 0,05.

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

Podobnie jak dla horyzontu dziennego, prognozy zmienności konstruowane na podstawie większości metod są bardzo silnie skorelowane z prognozami skonstruowanymi na podstawie modelu GARCH (patrz tabela 3.20).

<sup>133</sup> Dla danych tygodniowych mniejsze znaczenie mają wahania przypadkowe.



Tylko dla dwóch metod RW i RW intra błędy średniokwadratowe różniły się istotnie od błędu dla modelu GARCH (patrz tabela 3.20). Podobnie jak dla indeksu WIG20, przeprowadzone badanie pokazało, że większość wniosków płynących z analizy prognoz dziennych odnosi się również do prognoz tygodniowych. Zwiększenie horyzontu prognozy do tygodnia nie zmniejsza trafności prognoz konstruowanych na podstawie metod pozwalających opisać zmienność warunkowych wariancji.

### **Wnioski**

Miejsce w rankingu badanych modeli zależy w dużym stopniu od przyjętego kryterium. Uzyskane wyniki pokazują, jak niebezpieczny może być wybór najlepszej metody prognozowania zmienności na podstawie jednego, arbitralnie wybranego kryterium. Jedną z metod, na bazie której skonstruowano najtrafniejsze prognozy, był model GARCH, szacowany na podstawie przeskalowanego prawdziwego zakresu zmiany. Przy jego estymacji wykorzystuje się informację o maksymalnych i minimalnych cenach w ciągu dnia, a więc dane równie dostępne jak ceny zamknięcia. Najmniej dokładne prognozy, według większości miar oceny trafności, są konstruowane na podstawie modelu RW, modelu RW dla zmienności zrealizowanej wyznaczonej z danych intraday, stałej wariancji oraz zmienności implikowanej.

Wykorzystanie dodatkowych informacji przy konstrukcji modelu GARCH lub estymacji jego parametrów nie zawsze prowadzi do wzrostu trafności prognoz zmienności. Wyniki zależą nie tylko od rodzaju informacji, ale również od sposobu ich wykorzystania.

Trudno jest wskazać jedną uniwersalną metodę prognozowania dla wszystkich szeregów. Wniosek ten jest zbliżony do konkluzji, jakie wynikają z badań dotyczących prognozowania warunkowej średniej. Wydaje się jednak, że modele GARCH w różnych parametryzacjach stosunkowo dobrze sprawdzają się w prognozowaniu zmienności.

Wybór najlepszego do prognozowania zmienności modelu powinien być w pierwszej kolejności dokonywany na bazie analizy wewnątrz próby, dla tej samej miary oceny trafności prognoz, na podstawie której dokonuje się oceny poza próbą. Wybór miary powinien zależeć od celu badania i zastosowania prognoz. Ważna jest również analiza własności wariancji badanych szeregów, ponieważ pozwala na wstępnie wyeliminować z dalszych badań niektóre specyfikacje modeli.

Dalsze rozszerzanie modeli i badania powinny być bardziej ukierunkowane na wykorzystanie informacji powszechnie dostępnych na rynku niż na

formułowanie kolejnych parametryzacji, dążących do coraz lepszego dopasowania modelu do danych empirycznych. Wydaje się, że większy nacisk powinien zostać położony na analizę przyczyn zmienności i wykorzystanie ich w prognozowaniu zmienności. Kolejnym tematem, który wymaga dalszych badań jest ocena trafności prognoz konstruowanych na podstawie modeli wielorównaniowych. Czy stosowanie modeli wielorównaniowych prowadzi do trafniejszych prognoz zmienności? Odpowiedź na to pytanie uzyskano częściowo w odniesieniu do prognoz VaR w podrozdziale 4.2.

### 3.3. PROGNOZOWANIE MACIERZY KOWARIANCJI STÓP ZWROTU<sup>134</sup>

W zastosowaniach praktycznych rzadko modelowanie pojedynczych szeregów czasowych jest wystarczające. W przypadku dwóch lub więcej aktywów, poza modelowaniem i prognozowaniem zmienności, ważne jest również modelowanie i prognozowanie zależności między aktywami. Podstawową miarą zależności między stopami zwrotu jest współczynnik korelacji liniowej Pearsona, jednakże ponieważ łatwiejsze jest modelowanie kowariancji, dlatego na ogół formuły podawane są dla kowariancji stóp zwrotu. Jeżeli dane są wzory dla wariancji i kowariancji, to w oczywisty sposób można wyznaczyć formuły dla współczynników korelacji. Poniżej przedstawiono wybrane metody prognozowania kowariancji stóp zwrotu, które można stosować w przypadku kilku aktywów. Do oceny trafności prognoz kowariancji można zastosować większość metod statystycznych, jakie stosuje się w przypadku wariancji<sup>135 136</sup> (opisane w punkcie 3.2.3), jednakże w odróżnieniu od zmienności, prognoza kowariancji bardzo rzadko jest celem ostatecznym badania (patrz np. Lopez i Walter, 2000). Z tego względu oceny trafności prognoz kowariancji dokonuje się na ogół na podstawie miar, które wykorzystuje się w określonych zastosowaniach i przeprowadza się łącznie z prognozowaniem zmienności (prognozuje się macierz kowariancji). W pracy oceny trafności różnych metod prognozowania macierzy kowariancji stóp zwrotu dokonano na podstawie, między innymi, liczby przekroczeń VaR (punkt 4.2.3), odchy-

<sup>134</sup> W podrozdziale 3.3 przedstawiono podstawowe propozycje teoretyczne, a przykłady zastosowań znajdują się w kolejnych rozdziałach pracy.

<sup>135</sup> Jako realizacje kowariancji można przyjąć odpowiednie iloczyny stóp zwrotu aktywów. Można także skorzystać z danych o wyższej częstotliwości.

<sup>136</sup> W niektórych sytuacjach nie można na przykład zastosować logarytmicznej funkcji straty (jeżeli realizacja i prognoza będą miały różne znaki).

lenia standardowego stopy zwrotu portfela (punkty 4.3.2, 5.1.2 oraz 5.1.3) i redukcji ryzyka zabezpieczonego portfela (punkty 6.2.2 i 6.2.4).

Załóżmy, że wielowymiarowy proces stóp zwrotu można przedstawić w postaci:

$$\mathbf{r}_t = \boldsymbol{\mu}_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t. \quad (3.3.1)$$

Zaprezentowane metody prognozowania macierzy kowariancji będą dotyczyły  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$ , a zatem pomijają oczekiwaną zmienność  $\boldsymbol{\mu}_t$ . W niektórych zastosowaniach finansowych może się okazać, że należy również dodatkowo uwzględnić zmienność bezwarunkową wynikającą z  $\boldsymbol{\mu}_t$  (patrz Fiszeder, 2006c).

### Wielowymiarowe modele GARCH

Prognozy macierzy kowariancji mogą być konstruowane na podstawie dowolnej postaci wielorównaniowego modelu GARCH. Formuły prognoz na jeden okres w przód wynikają na ogół z samego zapisu modelu (są one funkcjami parametrów przy znanych przeszłych danych). Oznaczmy predyktor warunkowej macierzy kowariancji jako  $E(\boldsymbol{\varepsilon}_{t+s} \boldsymbol{\varepsilon}'_{t+s} | \psi_t) = \mathbf{H}_{t+s|t,p}$ , gdzie  $E(\cdot)$  oznacza w tym przypadku warunkową wartość oczekiwaną dla każdego elementu macierzy. Prognozę na jeden okres w przód, na podstawie modelu BEKK(p,q,1)<sup>137</sup>, konstruuje się na podstawie formuły:

$$\mathbf{H}_{t+1|t,p} = \mathbf{C}\mathbf{C}' + \sum_{i=1}^q \mathbf{D}_i \boldsymbol{\varepsilon}_{t-i+1} \boldsymbol{\varepsilon}'_{t-i+1} \mathbf{D}_i' + \sum_{j=1}^p \mathbf{E}_j \mathbf{H}_{t-j+1} \mathbf{E}_j'. \quad (3.3.2)$$

Trudniejsze jest na ogół wyprowadzenie wzorów dla dłuższego horyzontu prognozy. Dla wielu postaci wielorównaniowych modeli GARCH nie można wyznaczyć prostej formuły dla horyzontu prognozy większego niż jeden. Dla ogólnej postaci wielorównaniowego modelu GARCH – VECH(1,1)<sup>138</sup> prognozy macierzy kowariancji można wyliczyć rekurencyjnie:

$$\text{vech}(\mathbf{H}_{t+s|t+s-1,p}) = \mathbf{W} + \mathbf{A}_1 \text{vech}(\boldsymbol{\varepsilon}_{t+s-1|t+s-2,p} \boldsymbol{\varepsilon}'_{t+s-1|t+s-2,p}) + \mathbf{B}_1 \text{vech}(\mathbf{H}_{t+s-1|t+s-2,p}), \quad (3.3.3)$$

gdzie  $\boldsymbol{\varepsilon}_{t+s|t+s-1,p} \boldsymbol{\varepsilon}'_{t+s|t+s-1,p} = \boldsymbol{\varepsilon}_{t+s} \boldsymbol{\varepsilon}'_{t+s}$  dla  $s \leq 0$

oraz  $\boldsymbol{\varepsilon}_{t+s|t+s-1,p} \boldsymbol{\varepsilon}'_{t+s|t+s-1,p} = \mathbf{H}_{t+s|t+s-1,p}$  dla  $s \geq 1$ .

<sup>137</sup> Patrz formuła (2.1.14).

<sup>138</sup> Patrz formuła (2.1.5).

Oczywiście taka postać modelu nie gwarantuje, że uzyskane na podstawie prognoz macierze kowariancji będą dodatnio określone. Jeżeli proces VECH jest procesem kowariancyjnie stacjonarnym, to długookresowe prognozy warunkowej kowariancji są zbieżne do bezwarunkowej macierzy kowariancji w tempie wykładniczym, zgodnie z  $(\mathbf{A}_1 + \mathbf{B}_1)^s$ . Dla większości specyfikacji wielorównaniowych modeli GARCH można utworzyć analogiczne formuły na konstrukcję prognoz macierzy kowariancji dla dowolnego horyzontu prognozy. Poniżej podano wzory tylko dla wybranych parametryzacji modeli.

Jedną z najprostszych specyfikacji wielorównaniowego modelu GARCH jest model skalarno-diagonalny (patrz wzór (2.1.12)). Prognozy konstruowane na podstawie tego modelu, dla  $p = 1$  i  $q = 1$ , można wyznaczyć na podstawie formuły:

$$\mathbf{H}_{t+s|t,p} = \mathbf{S} + (\alpha_1 + \beta_1)^{s-1}(\mathbf{H}_{t+1|t,p} - \mathbf{S}), \quad (3.3.4)$$

gdzie  $\mathbf{S}$  oznacza bezwarunkową macierz kowariancji równą  $(1 - \alpha_1 - \beta_1)^{-1} \mathbf{W}^{**} \mathbf{W}^{**}$ .

Innym przykładem może być model DCC, którego konstrukcja polega na nieliniowej kombinacji jednorównaniowych modeli GARCH. W celu wyznaczenia prognoz dla horyzontu prognozy większego niż jeden, można dokonać pewnych przybliżeń. Pierwsze polega na założeniu, że  $E_t(\boldsymbol{\varepsilon}_{t+i} \boldsymbol{\varepsilon}'_{t+i}) \approx \mathbf{Q}_{t+i}$ , dla  $i = 1, 2, \dots, s$ . Wówczas prognozy dla modelu DCC(1,1) mogą być wyznaczone na podstawie formuł:

$$\begin{aligned} \mathbf{Q}_{t+s|t,p} &= \sum_{i=0}^{s-2} (1 - \alpha_1 - \beta_1) \mathbf{S} (\alpha_1 + \beta_1)^i + (\alpha_1 + \beta_1)^{s-1} \mathbf{Q}_{t+1}, \\ \mathbf{R}_{t+s|t,p} &= \mathbf{Q}_{t+s|t,p}^{*-1} \mathbf{Q}_{t+s|t,p} \mathbf{Q}_{t+s|t,p}^{*-1} \text{ oraz } \mathbf{H}_{t+s|t,p} = \mathbf{D}_{t+s|t,p} \mathbf{R}_{t+s|t,p} \mathbf{D}_{t+s|t,p}. \end{aligned} \quad (3.3.5)$$

Alternatywne podejście polega na przyjęciu przybliżenia  $\bar{\mathbf{Q}} \approx \bar{\mathbf{R}}$  oraz  $E_t(\mathbf{Q}_{t+1}) \approx E_t(\mathbf{R}_{t+1})$ . Prognozy macierzy korelacji mogą być zatem konstruowane na podstawie wzoru:

$$\mathbf{R}_{t+s|t,p} = \sum_{i=0}^{s-2} (1 - \alpha_1 - \beta_1) \bar{\mathbf{R}} (\alpha_1 + \beta_1)^i + (\alpha_1 + \beta_1)^{s-1} \mathbf{R}_{t+1}. \quad (3.3.6)$$

Przeprowadzone przez Engle'a i Shepparda (2001) symulacje Monte Carlo pokazały, że obciążenia wynikające z zastosowanych przybliżeń są bardzo małe i mniejsze w przypadku zastosowania drugiej formuły.

### Bezwarunkowa macierz kowariancji

W przypadku stałych wariancji i kowariancji stóp zwrotu celowe jest konstruowanie prognoz na podstawie bezwarunkowej macierzy kowariancji. Niekiedy takie podejście określane jest jako stała macierz kowariancji. Prognoza macierzy kowariancji może być wyznaczona na podstawie wzoru:

$$\mathbf{H}_{t+s|t,p} = \frac{1}{t-1} \sum_{i=1}^t \boldsymbol{\varepsilon}_i \boldsymbol{\varepsilon}'_i. \quad (3.3.7)$$

Dla  $N$  aktywów formułę (3.3.7) można również przedstawić w postaci:

$$\sigma_{x,t+s|t,p}^2 = \frac{1}{t-1} \sum_{i=1}^t \varepsilon_{x,i}^2 \quad \text{dla } x = 1, 2, \dots, N, \quad (3.3.8)$$

$$\sigma_{xy,t+s|t,p} = \frac{1}{t-1} \sum_{i=1}^t \varepsilon_{x,i} \varepsilon_{y,i} \quad \text{dla } 1 \leq x < y \leq N. \quad (3.3.9)$$

Gdyby wariancje i kowariancje stóp zwrotu były stałe w czasie, to przy ich estymacji na podstawie wszystkich dostępnych w danej chwili obserwacji popełniono by najmniejsze błędy szacunku.

### Ruchoma macierz kowariancji

Podobnie jak w przypadku wariancji, macierz kowariancji może być szacowana na podstawie ostatnich  $k$  obserwacji:

$$\mathbf{H}_{t+s|t,p} = \frac{1}{k} \sum_{i=t-k+1}^t \boldsymbol{\varepsilon}_i \boldsymbol{\varepsilon}'_i, \quad (3.3.10)$$

gdzie  $k$  jest stałą wygładzania.

Dla  $N$  aktywów formułę (3.3.10) można zapisać jako:

$$\sigma_{x,t+s|t,p}^2 = \frac{1}{k} \sum_{i=t-k+1}^t \varepsilon_{x,i}^2 \quad \text{dla } x = 1, 2, \dots, N, \quad (3.3.11)$$

$$\sigma_{xy,t+s|t,p} = \frac{1}{k} \sum_{i=t-k+1}^t \varepsilon_{x,i} \varepsilon_{y,i} \quad \text{dla } 1 \leq x < y \leq N. \quad (3.3.12)$$

Teoretycznie wartość stałej wygładzania we wzorach (3.3.11) i (3.3.12) może być różna dla różnych aktywów, jednakże ze względów praktycznych stosuje się jedną wartość. Niestety nie wiadomo, przy jakich założeniach estymator jest zgodnym estymatorem warunkowej macierzy kowariancji.

### Metoda wyrównywania wykładniczego dla macierzy kowariancji

Prognozę macierzy kowariancji, konstruowaną na podstawie modelu EWMA, można wyznaczyć na podstawie formuły:

$$\mathbf{H}_{t+s|t,p} = (1 - \lambda) \boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}'_t + \lambda \mathbf{H}_{t,p}, \quad (3.3.13)$$

gdzie  $\lambda$  jest to parametr wygasania.

Wzór (3.3.13) można zapisać również jako:

$$\sigma_{x,t+s|t,p}^2 = (1 - \lambda) \varepsilon_{x,t}^2 + \lambda \sigma_{x,t,p}^2 \quad \text{dla } x = 1, 2, \dots, N, \quad (3.3.14)$$

$$\sigma_{xy,t+s|t,p} = (1 - \lambda) \varepsilon_{x,t} \varepsilon_{y,t} + \lambda \sigma_{xy,t,p} \quad \text{dla } 1 \leq x < y \leq N. \quad (3.3.15)$$

Przy wyborze stałej wygładzania i parametru wygasania można kierować się podobnymi zasadami, jak w przypadku modeli jednorównaniowych. Można także brać pod uwagę konkretny cel zastosowania metody. W pracach Fiszdera (2004a, 2004b) wyboru stałej wygładzania w metodzie średniej ruchomej oraz parametru wygasania w metodzie wyrównywania wykładniczego dokonywano dla każdego okresu na podstawie próbki wstępnej. Wybierano te wartości, dla których średnie odchylenie standardowe stóp zwrotu wyznaczonych portfeli o minimalnej wariancji było najmniejsze w próbie wstępnej. Taki sposób postępowania prowadził do wzrostu efektywności procesu alokacji aktywów. Zauważmy, że model w postaci (3.3.13) jest zintegrowanym wielorównaniowym modelem GARCH (równanie (2.1.13)), dlatego parametr  $\lambda$  można również oszacować metodą największej wiarygodności.

Formuły (3.3.14) i (3.3.15) są czasami określane w literaturze finansowej jako model RiskMetrics<sup>139</sup> (patrz np. Longerstaey i More, 1995). Praktycy rynku finansowego przyjmują najczęściej stałe wartości stałej wygładzania i parametru wygasania. Analitycy JP Morgan dla dziennych stóp zwrotu przyjmowali  $k = 25$  oraz  $\lambda = 0,94$ <sup>140</sup> (patrz Zangari, 1996). Główna zaleta metodologii RiskMetrics, czyli łatwość konstrukcji prognoz wariancji i kowariancji, jest zauważalna dopiero przy dużej liczbie aktywów. W takich zastosowaniach, jak analiza portfelowa czy wyznaczanie VaR dla bardzo dużej liczby aktywów, zaawansowane metody estymacji macierzy kowariancji jak

<sup>139</sup> Koncepcja RiskMetrics została opracowana przez bank inwestycyjny JP Morgan w celu pomiaru ryzyka rynkowego za pomocą wartości zagrożonej.

<sup>140</sup> Parametr wygasania we wzorach (3.3.14) i (3.3.15) mógłby przyjmować różne wartości dla różnych aktywów, jednakże wówczas dodatnia określoność macierzy kowariancji nie będzie zapewniona.

na razie nie znajdują praktycznie zastosowania, a zastosowanie metodologii RiskMetrics jest stosunkowo proste. Oczywiście założenie, że wartości parametrów w modelu są takie same, niezależnie od analizowanych danych, jest trudne do akceptacji.

W przypadku prostych metod prognozowania macierzy kowariancji, takich jak ruchoma macierz kowariancji oraz metoda wyrównywania wykładniczego dla macierzy kowariancji, przyjmuje się na ogół, że prognozy dla okresów  $t+1, t+2, \dots, t+k$  są równe, tzn.  $\mathbf{H}_{t+1|t,p} = \mathbf{H}_{t+2|t,p} = \dots = \mathbf{H}_{t+k|t,p}$ . Konstruowane w ten sposób prognozy macierzy kowariancji nie uwzględniają ważnej cechy procesów kowariancyjnie stacjonarnych, mianowicie powrotu do średniej, czyli do poziomu bezwarunkowej macierzy kowariancji.

### Wielowymiarowy model stochastycznej zmienności (SV)

W wielorównaniowych modelach SV (patrz np. Harvey, Ruiz i Shephard, 1994) warunkowa macierz kowariancji jest zależna od nieobserwowalnych lub ukrytych procesów. Najczęściej wielowymiarowy model stochastycznej zmienności jest określony jako  $N$  jednowymiarowych modeli SV:

$$\varepsilon_{it} = \sigma_i z_{it} \exp(0,5 p_{it}) \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, N, \quad (3.3.16)$$

gdzie  $\sigma_i$  jest parametrem,  $\mathbf{z}_t = (z_{1t}, z_{2t}, \dots, z_{Nt})'$ ,  $E(\mathbf{z}_t) = 0$ ,  $Cov(\mathbf{z}_t) = \Sigma_z$ ,  $\mathbf{p}_t = (p_{1t}, p_{2t}, \dots, p_{Nt})'$  są opisane jako proces VAR(1)  $\mathbf{p}_t = \Phi \mathbf{p}_{t-1} + \boldsymbol{\eta}_t$ , gdzie  $\boldsymbol{\eta}_t \sim IID(\mathbf{0}, \Sigma_\eta)$ .

Taka parametryzacja pozwala opisać zależności między wariancjami różnych szeregów, a z drugiej strony nie ma bezpośredniej specyfikacji dla zmienności w czasie kowariancji lub korelacji. Dynamika kowariancji zależy od dynamiki warunkowych wariancji. Przegląd wielorównaniowych modeli SV i przykłady ich zastosowań można znaleźć np. w pracach Asai, McAleer i Yu (2006), Pajor (2007). Podstawową wadą wielorównaniowych modeli SV jest jednak trudność estymacji dla większej liczby szeregów. Bardzo interesującą propozycją jest połączenie modeli SV z modelami GARCH (patrz Osiewalski i Pajor, 2007).

### Modelowanie danych o częstotliwości wyższej niż dzienna

Do estymacji parametrów modeli i konstrukcji prognoz macierzy kowariancji można wykorzystać dane o częstotliwości wyższej niż dzienna. Można tutaj zastosować wszystkie opisane wyżej modele, które wykorzystuje się dla danych dziennych, w tym wielorównaniowe modele GARCH. Podobnie

jak w przypadku modeli jednorównaniowych, w okresach krótszych niż godzina relatywnie duże znaczenie mają wahania cykliczne oraz krótkie wzrosty zmienności po publikacji informacji makroekonomicznych. Dlatego do ich opisu powstało wiele modeli, mających zastosowanie wyłącznie w przypadku danych o bardzo wysokiej częstotliwości. Podejście polegające na modelowaniu danych o częstotliwości wyższej niż dzienna, w przypadku modeli wielorównaniowych, jest ciągle jeszcze rzadko stosowane ze względu na złożoność modeli i problemy estymacyjne.

### Modelowanie kowariancji zrealizowanej

Coraz więcej zwolenników zyskuje podejście polegające na bezpośrednim modelowaniu realizacji wariancji i kowariancji. Uzasadnienie teoretyczne takiego podejścia można znaleźć między innymi w pracy Barndorffa-Nielsen i Shepharda (2004). Jako realizacje wariancji przyjmuje się sumy kwadratów stóp zwrotu o częstotliwości wyższej niż dzienna (np. formuła (3.2.16)), jako realizacje kowariancji natomiast – sumy iloczynów odpowiednich stóp zwrotu o tej samej częstotliwości. Zrealizowana macierz kowariancji może być zdefiniowana jako:

$$\mathbf{RCOV}_t = \sum_{m=1}^M \mathbf{r}_{m,t} \mathbf{r}'_{m,t}, \quad (3.3.17)$$

gdzie  $\mathbf{r}_{m,t}$  oznacza wektor stóp zwrotu dla danych o wysokiej częstotliwości, o wymiarach  $N \times 1$ ,  $M$  – liczba obserwacji w ciągu dnia.

Zamiast prognozować jednocześnie  $N(N+1)/2$  elementów macierzy kowariancji, można konstruować prognozy dla każdego elementu oddzielnie na podstawie jednorównaniowych modeli, co znacznie ułatwia analizę. Inne podejście polega na zastosowaniu wielorównaniowych modeli, których używa się do opisu średnich warunkowych, np. modelu VAR lub, ze względu na występowanie długiej pamięci, wielorównaniowych modeli ARFIMA. Mimo, że zrealizowana macierz kowariancji jest dodatkowo określona, to nie ma gwarancji, iż tak skonstruowane prognozy macierzy kowariancji będą dodatkowo określone. Aby zapewnić dodatnią określoność, można zastosować jedną z postaci wielorównaniowych modeli GARCH, która gwarantuje taką własność. Zastępując  $\mathbf{H}_t$ , która nie jest bezpośrednio obserwowalna, macierzą  $\mathbf{RCOV}_t$ , można zastosować prostsze metody estymacji parametrów, jak np. metodę najmniejszych kwadratów. Alternatywnie można zastosować dekompozycję Choleskiego, jednakże nieliniowa transformacja powoduje najczęściej obciążenie elementów macierzy kowariancji.



Można również modelować bezpośrednio zrealizowaną macierz korelacji, jednak pojawiają się tutaj dodatkowe problemy związane z ograniczonością zmiennych (mogą przyjmować wartości tylko od minus jeden do plus jeden) oraz innym charakterem korelacji.

Podobnie jak w przypadku pojedynczych szeregów, główną wadą obu powyższych podejść są wyższe koszty pozyskania i przetworzenia danych o wysokiej częstotliwości oraz ich trudna dostępność dla wielu aktywów. Dodatkowo bardzo często istotny okazuje się problem niesynchronicznych transakcji.

### Korelacja implikowana

Dla kursów walutowych możliwe jest wyznaczenie współczynnika korelacji na podstawie cen opcji<sup>141</sup>. Implikowany współczynnik korelacji stóp zwrotu dwóch kursów walutowych dla horyzontu  $T$  jest równy:

$$\rho_{IV}(r_{A/C}, r_{B/C})_{i,T} = \frac{ZI(r_{A/C})_{i,T} + ZI(r_{B/C})_{i,T} - ZI(r_{A/B})_{i,T}}{2ZI(r_{A/C})_{i,T}^{1/2} ZI(r_{B/C})_{i,T}^{1/2}}, \quad (3.3.18)$$

gdzie  $r_{A/C,t+1} = \ln(P_{A/C,t+1}) - \ln(P_{A/C,t})$ ,  $P_{A/B,t}$  – kurs waluty A względem waluty B,  $ZI(\cdot)$  – zmienność implikowana.

Można się spodziewać, że w przypadku płynnych rynków opcji prognozy korelacji uzyskane na podstawie cen opcji będą bardziej trafne niż prognozy konstruowane na podstawie modeli szacowanych wyłącznie dla danych historycznych, ponieważ uwzględniają oczekiwania inwestorów. Ze względu na stosunkowo małą liczbę badań dotyczącą tego zagadnienia na razie nie jest możliwe sformułowanie jednoznacznych wniosków o trafności takich prognoz (patrz np. Campa i Chang, 1998; Walter i Lopez, 2000).

### Redukcja do szeregu jednowymiarowego

W niektórych zastosowaniach nie jest konieczne modelowanie i prognozowanie całej macierzy kowariancji. Na przykład jeżeli celem jest prognozowanie wariacji portfela, to wielowymiarowe zagadnienie można w łatwy sposób sprowadzić do zagadnienia jednowymiarowego. Niech  $r_{w,t+s}$  oznacza prostą stopę zwrotu portfela<sup>142</sup>:

$$r_{w,t+s} = \sum_{i=1}^N w_{it} r_{i,t+s} = \mathbf{W}_t' \mathbf{r}_{t+s}, \quad (3.3.19)$$

<sup>141</sup> Teoretycznie jest to również możliwe w przypadku instrumentów, dla których wypłata odbywa się w innej walucie niż waluta, w jakiej instrument jest notowany.

<sup>142</sup> W przypadku logarytmicznych stóp zwrotu jest to zależność przybliżona.

gdzie  $w_{it}$  oznacza udział  $i$ -tego aktywu w portfelu w chwili  $t$ , gdzie  $\mathbf{r}_{t+s}$  jest to wektor prostych stóp zwrotu o wymiarach  $N \times 1$ ,  $\mathbf{W}_t$  to wektor udziałów poszczególnych aktywów w portfelu o wymiarach  $N \times 1$ .

Zamiast modelować i prognozować zależności pomiędzy stopami zwrotu aktywów wchodzących w skład portfela, można bezpośrednio modelować i prognozować wariancję stóp zwrotu  $r_{wt}$ . W tym celu należy wyznaczyć stopy zwrotu sztucznego portfela na podstawie przeszłych stóp zwrotu aktywów, wchodzących w skład portfela i bieżących ich udziałów:

$$r_{wj}^s = \mathbf{W}_t' \mathbf{r}_j, \quad \text{dla } j = 1, 2, \dots, t. \quad (3.3.20)$$

Dla stóp zwrotu sztucznego portfela można zastosować metody prognozowania zmienności pojedynczych aktywów opisane w punkcie 3.2.2, w tym w szczególności jednorównaniowe modele GARCH. Jeżeli udziały w portfelu się zmieniają, to stopy zwrotu sztucznego portfela muszą być ponownie wyznaczone i parametry jednorównaniowego modelu muszą być na nowo oszacowane. Takie podejście zastosowano na przykład przy prognozowaniu VaR dla portfela akcji w punkcie 4.2.3 i dało ono nie gorsze wyniki niż podejście wielorównaniowe.

## Rozdział IV

# ANALIZA RYZYKA RYNKOWEGO

### – WYBRANE ZAGADNIENIA

Obserwując rozwój człowieka i jego otoczenia, nietrudno spostrzec, że ryzyko towarzyszy całej historii ludzkości i nie ma działań ludzkich, które nie byłyby narażone na ryzyko. Ryzyko jest związane nie tylko z realizacją określonych zamierzeń, ale również z zachowaniem istniejącego stanu rzeczy, czyli z niepodjęciem lub zaniechaniem określonych działań. Ryzyko należy do najważniejszych pojęć nowoczesnych finansów, jest drugą podstawową charakterystyką inwestycji. Działanie w warunkach ryzyka jest nieodłącznym atrybutem każdej gospodarki. Chęć zabezpieczenia się przed ryzykiem była jednym z podstawowych motorów powstania wielu nowych instrumentów finansowych oraz rozwoju teorii finansów, inżynierii finansowej czy ekonometrii finansowej. Bardzo ważną rolę w analizie ryzyka odgrywa ocena ryzyka i miary ryzyka. Duża popularność modeli GARCH wynika między innymi z faktu, że znajdują one zastosowanie w pomiarze i modelowaniu ryzyka. Zastosowania modeli GARCH nie ograniczają się wyłącznie do opisu zmieniających się w czasie warunkowych wariancji lub kowariancji, ale są również wykorzystywane przy konstrukcji coraz bardziej wyrafinowanych miar ryzyka.

W podrozdziale 4.1 przedstawiono podstawowe zagadnienia dotyczące miar ryzyka. Pomiar ryzyka i miary ryzyka dotyczą praktycznie wszystkich zastosowań modeli GARCH, dlatego konieczne było ich uporządkowanie.

Podrozdział 4.2 dotyczy najczęściej stosowanej przez instytucje finansowe miary zagrożenia, czyli wartości zagrożonej (VaR). W pracy przedstawiono podstawowe metody prognozowania VaR oraz oceny ich trafności. Jednym z głównych celów szacowania VaR jest ustalenie wymogów kapitałowych. Omówiono tu również problemy związane z interpretacją i posługiwaniem się tą miarą. Z uwagi na łatwość konstrukcji najbardziej popularnymi metodami szacowania VaR są metody wariancji-kowariancji oraz symulacja historyczna. Niestety założenia, na których opierają się te metody, nie są na ogół spełnione w przypadku finansowych szeregów czasowych. Z tego wzglę-

du powstało wiele alternatywnych metod estymacji VaR, wśród których często stosowaną metodą jest modelowanie warunkowych średnich i wariancji z zastosowaniem modeli GARCH. W pracy przedstawiono metody estymacji VaR z zastosowaniem różnych parametryzacji modeli GARCH. Literatura dotycząca oceny trafności prognoz VaR, konstruowanych na podstawie modeli GARCH dla pojedynczych aktywów, jest niezwykle bogata. Wyniki tych badań są bardzo zróżnicowane i zdecydowanie brakuje prac przeglądowych, w których dokonuje się porównania trafności różnych metod prognozowania VaR. W niniejszej pracy spróbowano sformułować bardziej ogólne wnioski dotyczące trafności prognoz wartości zagrożonej konstruowanych na podstawie modeli GARCH.

Większość badań dotyczących zastosowania modeli GARCH do konstrukcji prognoz VaR dotyczy pojedynczych aktywów. Jest bardzo mało analiz, w których ocenia się trafność prognoz VaR konstruowanych z zastosowaniem wielorównaniowych modeli GARCH dla większej liczby aktywów. W pracach, w których podjęto takie badania, jak np. Christiansen (1999) oraz Engle i Sheppard (2001), zastosowano tylko jeden rodzaj modelu (odpowiednio: czynnikowy model GARCH i DCC). W dalszej części pracy przedstawiono metody konstrukcji prognoz VaR dla portfela aktywów i dokonano oceny trafności prognoz wartości zagrożonej konstruowanych na podstawie wielorównaniowych modeli GARCH dla dwudziestu spółek notowanych na GPW w Warszawie. W badaniu zastosowano osiem specyfikacji wielorównaniowego modelu GARCH: model stałych warunkowych współczynników korelacji, model skalarno-diagonalny, model skalarno-diagonalny z warunkowym rozkładem t-Studenta, model zintegrowany, model ortogonalny dla trzech oraz dwudziestu czynników, model DCC oraz zintegrowany model DCC. Dodatkowo wykorzystano również jednorównaniowe modele GARCH z warunkowym rozkładem normalnym oraz t-Studenta oraz zastosowano połączenie modelu GARCH z symulacją historyczną. Wyniki uzyskane dla modeli GARCH porównano z innymi metodami estymacji VaR: symulacją historyczną, metodą wariancji-kowariancji (bezwarunkowa macierz kowariancji, ruchoma macierz kowariancji oraz metodologia RiskMetrics). Analizę przeprowadzono zarówno dla inwestora mającego pozycję długą, jak i krótką. Obok tradycyjnie przyjmowanych do oceny trafności prognoz VaR miar zaproponowano, aby jako kryterium oceny przyjąć miarę polegającą na modyfikacji sumy wy-mogów kapitałowych.

Uzyskane wyniki trafności poszczególnych specyfikacji modeli porównano z własnościami badanych szeregów czasowych, rankingiem modeli we-

dług kryterium informacyjnego Schwarza oraz z wynikami analizy trafności prognoz wewnątrz próby. Pokazano, że można na podstawie analizy wewnątrz próby dla tej samej miary, dla jakiej dokonuje się oceny poza próbą, wskazać postacie modeli, na bazie których można skonstruować trafniejsze prognozy VaR. Takie badanie wewnątrz próby ma większe szanse na wybór najlepszych parametryzacji modeli niż analiza statystycznych własności szeregów czasowych i kryteriów informacyjnych.

W podrozdziale 4.3 przedstawiono estymację współczynników beta na podstawie dwurównaniowego modelu VAR-GARCH. Modelem najczęściej wykorzystywanym do estymacji współczynników beta był tradycyjnie jednowskaźnikowy model Sharpe'a<sup>143</sup> (Sharpe, 1963). Klasyczne metody estymacji współczynnika beta nie uwzględniają empirycznych własności procesów finansowych, takich jak: autokorelacja stóp zwrotu, zmienność warunkowych wariancji i kowariancji stóp zwrotu czy grube ogony rozkładów stóp zwrotu. Niestabilne w czasie mogą być również współczynniki beta w modelu Sharpe'a. Nieuwzględnienie tych wszystkich charakterystyk empirycznych przy estymacji parametrów modelu może prowadzić do pogorszenia własności estymatorów oraz znacząco wpływać na wyniki aplikacji modelu. Zastosowanie modelu VAR-GARCH pozwala opisać wszystkie wspomniane własności procesów finansowych. Korzyści z wykorzystania dwurównaniowego modelu VAR-GARCH nie ograniczają się wyłącznie do uzyskania efektywniejszych estymatorów (niż te, które można by otrzymać stosując jednorównaniowy model GARCH), ale zastosowanie modelu pozwala opisać zmieniające się zależności między stopami zwrotu waloru a stopami zwrotu portfela rynkowego. W przykładzie empirycznym zaprezentowany model wykorzystano do konstrukcji portfela o minimalnej wariancji. Zastosowanie dwurównaniowego modelu VAR-GARCH przy budowie portfela wpłynęło na znaczny wzrost efektywności procesu alokacji aktywów w porównaniu do portfela, przy konstrukcji którego wykorzystano tradycyjne metody estymacji parametrów modelu Sharpe'a.

Podrozdział 4.4 porusza jedno z fundamentalnych zagadnień w teorii finansów, mianowicie zależność między dochodem a ryzykiem. Rozważana jest dynamiczna zależność między warunkową wartością oczekiwaną stóp zwrotu instrumentów finansowych a ich warunkową wariancją. Wyniki badań w literaturze światowej są niejednoznaczne. W niektórych pracach zależność między oczekiwaną stopą zwrotu a wariancją jest dodatnia, w innych

---

<sup>143</sup> Szerszy kontekst powstania modelu Sharpe'a przedstawiono w następnym rozdziale dotyczącym modeli rynku kapitałowego.

ujemna, w jeszcze innych brak zależności lub występuje zależność nieliniowa. Rozbieżność wyników była jedną z przyczyn podjęcia badań dla wybranych spółek i indeksów giełdowych notowanych na GPW w Warszawie. Poza klasycznym modelem GARCH-M w badaniu zastosowano dwie modyfikacje tego modelu, mianowicie model GARCH-M ze zmiennym parametrem oraz model GARCH z progowym efektem GARCH-M. Druga parametryzacja modelu jest propozycją autora. Oba rozszerzenia modelu pozwalają w odmienny sposób wyjaśnić rozbieżność wyników prowadzonych dotychczas analiz dotyczących zależności pomiędzy oczekiwaną stopą zwrotu a warunkową wariancją przeprowadzonych z wykorzystaniem modelu GARCH-M ze stałym parametrem.

#### 4.1. WPROWADZENIE

Ryzyko jest pojęciem wieloznacznym i złożonym, dlatego bardzo trudno jest podać jego jedną ścisłą definicję<sup>144</sup>. We współczesnym rozumieniu ryzykiem jest jakikolwiek niezamierzony lub niespodziewany wynik decyzji czy przebiegu działania (patrz Ansell i Wharton, 1995). Złożoność ryzyka skłania do rozpatrywania jego różnych aspektów. W pracy analizowany jest przede wszystkim aspekt obiektywny ryzyka, wynikający z niepewności, co do przyszłych zwrotów z inwestycji. Aspekt subiektywny ryzyka, wynikający ze stosunku inwestora do ryzyka, jest rozważany jedynie pośrednio. Warto tutaj również wspomnieć o rozróżnieniu między pojęciami *ryzyko* a *niepewność*. Różnicę między tymi pojęciami jako pierwszy określił w 1901 roku Willett, twierdząc, że ryzyko jest obiektywnie współzależne od subiektywnej niepewności<sup>145</sup>. Knight (1921) uważał, że w praktyce gospodarczej dominują zdarzenia niepowtarzalne, do których nie można zastosować żadnej miary prawdopodobieństwa. Takie zdarzenia nazywał niepewnymi. Zdarzenia powtarzalne, których potencjalne istnienie można mierzyć za pomocą prawdopodobieństwa, określał mianem ryzyka. Takie właśnie Knightowskie rozumienie ryzyka i niepewności w polskiej literaturze ekonomicznej utwierdził autorytet Langego (1967): terminu *niepewność* używa się w przypadkach, gdy niemożliwe jest zastosowanie w badaniu danego zjawiska rachunku prawdopodobieństwa, jeśli natomiast możliwość taka istnieje, używamy raczej terminu

<sup>144</sup> Różne definicje ryzyka przytaczają np. Osińska (2000) oraz Tarczyński i Łuniewska (2004).

<sup>145</sup> Zob. Willett (1951), Dziawgo (1998).

*ryzyko*. Zatem według Knighta ryzyko jest mierzalne, natomiast niepewność niemierzalna. Szerokie spektrum różnych aspektów teorii ryzyka można znaleźć w pracy Arrowa (1979), w której autor charakteryzuje i dyskutuje poglądy wielu znanych ekonomistów. Ryzyko w rozumieniu Arrowa jest niepewnością subiektywną. Współcześnie większość autorów definiuje niepewność jako stan, w którym przyszłe możliwości i szanse ich wystąpienia nie są znane. Pojęcie ryzyka stosowane jest w sytuacjach, gdy rezultat zdarzenia nie jest znany, ale możliwe jest zidentyfikowanie przyszłych sytuacji, oraz gdy znane lub możliwe do oszacowania jest prawdopodobieństwo zrealizowania się poszczególnych możliwości w przyszłości (patrz Dziawgo, 1998; Tarczyński i Łuniewska, 2004).

W teorii i praktyce funkcjonują dwa podejścia do ryzyka rozumianego z punktu widzenia jego efektów<sup>146</sup>: ryzyko wynikające z możliwości wystąpienia niepożądanego zjawiska, np. straty (jest to negatywne rozumienie ryzyka) oraz ryzyko wynikające z możliwości wystąpienia efektu działania niezgodnego z oczekiwaniami, a odchylenie od oczekiwanego rezultatu może być zarówno negatywne, jak i pozytywne (jest to neutralne rozumienie ryzyka). W drugiej koncepcji ryzyko rozumiane jest z jednej strony jako zagrożenie, ale z drugiej strony jako szansa. Nieznane przyszłe zdarzenia mogą spowodować zarówno straty, jak i zyski. W tym przypadku można mówić o ryzyku spekulacyjnym w przeciwieństwie do ryzyka czystego, które występuje wówczas, gdy w stosunku do obecnego stanu alternatywą jest wystąpienie straty (patrz Tarczyński i Mojsiewicz, 2001).

Istnieje wiele klasyfikacji ryzyka<sup>147</sup>. Często jeden rodzaj ryzyka może być szczególnym przypadkiem innego rodzaju ryzyka. Z punktu widzenia przedsiębiorstwa i jego uczestnictwa w rynku kapitałowym można wyróżnić następujące podstawowe rodzaje ryzyka związanego z inwestowaniem: ryzyko rynkowe, kredytowe, płynności, operacyjne<sup>148</sup>. W pracy rozpatrywane jest jedynie ryzyko rynkowe, związane ze zmianami cen na rynkach finansowych. Do ryzyka rynkowego można zaliczyć: ryzyko stopy procentowej, ryzyko kursów walut, ryzyko cen akcji, ryzyko cen towarów.

Bardzo istotną kwestię stanowi pomiar ryzyka. Ogół miar ryzyka rynkowego można podzielić na trzy grupy<sup>149</sup>: miary zmienności, miary wrażliwości i miary zagrożenia. Pośrednio wszystkie zastosowania opisywane w ni-

<sup>146</sup> Patrz Jajuga (2007b).

<sup>147</sup> Szereg klasyfikacji ryzyka podają np. Tarczyński i Łuniewska (2004).

<sup>148</sup> Por. np. Jajuga i Jajuga (1996), Jorion (1997), Tarczyński (1997a).

<sup>149</sup> Patrz Jajuga (1999).

niejszej pracy są w mniejszym lub większym stopniu związane z ryzykiem. W podrozdziale 4.1 przedstawiono zagadnienia bezpośrednio związane z miarami ryzyka.

Miary zmienności zostały przedstawione w punkcie 3.2.1 Najbardziej znanymi i najczęściej stosowanymi miarami zmienności są wariancja i odchylenie standardowe<sup>150</sup>. Warunkowa wariancja (lub warunkowe odchylenie standardowe), szacowana na podstawie modeli GARCH, może służyć jako miara ryzyka rynkowego. Wobec powszechnej zmienności wariancji stóp zwrotu instrumentów finansowych miara ta powinna lepiej opisywać ryzyko instrumentów finansowych. Problemom związanym z modelowaniem i prognozowaniem tej miary ryzyka został poświęcony podrozdział 3.2.

Miary wrażliwości odzwierciedlają wpływ pewnych zmiennych (często zwanych czynnikami ryzyka) na ceny lub stopy zwrotu instrumentów finansowych. Do miar wrażliwości zaliczamy między innymi współczynniki beta, współczynnik zabezpieczenia, duration oraz greckie współczynniki – delta, gamma, vega (kappa), theta i rho. Miary wrażliwości mają szerokie zastosowanie w analizie ryzyka, np. tworzenie portfela akcji o współczynniku beta równym zero, zabezpieczanie portfela przed ryzykiem za pomocą opcji lub kontraktów terminowych, uodpornienie (ang. *immunization*) portfela instrumentów dłużnych. Zagadnienia związane z estymacją współczynnika beta oraz przykłady zastosowań zostały przedstawione w podrozdziale 4.3 oraz rozdziale 5. Metody estymacji współczynnika zabezpieczenia wraz z przykładami dotyczącymi kontraktów terminowych futures zaprezentowano w podrozdziale 6.2.

Trzecia grupa miar to miary zagrożenia. Przy ich konstrukcji bierze się pod uwagę przede wszystkim niekorzystne wartości, np. niekorzystne odchylenia od oczekiwanych wartości cen lub stóp zwrotu. Do miar zagrożenia zaliczamy między innymi<sup>151</sup>: Value at Risk (VaR, wartość narażona na ryzyko lub wartość zagrożona), expected shortfall (ES, oczekiwana strata lub oczekiwany niedobór), semiwariancję, semiodchylenie standardowe, poziom bezpieczeństwa, prawdopodobieństwo nieosiągnięcia aspiracji, dolny moment cząstkowy. Najpopularniejszą miarą zagrożenia jest niewątpliwie VaR. Zagadnienia związane z estymacją VaR omawiane są w podrozdziale 4.2. W ostatnim okresie coraz większego znaczenia nabiera miara expected shortfall. ES jest oczekiwaną wartością straty, pod warunkiem, że strata ta przekracza VaR.

<sup>150</sup> W ekonometrii finansowej miarą zmienności jest najczęściej wariancja, w praktyce wykorzystuje się natomiast odchylenie standardowe.

<sup>151</sup> Patrz Jajuga (2000b).



Do przeliczania ryzyka (odchylenia standardowego stóp zwrotu) pomiędzy danymi o różnej częstotliwości obserwacji wykorzystuje się często następującą formułę:

$$\sigma(r_{[t+1,t+k]}) = \sqrt{k}\sigma(r_{t+1}), \quad (4.1.1)$$

gdzie  $\sigma(r_{[t+1,t+k]})$  – odchylenie standardowe dla  $k$ -okresowej stopy zwrotu,  $\sigma(r_{t+1})$  – odchylenie standardowe dla jednookresowej stopy zwrotu.

Wzór (4.1.1) jest często określany jako reguła pierwiastka kwadratowego z czasu. Na przykład w celu określenia ryzyka dla danych rocznych<sup>152</sup>  $\sigma(r_{[t+1,t+k]})$  na podstawie odchylenia standardowego stóp zwrotu dla danych dziennych  $\sigma(r_{t+1})$  należy przyjąć za  $k$  250 lub 252 (jest to przeciętna liczba dni sesyjnych w roku).

Podobna formuła przy agregacji wartości oczekiwanej stóp zwrotu jest następująca:

$$\mu_{[t+1,t+k]} = k\mu_{t+1}, \quad (4.1.2)$$

gdzie  $\mu_{[t+1,t+k]}$  – wartość oczekiwana dla  $k$ -okresowej stopy zwrotu,  $\mu_{t+1}$  – wartość oczekiwana dla jednookresowej stopy zwrotu.

Porównując formuły (4.1.1) i (4.1.2) można zauważyć, że wraz ze wzrostem horyzontu czasowego rośnie względne znaczenie oczekiwanej stopy zwrotu w stosunku do ryzyka<sup>153</sup>. Formuła (4.1.1) jest często stosowana, jednakże przy jej wyprowadzaniu zakłada się, że nie występuje autokorelacja stóp zwrotu, a wariancja stóp zwrotu jest stała w czasie<sup>154</sup>. Jeżeli warunki te nie są spełnione, to szacunki uzyskane na podstawie formuły (4.1.1) mogą być obarczone dużym błędem. Na przykład, jeżeli szacujemy odchylenie standardowe dla danych rocznych na podstawie odchylenia standardowego oszacowanego na podstawie danych dziennych z okresu o podwyższonej zmienności (na przykład na podstawie modelu GARCH), to ocena będzie znacząco przeszacowana. Best (2000) podaje, że zmienność roczna szacowana na podstawie zmienności dziennej dla okresów krótszych niż dwadzieścia dni jest na ogół niedoszacowana, natomiast dla okresów dłuższych niż dwadzieścia dni jest

<sup>152</sup> Praktycy rynku finansowego często podają szacunki odchylenia standardowego w skali jednego roku (patrz np. Jorion, 1997).

<sup>153</sup> Wartość oczekiwana rośnie proporcjonalnie do horyzontu czasowego, a odchylenie standardowe proporcjonalnie do pierwiastka kwadratowego z horyzontu czasowego.

<sup>154</sup> Przy wyprowadzaniu formuły (4.1.2) zakłada się stałość wartości oczekiwanej stóp zwrotu.

przeszacowana. Krytykę dotyczącą stosowania reguły pierwiastka kwadratowego z czasu można znaleźć w pracy Danielssona (2002).

Podobne wyrażenie do wzoru (4.1.1) można wyprowadzić dla prognoz odchyłeń standardowych w przypadku procesu IGARCH(1,1) bez stałej  $\alpha_0$ <sup>155 156</sup>:

$$h_{[t+1,t+k]|t,p}^{0,5} = \sqrt{k} h_{t+1|t,p}^{0,5}, \quad (4.1.3)$$

gdzie  $h_{[t+1,t+k]|t,p}^{0,5}$  oznacza prognozę warunkowego odchylenia standardowego dla  $k$ -okresowej stopy zwrotu,  $h_{t+1|t,p}^{0,5}$  jest to prognoza warunkowego odchylenia standardowego dla jednookresowej stopy zwrotu. Zasadnicza różnica pomiędzy formułami (4.1.1) i (4.1.3) polega na tym, że w pierwszym wzorze występuje brzegowe odchylenie standardowe, natomiast w drugim – warunkowe odchylenie standardowe<sup>157</sup>. Zatem formuła (4.1.3) może być stosowana mimo braku bezwarunkowej normalności rozkładów stóp zwrotu. Czy zastosowanie tej formuły jest wystarczającym zabiegiem, będzie zależało od własności badanych szeregów czasowych, tzn. na ile własności procesu, którego realizacją jest dany szereg czasowy są zbliżone do procesu IGARCH bez stałej. Najlepszym rozwiązaniem jest wyznaczenie odchylenia standardowego dla  $k$ -okresowej stopy zwrotu na podstawie formuł wyprowadzonych dla procesu, którego realizacją jest szereg, np. dla procesu GARCH(1,1) na podstawie formuły (3.2.43).

## 4.2. PROGNOZOWANIE WARTOŚCI ZAGROŻONEJ

Wartość zagrożona (ang. *Value at Risk*) to najczęściej stosowana przez instytucje finansowe miara zagrożenia. Popularność tej miary wynika co najmniej z kilku powodów<sup>158</sup>: jest dana w postaci jednej liczby, która w sposób sumaryczny przedstawia możliwe straty instytucji finansowej, jest prostą i stosunkowo łatwo interpretowalną miarą, określającą stratę, która może wystąpić w warunkach zwykłego funkcjonowania rynku, łączy różne rodzaje ryzyka rynkowego w jedną całość, jest rekomendowana przez wiele instytucji nadzorujących sektor bankowy i rynek finansowy<sup>159</sup>.

<sup>155</sup> Modelu stosowanego w banku inwestycyjnym JP Morgan (patrz metodologia Risk-Metrics, punkt 3.2.2).

<sup>156</sup> Przy założeniu, że wartość oczekiwana stopy zwrotu jest równa zeru.

<sup>157</sup> Wariancja brzegowa procesu IGARCH nie istnieje.

<sup>158</sup> Patrz Jajuga (2000c).

<sup>159</sup> Na przykład przez Komitet Bazylejski do Spraw Nadzoru Bankowego.

### 4.2.1. PODSTAWOWE METODY PROGNOZOWANIA VaR ORAZ OCENY ICH TRAFNOŚCI

VaR to oczekiwana strata wartości rynkowej instrumentu finansowego lub portfela instrumentów, taka, że prawdopodobieństwo jej osiągnięcia lub przekroczenia w zadanym przedziale czasowym jest równe zadanemu prawdopodobieństwu (poziomowi tolerancji):

$$P(W_{t+1} \leq W_t - VaR_{t+1|t,p}) = \alpha, \quad (4.2.1)$$

gdzie  $W_t$  to obecna wartość instrumentu lub portfela instrumentów,  $W_{t+1}$  – wartość na koniec okresu inwestycji<sup>160</sup>,  $\alpha$  – poziom tolerancji.

Powyższa definicja dotyczy inwestora posiadającego długą pozycję. W jego przypadku strata występuje, gdy następuje spadek wartości rynkowej instrumentu. Inwestor mający krótką pozycję poniesie stratę, gdy nastąpi wzrost wartości instrumentu. Zatem równanie (4.2.1) należy zastąpić następującym równaniem:

$$P(W_{t+1} \geq W_t - VaR_{t+1|t,p}) = \alpha. \quad (4.2.2)$$

Dalsze formuły będą podawane tylko dla inwestora posiadającego długą pozycję, ponieważ definicja (4.2.1) może odnosić się również do inwestora mającego krótką pozycję, jeżeli przyrost  $W_{t+1} - W_t$  pomnożymy przez minus jeden.

Niech  $W_\alpha$  oznacza kwantyl rozkładu wartości odpowiadający zadanemu poziomowi tolerancji. VaR dany jest wówczas formułą:

$$VaR = W_t - W_\alpha. \quad (4.2.3)$$

Tak zdefiniowaną wartość zagrożoną określa się w literaturze mianem absolutnej. VaR może być również definiowany w stosunku do wartości oczekiwanej  $E(W)$ :

$$VaR = E(W) - W_\alpha. \quad (4.2.4)$$

Wartość zagrożona jest wówczas określana mianem względnej.

<sup>160</sup> We wszystkich formułach przyjęto okres równy jeden, jednakże prognozy VaR mogą dotyczyć dowolnego horyzontu (co jednak może powodować znaczne trudności, które zwykle pojawiają się przy prognozowaniu na  $s$  okresów, dla  $s > 1$ ).

Wartość VaR zależy od przyjętego poziomu tolerancji (najczęściej jest to wartość 0,01 lub 0,05) oraz przedziału czasowego (najczęściej jest to 1 dzień, 5 dni, 10 dni lub 1 miesiąc). W literaturze można znaleźć formuły na przeliczanie VaR dla różnych poziomów tolerancji, jak i różnych przedziałów czasowych:

$$\text{VaR}_{\alpha, t+1|t, p} = \text{VaR}_{\alpha^*, t+1|t, p} \frac{z_{\alpha}}{z_{\alpha^*}}, \quad (4.2.5)$$

$$\text{VaR}_{[t+1, t+k]|t, p} = \text{VaR}_{t+1|t, p} \sqrt{k}, \quad (4.2.6)$$

gdzie  $\text{VaR}_{\alpha, t+1|t, p}$ ,  $\text{VaR}_{\alpha^*, t+1|t, p}$  oznaczają prognozy wartości zagrożonej dla poziomów tolerancji odpowiednio  $\alpha$ ,  $\alpha^*$ ,  $\text{VaR}_{t+1|t, p}$ ,  $\text{VaR}_{[t+1, t+k]|t, p}$  to prognozy wartości zagrożonej dla 1-okresowego i  $k$ -okresowego przedziału<sup>161</sup>, a  $z_{\alpha}$  – kwantyl odpowiadający prawdopodobieństwu  $\alpha$  dla standaryzowanego rozkładu normalnego.

Formuły (4.2.5) i (4.2.6) są prawdziwe tylko przy założeniu normalności stóp zwrotu instrumentów i portfeli instrumentów oraz mają zastosowanie dla prostych stóp zwrotu<sup>162</sup>. Ze względu na to, że rozkłady empirycznych stóp zwrotu nie są normalne (chodzi tu przede wszystkim o występowanie grubych ogonów rozkładów stóp zwrotu i zmienność wariancji warunkowej), powyższe wzory należy traktować jako duże przybliżenie. Wartość zagrożoną na ryzyko dla różnych poziomów tolerancji na ogół szacuje się oddzielnie (nie korzysta się z formuły (4.2.5)), natomiast wyznaczenie VaR dla dłuższych przedziałów czasowych dla wielu metod jest na tyle skomplikowane, że często korzysta się z formuły (4.2.6). Na przykład przy wyznaczaniu wymogów kapitałowych do modelowania stóp zwrotu należy stosować dzienne stopy zwrotu, natomiast VaR powinien być wyznaczany dla okresu 10 dni. Błędy wynikające z zastosowania wzoru (4.2.6) mogą być w tym przypadku większe niż różnice w szacunkach dziennego VaR dla różnych metod estymacji. W takiej sytuacji wnioski dotyczące dokładności szacowania wartości zagrożonej na ryzyko mogą być błędne. VaR dla dłuższych przedziałów czasowych może być również estymowany na podstawie danych o mniejszej częstotliwości. Na przykład VaR dla okresu 10 dni może być oszacowany na podstawie danych dwutygodniowych. Niestety w tym przypadku musimy dysponować dziesięć-

<sup>161</sup> Przy wyprowadzeniu wzoru (4.2.6) korzysta się z reguły pierwiastka kwadratowego z  $t$ .

<sup>162</sup> Wzór (4.2.6) jest również prawdziwy w przypadku logarytmicznych stóp zwrotu dla procesów IGARCH(1,1) bez stałej  $\alpha_0$  o średniej równej zero.

ciokrotnie dłuższym szeregiem, aby móc zastosować taką samą liczbę obserwacji przy estymacji modelu. W wielu zastosowaniach praktycznych jest to niemożliwe z powodu zbyt krótkiej historii notowań.

Istnieje wiele metod szacowania VaR (patrz np. Jorion, 1997; Best, 2000; Jajuga 2000c), jednak najbardziej popularnymi są metoda wariancji-kowariancji oraz symulacja historyczna. W metodzie wariancji-kowariancji zakłada się, że rozkłady stóp zwrotu instrumentów i portfeli instrumentów są rozkładami normalnymi. Prognozy absolutnej oraz względnej wartości zagrożonej na ryzyko dla prostych stóp zwrotu dane są odpowiednio formułami:

$$\text{VaR}_{t+1|t,p} = -W_t \mu - z_\alpha \sigma W_t, \quad (4.2.7)$$

$$\text{VaR}_{t+1|t,p} = -z_\alpha \sigma W_t, \quad (4.2.8)$$

gdzie  $\mu$  oznacza oczekiwaną stopę zwrotu,  $\sigma$  – odchylenie standardowe rozkładu stóp zwrotu.

Przy zastosowaniu logarytmicznych stóp zwrotu prognozy absolutnej oraz względnej wartości zagrożonej można wyznaczyć na podstawie formuł:

$$\text{VaR}_{t+1|t,p} = W_t (1 - e^{\mu + z_\alpha \sigma}), \quad (4.2.9)$$

$$\text{VaR}_{t+1|t,p} = W_t e^\mu (1 - e^{z_\alpha \sigma}). \quad (4.2.10)$$

Jeżeli przedział czasowy, dla którego jest szacowany VaR, jest krótki (np. 1 dzień), to zasadne jest przyjęcie, że oczekiwana stopa zwrotu jest równa zeru<sup>163</sup>. Wówczas absolutna VaR jest w obu przypadkach identyczna z VaR względną.

Najprostszy wariant symulacji historycznej polega na wyznaczaniu kwantyla rozkładu stóp zwrotu bezpośrednio na podstawie empirycznego rozkładu stóp zwrotu. Jest to metoda nieparametryczna, która nie wymaga przyjęcia założenia o postaci modelu czy też postaci rozkładu stóp zwrotu. Wymaga jednakże bardzo silnego założenia o stałości rozkładu stóp zwrotu w przyjętym okresie<sup>164</sup>. Wyniki estymacji wartości zagrożonej zależą w dużym stopniu od długości próby, na podstawie której szacowany jest VaR. Szacunki wartości zagrożonej otrzymane na podstawie symulacji historycznej są najczęściej wyższe niż szacunki uzyskane na podstawie metody wariancji-kowariancji,

<sup>163</sup> Szacunek średniej stóp zwrotu dla danych o wysokiej częstotliwości bardzo rzadko różni się istotnie od zera.

<sup>164</sup> Najczęściej zmienna jest wariancja warunkowa rozkładu stóp zwrotu, ale również inne momenty rozkładu mogą nie być stabilne w czasie.

co wynika z przyjętego w metodzie wariancji-kowariancji założenia o normalności rozkładu stóp zwrotu.

Ze względu na łatwość konstrukcji metody wariancji-kowariancji oraz symulacja historyczna były najbardziej popularnymi metodami szacowania VaR. Jednakże założenia, na których się opierają nie są na ogół spełnione w przypadku finansowych szeregów czasowych. Dlatego też powstało wiele alternatywnych metod estymacji VaR, jak na przykład: symulacja Monte Carlo, wyznaczanie kwantyla dowolnego rozkładu, modelowanie warunkowej średniej i wariancji, podejścia oparte na teorii wartości ekstremalnych, podejścia z wykorzystaniem wartości pochodzących z ogona rozkładu (np. CA-ViaR). VaR jest miarą, na którą bardzo duży wpływ mają wartości z ogonów rozkładu. Z tego względu ważne jest, aby metoda estymacji VaR uwzględniała grube ogony rozkładów stóp zwrotu.

Poza wspomnianymi na początku zaletami VaR, miara ta ma również szereg wad, z których najważniejsze to nieinformowanie o wielkości oczekiwanej straty, gdy strata przekroczy wartość zagrożoną, niespełnienie w niektórych sytuacjach warunku subaddytywności (co może prowadzić do nieodzwierciedlenia dywersyfikacji ryzyka) oraz bardzo duża wrażliwość wyników na metodę estymacji. Więcej na temat słabych punktów tej miary oraz krytyki niektórych zaleceń Komitetu Bazylejskiego można znaleźć w pracy Danielssona (2002).

### Wartość zagrożona dla portfela aktywów

Wartość zagrożoną można wyznaczyć dla pojedynczych aktywów, ale na ogół głównym celem jest estymacja VaR dla portfela aktywów. Podobnie jak w przypadku pojedynczego aktywów najbardziej popularnymi metodami szacowania VaR jest metoda wariancji-kowariancji oraz symulacja historyczna. Symulacja historyczna polega na wyznaczaniu kwantyla rozkładu stóp zwrotu bezpośrednio na podstawie empirycznego rozkładu stóp zwrotu portfela. W metodzie wariancji-kowariancji zakłada się, że wielowymiarowy rozkład stóp zwrotu instrumentów jest normalny. Zakładając, że dane są proste stopy zwrotu, absolutna i względna wartość zagrożona dane są odpowiednio formułami:

$$\text{VaR}_{t+1|t_p} = -W_t(\omega_t' \mu + z_\alpha \sqrt{\omega_t' H \omega_t}), \quad (4.2.11)$$

$$\text{VaR}_{t+1|t_p} = -z_\alpha \sqrt{\omega_t' H \omega_t} W_t, \quad (4.2.12)$$

gdzie  $\omega_t$  to wektor udziałów poszczególnych walorów w portfelu o wymiarach  $N \times 1$ ,  $\mu$  – wektor oczekiwanych stóp zwrotu o wymiarach  $N \times 1$ ,  $\mathbf{H}$  – macierz kowariancji.

Ze względu na to, że w formule (4.2.12) nie ma oczekiwanych stóp zwrotu, dlatego w przypadku prostych stóp zwrotu częściej szacuje się względną wartość zagrożoną. Wyrażenie (4.2.12) można zapisać w nieco innej formie<sup>165</sup>:

$$\text{VaR}_{t+1|t,p} = \sqrt{\sum_{i=1}^N \text{VaR}_{i,t+1|t,p}^2 + 2 \sum_{i < j} \rho_{ij} \text{VaR}_{i,t+1|t,p} \text{VaR}_{j,t+1|t,p}} = \sqrt{\mathbf{C}_{t+1|t,p} \mathbf{\Gamma} \mathbf{C}_{t+1|t,p}'}, \quad (4.2.13)$$

gdzie  $\rho_{ij}$  oznacza współczynnik korelacji między stopami zwrotu  $i$ -tego i  $j$ -tego aktywu, a  $\text{VaR}_{i,t+1|t,p}$  jest prognozą wartości zagrożonej dla  $i$ -tego aktywu,  $\mathbf{C}_{t+1|t,p} = (\text{VaR}_{1,t+1|t,p}, \text{VaR}_{2,t+1|t,p}, \dots, \text{VaR}_{N,t+1|t,p})$ ,  $\mathbf{\Gamma}$  jest macierzą stałych współczynników korelacji.

Dla logarytmicznych stóp zwrotu absolutna VaR dana jest w postaci:

$$\text{VaR}_{t+1|t,p} = W_t [1 - \exp(\omega_t' \mu + z_\alpha \sqrt{\omega_t' \mathbf{H} \omega_t})]. \quad (4.2.14)$$

Niestety  $\omega_t' \mu$  jest w tym przypadku tylko w przybliżeniu równe oczekiwanej stopie zwrotu portfela.

Przy modelowaniu zależności między aktywami istotne jest uwzględnienie zmieniającej się w czasie warunkowej macierzy kowariancji (lub korelacji). Na przykład w okresach kryzysów następuje istotny wzrost zależności między procesami obserwowanymi na różnych rynkach finansowych, określany mianem efektu zarażania (patrz podrozdział 2.6). Metody szacowania VaR, zakładające stałość korelacji (np. metoda wariancji-kowariancji) mogą zatem niedoszacowywać ryzyko portfela.

### Metody oceny skuteczności prognoz VaR

Ocena trafności prognoz VaR jest często określana jako testowanie wsteczne modelu. Wartość zagrożona jest wielkością nieobserwowalną, dlatego zastosowanie klasycznych metod oceny jakości prognoz (opisanych w punkcie 3.2.3) nie może dać zadowalających rezultatów. Najprostszym sposobem oceny jakości metod estymacji wartości zagrożonej jest analiza liczby przekroczeń

<sup>165</sup> Patrz Best (2000).

VaR przez rzeczywiście zrealizowane straty. Do oceny istotności liczby przekroczeń stosuje się najczęściej test Kupca (1995). Statystyka LR ma postać:

$$LR_{uc} = -2\ln[(1-\alpha)^{T-N}\alpha^N] + 2\ln\{[1 - (N/T)]^{T-N}(N/T)^N\}, \quad (4.2.15)$$

gdzie  $N$  to liczba przekroczeń VaR przy liczbie obserwacji  $T$ .

Przy prawdziwości hipotezy zerowej, mówiącej, że udział przekroczeń jest równy  $\alpha$ , statystyka  $LR_{uc}$  ma asymptotyczny rozkład  $\chi^2$  o jednym stopniu swobody. Niestety moc tego testu jest na ogół niska (patrz Lopez, 1998). Z tego względu dodatkowo powinna być przeprowadzona weryfikacja hipotezy o niezależności przekroczeń w czasie. Odpowiednia statystyka ma postać:

$$LR_{ind} = -2\ln\left(\frac{\alpha(1-\alpha)^{V_1-1}}{p_1(1-p_1)^{V_1-1}}\right) + \sum_{i=2}^N -2\ln\left(\frac{\alpha(1-\alpha)^{V_i-1}}{p_i(1-p_i)^{V_i-1}}\right), \quad (4.2.16)$$

gdzie  $p_i = 1/V_i$ ,  $V_1$  – czas w dniach do pierwszego przekroczenia,  $V_i$  – czas w dniach między  $(i-1)$ -ym a  $i$ -tym przekroczeniem.

$LR_{ind}$  ma asymptotyczny rozkład  $\chi^2$  o  $N$  stopniach swobody.

Christoffersen (1998) proponuje alternatywny test dotyczący weryfikacji hipotezy o niezależności przekroczeń w czasie. W hipotezie alternatywnej zakłada się występowanie zależności o charakterze łańcuchów Markowa pierwszego rzędu. Powyższe testy statystyczne są najczęściej stosowane w badaniach. Ponadto zaproponowano szereg dodatkowych testów. Christoffersen, Hahn i Inoue (2001) oraz Engle i Manganelli (2004) badają czy szacunki VaR uwzględniają dostępne w chwili  $t-1$  informacje. Christoffersen, Hahn i Inoue (2001) testują również statystyczną istotność różnicy między dwiema ocenami wartości zagrożonej, oszacowanymi na podstawie dwóch różnych metod. Z kolei Berkowitz (1999) proponuje dwa testy dotyczące wartości zagrożonej. Pierwszy wykorzystuje informacje o rozkładzie prognoz VaR, drugi uwzględnia wielkość przekroczeń VaR.

Wyboru metody szacowania VaR spośród tych, które przejdą pozytywnie testy statystyczne, można dokonać na podstawie określonych funkcji straty (patrz np. Lopez, 1998). Wybór określonej funkcji straty będzie jednakże w dużym stopniu uzależniony od celu, w jakim wykorzystuje się VaR. W tym przypadku selekcja odpowiedniego kryterium oceny jest sprawą subiektywną. Wybór właściwego kryterium jest oczywiście uzależniony od tego, czy ocena prognoz VaR jest dokonywana z punktu widzenia instytucji nadzorujących, czy też z punktu widzenia firmy lub inwestora.



Jednym z podstawowych celów szacowania VaR jest ustalenie wymogów kapitałowych<sup>166</sup>. Wymóg kapitałowy z tytułu ryzyka rynkowego, obliczony na podstawie modelu wartości zagrożonej, wyznacza się według następującej formuły:

$$MRC_t = \text{Max} \left( k_t \frac{1}{60} \sum_{i=1}^{60} \text{VaR}_{t-i}, \text{VaR}_{t-1} \right), \quad (4.2.17)$$

gdzie współczynnik korygujący  $k_t$  przyjmuje wartości z przedziału [3,4], VaR jest szacowany dla poziomu tolerancji 0,01 oraz przedziału czasowego 10 dni.

W praktyce wymóg kapitałowy jest najczęściej równy średniej z szacunków VaR wyznaczonych w 60 poprzednich dniach roboczych, pomnożonej przez współczynnik korygujący, ponieważ wartość VaR z poprzedniego dnia jest na ogół znacząco niższa. Wartość współczynnika korygującego ustalana jest na podstawie liczby przekroczeń jednodniowego VaR dla poprzedzających dany dzień 250 kolejnych dni roboczych (patrz tabela 4.1). Wartości, które przyjmuje współczynnik  $k_t$  nie wynikają z własności statystycznych szeregu czasowego. W przypadku „czerwonej strefy” instytucja może być zobowiązana do zmiany metody szacowania wartości zagrożonej.

TABELA 4.1. WSPÓŁCZYNNIK KORYGUJĄCY DO OBLICZANIA WYMOGÓW KAPITAŁOWYCH

Strefa	Zielona	Żółta					Czerwona
		5	6	7	8	9	
Liczba przekroczeń	do 4	5	6	7	8	9	10 i więcej
$k_t$	3	3,4	3,5	3,65	3,75	3,85	4

ŹRÓDŁO: ALEXANDER (2001).

Współczynnik korygujący  $k_t$  ma dodatkowo uwzględnić duże nieoczekiwane straty. Jednakże jego wielkość jest stosunkowo duża w przypadku małej liczby przekroczeń i prowadzi do nadmiernych wymogów kapitałowych (dotyczących kapitału własnego)<sup>167</sup>. Wynika to z faktu, że instytucje nadzorujące są zainteresowane utrzymywaniem wysokich wymogów kapitałowych. Przy małym lub niewystarczającym kapitale własnym instytucje finansowe mogą być zainteresowane uzyskaniem niższych szacunków wymogów kapitałowych.

<sup>166</sup> VaR może być również wyznaczany w innych celach, np. do określenia wielkości podejmowanego ryzyka, do alokacji kapitału na poszczególne inwestycje w sposób pozwalający na osiągnięcie najwyższego potencjalnego zysku na „jednostkę ryzyka”, do ustalania limitów wielkości pozycji oraz oceny osiągnięć poszczególnych dealerów.

<sup>167</sup> Współczynnik korygujący jest nawet niekiedy określany współczynnikiem hysterii.

wych. Z drugiej strony różnice między poszczególnymi wartościami współczynnika korygującego są małe w stosunku do różnic w szacunkach samej wartości zagrożonej, jakie otrzymuje się na podstawie różnych metod szacowania. To sprawia, że instytucje finansowe mogą nie być zainteresowane stosowaniem dokładniejszych metod szacowania VaR (szczególnie, gdy metody estymacji są czasochłonne, koszty wdrożenia systemu wysokie lub szacunki VaR są obciążone dużymi błędami). Paradoksalnie dokładniejsze szacunki VaR mogą prowadzić nawet do większych wymogów kapitałowych. Przykłady takiej sytuacji można znaleźć w pracach Goorbergha i Vlaara (1999) oraz Vlaara (2000).

Dodatkowy problem wynika z faktu, że wartości współczynnika korygującego są ustalane na podstawie analizy liczby przekroczeń VaR dla danych dziennych, natomiast przy ustalaniu wymogów kapitałowych wykorzystuje się VaR dla okresu dziesięciu dni. Trafność jednodniowych prognoz VaR, konstruowanych na podstawie określonego modelu, nie gwarantuje trafności prognoz dziesięciodniowych tworzonych na bazie tego samego modelu (potwierdzają to badania empiryczne). Tak jak zauważono wcześniej, korzystanie z przybliżonych wzorów opartych na regule pierwiastka kwadratowego z czasu może prowadzić do znaczących błędów. Dobrym rozwiązaniem mogłoby być zastosowanie dokładnych wzorów, możliwych do wykorzystania za pomocą metod Monte Carlo (stosowane np. w metodach bayesowskich), jednakże takie podejście jest stosunkowo skomplikowane i czasochłonne.

Zauważmy, że wartość zagrożona nie informuje, jakiej straty należy oczekiwać, jeśli strata przekroczy VaR. Dwa portfele mogą mieć taką samą wartość zagrożoną, jednakże w jednym przypadku przekroczenia VaR mogą być nieznaczne, a w drugim straty mogą zdecydowanie przekraczać podwójną lub potrójną wartość VaR. Wydaje się, że lepszą miarą do określania wymogów kapitałowych byłaby oczekiwana strata (ES). ES jest oczekiwaną wartością straty, pod warunkiem, że strata ta przekracza VaR.

#### 4.2.2. ESTYMACJA VAR Z ZASTOSOWANIEM MODELI GARCH

##### Pojedyncze aktywa

Żałóżmy, że stopy zwrotu można opisać za pomocą modelu:

$$y_t = \mu_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t = \sqrt{h_t} z_t, \quad (4.2.18)$$

gdzie  $z_t \sim N(0,1)$ , a  $h_t$  oznacza wariancję warunkową  $\varepsilon_t$ . Wiadomo, że  $\varepsilon_t | \psi_{t-1} \sim N(0, h_t)$ .

Wartość oczekiwana  $\mu_t$  i wariancja  $h_t$  mogą być na przykład opisane za pomocą modelu ARMA( $P, Q$ )-GARCH( $p, q$ ):

$$y_t = \phi_0 + \sum_{i=1}^P \phi_i y_{t-i} + \sum_{j=1}^Q \theta_j \varepsilon_{t-j} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t | \psi_{t-1} \sim N(0, h_t), \quad (4.2.19)$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}, \quad (4.2.20)$$

jednakże możliwe są również inne modele parametryczne.

Niech  $y_{t+1|t,p}$  i  $h_{t+1|t,p}$  oznaczają prognozy warunkowej wartości oczekiwanej i warunkowej wariancji. Warunkowy rozkład  $y_{t+1|t,p}$  jest rozkładem normalnym o parametrach  $N(y_{t+1|t,p}, h_{t+1|t,p})$ , a kwantyl warunkowego rozkładu stopy zwrotu jest równy:

$$y_{t+1|t,p} + z_\alpha \sqrt{h_{t+1|t,p}}. \quad (4.2.21)$$

Można zatem zastosować formuły (4.2.7-4.2.8) lub (4.2.9-4.2.10). Na przykład przy zastosowaniu prostej i logarymicznej stopy zwrotu absolutną wartość zagrożoną wyznaczamy na podstawie odpowiednio równań:

$$\text{VaR}_{t+1|t,p} = -W_t(y_{t+1|t,p} + z_\alpha \sqrt{h_{t+1|t,p}}), \quad (4.2.22)$$

$$\text{VaR}_{t+1|t,p} = W_t[1 - \exp(y_{t+1|t,p} + z_\alpha \sqrt{h_{t+1|t,p}})]. \quad (4.2.23)$$

Zastosowanie modelu GARCH pozwala uwzględnić przy szacowaniu VaR zmienną wariancję warunkową typową dla procesów finansowych. Model GARCH z warunkowym rozkładem normalnym, przy niskim poziomie tolerancji (0,01 i niższe) może prowadzić do niedoszacowanej wartości zagrożonej, ponieważ rozkłady standaryzowanych reszt dla większości szeregów finansowych mają grube ogony. Przy wysokich poziomach tolerancji często zdarza się, że oceny VaR są z kolei przeszacowane. Jeżeli założenie o warunkowej normalności  $\varepsilon_t$  nie jest spełnione, to można przyjąć inny rozkład, na przykład standaryzowany rozkład t-Studenta, tzn.  $\varepsilon_t | \psi_{t-1} \sim t^*(0, h_t)$ . Wówczas kwantyl warunkowego rozkładu stopy zwrotu jest równy:

$$y_{t+1|t,p} + \frac{t_{\nu, \alpha} \sqrt{h_{t+1|t,p}}}{\sqrt{\nu / (\nu - 2)}}, \quad (4.2.24)$$

gdzie  $t_{\nu, \alpha}$  oznacza kwantyl odpowiadający prawdopodobieństwu  $\alpha$  dla rozkładu t-Studenta o  $\nu$  stopniach swobody.

Przy omawianiu metod, w których do estymacji VaR wykorzystuje się modele GARCH, warto wspomnieć o podejściu polegającym na połączeniu modelowania warunkowej średniej i wariancji z symulacją historyczną. Parametry modelu warunkowej średniej ze składnikiem losowym opisanym jako model GARCH estymuje się za pomocą metody quasi-największej wiarygodności. Estymatory parametrów modelu są wówczas zgodne i asymptotycznie nieobciążone<sup>168</sup>. Kwantyl warunkowego rozkładu stopy zwrotu można wyznaczyć na podstawie formuły (4.2.21), z tym, że zamiast  $z_\alpha$  przyjmuje się kwantyl wyznaczany bezpośrednio z rozkładu standaryzowanych reszt<sup>169</sup>. Możliwe jest również połączenie zastosowania modeli GARCH z innymi metodami, np. z teorią wartości ekstremalnych (patrz McNeil i Frey, 2000; Osińska i Fałdziński, 2007). Proces GARCH może być również wykorzystany przy estymacji VaR za pomocą symulacji Monte Carlo, jako model, na podstawie którego generuje się stopy zwrotu, a następnie na podstawie rozkładu bezwarunkowego wyznacza się kwantyl rozkładu. Takie podejście nie wykorzystuje jednakże efektywnie informacji o warunkowej wariancji i wartości oczekiwanej.

### **Wyniki badań dotyczące oceny trafności prognoz VaR dla pojedynczych aktywów**

Przeprowadzono wiele badań dotyczących oceny trafności prognoz VaR dla pojedynczych aktywów. Analizy dotyczące polskiego rynku finansowego z zastosowaniem modeli GARCH przeprowadzili między innymi Łach i Weron (2000), Piontek (2002b), Rokita (2003), Doman i Doman (2004), Pienień (2006), Ganczarek (2007) oraz Osińska i Fałdziński (2007). Łach i Weron (2000) badali kurs USD/PLN oraz stopy WIBORu. Dla modelu GARCH z warunkowym rozkładem normalnym otrzymali oni istotnie większe udziały przekroczeń VaR od zakładanego dla kursu walutowego i stóp T/N WIBORu dla poziomu tolerancji 0,01. Najlepsze wyniki dał model RiskMetrics z mieszaniną dwóch rozkładów normalnych. W badaniu Piontki (2002b) udział przekroczeń VaR był również istotnie większy od zakładanego dla modelu GARCH z warunkowym rozkładem normalnym dla indeksu WIG i poziomu tolerancji 0,01. W przypadku modelu GARCH z warunkowymi rozkładami

<sup>168</sup> Patrz punkt 1.3.1.

<sup>169</sup> Przy standaryzacji reszt wykorzystuje się warunkowe odchylenie standardowe oszacowane na podstawie modelu GARCH.

t-Studenta oraz GED i poziomu tolerancji 0,01 i 0,05, a także modelu GARCH z warunkowym rozkładem normalnym i poziomu tolerancji 0,05 nie było podstaw do odrzucenia hipotez o założonej liczbie przekroczeń i ich niezależności w czasie. Doman i Doman (2004) stosują w badaniu dla indeksu WIG20 i kursu USD/PLN stosunkowo krótki okres, mianowicie około 100 prognoz i oceny trafności prognoz VaR dokonują na podstawie testu Kupca dotyczącego udziału przekroczeń. Uzyskane wyniki były bardzo podobne dla większości stosowanych metod, mianowicie hipoteza o założonej liczbie przekroczeń została odrzucona (ze względu na istotnie mniejszy udział przekroczeń VaR) tylko dla indeksu WIG20, pozycji długiej i poziomów tolerancji 0,05 i 0,025. Wyniki Rokity (2003) wskazują na zbyt dużą liczbę przekroczeń prognoz VaR konstruowanych na podstawie modelu GARCH z warunkowym rozkładem normalnym dla kursu USD/PLN i poziomu tolerancji 0,01. Podobny wynik dla kursu USD/PLN otrzymał Pipień (2006) dla modelu GARCH z warunkowym skośnym rozkładem t-Studenta i poziomów tolerancji 0,01, 0,05 i 0,1. W przypadku zastosowania modelu GARCH z rozkładem  $\alpha$ -stabilnym udział przekroczeń był natomiast zdecydowanie zbyt mały. Ganczarek (2007) badała ceny energii na Rynku Dnia Następnego. Dla modelu GARCH z warunkowym rozkładem GED i poziomu tolerancji 0,05 udział przekroczeń tylko w kilku przypadkach był istotnie większy od zakładanego, natomiast nie było podstaw do odrzucenia hipotezy o niezależności przekroczeń w czasie. W badaniu Osińskiej i Fałdzińskiego (2007) dla indeksu WIG udział przekroczeń prognoz VaR, konstruowanych na podstawie modelu GARCH, nie odbiegał istotnie od zakładanego. Prognozy VaR, budowane na podstawie modeli GARCH i SV, były bardziej trafne według wybranej przez autorów funkcji straty, w połączeniu z zastosowaniem teorii wartości ekstremalnych.

Wyniki badań w literaturze światowej są również zróżnicowane, jednakże można pokusić się o sformułowanie pewnych ogólnych wniosków. Dla różnych poziomów tolerancji oraz różnych przedziałów czasowych różne metody szacowania VaR okazują się skuteczne. Wyniki zależą również od rodzaju zajmowanej przez inwestora pozycji. Nie da się wskazać jednej metody, która byłaby bardziej skuteczna od innych przy wszystkich przyjmowanych poziomach tolerancji oraz przedziałach czasowych. Przy bardzo niskich poziomach tolerancji, takich jak 0,001, skuteczne okazuje się na ogół podejście oparte na teorii wartości ekstremalnych (patrz np. Danielsson, 2002). Dla poziomu tolerancji 0,05, dziennego przedziału czasowego, prognozy VaR, konstruowane na podstawie modelu GARCH z warunkowym rozkładem normalnym, często okazują się trafne. Dla poziomu tolerancji 0,01 trafne prognozy uzysku-

je się natomiast na podstawie modelu GARCH z warunkowym rozkładem t-Studenta (patrz np. Goorbergh i Vlaar, 1999; Gencay, Selcuk i Ulugülyağci, 2003), rozkładem GED (patrz np. Angelidis i Degiannakis, 2006) lub skośnym rozkładem t-Studenta (patrz np. Kuester, Mittnik i Paoletta, 2006). Wybór postaci warunkowego rozkładu spośród rozkładów o grubych ogonach też nie jest jednoznaczny, ponieważ, jak pokazują wyniki badań, zastosowanie modeli GARCH z warunkowym rozkładem t-Studenta lub skośnym rozkładem t-Studenta może również prowadzić do przeszacowanych (patrz Angelidis i Degiannakis, 2006) lub niedoszacowanych (patrz Pipień, 2006) prognoz VaR dla poziomów tolerancji 0,05 i 0,01<sup>170</sup>. Różne postacie jednorównaniowych modeli GARCH okazują się bardziej skuteczne od innych dla różnych aktywów (patrz np. Angelidis, Benos i Degiannakis, 2004; Angelidis i Degiannakis, 2006 oraz So i Yu, 2006). Większość wyników badań pokazuje, że ważniejsze jest uwzględnienie grubych ogonów rozkładu, niż zastosowanie konkretnej specyfikacji modelu GARCH. Wyniki dotyczące porównania trafności prognoz VaR, konstruowanych na podstawie modeli GARCH i SV, są zróżnicowane (patrz np. Doman i Doman, 2004; Osińska i Faldziński, 2007).

Prognozy wartości zagrożonej oszacowane na podstawie modeli GARCH charakteryzują się na ogół większą zmiennością niż prognozy skonstruowane na podstawie innych metod (patrz np. Gencay, Selcuk i Ulugülyağci, 2003; Danielsson, 2002). Jest to zrozumiałe, ponieważ wykorzystuje się informacje o zmieniających się warunkowych momentach rozkładu. Większa zmienność oznacza jednakże na ogół wyższe koszty w zastosowaniach finansowych, takich jak alokacja kapitału czy też ustalanie limitów ryzyka.

Prognozy VaR konstruowane na podstawie metody wariancji-kowariancji dla dziennego przedziału czasowego zależą w dużym stopniu od długości zastosowanych do estymacji szeregów czasowych (patrz Danielsson, 2002). Dla dłuższych przedziałów czasowych, takich jak 10 dni, skuteczność metod opartych na modelowaniu warunkowych średnich i wariancji zmniejsza się do tego stopnia, że okazują się one mniej trafne niż prostsze metody szacowania VaR. Wynika to z faktu, że prognozy zmienności konstruowane na podstawie modeli GARCH dla dłuższych horyzontów są na ogół mniej trafne. Wyniki badań dotyczące długości stosowanego do estymacji szeregu są również bardzo zróżnicowane. Jeżeli struktura modelu jest stabilna, to wykorzystanie większej liczby obserwacji przy estymacji prowadzi do dokładniejszych szacunków VaR. W przeciwnym wypadku lepiej jest stosować krótsze szeregi

<sup>170</sup> Wyniki zależą prawdopodobnie od grubości ogonów empirycznych rozkładów stóp zwrotu.

(patrz Frey i Michaud, 1997). Nie da się wyznaczyć jednej długości szeregu wykorzystywanego do estymacji, która byłaby optymalna dla wszystkich metod prognozowania zmienności (patrz Brooks i Persaud, 2002).

### Estymacja VaR z zastosowaniem modeli GARCH dla portfela aktywów

Można wyróżnić trzy podejścia do szacowania VaR dla portfela aktywów z zastosowaniem modeli GARCH. Pierwsze podejście polega na wykorzystaniu przybliżonych wzorów na podstawie wartości zagrożonych dla pojedynczych aktywów (szacowanych z wykorzystaniem jednorównaniowych modeli GARCH). VaR dla portfela składającego się z  $N$  aktywów można wyznaczyć na podstawie formuły (4.2.3). Formuła ta jest również prawdziwa przy założeniu metodologii RiskMetrics (patrz Tsay, 2005). Inne przybliżenie polega na zastosowaniu modelu Sharpe'a. Pomijając ryzyko specyficzne, które można wyeliminować przez umiejętną dywersyfikację, VaR dany jest formułą (patrz np. Jorion, 1995):

$$\text{VaR}_{t+1|t,p} = \text{VaR}_{m,t+1|t,p} \beta_p, \quad (4.2.25)$$

gdzie  $\text{VaR}_{m,t+1|t,p}$  jest to prognoza VaR dla portfela rynkowego (indeksu rynku),  $\beta_p$  to współczynnik beta portfela, dany wzorem  $\beta_p = \sum_{i=1}^N w_i \beta_i$ ,  $w_i$  oznacza udział  $i$ -tego aktywu w portfelu.

Dokładność szacunków VaR wyznaczonych w powyższy sposób może być w dużej mierze uzależniona od tego, czy spełnione są założenia, na których opiera się przyjęte przybliżenie.

Drugie podejście polega na wyznaczeniu stóp zwrotu portfela (na podstawie przeszłych stóp zwrotu aktywów wchodzących w skład portfela i bieżących ich udziałów) i estymacji parametrów modelu jednorównaniowego, na podstawie bezpośrednio stóp zwrotu portfela (patrz Zangari, 1997 oraz podrozdział 3.3). Następnie do prognozowania VaR wykorzystywane są prognozy wariancji warunkowej portfela, dokładnie tak samo jak w przypadku pojedynczych aktywów. W tej sytuacji możemy mówić o podejściu jednowymiarowym do szacowania VaR dla portfela aktywów. Jeżeli udziały w portfelu się zmieniają, to stopy zwrotu portfela muszą być ponownie wyznaczone i parametry modelu należy na nowo oszacować.

Trzecie podejście polega na estymacji parametrów wielorównaniowego modelu GARCH na podstawie stóp zwrotu aktywów wchodzących w skład portfela. Przy wyznaczaniu VaR wykorzystuje się warunkową macierz kowa-

riancji stóp zwrotu. Jeżeli udziały w portfelu się zmieniają, to nie jest konieczna ponowna estymacja całego modelu. Ze względu na dużą liczbę aktywów znajdujących się w większości portfeli instytucji finansowych stosuje się albo uproszczone postacie wielównaniowych modeli GARCH, albo parametryzacje, które można estymować w dwóch lub trzech krokach, z wykorzystaniem modeli jednorównaniowych. Na przykład zakładając, że warunkowy rozkład stóp zwrotu jest wielowymiarowym rozkładem normalnym oraz dane są proste i logarytmiczne stopy zwrotu, prognozę absolutnej wartości zagrożonej można wyznaczyć na podstawie odpowiednio formuł:

$$\text{VaR}_{t+1|t,p} = -W_t (\boldsymbol{\omega}'_t \mathbf{y}_{t+1|t,p} + z_\alpha \sqrt{\boldsymbol{\omega}'_t \mathbf{H}_{t+1|t,p} \boldsymbol{\omega}_t}), \quad (4.2.26)$$

$$\text{VaR}_{t+1|t,p} = W_t [1 - \exp(\boldsymbol{\omega}'_t \mathbf{y}_{t+1|t,p} + z_\alpha \sqrt{\boldsymbol{\omega}'_t \mathbf{H}_{t+1|t,p} \boldsymbol{\omega}_t})], \quad (4.2.27)$$

gdzie  $\mathbf{y}_{t+1|t,p}$  jest to wektor prognoz warunkowych wartości oczekiwanych stóp zwrotu o wymiarach  $N \times 1$ ,  $\mathbf{H}_{t+1|t,p}$  to prognoza warunkowej macierzy kowariancji stóp zwrotu. Dla logarytmicznych stóp zwrotu wyrażenie  $\boldsymbol{\omega}'_t \mathbf{y}_{t+1|t,p}$  jest tylko w przybliżeniu równe prognozowanej stopie zwrotu portfela<sup>171</sup>. W tym przypadku możemy więc mówić o podejściu wielowymiarowym do szacowania VaR dla portfela aktywów.

Większość badań empirycznych dotyczących oceny trafności prognoz VaR z zastosowaniem modeli GARCH jest przeprowadzana dla pojedynczych aktywów. Jeżeli są podejmowane badania dla portfela aktywów, to najczęściej dotyczą jedynie kilku aktywów. Badanie dla szeregów z polskiego rynku finansowego przeprowadzili Piontek i Papla (2005). Zbadali oni skuteczność prognoz VaR konstruowanych na podstawie dwurównaniowego modelu DVECH dla wybranych par spółek, kursów walutowych i indeksów. Uzyskane wyniki były zróżnicowane. Trafne prognozy uzyskano dla kursów walutowych i tylko niektórych par spółek i indeksów.

Jest bardzo mało analiz, w których ocenia się trafność prognoz VaR konstruowanych z zastosowaniem wielorównaniowych modeli GARCH dla większej liczby aktywów i na ogół wykorzystuje się w nich tylko jedną wybraną specyfikację modelu. Christiansen (1999) zastosował czynnikowy model GARCH dla duńskich obligacji zerokuponowych, natomiast Engle i Sheppard (2001) zastosowali model DCC dla akcji z indeksów S&P 500 i DJIA. W powyższych badaniach oba modele nie dały zadowalających wyników przy prognozie wartości zagrożonej.

<sup>171</sup> W przypadku zwykłych stóp zwrotu występują z kolei problemy natury statystycznej, związane z ich modelowaniem, o czym była mowa w podrozdziale 1.1.



### 4.2.3. PROGNOZOWANIE VAR DLA PORTFELA AKCJI NOTOWANYCH NA GPW W WARSZAWIE<sup>172</sup>

Do analizy przyjęto dzienne logarytmiczne stopy zwrotu od 4 stycznia 1999 roku do 30 czerwca 2006 roku (1880 obserwacji). Spośród spółek notowanych przez cały przyjęty okres na GPW w Warszawie wybrano dwadzieścia firm o największej kapitalizacji: Bank BPH, Bank Millennium, Bank Pekao S.A., BRE Bank, Bank Zachodni WBK, Budimex, Cersanit, Citibank Handlowy, Computerland, Firma Oponiarska Dębica, ING Bank Śląski, Grupa Kęty, KGHM Polska Miedź, Kredyt Bank, Mondi Packaging Paper Świecie, Orbis, Polska Grupa Farmaceutyczna, Prokom Software, Softbank, Telekomunikacja Polska. Przy wyborze pominięto spółki, dla których udział liczby sesji, kiedy nie były notowane przekraczał 5%. Miało to na celu uniknięcie problemu niesynchronicznych transakcji.

Na podstawie wybranych spółek skonstruowano portfel w ten sposób, że dla wszystkich okresów dla każdej spółki przyjęto równe wagi wynoszące 0,05<sup>173</sup>. W badaniu przyjęto jednodniowy horyzont prognozy VaR<sup>174</sup>, co wynika z dwóch powodów. Po pierwsze, przy bieżącym zarządzaniu ryzykiem instytucje finansowe najczęściej wykorzystują dzienną wartość zagrożoną<sup>175</sup>, po drugie, prognozy zmienności uzyskane na podstawie modeli GARCH są bardziej trafne w przypadku krótkiego horyzontu prognozy (patrz np. West i Cho, 1995 oraz Andersen i Bollerslev, 1998), w przeciwieństwie do długiego horyzontu, dla którego prognozy obliczone na podstawie innych modeli są często dokładniejsze. Dane z trzech pierwszych lat zostały wykorzystane jedynie przy estymacji modelu. Zaczynając od 31 grudnia 2001 roku, dla danych od początku 1999 roku, szacowano parametry wszystkich rozważanych modeli. Na podstawie każdego modelu konstruowano prognozę wartości zagrożonej na następną sesję. Dla dalszych okresów dodawano kolejno jedną obserwację do danych, na podstawie których szacowano model i powtarzano całą procedurę aż do 29 czerwca 2006 roku. Parametry każdego z zastosowanych w pracy modeli były szacowane 1131 razy. Porównując prognozy VaR z realizacjami stóp zwrotu, dokonano oceny trafności dla okresu styczeń 2002 roku – czerwiec 2006 roku.

<sup>172</sup> Wyniki tego badania zostały przedstawione w pracy Fiszdera (2007f).

<sup>173</sup> Wybór wag w tego typu badaniach jest oczywiście kwestią subiektywną.

<sup>174</sup> Prognozowano absolutną wartość zagrożoną.

<sup>175</sup> Nawet przy wyliczaniu wymogów kapitałowych, gdzie wykorzystuje się VaR dla okresu 10 dni, wartość współczynnika korygującego ustalana jest na podstawie analizy przekroczeń VaR dla danych dziennych.

Głównym celem niniejszej analizy była ocena trafności prognoz VaR konstruowanych na podstawie różnych specyfikacji modeli GARCH dla portfela aktywów. W badaniu zastosowano osiem specyfikacji wielorównaniowego modelu GARCH: model stałych warunkowych współczynników korelacji, model skalarno-diagonalny, model skalarno-diagonalny z warunkowym rozkładem t-Studenta, model zintegrowany, model ortogonalny dla trzech oraz dwudziestu czynników, model DCC oraz zintegrowany model DCC. Rozważano również  $K$ -czynnikiowy model GARCH dla trzech czynników, jednakże w niektórych przypadkach nie udało się uzyskać szacunków parametrów zapewniających dodatniość wariancji portfela, dlatego pominięto go przy prezentacji wyników. Model ten zajmował ostatnie pozycje w rankingu według wszystkich przyjętych kryteriów oceny. Prognozy VaR, uzyskane na podstawie  $K$ -czynnikiowego modelu GARCH, były znacząco niedoszacowane<sup>176</sup>. W badaniu wykorzystano również jednorównaniowy model GARCH z warunkowym rozkładem normalnym oraz t-Studenta. Estymowano parametry jednorównaniowego modelu dla szeregu stóp zwrotu portfela i zastosowano jednowymiarowe podejście do szacowania VaR. Wyniki uzyskane dla modeli GARCH porównano z innymi metodami estymacji VaR: symulacją historyczną, metodą wariancji-kowariancji (bezwarunkowa macierz kowariancji, ruchoma macierz kowariancji ze stałą wygładzania równą 25 oraz metoda wyrównywania wykładniczego z parametrem wygasania równym 0,94<sup>177</sup>). Dodatkowo zastosowano połączenie modelu GARCH z symulacją historyczną. Łącznie daje to jedenaście różnych metod szacowania wartości zagrożonej z wykorzystaniem modeli GARCH oraz cztery dodatkowe metody.

Analizę przeprowadzono zarówno w odniesieniu do inwestora mającego pozycję długą, jak i krótką. Przyjęto najczęściej stosowane poziomy tolerancji 0,05 oraz 0,01. Dla każdej metody prognozowania VaR podano udziały przekroczeń VaR oraz szacunki statystyk testów Kupca. Wyboru metody prognozowania VaR można również dokonać na podstawie określonych funkcji straty, jednakże w tym przypadku selekcja odpowiedniego kryterium jest sprawą subiektywną i zależy przede wszystkim od sposobu wykorzystywania VaR. W niniejszej pracy zaproponowano, jako kryterium oceny, miarę polegającą na modyfikacji sumy wymogów kapitałowych. VaR, zamiast dla przedziału czasowego 10 dni, został oszacowany dla 1 dnia, a poziom tolerancji nie musi być równy 0,01, tak jak to

<sup>176</sup> „Przeszacowanie” czy „niedoszacowanie” VaR, to kwestia subtelna, bo nieznana jest „prawdziwa” wartość VaR (gdy nieznany jest rozkład obserwacji).

<sup>177</sup> Podejście oparte na metodzie wyrównywania wykładniczego określane jest w literaturze finansowej jako metodologia RiskMetrics.

jest przy szacowaniu wymogów kapitałowych. Jeżeli prognozy VaR konstruowane na podstawie dwóch różnych metod są trafne, to powinna zostać wybrana metoda, która daje niższy szacunek sumy wymogów kapitałowych. Oczywiście liczba przekroczeń VaR nie może być zbyt duża, bo inaczej instytucja będzie zobowiązana do zmiany sposobu szacowania VaR. Z tego względu oszacowano również udział dni, dla których współczynnik korygujący przyjmował wartość 4. Uzyskane wyniki zostały przedstawione w tabelach 4.2–4.5.

Zauważmy na wstępie, że żadna z metod szacowania VaR nie dała zadowalających wyników dla wszystkich poziomów tolerancji oraz zajmowanych przez inwestora pozycji. Można jednakże wskazać metody, które przynoszą trafne prognozy przy określonych poziomach tolerancji i zajmowanych pozycjach. Dla pozycji długiej, poziomu tolerancji 0,05 oraz poziomu istotności 0,05 udział przekroczeń VaR nie odbiega istotnie od zakładanego dla zintegrowanego wielorównaniowego modelu GARCH, ruchomej macierzy kowariancji oraz metodologii RiskMetrics. Jednakże we wszystkich przypadkach hipoteza o niezależności przekroczeń w czasie została odrzucona. Zatem na podstawie przeprowadzonych testów statystycznych można stwierdzić, że dla pozycji długiej i poziomu tolerancji 0,05 żadna z metod nie daje trafnych prognoz VaR. Potwierdza to również analiza zmodyfikowanych wymogów kapitałowych. Dla wszystkich metod, poza metodą wariancji-kowariancji, udział dni, podczas których współczynnik korygujący przyjmował wartość cztery, był znaczący i instytucja byłaby prawdopodobnie zobowiązana do zmiany sposobu szacowania VaR. Dla wszystkich metod, poza ruchomą macierzą kowariancji oraz metodologią RiskMetrics, szacunki VaR były przeszacowane.

Dla inwestora posiadającego długą pozycję i poziomu tolerancji 0,01 trafne prognozy wartości zagrożonej zostały skonstruowane na podstawie modelu ortogonalnego dla trzech i dwudziestu czynników, zintegrowanego modelu DCC, metodologii RiskMetrics, jednorównaniowego modelu GARCH z warunkowym rozkładem normalnym i t-Studenta oraz połączenia zastosowania jednorównaniowego modelu GARCH z metodą symulacji historycznej. Spośród powyższych metod najlepszą, według kryterium zmodyfikowanych wymogów kapitałowych, okazała się metodologia RiskMetrics. Dla wszystkich modeli, poza zintegrowanym wielorównaniowym modelem GARCH, współczynnik korygujący nie przyjmował nigdy wartości cztery, zatem metody te należy uznać za dopuszczalne ze względu na wybrane kryterium. Podobnie jak dla poziomu tolerancji 0,01, niedoszacowane szacunki VaR otrzymano na podstawie ruchomej macierzy kowariancji, metodologii RiskMetrics oraz dodatkowo zintegrowanego wielorównaniowego modelu GARCH.

**TABELA 4.2. OCENA JAKOŚCI PROGNOZ VaR DLA POZYCJI DŁUGIEJ I POZIOMU TOLERANCJI 0,05**

Metody szacowania VaR	Udział przekr.	LR <sub>uc</sub>	LR <sub>ind</sub>	MRC	Ranking	Udział k=4
Stałych współczyn. korelacji	0,032	8,97*	75,24*	77,22	11	0,159
Skalarno-diagonalny	0,027	14,43*	79,40*	78,07	13	0,095
Skal.-diag. rozkład t-Studenta	0,027	14,43*	79,40*	77,74	12	0,095
Zintegrowany	0,038	3,71	104,71*	72,48	2	0,325
Ortogonalny 3 czynniki	0,034	6,40*	64,15*	76,37	9	0,253
Ortogonalny 20 czynników	0,034	6,40*	64,15*	76,12	8	0,216
DCC	0,032	8,97*	75,24*	76,68	10	0,193
DCC zintegrowany	0,035	5,65*	87,74*	75,44	6	0,223
Symulacja historyczna	0,027	15,72*	100,50*	80,19	14	0,099
Wariancji-kowariancji	0,019	30,66*	79,89*	82,38	15	0,011
Ruch. macierz kowar. k = 25	0,053	0,22	102,48*	70,99	1	0,892
RiskMetrics	0,054	0,36	92,70*	72,48	3	0,937
Jednorówn. model GARCH	0,034	7,21*	58,20*	75,59	7	0,159
GARCH rozkład t-Studenta	0,034	6,40*	61,62*	74,62	4	0,174
GARCH + symulacja histor.	0,035	5,65*	62,57*	75,07	5	0,281

LR<sub>uc</sub> oraz LR<sub>ind</sub> oznaczają statystyki testu Kupca, służącego weryfikacji hipotez odpowiednio o równości udziału przekroczeń poziomowi tolerancji oraz niezależności przekroczeń w czasie. Gwiazdką oznaczono oceny statystyk, w przypadku których hipoteza zerowa została odrzucona na poziomie istotności 0,05. MRC to suma wymogów kapitałowych.

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2007F).

**TABELA 4.3. OCENA JAKOŚCI PROGNOZ VaR DLA POZYCJI DŁUGIEJ I POZIOMU TOLERANCJI 0,01**

Metody szacowania VaR	Udział przekr.	LR <sub>uc</sub>	LR <sub>ind</sub>	MRC	Ranking	Udział k=4
Stałych współczyn. korelacji	0,006	1,92	14,28*	91,31	9	0,000
Skalarno-diagonalny	0,005	3,04	13,04*	99,06	12	0,000
Skal.-diag. rozkład t-Studenta	0,001	15,86*	15,35*	108,46	13	0,000
Zintegrowany	0,016	3,39	51,45*	86,06	6	0,020
Ortogonalny 3 czynniki	0,009	0,16	11,75	85,57	3	0,000
Ortogonalny 20 czynników	0,009	0,16	11,75	85,86	5	0,000
DCC	0,006	1,92	14,28*	90,65	8	0,000
DCC zintegrowany	0,008	0,51	14,25	87,81	7	0,000
Symulacja historyczna	0,001	15,86*	15,35*	120,29	15	0,000
Wariancji-kowariancji	0,002	11,77*	11,34*	111,72	14	0,000
Ruch. macierz kowar. k = 25	0,019	8,00*	41,53*	80,91	2	0,000
RiskMetrics	0,014	1,74	25,47	80,22	1	0,000
Jednorówn. model GARCH	0,010	0,01	12,86	85,83	4	0,000
GARCH rozkład t-Studenta	0,008	0,51	9,82	93,54	11	0,000
GARCH + symulacja histor.	0,008	0,51	9,82	91,90	10	0,000

Patrz uwagi pod tabelą 4.2.

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2007F).

**TABELA 4.4. OCENA JAKOŚCI PROGNOZ VaR DLA POZYCJI KRÓTKIEJ I POZIOMU TOLERANCJI 0,05**

Metody szacowania VaR	Udział przekr.	LR <sub>uc</sub>	LR <sub>ind</sub>	MRC	Ranking	Udział k=4
Stałych współczyn. korelacji	0,036	4,96*	89,04*	78,40	10	0,444
Skalarno-diagonalny	0,029	12,06*	81,52*	83,80	13	0,392
Skal.-diag. rozkład t-Studenta	0,033	8,06*	85,16*	83,49	12	0,408
Zintegrowany	0,053	0,22	123,05*	77,50	5	0,603
Ortogonalny 3 czynniki	0,046	0,40	94,14*	77,76	6	0,577
Ortogonalny 20 czynników	0,046	0,40	94,14*	78,02	8	0,577
DCC	0,038	3,71	84,16*	78,17	9	0,542
DCC zintegrowany	0,042	1,43	86,56*	77,26	4	0,542
Symulacja historyczna	0,020	26,75*	78,16*	90,94	14	0,322
Wariancji-kowariancji	0,021	24,94*	84,10*	91,26	15	0,326
Ruch. macierz kowar. k = 25	0,071	9,87*	127,29*	71,33	1	0,963
RiskMetrics	0,064	4,11*	109,96*	72,16	2	0,831
Jednorówn. model GARCH	0,046	0,40	94,14*	78,00	7	0,577
GARCH rozkład t-Studenta	0,046	0,40	94,14*	76,93	3	0,577
GARCH + symulacja histor.	0,044	0,83	86,67*	78,89	11	0,562

Patrz uwagi pod tabelą 4.2.

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2007F).

**TABELA 4.5. OCENA JAKOŚCI PROGNOZ VaR DLA POZYCJI KRÓTKIEJ I POZIOMU TOLERANCJI 0,01**

Metody szacowania VaR	Udział przekr.	LR <sub>uc</sub>	LR <sub>ind</sub>	MRC	Ranking	Udział k=4
Stałych współczyn. korelacji	0,009	0,16	16,72	94,84	10	0,000
Skalarno-diagonalny	0,004	4,49*	13,88*	99,06	11	0,000
Skal.-diag. rozkład t-Studenta	0,004	4,49*	13,88*	108,46	13	0,000
Zintegrowany	0,016	3,39	42,04*	89,81	3	0,000
Ortogonalny 3 czynniki	0,011	0,24	20,37	92,74	6	0,000
Ortogonalny 20 czynników	0,011	0,24	20,37	92,36	5	0,000
DCC	0,009	0,16	16,72	94,18	9	0,000
DCC zintegrowany	0,011	0,04	20,92	93,18	7	0,000
Symulacja historyczna	0,002	11,77*	7,32*	132,64	15	0,000
Wariancji-kowariancji	0,004	4,49*	17,97*	111,72	14	0,000
Ruch. macierz kowar. k = 25	0,022	12,45*	66,26*	88,14	2	0,028
RiskMetrics	0,021	10,88*	49,80*	87,97	1	0,000
Jednorówn. model GARCH	0,011	0,24	20,37	92,32	4	0,000
GARCH rozkład t-Studenta	0,007	1,09	8,43	94,01	8	0,000
GARCH + symulacja histor.	0,004	4,49*	7,58	101,41	12	0,000

Patrz uwagi pod tabelą 4.2.

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2007F).

Dla inwestora mającego krótką pozycję i poziomu tolerancji 0,05, dla ponad połowy metod udział przekroczeń VaR nie odbiegał istotnie od zakładanego, jednakże dla żadnej metody udział przekroczeń nie był niezależny w czasie. Wyniki analizy dla zmodyfikowanych rezerw kapitałowych potwierdzają bardzo słabe wyniki wszystkich metod w prognozowaniu VaR. Liczba dni, podczas których współczynnik korygujący przyjmował wartość cztery była na tyle duża, że konieczna byłaby zmiana sposobu prognozowania VaR. Podobnie jak dla pozycji długiej, dla wszystkich metod, poza ruchomą macierzą kowariancji oraz metodologią RiskMetrics, szacunki VaR były przeszacowane.

Prognozy VaR dla inwestora posiadającego krótką pozycję i poziomu tolerancji 0,01 były trafne dla modelu stałych warunkowych współczynników korelacji, modelu ortogonalnego dla trzech i dwudziestu czynników, modelu DCC i jego zintegrowanej parametryzacji oraz jednorównaniowego modelu GARCH z warunkowym rozkładem normalnym i t-Studenta. Spośród powyższych modeli najwyżej w rankingu, ze względu na minimalizację zmodyfikowanych wymogów kapitałowych znalazł się jednorównaniowy model GARCH. Dla wszystkich modeli, poza ruchomą macierzą kowariancji, współczynnik korygujący nie przyjmował wartości cztery, co oznacza, że można je stosować do szacowania wymogów kapitałowych.

Oceniając uzyskane wyniki w kontekście rezultatów badań dotyczących pojedynczych szeregów z polskiego rynku finansowego, należy zauważyć istotną różnicę. O ile w przypadku pojedynczych aktywów liczba przekroczeń VaR konstruowanych na podstawie jednorównaniowego modelu GARCH była najczęściej znacząco wyższa od zakładanej, o tyle w przypadku portfela aktywów liczba przekroczeń była albo trafna, albo znacząco niższa od zakładanej. Zaobserwowana różnica wynika prawdopodobnie z grubości ogonów rozkładów stóp zwrotu. Mianowicie dla pojedynczych szeregów szacunki liczby stopni swobody w rozkładzie t-Studenta wynosiły około 6, natomiast dla portfela około 10.

Dodatkowo przeprowadzono również wybrane testy dotyczące własności stóp zwrotu badanych spółek oraz charakteru zależności między nimi. Poza czterema spółkami (Computerland, Millennium, Prokom i Softbank) stopy zwrotu były pozbawione autokorelacji. Stopy zwrotu wszystkich spółek miały zmienną wariancję warunkową, a ich rozkłady bezwarunkowe były różne od rozkładu normalnego. W tabeli 4.6 przedstawiono wyniki testów dotyczących charakteru zależności między stopami zwrotu badanych spółek. Uzyskane wyniki testowania restrykcji, nakładanych na parametry modeli GARCH,

były niewrażliwe na przyjętą specyfikację rozkładu warunkowego. Dodatkowo w tabeli 4.7 przedstawiono ranking modeli na podstawie kryterium informacyjnego Schwarza (SIC).

Według testu LR, model skalarno-diagonalny z warunkowym rozkładem normalnym, został zdecydowanie odrzucony na korzyść modelu z warunkowym rozkładem t-Studenta. Taki sam rezultat otrzymano również na podstawie kryterium SIC. Wyniki analizy trafności prognoz VaR nie potwierdziły jednakże przewagi modelu z warunkowym rozkładem t-Studenta.

**TABELA 4.6. ANALIZA CHARAKTERU ZALEŻNOŚCI BADANYCH SZEREGÓW DLA WIELORÓWNIANOWYCH SPECYFIKACJI MODELU GARCH**

Weryfikowane hipotezy	Statystyka	Ocena statystyki
Normalność rozkładu warunk. w modelu skalarno-diagonalnym	LR	8925*
Stołość warunk. współczynników korelacji	LMC	409*
Skalarno-diagonalny – $W^* = 0, \beta = 1 - \alpha$	LR	1192*
Zintegrowany GARCH – $1 - \alpha = 0,94$	LR	26382*

Gwiazdką oznaczono oceny statystyk, w przypadku których weryfikowana hipoteza została odrzucona na poziomie istotności 0,05.

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2007F).

**TABELA 4.7. RANKING WIELORÓWNIANOWYCH MODELI GARCH WEDŁUG KRYTERIUM SIC**

Oznaczenia portfeli	SIC	Ranking
Skalarno-diagonalny	-190 783	5
Skalarno-diagonalny rozkład t-Studenta	-194 311	1
Zintegrowany	-191 179	4
DCC	-192 506	3
DCC zintegrowany	-193 138	2
RiskMetrics	-164 814	6

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2007F).

Hipoteza o stałości warunkowych współczynników korelacji została odrzucona, a mimo to zastosowanie modelu stałych warunkowych współczynników korelacji do wyznaczania prognoz VaR dało nie gorsze, a często nawet lepsze wyniki niż zastosowanie wielorównaniowych specyfikacji, pozwalających opisać zmienne współczynniki korelacji. Prognozy VaR konstruowane na podstawie modelu skalarno-diagonalnego okazały się nieco bardziej skuteczne niż prognozy konstruowane na podstawie modelu zintegrowanego, co jest zgodne z wynikami kryterium SIC (w przeciwieństwie do wy-

ników testu LR), jednakże w przypadku żadnego z tych modeli nie można powiedzieć, że są to prognozy trafne. Podejście RiskMetrics zostało zdecydowanie odrzucone na korzyść bardziej złożonych wielorównaniowych specyfikacji modeli GARCH, jednakże nie zostało to potwierdzone w analizie skuteczności prognoz VaR. Wysokie miejsca w rankingu według kryterium SIC modeli DCC, przynajmniej częściowo, potwierdziły się w analizie trafności prognoz VaR.

### Ocena trafności prognoz VaR wewnątrz próby

Podobnie jak w przypadku analizy prognoz zmienności przedstawionej w rozdziale trzecim dokonano oceny trafności prognoz VaR wewnątrz próby. Jako kryterium oceny przyjęto zmodyfikowaną sumę wymogów kapitałowych. Tak jak w badaniu poza próbą podano również udziały dni, dla których współczynnik korygujący przyjmował wartość 4. Uzyskane wyniki zaprezentowano w tabelach 4.8 i 4.9.

**TABELA 4.8. OCENA JAKOŚCI PROGNOZ VAR WEWNĄTRZ PRÓBY DLA POZYCJI DŁUGIEJ I POZIOMÓW TOLERANCJI 0,05 ORAZ 0,01**

Metody szacowania VaR	Poziom tolerancji 0,05			Poziom tolerancji 0,01		
	MRC	Ranking	Udział k=4	MRC	Ranking	Udział k=4
Stałych współczyn. korelacji	119,66	5	0,543	135,22	3	0,000
Skalarno-diagonalny	124,79	14	0,511	144,77	10	0,000
Skal.-diag. rozkład t-Studenta	125,55	15	0,511	146,77	11	0,000
Zintegrowany	122,22	9	0,302	142,16	9	0,013
Ortogonalny 3 czynniki	122,50	10	0,715	139,30	5	0,000
Ortogonalny 20 czynników	122,82	13	0,715	139,66	6	0,000
DCC	119,65	4	0,543	137,63	4	0,000
DCC zintegrowany	119,24	3	0,496	135,20	2	0,000
Symulacja historyczna	119,69	6	0,526	164,69	15	0,045
Wariancji-kowariancji	122,76	12	0,409	154,52	14	0,058
Ruch. macierz kowar. k = 25	118,23	2	0,924	140,08	8	0,000
RiskMetrics	117,60	1	0,951	133,65	1	0,000
Jednorówn. model GARCH	122,61	11	0,671	139,86	7	0,000
GARCH rozkład t-Studenta	120,67	7	0,767	149,27	12	0,000
GARCH + symulacja histor.	121,76	8	0,767	150,12	13	0,000

MRC to suma wymogów kapitałowych, k – współczynnik korygujący.

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.



**TABELA 4.9. OCENA JAKOŚCI PROGNOZ VaR WEWNĄTRZ PRÓBY DLA POZYCJI KRÓTKIEJ I POZIOMÓW TOLERANCJI 0,05 ORAZ 0,01**

Metody szacowania VaR	Poziom tolerancji 0,05			Poziom tolerancji 0,01		
	MRC	Ranking	Udział k=4	MRC	Ranking	Udział k=4
Stałych współczyn. korelacji	119,62	3	0,715	148,69	11	0,025
Skalarno-diagonalny	124,92	11	0,680	150,51	12	0,000
Skal.-diag. rozkład t-Studenta	125,46	13	0,680	151,79	13	0,000
Zintegrowany	129,63	15	0,628	144,96	7	0,000
Ortogonalny 3 czynniki	121,29	7	0,664	141,54	5	0,000
Ortogonalny 20 czynników	121,61	8	0,664	140,88	3	0,000
DCC	119,69	4	0,715	144,59	6	0,000
DCC zintegrowany	120,61	5	0,715	146,23	8	0,025
Symulacja historyczna	124,99	12	0,629	176,04	15	0,000
Wariancji-kowariancji	127,38	14	0,626	161,78	14	0,152
Ruch. macierz kowar. k = 25	118,58	2	0,974	140,07	2	0,020
RiskMetrics	116,25	1	0,869	138,59	1	0,000
Jednorówn. model GARCH	122,36	10	0,693	140,98	4	0,000
GARCH rozkład t-Studenta	120,73	6	0,786	146,68	9	0,000
GARCH + symulacja histor.	122,26	9	0,654	148,66	10	0,000

MRC to suma wymogów kapitałowych, k – współczynnik korygujący.

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

Wnioski wynikające z analizy udziałów dni, podczas których współczynnik korygujący przyjmował wartość 4, były zgodne z tymi, jakie uzyskano w badaniu poza próbą. Dla poziomu tolerancji 0,05 odpowiednie udziały były znacznie wyższe wewnątrz próby. Porównanie jakości prognoz VaR konstruowanych na podstawie różnych modeli ma sens tylko dla poziomu tolerancji 0,01, ponieważ prognozy konstruowane dla poziomu tolerancji 0,05 nie są trafne. Uzyskane rankingi modeli wewnątrz próby są zbliżone do tych, jakie otrzymano w badaniu poza próbą. Ten wynik wyraźnie kontrastuje z wnioskami, jakie uzyskano na podstawie testowania restrykcji w modelach i analizy kryterium SIC. Więcej informacji na temat wyboru odpowiedniej parametryzacji wielorównaniowego modelu GARCH można otrzymać na podstawie analizy wewnątrz próby niż na podstawie testowania restrykcji czy analizy kryterium informacyjnego Schwarza. Zatem przy wyborze metody prognozowania VaR należy przeprowadzić analizę wewnątrz próby dla takich samych kryteriów, na podstawie których przeprowadzana będzie ocena poza próbą. Ten wynik jest zgodny z wnioskami, jakie otrzymano przy ocenie trafności prognoz zmienności w rozdziale trzecim.

## Wnioski

Żadna z metod szacowania VaR nie dała zadowalających wyników dla wszystkich poziomów tolerancji oraz zajmowanych przez inwestora pozycji. Prognozy VaR konstruowane na podstawie zarówno jednorównaniowych, jak i wielorównaniowych modeli GARCH są najczęściej przeszacowane. Prognozy budowane metodą symulacji historycznej oraz metodą wariancji-kowariancji są przeszacowane, natomiast prognozy konstruowane na podstawie modelu wariancji ruchomej oraz metodologii RiskMetrics są niedoszacowane.

Uzyskane wyniki wskazują, że znacznie łatwiejsze jest prognozowanie VAR dla poziomu tolerancji 0,01. Żadna metoda prognozowania nie dała w pełni zadowalających wyników dla poziomu 0,05, co potwierdza słuszność wyboru poziomu tolerancji 0,01 przy szacowaniu wymogów kapitałowych. W żadnym przypadku zastosowanie najbardziej popularnych metod prognozowania VaR, czyli metody wariancji-kowariancji i symulacji historycznej, nie przyniosło trafnych prognoz VaR.

Analizując poszczególne specyfikacje wielorównaniowych modeli GARCH, można zauważyć bardzo zbliżone wyniki dla modelu DCC oraz modelu stałych warunkowych współczynników korelacji. W obu metodach w pierwszym kroku estymuje się parametry jednorównaniowych modeli GARCH. Warto podkreślić, że słabsze wyniki przy ocenie trafności prognoz dla modeli skalarno-diagonalnego oraz zintegrowanego. Wyniki bezpośredniego testowania restrykcji dotyczących wielorównaniowych modeli GARCH, nie znajdują odzwierciedlenia w analizie trafności prognoz VaR. Nieco lepiej wypada porównanie z wynikami kryterium informacyjnego Schwarza, jednakże i w tym przypadku wnioski nie pokrywają się z rezultatami uzyskanymi na podstawie analizy trafności prognoz VaR. Bardzo zbliżone rankingi modeli do tych w badaniu trafności poza próbą otrzymano natomiast w badaniu wewnątrz próby. Zatem najlepsze rezultaty w poszukiwaniu metod, które będą lepiej prognozowały VaR daje analiza trafności prognoz wewnątrz próby.

Zastosowanie jednorównaniowego modelu GARCH do prognozowania VaR dla portfela akcji dało nie gorsze, a często nawet lepsze wyniki niż zastosowanie wielorównaniowych modeli GARCH. Wynik ten jest ważny z praktycznego punktu widzenia, ponieważ przy dużej liczbie aktywów estymacja parametrów większości specyfikacji wielorównaniowych modeli GARCH jest bardzo trudna lub wręcz niemożliwa. Zaskakujący, w stosunku do wyników innych badań, jest fakt, że specyfikacja rozkładu warunkowego w modelu GARCH nie wpływała na wyniki trafności prognoz. Być może różnica wy-

nika z grubości ogonów analizowanych empirycznych szeregów czasowych. Ogony rozkładu stóp zwrotu pojedynczych instrumentów (stosowanych w innych badaniach) były znacznie grubsze niż ogony rozkładu stóp zwrotu portfela instrumentów (stosowanego w niniejszym badaniu). Zastosowanie jednorównaniowego modelu GARCH w połączeniu z symulacją historyczną również nie poprawiło skuteczności prognoz VaR.

Przeprowadzona analiza pokazała również, że ocenianie trafności prognoz VaR tylko na podstawie badania istotności udziału przekroczeń w czasie jest zdecydowanie niewystarczające<sup>178</sup>.

### 4.3. ESTYMACJA WSPÓŁCZYNNIKÓW BETA NA PODSTAWIE DWURÓWNIOWEGO MODELU GARCH<sup>179</sup>

Współczynnik beta to jedna z najbardziej znanych i stosowanych miar wrażliwości. Może być wykorzystywany między innymi do wyceny wartości akcji, konstrukcji portfela aktywów, do szacunku kosztu kapitału własnego firmy. Do estymacji współczynnika beta wykorzystuje się najczęściej model jednowskaźnikowy Sharpe'a (Sharpe, 1963). Model Sharpe'a to najbardziej znany w finansach przykład modelu jednoczynnikowego<sup>180</sup>. Powstał on jako model upraszczający klasyczną teorię portfela, jednak coraz częściej stosowany jest w powiązaniu z modelami rynku kapitałowego. Model Sharpe'a można przedstawić w następującej formie:

$$r_i = \alpha_i + \beta_i r_M + \varepsilon_i, \quad (4.3.1)$$

gdzie  $r_i$  jest to stopa zwrotu  $i$ -tego waloru (lub portfela),  $r_M$  to stopa zwrotu rynku (mierzona np. jako stopa zwrotu indeksu giełdowego),  $\alpha_i, \beta_i$  – parametry strukturalne,  $\varepsilon_i$  – składnik losowy.

Współczynnik beta nie uwzględnia ryzyka związanego ze zmiennością czynnika ryzyka (w tym przypadku indeksu rynku) oraz ryzyka specyficznego związanego z danym aktywem. Konstruując hipotezę jednowskaźnikowego modelu rynku, Sharpe przyjął szereg założeń dotyczących inwestorów, aktywów oraz rynku (patrz Tarczyński, 1997a). Trudno jednoznacznie ocenić, na

<sup>178</sup> Do podobnego wniosku doszedł Pipień (2006) na podstawie innych miar i metod estymacji.

<sup>179</sup> Prezentowane fragmenty pracy były publikowane w artykule Fiszedera (2005a).

<sup>180</sup> Dalsze zastosowania modeli czynnikowych przedstawiono w podrozdziale 5.3.

ile niespełnienie poszczególnych założeń może ograniczyć użyteczność modelu Sharpe'a. Dodatkowo przyjmuje się pewne założenia dotyczące własności statystycznych zmiennych i parametrów w równaniu (4.3.1). Zwykle zakłada się, że dla każdego  $i$  oraz  $j$  ( $i \neq j$ )  $E(\varepsilon_i \varepsilon_j) = 0$ . Zatem nie ma czynników, poza stopą zwrotu indeksu rynku, które tłumaczyłyby wspólny ruch stóp zwrotu z walorów. Powyższe założenie jest istotne w przypadku, gdy model Sharpe'a jest wykorzystywany w celu uproszczenia procesu tworzenia portfela, na przykład w celu uniknięcia bezpośredniego szacowania wszystkich współczynników korelacji stóp zwrotu. Inne założenia dotyczące własności statystycznych mogą istotnie wpłynąć na estymację współczynnika beta. Standardowa procedura estymacji polega na zastosowaniu klasycznej metody najmniejszych kwadratów do równania:

$$r_{it} = \alpha_i + \beta_i r_{Mt} + \varepsilon_{it}, \quad (4.3.2)$$

gdzie  $r_{it}$ ,  $r_{Mt}$  oznaczają odpowiednio stopę zwrotu  $i$ -tego waloru oraz stopę zwrotu indeksu rynku.

Założenia do stosowania klasycznej metody najmniejszych kwadratów często nie są jednakże spełnione dla szeregów empirycznych. W literaturze finansowej zwraca się szczególnie uwagę na niestabilność współczynników beta w czasie (patrz np. Brooks, Faff i McKenzie, 1998). Zmienność współczynników beta w czasie<sup>181</sup> może wynikać z dwóch głównych powodów, mianowicie zmiennego ryzyka waloru (współczynnika beta) lub błędów oszacowania. Elton i Gruber (1998) podkreślają, że parametry w modelu Sharpe'a nie są doskonale stabilne w czasie. Można spodziewać się ich zmian w miarę, jak zmieniają się fundamentalne wskaźniki danego przedsiębiorstwa. Na przykład współczynnik beta, jako miara ryzyka, powinien być powiązany ze strukturą kapitałową i zmieniać się w odpowiedzi na jej zmiany. Przyczyną zmieniających się współczynników beta może być na przykład asymetryczna reakcja na dobre i złe wiadomości (patrz Braun, Nelson i Sunier, 1995). Zmienność współczynników beta może również wynikać z pominięcia istotnych zmiennych objaśniających w modelu (Leusner, Akhavein i Swamy, 1996). Z tego względu zaproponowano szereg innych metod estymacji współczynnika beta, jak np. metoda Blume'a czy Vasicka (patrz Elton i Gruber, 1998). Okazuje się jednakże, że klasyczne metody estymacji współczyn-

<sup>181</sup> Występują istotne różnice w szacunkach współczynników beta walorów (dotyczy to przede wszystkim pojedynczych walorów, w znacznie mniejszym stopniu portfeli) estymowanych dla różnych okresów (patrz Elton i Gruber, 1998).

nika beta nie uwzględniają również innych empirycznych własności procesów finansowych, takich jak: autokorelacja stóp zwrotu, zmienność warunkowych wariancji i kowariancji stóp zwrotu czy grube ogony rozkładów stóp zwrotu (patrz podrozdział 1.1). Poniżej przedstawiono sposób estymacji współczynników beta na podstawie modelu VAR-GARCH. Taka specyfikacja modelu pozwala opisać w modelowaniu wspomniane wyżej empiryczne charakterystyki stóp zwrotu.

### 4.3.1. ZASTOSOWANIE MODELU VAR-GARCH

Przy estymacji parametrów modelu Sharpe'a w postaci (4.3.2) klasyczną metodą najmniejszych kwadratów zakłada się między innymi, że  $r_{it}$  i  $r_{Mt}$  są realizacjami procesów stacjonarnych, zależność pomiędzy nimi jest liniowa, składnik losowy  $\varepsilon_{it}$  jest pozbawiony autokorelacji, homoskedastyczny i ma rozkład normalny, a współczynnik beta jest stały w czasie. Rzadko wszystkie powyższe założenia są spełnione jednocześnie w badaniach empirycznych.

Występowanie autokorelacji składnika losowego lub zmiennej wariancji warunkowej składnika losowego w modelu (4.3.2) obniża efektywność estymatorów parametrów strukturalnych  $\alpha_i$  i  $\beta_i$  otrzymanych za pomocą MNK. W skrajnych przypadkach może się zdarzyć, że np. zamiast dodatniej wartości współczynnika beta otrzymamy istotnie ujemny szacunek lub zamiast wartości większej od jeden (akcja agresywna) otrzymamy szacunek istotnie mniejszy od jeden (akcja defensywna). Na ogół jednak nieuwzględnienie autokorelacji stóp zwrotu lub zmiennej wariancji nie prowadzi do aż tak drastycznych różnic. Problem autokorelacji stóp zwrotu można łatwo rozwiązać przez wprowadzenie do modelu opóźnionych zmiennych endogenicznych. Jednakże jeżeli wariancja warunkowa składnika losowego jest zmienna w czasie, wówczas kwadraty opóźnionych zmiennych endogenicznych są skorelowane z  $\varepsilon_i^2$  i w konsekwencji estymatory średnich błędów szacunku nie są zgodne (patrz punkt 1.3.1). Zatem formuła na macierz kowariancji estymatorów  $\sigma^2(X'X)^{-1}$  jest nieodpowiednia, a wynik wnioskowania o istotności współczynnika beta może być w tej sytuacji błędny. Niezwykle rzadko udaje się wyeliminować zmienność wariancji warunkowej składnika losowego przez poprawę specyfikacji modelu, np. wprowadzenie dodatkowych zmiennych objaśniających. Można zastosować metodę estymacji odporną na zmienność wariancji, ale lepszym rozwiązaniem jest opisanie bezpośrednio w modelu zmiennej wariancji warunkowej składnika losowego, na przykład za pomocą jednorówna-

niowego modelu GARCH lub SV. Dla modelu GARCH estymuje się zatem parametry następującego modelu:

$$r_{it} = \alpha_i + \sum_{j=1}^p \phi_{ij} r_{it-j} + \beta_i r_{Mt} + \varepsilon_{it}, \quad \varepsilon_t | \psi_{t-1} \sim D(0, h_t), \quad (4.3.3)$$

$$h_t = \alpha_o + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}, \quad (4.3.4)$$

gdzie  $\psi_{t-1}$  oznacza zbiór wszystkich informacji dostępnych w chwili  $t-1$ , a  $D(0, h_t)$  oznacza określoną postać funkcji gęstości prawdopodobieństwa (najczęściej rozkład normalny lub t-Studenta) o wartości oczekiwanej równej zero i wariancji  $h_t$ . Taka specyfikacja pozwala uwzględnić w modelu autokorelację i zmienną wariancję warunkową stóp zwrotu oraz grube ogony rozkładu stóp zwrotu.

Przyjęcie jednorównaniowego modelu GARCH nie pozwala jednakże rozwiązać problemu zmienności współczynnika beta. Zastosowanie stałych szacunków współczynników beta, gdy są zmienne w czasie, w analizach lub strategiach finansowych, w których wykorzystuje się współczynniki beta, może istotnie wpływać na uzyskane wyniki. Aby uwzględnić przy modelowaniu dodatkowo zmienność współczynników beta, można zastosować dwurównaniowy model VAR-GARCH. Poniżej, jako postać modelu GARCH, przyjęto model BEKK, jednakże możliwe są również inne specyfikacje modelu. Model VAR( $k$ )-BEKK( $p, q$ ) można przedstawić w postaci:

$$r_{it} = a_{0i} + a_{1i} r_{it-1} + b_{1i} r_{Mt-1} + \dots + a_{ki} r_{it-k} + b_{ki} r_{Mt-k} + \varepsilon_{it}, \quad (4.3.5)$$

$$r_{Mt} = a_{0M} + a_{1M} r_{it-1} + b_{1M} r_{Mt-1} + \dots + a_{kM} r_{it-k} + b_{kM} r_{Mt-k} + \varepsilon_{Mt}, \quad (4.3.6)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t | \psi_{t-1} \sim D(0, \mathbf{H}_t), \quad (4.3.7)$$

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{C}\mathbf{C}' + \sum_{j=1}^q \mathbf{D}_j \boldsymbol{\varepsilon}_{t-j} \boldsymbol{\varepsilon}'_{t-j} \mathbf{D}_j' + \sum_{j=1}^p \mathbf{E}_j \mathbf{H}_{t-j} \mathbf{E}_j', \quad (4.3.8)$$

gdzie  $r_{it}$  jest to stopa zwrotu  $i$ -tego waloru w chwili  $t$ ,  $r_{Mt}$  to stopa zwrotu indeksu giełdowego w chwili  $t$ ,  $a_{0i}, a_{1i}, \dots, a_{ki}, b_{1i}, b_{2i}, \dots, b_{ki}$  oraz  $a_{0M}, a_{1M}, \dots, a_{kM}, b_{1M}, b_{2M}, \dots, b_{kM}$  – parametry strukturalne,  $\varepsilon_{it}, \varepsilon_{Mt}$  – składniki losowe,  $\boldsymbol{\varepsilon}_t = (\varepsilon_{it}, \varepsilon_{Mt})'$ ,  $\mathbf{H}_t$  jest symetryczną macierzą warunkowych kowariancji o wymiarach  $2 \times 2$ ,  $\mathbf{C}, \mathbf{D}_j$  oraz  $\mathbf{E}_j$  są macierzami parametrów o wymiarach  $2 \times 2$ .

Zmieniające się współczynniki beta są określone następująco:

$$\beta_{it} = \frac{h_{iMt}}{h_{Mt}}, \quad (4.3.9)$$

gdzie  $h_{iMt}$  jest to kowariancja warunkowa stopy zwrotu  $i$ -tego waloru i indeksu giełdowego,  $h_{Mt}$  to wariancja warunkowa stopy zwrotu indeksu giełdowego. Zarówno  $h_{iMt}$ , jak i  $h_{Mt}$  wyznacza się na podstawie oszacowanego modelu (4.3.8). Do estymacji parametrów modelu w postaci (4.3.5–4.3.8) można zastosować MNW lub quasi-MNW. W badaniach empirycznych często wystarczające jest przyjęcie  $k = 1$  w równaniach (4.3.5–4.3.6),  $q = 1$  i  $p = 1$  w równaniu (4.3.8), ale niewystarczające okazuje się przyjęcie rozkładu normalnego w (4.3.7). Bardzo często konieczne jest przyjęcie warunkowego rozkładu mającego grubsze ogony niż te, które występują w rozkładzie normalnym. W poniższym badaniu przyjęto dwuwymiarowy warunkowy rozkład t-Studenta z  $\nu$  stopniami swobody.

### 4.3.2. UPROSZCZENIE BUDOWY PORTFELA

W tej części pracy przedstawiono jedno z możliwych zastosowań empirycznych zaprezentowanego modelu VAR-GARCH<sup>182</sup> (patrz Fiszeder, 2005a). Model Sharpe'a może być wykorzystany w celu uproszczenia procesu tworzenia portfela. Przedstawiony model zastosowano do konstrukcji portfela o minimalnej wariancji oraz dokonano oceny skuteczności tego podejścia. Zaprezentowany przykład empiryczny ma charakter ilustracyjny. Stopa zwrotu i wariancja stopy zwrotu portfela, przy założeniach jednowskaźnikowego modelu Sharpe'a, dane są następującymi wzorami (patrz Elton i Gruber, 1998):

$$r_p = \alpha_p + \beta_p r_M + \varepsilon_p, \quad (4.3.10)$$

$$s_p^2 = \beta_p^2 s_M^2 + \sum_{i=1}^n w_i^2 s_{ei}^2, \quad (4.3.11)$$

gdzie  $r_p$  i  $s_p^2$  to odpowiednio stopa zwrotu i wariancja stopy zwrotu portfela, przy konstrukcji którego wykorzystano model Sharpe'a,  $\alpha_p = \sum_{i=1}^n w_i \alpha_i$ ,  $w_i$  oznacza udział  $i$ -tego waloru w portfelu,  $n$  – liczba walorów w portfelu,  $\beta_p$  to współczynnik beta portfela, dany wzorem  $\beta_p = \sum_{i=1}^n w_i \beta_i$ ,  $s_M^2$  – wari-

<sup>182</sup> Dalsze przykłady znajdują się w podrozdziałach 2.5, 2.6 oraz rozdziałach 5 i 6.

cja stopy zwrotu indeksu giełdowego,  $s_{ei}^2$  jest to wariancja składnika losowego  $i$ -tego waloru, dana formułą  $s_{ei}^2 = s_i^2 - \beta_i^2 s_M^2$ ,  $s_i^2$  – wariancja stopy zwrotu  $i$ -tego waloru.

Proces budowy portfela jest bardzo wrażliwy na wybór estymatora wartości oczekiwanej stopy zwrotu (patrz Best i Grauer, 1991; Chopra i Ziemba, 1993). Niewielkie różnice w szacunkach wartości oczekiwanych stóp zwrotu często prowadzą do znaczącej przebudowy portfela (patrz np. Jobson i Korwie, 1980). Aby wyeliminować wpływ wyboru estymatora wartości oczekiwanej stopy zwrotu, wyznaczano portfel o minimalnej wariancji, danej wzorem (4.3.11). Portfel o minimalnej wariancji był konstruowany na dwa sposoby. Pierwszy sposób polegał na tym, że parametry beta szacowano na podstawie modelu Sharpe'a w postaci (4.3.1). Drugi natomiast związany był z wykorzystaniem modelu VAR-GARCH, zapisanego równaniami (4.3.5–4.3.8). Oczywiście konstrukcja portfela o minimalnej wariancji może być przeprowadzona za pomocą klasycznej procedury Markowitza, jednakże celem tego badania było porównanie efektywności procesu alokacji przy zastosowaniu modelu Sharpe'a i modelu VAR-GARCH. Formułę (4.3.11) można zapisać w sposób dynamiczny dla okresu  $t + 1$ :

$$s_{pt+1|t,p}^2 = \beta_{pt+1|t,p}^2 h_{Mt+1|t,p} + \sum_{i=1}^n w_{it}^2 s_{eit+1|t,p}^2, \quad (4.3.12)$$

gdzie  $s_{pt+1|t,p}^2$  to prognoza wariancji stopy zwrotu portfela dla okresu  $t + 1$ ,  $\beta_{pt+1|t,p} = \sum_{i=1}^n w_{it} \beta_{it+1|t,p}$ ,  $s_{eit+1|t,p}^2 = h_{it+1|t,p} - \beta_{it+1|t,p}^2 h_{Mt+1|t,p}$ ,  $h_{it+1|t,p}$  oraz  $h_{Mt+1|t,p}$  to prognozy wariancji warunkowych stóp zwrotu  $i$ -tego waloru oraz indeksu giełdowego dla okresu  $t + 1$ ,  $\beta_{it+1|t,p} = h_{iMt+1|t,p} (h_{Mt+1|t,p})^{-1}$ .

Analiza została przeprowadzona dla trzech wybranych spółek, notowanych na GPW w Warszawie: Elektrimu, Huty Szkła Gospodarczego Irena i NKT Cables (dawniej Kable), jednakże cała procedura może być zastosowana w odniesieniu do dowolnej liczby walorów. Spółki zostały wybrane losowo spośród wszystkich spółek notowanych przez cały rozważany okres. Do badania przyjęto tygodniowe stopy zwrotu (liczone od ceny zamknięcia z wtorku do ceny zamknięcia z następnego wtorku) od 5 stycznia 1993 roku do 31 grudnia 2002 roku (521 obserwacji). W 1993 roku notowania odbywały się tylko trzy razy w tygodniu, jednakże wybór dnia tygodnia, do obliczania tygodniowych stóp zwrotu, nie miał istotnego wpływu na uzyskane wyniki. Oszacowane modele Sharpe'a zostały przedstawione w tabeli 4.10. Jako indeks rynku przyjęto indeks WIG. Dla każdego modelu podano: wartości statystyki Ljunga-Boxa



dla reszt oraz kwadratów reszt oznaczone odpowiednio  $Q$  i  $Q^2$ . Przedstawiono również wartości statystyki LM na występowanie efektu ARCH w resztach oraz wartości statystyki testu normalności Jarque-Bera. Przeprowadzone testy wskazują na występowanie autokorelacji stóp zwrotu spółki Irena oraz występowanie zmiennej wariancji warunkowej stóp zwrotu badanych spółek. We wszystkich przypadkach hipoteza o normalności składnika losowego została odrzucona. Wyniki testu CUSUM (nie zamieszczone w pracy) wskazują na niestabilność modelu Sharpe'a dla spółki Irena, wyniki testu Chowa (nie zamieszczone w pracy) świadczą o niestabilności predyktywnej badanych modeli.

**TABELA 4.10. MODEL SHARPE'A DLA SPÓŁEK: ELEKTRIM, IRENA, KABLE**

Parametr/ Statystyka	Elektrim	Irena	Kable
$\alpha$	-0,004 (0,003)	0,001 (0,003)	-0,004 (0,003)
$\beta$	1,089 (0,053)	0,938 (0,046)	0,932 (0,054)
$Q(12)$	9,29	21,68*	17,68
$Q^2(12)$	27,55*	76,89*	70,76*
LM(12)	21,89*	43,24*	54,54*
$JB$	4271,38*	103,18*	147,71*

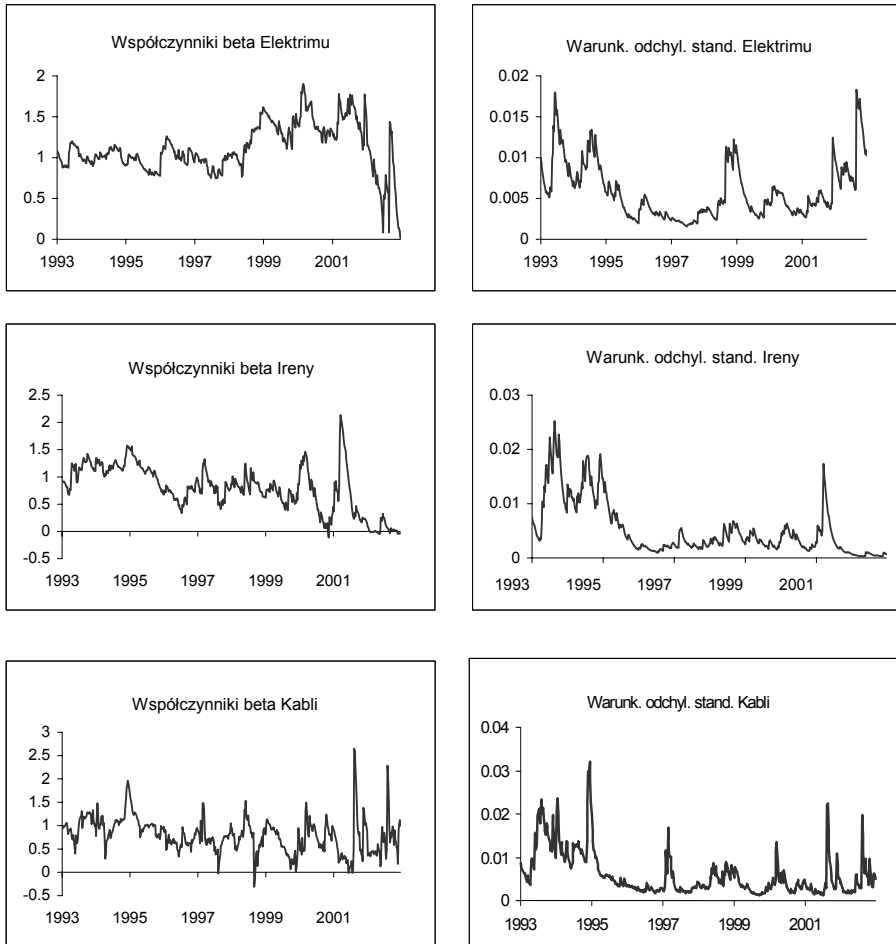
W nawiasach, pod ocenami parametrów, podano średnie błędy szacunku.  $Q$  oraz  $Q^2$  oznaczają wartości statystyki Ljunga-Boxa odpowiednio dla reszt oraz kwadratów reszt, LM to statystyka testu ARCH na występowanie efektu ARCH w resztach,  $JB$  oznacza statystykę Jarque-Bera. Gwiazdką oznaczono oceny statystyk, w przypadku których weryfikowana hipoteza została odrzucona na poziomie istotności 0,05.

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2005A).

Należy pamiętać, że każda z powyższych charakterystyk może wpływać na proces wnioskowania o pozostałych charakterystykach. Przeprowadzone testy sugerują, że celowe jest zastosowanie modelu VAR-GARCH, stąd w dalszej części zbadano skuteczność takiego podejścia przy konstrukcji portfela o minimalnej wariancji.

Dla każdego  $t$  pomiędzy 31 grudnia 2000 roku a 24 grudnia 2002 roku, na podstawie danych od 5 stycznia 1994 roku, szacowano model Sharpe'a i model VAR-GARCH. Dla każdej spółki estymowano zatem parametry 105 modeli Sharpe'a i 105 modeli VAR-GARCH. Oszacowane na podstawie modeli VAR-GARCH współczynniki beta i warunkowe odchylenia standardowe stóp zwrotu analizowanych spółek dla całego badanego okresu zostały przedstawione na rysunku 4.1. Oszacowane współczynniki beta i warunkowe odchy-

lenia standardowe znacząco zmieniały się w czasie. Na przykład stopa zwrotu akcji Elektrimu w latach 1993–1998 zmieniała się w podobnym stopniu, jak stopa zwrotu rynku, w latach 1999–2001 akcje Elektrimu zachowywały się tak, jak akcja agresywna, a przez większą część roku 2002 tak, jak akcja defensywna. Warto zwrócić uwagę, że w okresach wzrostu zmienności następował na ogół również wzrost wartości współczynników beta.



**RYSUNEK 4.1. SZACUNKI WSPÓŁCZYNNIKÓW BETA I WARUNKOWYCH ODCHYLEŃ STANDARDOWYCH STÓP ZWROTU**

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2005A).

Dla każdego  $t$  pomiędzy 2 stycznia 2001 roku a 31 grudnia 2002 roku konstruowano portfele o minimalnej wariancji, danej wzorami (4.3.11) i (4.3.12). Przyjęto założenie, że nie występuje krótka sprzedaż, tzn.  $w_{it+1} \geq 0$  dla  $i = 1, 2, 3$ . Dla skonstruowanych portfeli obliczano wariancje jako kwadrat zaobserwowanej stopy zwrotu. Z oszacowanych ex post wariancji obliczono średnie osobno dla portfeli konstruowanych na podstawie modelu Sharpe'a i modelu VAR-GARCH.

Szacunki średnich odchyłeń standardowych stóp zwrotu dla portfeli o minimalnej wariancji wynosiły 0,056064 i 0,041257 dla portfeli konstruowanych na podstawie odpowiednio modelu Sharpe'a i modelu VAR-GARCH. Zastosowanie modelu VAR-GARCH spowodowało zmniejszenie średniego odchylenia standardowego portfela o 26,41% w stosunku do portfela, przy konstrukcji którego wykorzystano model Sharpe'a. Uwzględnienie zmieniających się w czasie wariancji stóp zwrotu i współczynników beta przy budowie portfela wpłynęło na znaczny wzrost efektywności procesu alokacji aktywów. Należy jednak pamiętać, że ze względu na stosowane procedury estymacyjne niezbędna jest duża liczba obserwacji, co wyklucza stosowanie modelu w przypadku małych prób.

#### 4.4. OCZEKIWANA STOPA ZWROTU A RYZYKO

Zależność pomiędzy dochodem a ryzykiem należy do fundamentalnych zagadnień w teorii finansów. Z modelu CAPM wynika, że między oczekiwaną stopą zwrotu portfela rynkowego a wariancją stopy zwrotu tego portfela istnieje dodatnia zależność liniowa. Przyjmuje się również, że dla ustalonego okresu inwestorzy wymagają wyższych oczekiwanych stóp zwrotu z aktywów, z którymi związane jest większe ryzyko (mierzone odchyleniem standardowym lub wariancją). Nie ma jednakże zgody co do tego, czy dodatnia zależność między oczekiwaną stopą zwrotu a wariancją jest dynamiczna, tzn. czy w okresie, gdy dany papier wartościowy charakteryzuje się większym ryzykiem, inwestorzy wymagają większej premii (różnicy między oczekiwaną stopą zwrotu z danego aktywów a stopą zwrotu wolną od ryzyka) za ryzyko. Wyniki badań empirycznych są niejednoznaczne. Na przykład: Engle, Lilien i Robins (1987), French, Schwert i Stambaugh (1987) oraz Campbell i Hentschel (1992) wskazują na dodatnią zależność między oczekiwaną stopą zwrotu a warunkową wariancją. Z drugiej strony Fama i Schwert (1977), Campbell (1987), Breen, Glosten i Jagannathan (1989), Pagan i Hong (1991) oraz Glosten, Jagannathan i Runkle

(1993) mówią o ujemnej zależności między oczekiwaną stopą zwrotu a wariancją. W pracach: Baillie i Bollerslev (1990), Domowitz i Hakkio (1985), McCurdy i Morgan (1987, 1988), Nelson (1991), Whitelaw (1994) zależność między oczekiwaną stopą zwrotu a ryzykiem była nieistotna statystycznie. Backus i Gregory (1993) dowodzą teoretycznie, że zależność między premią za ryzyko a warunkową wariancją może mieć dowolny kierunek i postać. Wielu autorów stawia pod znakiem zapytania stałość liniowej zależności między oczekiwaną stopą zwrotu a warunkową wariancją (np. Harvey C., 1989; Chou, Engle i Kane, 1992; Harrison i Zhang, 1999). Rozbieżność wyników w literaturze światowej była jedną z przyczyn podjęcia badań dotyczących zależności pomiędzy oczekiwaną stopą zwrotu a ryzykiem dla wybranych spółek i indeksów giełdowych notowanych na GPW w Warszawie. Część prezentowanych tutaj zagadnień została opublikowana w pracach: Fiszedler i Kwiatkowski (2005a, 2005c).

Celem analizy jest badanie istotności oraz stałości zależności pomiędzy oczekiwaną stopą zwrotu a ryzykiem dla wybranych spółek i indeksów giełdowych notowanych na GPW w Warszawie. Ryzyko mierzone jest warunkową wariancją (lub ewentualnie warunkowym odchyleniem standardowym) stopy zwrotu badanego aktywu. W badaniu zastosowano klasyczny model GARCH-M, model GARCH-M ze zmiennym parametrem oraz model z progowym efektem GARCH-M. Uzyskane rezultaty przynajmniej w części pozwalają odpowiedzieć na pytanie, dlaczego wyniki dotychczasowych badań są tak niejednoznaczne.

#### 4.4.1. ZALEŻNOŚĆ MIĘDZY OCZEKIWANĄ STOPĄ ZWROTU A WARUNKOWĄ WARIANCJĄ

Model CAPM można przedstawić w następującej postaci (patrz podrozdział 5.2):

$$E(r_i) - r_f = \lambda \operatorname{cov}(r_i, r_M), \quad (4.4.1)$$

gdzie  $E(r_i)$  jest to oczekiwana stopa zwrotu  $i$ -tego waloru,  $r_f$  – stopa zwrotu wolna od ryzyka,  $\lambda$  – parametr określany jako rynkowa cena ryzyka,  $\operatorname{cov}(r_i, r_M)$  – kowariancja stopy zwrotu  $i$ -tego waloru i portfela rynkowego.

Równanie (4.4.1) zapisane dla portfela rynkowego ma następującą postać:

$$E(r_M) - r_f = \lambda \sigma_M^2, \quad (4.4.2)$$

gdzie  $E(r_M)$  i  $\sigma_M^2$  oznaczają odpowiednio: warunkową wartość oczekiwaną i warunkową wariancję stopy zwrotu portfela rynkowego.

Z równania (4.4.2) wynika, że premia za ryzyko ( $E(r_M) - r_f$ ) jest proporcjonalna do wariancji stopy zwrotu portfela rynkowego. Parametr  $\lambda$  powinien być większy od zera, bo w przeciwnym wypadku inwestorzy nie byłoby zainteresowani posiadaniem ryzykownego portfela, którego oczekiwana stopa zwrotu jest mniejsza od stopy wolnej od ryzyka.

Dla ustalonego okresu inwestorzy wymagają wyższych oczekiwanych stóp zwrotu z aktywów, z którymi związane jest większe ryzyko. Na efektywnych rynkach kapitałowych aktywa o wysokim dochodzie charakteryzują się wysokim ryzykiem. Nie ma jednakże zgody co do tego, czy zależność między oczekiwaną stopą zwrotu a wariancją jest dynamiczna. Przedstawione we wprowadzeniu wyniki badań są niejednoznaczne. Duża grupa spośród wspomnianych analiz została przeprowadzona z wykorzystaniem modelu GARCH-M (lub ARCH-M). Model GARCH-M( $p, q$ ) (patrz tabela 1.1) pozwala w naturalny sposób opisać liniową zależność pomiędzy oczekiwaną stopą zwrotu a zmienną w czasie wariancją warunkową. Model ten można przedstawić w następującej postaci:

$$r_t = \delta h_t + \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + \dots + \phi_k r_{t-k} + \varepsilon_t, \quad (4.4.3)$$

$$\varepsilon_t = z_t h_t^{1/2}, \quad z_t \sim N(0,1), \quad (4.4.4)$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}, \quad (4.4.5)$$

gdzie  $r_t$  oznacza stopę zwrotu, a  $h_t$  wariancję warunkową. W równaniu (4.4.3) wprowadzono opóźnione wartości  $r_t$ , aby uwzględnić ewentualną autokorelację stóp zwrotu. Do estymacji parametrów modelu GARCH-M w postaci (4.4.3–4.4.5) wykorzystuje się najczęściej metodę największej wiarygodności. Ponieważ warunkowa normalność procesu (założona w równaniu (4.4.4)) nie jest w stanie opisać zwiększonej kurtozy występującej w rozkładach brzegowych finansowych szeregów czasowych, dlatego należy albo zastosować przy estymacji parametrów metodę quasi-największej wiarygodności, albo przyjąć dla  $z_t$  rozkład o grubszych ogonach (np. rozkład t-Studenta). Zastosowanie w tym przypadku metody największej wiarygodności przy założeniu warunkowej normalności da wprawdzie te same oceny parametrów, które otrzymuje się na podstawie metody quasi-MNW, ale średnie błędy szacunku nie będą prawidłowe.

Nawiązując do równania (4.4.2), Chou (1988) interpretuje parametr  $\phi_0$  w równaniu (4.4.3) jako stopę wolną od ryzyka. Istnieje jednakże kilka powo-

dów przemawiających przeciwko takiej interpretacji. Po pierwsze, stopa wolna od ryzyka nie jest stała w czasie. Po drugie, równanie (4.4.2) dotyczy portfela rynkowego, a nie dowolnego aktywu. Po trzecie, dla niektórych aktywów ocena parametru  $\phi_0$  może być ujemna (por. Engle, Lilien i Robins, 1987). Dodatkowo w badaniach empirycznych ocena parametru  $\phi_0$  jest często ujemna w okresach długotrwałych spadków cen akcji na giełdach.

Dla danych o mniejszej częstotliwości, np. miesięcznych, w równaniu (4.4.3) pomija się stałą  $\phi_0$ , a model szacowany jest na podstawie stóp zwrotu, pomniejszonych o stopę wolną od ryzyka. Przy takiej specyfikacji modelu,  $\delta h_t$  można traktować jako zmienną w czasie premię za ryzyko. W przypadku, gdy model GARCH-M dotyczy portfela rynkowego, parametr  $\delta$  w równaniu (4.4.3) można wówczas interpretować jako „parametr awersji do ryzyka” (patrz np. French, Schwert i Stambaugh, 1987; Chou, 1988) lub rynkową cenę ryzyka (patrz Cuthbertson, 1996).

W równaniu (4.4.3), zamiast  $h_t$ , można również przyjąć  $\sqrt{h_t}$  lub  $\ln(h_t)$  (por. Engle, Lilien i Robins, 1987). Przyjęcie takiej specyfikacji oznacza, że zmiany w wariancji mają mniejszy wpływ na oczekiwaną stopę zwrotu (zależność między oczekiwaną stopą zwrotu a wariancją nie jest liniowa). Liczne badania (Pagan i Ullah, 1988; Bollerslev i Wooldridge, 1992; Gallant, Rossi i Tauchen, 1992; Glosten, Jagannathan i Runkle (1993), 1993; Pipień, 2007) pokazują, że ocena parametru  $\delta$  jest bardzo wrażliwa na postać równania dla warunkowej wariancji. Na przykład Glosten, Jagannathan i Runkle, uwzględniając poziom stóp procentowych oraz asymetryczny wpływ dodatnich i ujemnych stóp zwrotu na wariancję, otrzymali ujemną ocenę parametru  $\delta$  (w modelu o równaniach (4.4.3–4.4.5) ocena była dodatnia). Wyniki badań Pipienia (2007) wskazywały na istotnie dodatnią zależność między oczekiwaną stopą zwrotu a wariancją w przypadku, gdy w modelu uwzględniono asymetrię w ogonach rozkładu stóp zwrotu. Nieuwzględnienie asymetrii prowadziło do niejednoznacznych wyników.

Teoria finansów dopuszcza zarówno dodatnią, jak i ujemną dynamiczną zależność między warunkową stopą zwrotu a warunkową wariancją. Glosten, Jagannathan i Runkle (1993) podają przykłady, kiedy powyższa zależność może być ujemna. Zakładając, że stany gospodarki można opisać za pomocą łańcuchów Markowa, Backus i Gregory (1993) udowodnili na podstawie skonstruowanego przez nich teoretycznego modelu gospodarki, że relacja pomiędzy premią za ryzyko a warunkową wariancją może mieć dowolny kierunek i postać, w zależności od przyjętych parametrów modelu oraz funkcji użyteczności.

Harrison i Zhang (1999) pokazują, że zależność między oczekiwaną stopą zwrotu a ryzykiem jest dodatnia, ale tylko w przypadku długiego okresu inwestycji (kwartał, rok, dwa lata). Nie znajdują natomiast żadnej istotnej zależności dla krótkiego okresu inwestycji. Nie oznacza to jednak, że zależność pomiędzy oczekiwaną stopą zwrotu a ryzykiem nie istnieje. Na zależności w krótkim okresie mogą wpływać: koszty transakcyjne, przebudowa portfeli czy niespodziewane potrzeby konsumpcyjne (patrz Daniel i Marshall, 1997).

Wielu autorów stawia pod znakiem zapytania stałość zależności między oczekiwaną stopą zwrotu a warunkową wariancją (np. French, Schwert i Stambaugh, 1987; Harvey C., 1989; Harrison i Zhang, 1999). Chou, Engle i Kane (1992) zaproponowali nową postać modelu GARCH-M, mianowicie model GARCH-M ze zmiennym parametrem (ang. *time varying parameter* GARCH-M), który pozwala opisać zmieniającą się w czasie zależność między oczekiwaną stopą zwrotu a warunkową wariancją. Postać tego modelu, rozszerzoną o występujące w równaniu dla średniej opóźnione wartości zmiennej objaśnianej, można zapisać jako:

$$r_t = b_t h_t + \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + \dots + \phi_k r_{t-k} + \varepsilon_t, \quad (4.4.6)$$

$$\varepsilon_t = z_t h_t^{1/2}, \quad z_t \sim N(0,1), \quad (4.4.7)$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}, \quad (4.4.8)$$

$$b_t = b_{t-1} + v_t, \quad v_t \sim N(0, Q), \quad (4.4.9)$$

gdzie  $\eta_t = r_t - E_{t-1}(r_t)$ ,  $\text{cov}(\varepsilon_t, v_t) = 0$ .

Powyższy model jest naturalnym rozszerzeniem modelu GARCH-M, w którym parametr  $\delta$  w równaniu (4.4.3) jest opisany jako proces błędzenia przypadkowego. Autorzy modelu nazywają parametr  $b_t$  „ceną zmienności”. W odróżnieniu od podstawowego modelu GARCH-M, w równaniu (4.4.8) kolejne kwadraty opóźnionych reszt  $\varepsilon_{t-i}$  zastąpione są kwadratami  $\eta_{t-i}$ , uzyskanymi na podstawie filtru Kalmana. W przestrzeni stanów równanie (4.4.6) nazywane jest równaniem wyjścia lub obserwacji, natomiast (4.4.9) równaniem stanu. W celu znalezienia nieznanymi wartości parametrów można zatem wykorzystać zmodyfikowaną wersję filtru Kalmana, która dodatkowo uwzględnia zmienność wariancji warunkowej. Oznaczając przez  $\mathbf{y}_t$   $N \times 1$ -wymiarowy wektor zmiennych obserwowanych w chwili  $t$ , ogólny model przestrzeni stanów można zapisać jako (por. Harvey, Ruiz i Sentana, 1992; Hamilton, 1994):

$$y_t = A'x_t + Z_t'\xi_t + w_t, \quad (4.4.10)$$

$$\xi_t = F\xi_{t-1} + v_t, \quad (4.4.11)$$

gdzie równanie (4.4.10) nazywane jest równaniem wyjścia lub obserwacji, a równanie (4.4.11) równaniem stanu,  $\xi_t$  oznacza  $r \times 1$  wymiarowy wektor stanu,  $F$  i  $Z_t'$  są odpowiednio macierzami stanu oraz wyjścia o wymiarach  $r \times r$  i  $N \times r$ . Wektor  $x_t$  jest  $k \times 1$  – wymiarowym wektorem zmiennych egzogenicznych lub z góry ustalonych. Macierz  $A'$  ma wymiary  $N \times k$ . Wektory  $w_t$  i  $v_t$  o wymiarach  $N \times 1$  oraz  $r \times 1$  są wektorami białych szumów, mianowicie:

$$E(w_t w_t') = \begin{cases} R_t & \text{dla } t = \tau \\ \mathbf{0} & \text{dla } t \neq \tau \end{cases} \quad \text{i} \quad E(v_t v_t') = \begin{cases} Q & \text{dla } t = \tau \\ \mathbf{0} & \text{dla } t \neq \tau, \end{cases}$$

gdzie  $R_t$  i  $Q$  są macierzami o wymiarach  $N \times N$  i  $r \times r$ . Dodatkowo zakłada się niezależność wektorów  $w_t$  i  $v_t$ .

Definiując  $a_{t|t-1} = E[\xi_t | \psi_{t-1}]$  jako wektor stanu oszacowany na podstawie informacji dostępnych w chwili  $t-1$  oraz  $P_{t|t-1} = E\left[\left(\xi_t - a_{t|t-1}\right)\left(\xi_t - a_{t|t-1}\right)' \middle| \psi_{t-1}\right]$  jako macierz kowariancji tego oszacowania, równania filtru Kalmana, które służą do estymacji parametrów zawartych w  $A'$ ,  $F$ ,  $Q$  i  $R_t$ , mają postać:

$$a_{t|t-1} = Fa_{t-1}, \quad (4.4.12)$$

$$P_{t|t-1} = FP_{t-1}F' + Q, \quad (4.4.13)$$

$$y_{t|t-1} = A'x_t + Z_t'a_{t|t-1}, \quad (4.4.14)$$

$$u_t = y_t - y_{t|t-1}, \quad (4.4.15)$$

$$W_t = Z_t'P_{t|t-1}Z_t + R_t, \quad (4.4.16)$$

$$a_t = a_{t|t-1} + P_{t|t-1}Z_t'W_t^{-1}u_t, \quad (4.4.17)$$

$$P_t = \left(I - P_{t|t-1}Z_t'W_t^{-1}Z_t'\right)P_{t|t-1}. \quad (4.4.18)$$

Uwzględniając efekt GARCH i przyjmując  $N=1$  oraz  $R_t = h_t$ , można dopisać jeszcze jedno równanie (por. Harvey, Ruiz i Sentana, 1992; Rockinger i Unger, 2000), mianowicie:

$$h_t = \alpha_o + \sum_{i=1}^q \alpha_i \eta_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}. \quad (4.4.19)$$



Oznaczając przez  $T$  liczbę obserwacji, logarytm naturalny czynnika funkcji wiarygodności odpowiadającego  $t$ -tej obserwacji, można zapisać jako:

$$l_t = -\frac{1}{2} \ln(2\pi) - \frac{1}{2} \ln |W_t| - \frac{1}{2} u_t' W_t^{-1} u_t \quad \text{dla } t = 1, \dots, T. \quad (4.4.20)$$

Nieznane wartości parametrów estymuje się przez maksymalizację funkcji wiarygodności  $L = \sum_{t=1}^T l_t$ , przyjmując jako wartości początkowe oceny parametrów otrzymane dla modelu GARCH-M ze stałym parametrem. Chou, Engle i Kane (1992), szacując model GARCH-M ze zmiennym parametrem awersji do ryzyka, zastosowali metodę największej wiarygodności. Ponieważ rozkład  $z_t$  w równaniu (4.4.7) nie jest normalny (posiada grubsze ogony niż te, które występują w rozkładzie normalnym), Fiszeder i Kwiatkowski (2005a) proponują do estymacji parametrów stosować metodę quasi-największej wiarygodności. Otrzymane tą metodą estymatory są zgodne i asymptotycznie nieobciążone (patrz Bollerslev i Wooldridge, 1992; Hamilton, 1994).

Na zależność między oczekiwaną stopą zwrotu a warunkową wariancją mogą wpływać zmienne ekonomiczne lub finansowe. Fiszeder (2005b) zaproponował model z progowym efektem GARCH-M (GARCH-MT, patrz tabela 1.1), w którym zależność pomiędzy oczekiwaną stopą zwrotu a wariancją może być różna, w zależności od wartości zmiennej egzogenicznej  $x_{t-k}$ :

$$r_t = \delta^+ I_t h_t + \delta^- (1 - I_t) h_t + \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} + \dots + \phi_k r_{t-k} + \varepsilon_t, \quad (4.4.21)$$

$$\varepsilon_t = z_t h_t^{1/2}, \quad z_t \sim N(0,1), \quad (4.4.22)$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}, \quad (4.4.23)$$

gdzie  $I_t = 1$  gdy  $x_{t-k} \geq 0$  i  $I_t = 0$  gdy  $x_{t-k} < 0$ .

Już w latach siedemdziesiątych poprzedniego stulecia zauważono, że zależności pomiędzy stopami zwrotu a ryzykiem mierzonym współczynnikami beta są inne w okresach wzrostów i spadków (patrz Fabozzi i Francis, 1978; Kim i Zumwalt, 1979). W wielu pracach pokazano, że ryzyko systematyczne, mierzone współczynnikiem beta, jest inne podczas hossy i bessy (patrz np. Bhardwaj i Brooks, 1993; Chen, 1982; Pettengill, Sundaram i Mathur, 1995). Podobnie zależność między oczekiwaną stopą zwrotu a ryzykiem mierzonym warunkową wariancją może być inna w okresach wzrostów i spadków. Koniunktura na większości rynków akcji na świecie, w tym również na GPW w Warszawie, jest w dużym stopniu uzależniona od koniunktury na rynku ak-

cji w Nowym Jorku. Stosując model z progowym efektem GARCH-M oraz przyjmując za zmienną egzogeniczną stopy zwrotu indeksu rynku akcji w Stanach Zjednoczonych, można pośrednio uzależnić relacje między oczekiwaną stopą zwrotu a warunkową wariancją od koniunktury na globalnym rynku akcji. Oczywiście zamiast indeksu giełdy w Stanach Zjednoczonych można przyjąć szerszy indeks, obejmujący inne rynki akcji na świecie, jak np. indeks ACWI konstruowany przez firmę Morgan Stanley Capital International (patrz analiza w podrozdziale 2.6)<sup>183</sup>. Do estymacji parametrów modelu z progowym efektem GARCH-M można również zastosować metodę quasi-największej wiarygodności.

#### **4.4.2. ANALIZA ZALEŻNOŚCI POMIĘDZY OCZEKIWANĄ STOPĄ ZWROTU A RYZYKIEM DLA WYBRANYCH SPÓŁEK I INDEKSÓW NOTOWANYCH NA GPW W WARSZAWIE**

Niejednoznaczność wyników prowadzonych dotychczas analiz była jedną z głównych przyczyn podjęcia badań dotyczących zależności między oczekiwaną stopą zwrotu a ryzykiem dla wybranych spółek i indeksów, notowanych na GPW w Warszawie. W badaniu zastosowano modele GARCH-M ze stałym i zmiennym parametrem oraz model z progowym efektem GARCH-M. Rozbieżność wyników prowadzonych badań dotyczy przede wszystkim krótkiego okresu inwestycji (patrz Harrison i Zhang, 1999), dlatego do badania przyjęto dzienne logarytmiczne stopy zwrotu, obliczane według formuły:  $r_t = 100 \ln(P_t / P_{t-1})$ , gdzie  $P_t$  jest ceną akcji lub indeksu w chwili  $t$ . Przyjęte w pracy metody estymacyjne oraz narzędzia weryfikacji hipotez wymagają stosowania długich szeregów czasowych. Z tego względu do badania przyjęto stosunkowo długi okres, mianowicie od 3 października 1994 roku do 30 września 2004 roku<sup>184</sup>. Analizowano wszystkie spółki i indeksy rynku akcji notowane przez cały badany okres na GPW w Warszawie: Alma Market, BRE Bank, Bank Zachodni WBK, DZ Bank Polska, Korporacja Gospodarcza Efekt, Elektrim, Grupa Onet.pl, ING Bank Śląski, Huta Szkła Gospodarczego Irena, Przedsiębiorstwo Farmaceutyczne Jelfa, NKT Cables (dawniej Kable), Kredyt Bank, Krośnieńskie Huty Szkła Krosno, Bank Millennium, Mostostal Export, Mostostal Warszawa, Poli-

<sup>183</sup> Zmiany tego indeksu i tak są w dużym stopniu zdeterminowane przez zachowanie giełdy w Stanach Zjednoczonych.

<sup>184</sup> We wcześniejszym okresie notowania nie odbywały się codziennie.

farb Cieszyn–Wrocław, Prochem, Próchnik, Fabryka Kotłów Rafako, Sokółów, Swarzędz, Tonsil, Vistula, Wólczanka, Grupa Żywiec, WIG, WIG20. Te same spółki badano pod kątem innych własności w pracy Jajuga (2000a). Oczywiście przyjęty okres jest stosunkowo długi, obejmuje okresy hossy i bessy, w jego trakcie następował ciągły rozwój rynku kapitałowego w Polsce, wprowadzano nowe spółki, instrumenty finansowe i systemy notowań, jednakże przyjęty w pracy model GARCH-M ze zmiennym parametrem pozwala zbadać, czy zmiany te wpłynęły na zależność między oczekiwaną stopą zwrotu a warunkową wariancją. Rozważany okres jest i tak bardzo krótki, jeżeli porównać go na przykład z czasem, jaki przyjęli do badania Chou, Engle i Kane (1992), którzy analizowali dane w okresie od 1926 roku do 1985 roku, a więc w okresie obejmującym zarówno wojny, jak i kryzysy finansowe. Estymowano model GARCH-M, opisany równaniami (4.4.3–4.4.5), model GARCH-M ze zmiennym parametrem, przedstawiony równaniami (4.4.6–4.4.9) oraz model z progowym efektem GARCH-M, opisany równaniami (4.4.21–4.4.23). Badanie przeprowadzono zarówno dla stóp zwrotu, jak i stóp zwrotu pomniejszonych o stopę wolną od ryzyka. W tym drugim przypadku, w równaniach (4.4.3), (4.4.6) i (4.4.21) pominięto stałą  $\phi_0$ . Jako stopę wolną od ryzyka przyjęto rentowność 52-tygodniowych bonów skarbowych. Ponieważ pomniejszenie stóp zwrotu o stopę wolną od ryzyka nie wpłynęło istotnie na uzyskane wyniki, poniżej zaprezentowano jedynie wyniki badania przeprowadzonego dla stóp zwrotu. Do estymacji parametrów zastosowano metodę quasi-największej wiarygodności. Dla modelu GARCH-M wyboru wartości  $k$ ,  $p$  i  $q$  dokonano na podstawie kryterium informacyjnego Schwarza (SIC) z uwzględnieniem wyników testu na występowanie autokorelacji i efektu ARCH. Oszacowane modele GARCH-M zostały przedstawione w tabeli 4.11.

Warto zwrócić uwagę na istotne różnice dotyczące charakterystyk poszczególnych procesów finansowych. Najsilniejsza dodatnia autokorelacja występuje w przypadku indeksów giełdowych. Ten wynik jest zgodny z rezultatami wcześniejszych badań autora (patrz Fiszeder, 2001c). Dodatnia autokorelacja indeksów lub portfeli może wynikać z dodatniej korelacji wzajemnej stóp zwrotu, występującej pomiędzy akcjami tworzącymi indeks lub portfel. Stopy zwrotu większości akcji (16 szeregów) charakteryzują się brakiem autokorelacji, co oznacza, że niemożliwe jest ich prognozowanie na podstawie modelu autoregresyjnego. Dla kilku spółek występuje słaba autokorelacja dodatnia lub stosunkowo silna autokorelacja ujemna.

TABELA 4.11. WYNIKI ESTYMACJI DLA MODELU GARCH-M ZE STAŁYM PARAMETREM

Badane procesy	$\phi_0$	$\phi_1$	$\phi_2$	$\phi_3$	$\delta$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\beta_1$	$\beta_2$
WIG	0,0382 (0,0486)	0,1517 (0,0223)	-	-	0,0092 (0,0216)	0,0801 (0,0229)	0,1101 (0,0227)	-	0,8606 (0,0249)	-
WIG20	0,0869 (0,0571)	0,08153 (0,0239)	-	-	-0,0073 (0,0176)	0,1156 (0,0311)	0,1103 (0,0211)	-	0,8601 (0,0228)	-
Alma	-0,1426 (0,1580)	-	-	-	0,0142 (0,0130)	0,6398 (0,2599)	0,1732 (0,0313)	-0,1075 (0,0349)	0,8848 (0,0343)	-
Bank Millennium	0,0161 (0,0877)	-	-	-	-0,0021 (0,0098)	0,1462 (0,0542)	0,2810 (0,0726)	-0,2212 (0,0717)	0,9291 (0,0153)	-
BRE	-0,0666 (0,0808)	-	-	-	0,0173 (0,0120)	0,0852 (0,0593)	0,2145 (0,0409)	-0,1624 (0,0435)	0,9388 (0,0178)	-
BZ-WBK	0,0294 (0,0709)	-	-	-	0,0052 (0,0095)	0,0227 (0,0133)	0,2448 (0,0467)	-0,2149 (0,0496)	0,9676 (0,0083)	-
DZ	-0,1530 (0,1605)	-0,2001 (0,0252)	-0,1221 (0,0238)	-	0,0057 (0,0118)	1,6593 (0,9207)	0,1541 (0,0376)	-	0,0998 (0,0970)	0,6450 (0,1166)
Efekt	-0,1423 (0,1005)	-	-	-	0,0110 (0,0120)	0,4599 (0,2052)	0,2440 (0,0452)	-0,1582 (0,0476)	0,8686 (0,0355)	-
Elektrim	0,0646 (0,1023)	0,070488 (0,0269)	-	-	0,0013 (0,0061)	0,4797 (0,1611)	0,3405 (0,0937)	-0,2244 (0,0905)	0,8689 (0,0299)	-
ING-BŚ	0,0605 (0,0369)	-	-	-	-0,0046 (0,0081)	0,0276 (0,0135)	0,2854 (0,0439)	-0,1886 (0,0464)	0,9031 (0,0144)	-
Irena	-0,2460 (0,1034)	0,0186 (0,0229)	-0,0253 (0,0226)	-0,0930 (0,0218)	0,0300 (0,0130)	0,6623 (0,2544)	0,3022 (0,0432)	-0,1710 (0,0527)	0,7952 (0,0581)	-
Jelfa	-0,0153 (0,0513)	0,0697 (0,0244)	-	-	0,0082 (0,0094)	0,0441 (0,0184)	0,2494 (0,0545)	-0,1994 (0,0534)	0,9441 (0,0108)	-
Kable	-0,2285 (0,0887)	-	-	-	0,0158 (0,0073)	0,1041 (0,0442)	0,3454 (0,0520)	-0,2855 (0,0536)	0,9370 (0,0158)	-
Kredyt Bank	-0,0086 (0,0611)	-	-	-	0,0013 (0,0114)	0,0165 (0,0087)	0,1657 (0,0320)	-0,1472 (0,0343)	0,9787 (0,0088)	-
Krosno	0,0842 (0,0705)	-	-	-	-0,0019 (0,0112)	0,0784 (0,0402)	0,1849 (0,0315)	-0,1296 (0,0332)	0,9353 (0,0159)	-
Mostostal Export	-0,2645 (0,1306)	-	-	-	0,0245 (0,0128)	0,3143 (0,1275)	0,1695 (0,0455)	-0,1031 (0,0447)	0,9061 (0,0282)	-
Mostostal Warszawa	-0,1221 (0,1013)	-	-	-	0,0155 (0,0133)	0,3733 (0,1729)	0,2495 (0,0371)	-0,1708 (0,0398)	0,8773 (0,0458)	-
Onet	0,0358 (0,1606)	-	-	-	0,0018 (0,0087)	0,6090 (0,1499)	0,2863 (0,0580)	-0,1847 (0,0737)	0,8663 (0,0337)	-
Polifarb	-0,0209 (0,0747)	-	-	-	-0,0009 (0,0108)	0,0815 (0,0559)	0,1600 (0,0395)	-0,1101 (0,0434)	0,9418 (0,0178)	-
Prochem	-0,3543 (0,1480)	-	-	-	0,0379 (0,0158)	0,4111 (0,1720)	0,2290 (0,0371)	-0,1754 (0,0390)	0,9065 (0,0305)	-
Próchnik	-0,4115 (0,1173)	-0,1025 (0,0289)	-	-	0,0130 (0,0061)	0,4497 (0,2105)	0,3012 (0,0615)	-0,2278 (0,0642)	0,9120 (0,0235)	-
Rafako	-0,0293 (0,0744)	0,0370 (0,0245)	-	-	-0,0007 (0,0096)	0,0497 (0,0196)	0,2662 (0,0476)	-0,2121 (0,0502)	0,9439 (0,0109)	-
Sokolów	0,1331 (0,1000)	0,0449 (0,0251)	-	-	-0,0204 (0,0147)	0,0174 (0,0174)	0,2519 (0,0366)	-0,2374 (0,0357)	0,9836 (0,0078)	-
Swarzędz	-0,3437 (0,1267)	-	-	-	0,0133 (0,0089)	0,9848 (0,3084)	0,2558 (0,0435)	-0,1328 (0,0575)	0,8147 (0,045)	-
Tonsil	-0,3425 (0,1129)	-0,0833 (0,02834)	-0,0725 (0,0244)	-0,0800 (0,0278)	0,0047 (0,0054)	0,0397 (0,0168)	0,3189 (0,0393)	-0,2899 (0,0469)	0,9708 (0,0271)	-
Vistula	-0,1756 (0,0971)	-	-	-	0,0145 (0,0107)	0,1899 (0,0707)	0,2569 (0,0428)	-0,2024 (0,0438)	0,9279 (0,0176)	-
Wótczanka	-0,2985 (0,0970)	-0,1284 (0,0247)	-	-	0,0283 (0,0098)	0,9025 (0,2632)	0,2269 (0,0474)	-	0,1809 (0,1139)	0,5207 (0,0903)
Żywiec	0,0436 (0,0407)	-0,0701 (0,0283)	-	-	0,0004 (0,0101)	0,0014 (0,0080)	0,0689 (0,0163)	-	0,1856 (0,1317)	0,7488 (0,1300)

W nawiasach, pod ocenami parametrów, podano średnie błędy szacunku.

ŹRÓDŁO: FISZEDER I KWIATKOWSKI (2005A).

Tylko w przypadku indeksów giełdowych WIG i WIG20 model GARCH(1,1) opisywał zmienność warunkowej wariancji najlepiej. Dla pozostałych szeregów czasowych konieczne było zastosowanie modelu o wyższych rzędach  $p$  i  $q$ . Oznacza to, że wariancja warunkowa w chwili  $t$  zależy nie tylko od wariancji warunkowej i kwadratu składnika losowego w chwili  $t - 1$ , ale również od wartości jeszcze wcześniejszych. Przy wyższych rzędach  $p$  i  $q$  nie wszystkie parametry w równaniu dla wariancji muszą być dodatnie, aby zapewnić dodatniość wariancji warunkowej. Restrykcje zapewniające dodatniość wariancji dla modeli GARCH(1,1), GARCH(1,2), GARCH(2,1) oraz GARCH(2,2) dane są odpowiednio formułami (1.2.15–1.2.18). Wraz ze zwiększaniem się rzędów  $p$  i  $q$  rośnie złożoność restrykcji i już w przypadku modelu GARCH(2,2) są one stosunkowo skomplikowane. Dla większości spółek najlepszym modelem według kryterium SIC okazał się model GARCH(1,2). Dla spółek: DZ Bank Polska, Kredyt Bank, Wólczanka i Żywiec zmienność warunkowej wariancji najlepiej opisywał proces GARCH(2,1), z tym, że dla spółki Kredyt Bank nie uzyskano ocen parametrów zapewniających dodatniość wariancji.

Dla siedmiu spółek: BZ WBK, NKT Cables, Krosno, Polifarb, Rafako, Sokołów, Swarzędz nieznacznie lepszym modelem według kryterium SIC okazał się model GARCH(2,2), jednakże dla modelu GARCH-M ze zmiennym parametrem nie uzyskano ocen parametrów zapewniających dodatniość wariancji, dlatego w tablicy 4.11 przedstawiono szacunki dla modelu GARCH(1,2)<sup>185</sup> (drugiego najlepszego w kolejności). Porównując uzyskane szacunki parametrów z wynikami wcześniejszych badań, warto zwrócić uwagę na niestabilność zarówno struktury autoregresyjnej, jak i struktury dotyczącej wariancji warunkowej wielu spośród badanych spółek (patrz Fiszeder, 2001c).

Im większa jest suma ocen parametrów  $\alpha_1 + \alpha_2 + \dots + \alpha_q + \beta_1 + \beta_2 + \dots + \beta_p$ , tym zjawiska szokowe mają bardziej długotrwały wpływ na wariancję badanego procesu. Otrzymane w badaniu sumy ocen powyższych parametrów świadczą o tym, że bieżące informacje mają istotny wpływ na prognozy wariancji warunkowej dla bardzo odległego horyzontu prognozy. Tak wysokie sumy ocen parametrów mogą wynikać ze zmian w wariancji brzegowej (patrz Lamoureux i Lastrapes, 1990).

W dwudziestu jeden przypadkach na dwadzieścia osiem badanych szeregów ocena parametru  $\delta$  w równaniu (4.4.3) była dodatnia, ale tylko w przypadku pięciu spółek: Irena, Kable, Prochem, Próchnik, Wólczanka była ona istotna statystycznie na poziomie 0,05. Przyjęcie w równaniu (4.4.3), zamiast  $h_t$ ,

<sup>185</sup> Szacunki wariancji warunkowych otrzymane na podstawie obu modeli były prawie identyczne.

warunkowego odchylenia standardowego  $\sqrt{h_t}$  nie wpływa na uzyskane wyniki. Dla siedmiu szeregów ocena parametru  $\delta$  była ujemna, ale zawsze nieistotna statystycznie. Należy podkreślić, że ujemna wartość parametru  $\delta$  nie jest sprzeczna z teorią finansów (patrz np. Glosten, Jagannathan i Runkle; 1993, Backus i Gregory, 1993). Okazuje się jednak, że ocena parametru  $\delta$  zależy również od tego, czy w równaniu (4.4.3) zostanie umieszczona, czy też pominięta stała  $\phi_0$ . W wyniku pominięcia stałej  $\phi_0$  w równaniu dla stóp zwrotu spółek: Irena, Kable, Prochem, Próchnik, Wólczanka ocena parametru  $\delta$  przestała być istotna. Pominięcie stałej  $\phi_0$  w przypadku pięciu spółek: DZ Bank Polska, Efekt, Próchnik, Swarzędz, Vistula spowodowało zmianę znaku oceny parametru  $\delta$  z dodatniego na ujemny, a w przypadku trzech spółek: ING Bank Śląski, Krosno, WIG20 zmianę znaku oceny parametru  $\delta$  z ujemnego na dodatni.

W większości przypadków uzyskane szacunki parametrów dla modelu GARCH-M wskazują na brak istotnej zależności między oczekiwaną stopą zwrotu a warunkową wariancją badanych procesów finansowych. Nie oznacza to jednak, że taka zależność nie istnieje. Jedną z możliwych przyczyn braku istotności parametru  $\delta$  może być jego zmienność w czasie. Z tego względu oszacowano model GARCH-M ze zmiennym parametrem. Uzyskane wyniki zostały zaprezentowane w tabeli 4.12.

Szacunki parametrów w modelu GARCH-M ze zmiennym parametrem są zbliżone do tych, jakie otrzymano w przypadku modelu GARCH-M, natomiast średnie błędy szacunku w równaniu dla wariancji warunkowej są najczęściej znacząco większe w modelu GARCH-M ze zmiennym parametrem. Duży problem stanowi brak powszechnie znanych w literaturze narzędzi weryfikacji hipotezy dotyczącej stałości parametru w modelu GARCH-M. Testy stałości parametrów, takie jak np. test Chowa, wymagają normalności składnika losowego, która nie jest zachowana w opisywanych modelach. Podobnie znana w literaturze przedmiotu statystyka  $F$ , służąca do weryfikacji nakładanych restrykcji na estymowane parametry, wymaga niezależnych reszt o jednakowym rozkładzie normalnym. Jeżeli wartość parametru  $Q$  jest równa zero, to model GARCH-M ze zmiennym parametrem zmienia się w model o stałym parametrze. Niestety wiadomo, że gdy  $Q = 0$ , to jego estymator nie ma standardowego rozkładu (patrz Harvey A. C, 1989). Nie można zatem w tradycyjny sposób testować jego istotności. Z tego też powodu nie podano w tablicy błędów dla parametru  $Q$ , a jako kryterium stałości parametru wykorzystano przedziały ufności wyznaczone na podstawie filtru Kalmana. Stała ocena  $b_t$  zawarta w przedziale ufności sugeruje stałość parametru w badanym okresie (patrz Rockinger i Urga, 2000). Rysunek 4.2 przedstawia punktowe oceny  $b_t$  wygładzone przez filtr Kalmana wraz z 95% przedziałami ufności dla wybranych spółek.

TABELA 4.12. WYNIKI ESTYMACJI DLA MODELU GARCH-M ZE ZMIENNYM PARAMETREM

Badane procesy	$\phi_0$	$\phi_1$	$\phi_2$	$\phi_3$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\beta_1$	$\beta_2$	$Q^{1/2}$
WIG	0,0531 (0,0482)	0,1530 (0,0210)	-	-	0,0751 (0,0310)	0,1063 (0,0306)	-	0,8662 (0,0359)	-	1,098e-8
WIG20	0,0975 (0,0584)	0,0823 (0,0211)	-	-	0,1123 (0,0374)	0,1082 (0,0250)	-	0,8629 (0,0292)	-	3,497e-8
Alma	-0,1829 (0,1681)	-	-	-	0,6336 (0,3255)	0,1712 (0,0520)	-0,1061 (0,0340)	0,8854 (0,0831)	-	8,501e-4
Bank Millennium	0,0186 (0,0863)	-	-	-	0,1443 (0,0768)	0,2740 (0,4110)	-0,2159 (0,3982)	0,9305 (0,6838)	-	1,439e-4
BRE	-0,0521 (0,0890)	-	-	-	0,0909 (0,0766)	0,2136 (0,1277)	-0,1609 (0,0991)	0,9371 (0,0755)	-	1,857e-8
BZ-WBK	0,0420 (0,0761)	-	-	-	0,0254 (0,0071)	0,2504 (0,0205)	-0,2229 (0,0186)	0,9692 (0,0043)	-	9,334e-9
DZ	-0,1119 (0,1361)	-0,2033 (0,0270)	-0,1302 (0,0227)	-	1,8223 (1,3950)	0,1716 (0,1801)	-	0,0498 (0,0601)	0,6702 (0,1544)	2,000e-4
Efekt	-0,1692 (0,1027)	-	-	-	0,4457 (0,2197)	0,2398 (0,0655)	-0,1578 (0,0446)	0,8730 (0,0830)	-	3,657e-8
Elektrim	0,0279 (0,0933)	0,0712 (0,0247)	-	-	0,5022 (2,8476)	0,3413 (0,1011)	-0,2223 (0,1774)	0,8650 (0,4583)	-	5,265e-9
ING-BŚ	0,0593 (0,0376)	-	-	-	0,0273 (0,0186)	0,2946 (0,1287)	-0,2007 (0,0819)	0,9100 (0,0881)	-	9,05e-10
Irena	-0,2176 (0,1404)	0,0259 (0,0252)	-0,0261 (0,0209)	-0,0882 (0,0203)	0,1837 (0,0939)	0,2775 (0,1111)	-0,2323 (0,0930)	0,9325 (0,0568)	-	4,296e-4
Jelfa	-0,0052 (0,0544)	0,0715 (0,0241)	-	-	0,0405 (0,4406)	0,2414 (0,3013)	-0,1957 (0,2804)	0,9483 (0,2488)	-	5,297e-8
Kable	-0,2675 (0,0867)	-	-	-	0,1081 (0,1208)	0,3411 (0,1777)	-0,2830 (0,1430)	0,9375 (0,1181)	-	8,795e-4
Kredyt Bank	-0,0146 (0,0619)	-	-	-	0,0169 (0,0132)	0,1537 (0,0175)	-0,1366 (0,0165)	0,9796 (0,0032)	-	7,532e-9
Krosno	0,1049 (0,0721)	-	-	-	0,0777 (1,0963)	0,1778 (0,2674)	-0,1257 (0,2285)	0,9377 (0,2965)	-	6,506e-8
Mostostal Export	-0,2711 (0,1248)	-	-	-	0,2960 (0,1750)	0,1652 (0,0697)	-0,1034 (0,0442)	0,9123 (0,0835)	-	6,34e-10
Mostostal Warszawa	-0,1233 (0,1325)	-	-	-	0,3691 (0,1679)	0,2491 (0,0820)	-0,1759 (0,0568)	0,8820 (0,0929)	-	1,258e-8
Onet	0,0394 (0,1043)	-	-	-	0,5976 (0,2508)	0,2917 (0,0829)	-0,1909 (0,0568)	0,8680 (0,0794)	-	2,048e-8
Polifarb	-0,0252 (0,0801)	-	-	-	0,0770 (0,0638)	0,1596 (0,0972)	-0,1132 (0,0736)	0,9453 (0,0584)	-	1,354e-8
Prochem	-0,4134 (0,1917)	-	-	-	0,3554 (0,6543)	0,2341 (0,4581)	-0,1858 (0,4532)	0,9169 (0,8845)	-	6,045e-4
Próchnik	-0,4811 (0,1232)	-0,1035 (0,0256)	-	-	0,4570 (0,1108)	0,2974 (0,3586)	-0,2232 (0,2970)	0,9107 (0,6271)	-	4,063e-8
Rafako	-0,0433 (0,0665)	0,0361 (0,0246)	-	-	0,0452 (0,0719)	0,2597 (0,2018)	-0,2108 (0,1797)	0,9485 (0,0897)	-	3,228e-4
Sokolów	0,1028 (0,0962)	0,0455 (0,0241)	-	-	0,0219 (0,0112)	0,2385 (0,0668)	-0,2239 (0,0648)	0,9827 (0,0070)	-	2,670e-6
Swarzędz	-0,3463 (0,1226)	-	-	-	0,9968 (0,4537)	0,2531 (0,0583)	-0,1294 (0,0525)	0,8127 (0,0967)	-	1,708e-4
Tonsil	-0,3730 (0,1040)	-0,0915 (0,0260)	-0,0902 (0,0220)	-0,0805 (0,0193)	0,0303 (0,0219)	0,4560 (0,0231)	-0,4293 (0,0206)	0,9751 (0,0084)	-	4,183e-4
Vistula	-0,1886 (0,1008)	-	-	-	0,1959 (0,0003)	0,2489 (0,4388)	-0,1952 (0,4313)	0,9274 (0,8001)	-	1,138e-3
Wótczanka	-0,3013 (0,0973)	-0,1336 (0,0251)	-	-	0,9241 (0,9878)	0,2289 (0,1706)	-	0,1871 (0,0941)	0,5090 (0,1847)	1,400e-3
Żywiec	0,0439 (0,0418)	-0,0676 (0,0219)	-	-	0,0019 (0,2048)	0,0721 (0,0242)	-	0,1626 (0,0574)	0,7690 (0,0475)	1,438e-8

W nawiasach, pod ocenami parametrów, podano średnie błędy szacunku.

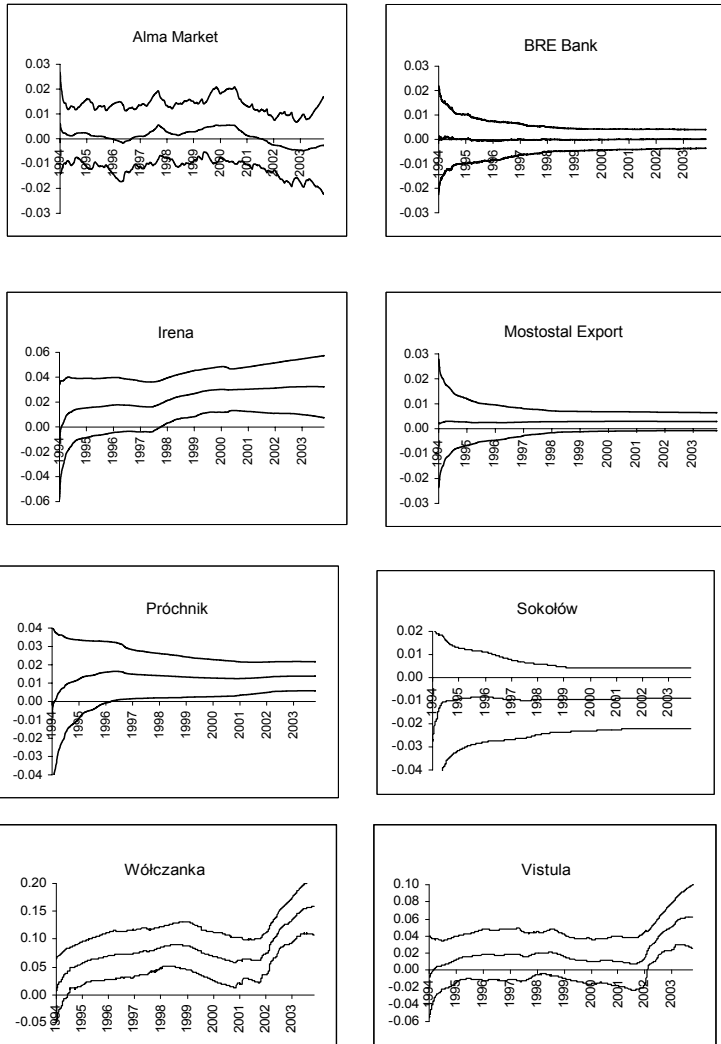
ŹRÓDŁO: FISZEDER I KWIATKOWSKI (2005A).

Dla wszystkich spółek i indeksów, poza Wólczańką i Vistulą, istnieje stała wartość  $b_t$  zawierająca się w przedziale ufności, co sugeruje, że zmiany tego parametru w badanym okresie nie są istotne. Analizując własności procesu  $b_t$ , można wyróżnić kilka grup spółek i indeksów. Pierwsza najliczniejsza grupa charakteryzuje się bardzo małą zmiennością procesu  $b_t$  o wartościach zbliżonych do zera i stosunkowo szerokich przedziałach ufności. Do tej grupy należą spółki: BRE Bank, BZ WBK, Elektrim, ING Bank Śląski, Jelfa, Kredyt Bank, Bank Millennium, Onet, Polifarb i indeks WIG. Rysunek 4.2 przedstawia punktowe oceny  $b_t$  oraz 95% przedziały ufności dla spółki BRE Bank (wykresy dla pozostałych spółek z tej grupy są bardzo podobne). Druga i trzecia grupa charakteryzują się również małą zmiennością procesu  $b_t$  o wartościach odpowiednio większych (DZ Bank, Efekt, Mostostal Export, Mostostal Warszawa) i mniejszych od zera (Krosno, Sokołów, Żywiec, WIG20). W obu przypadkach przedziały ufności są stosunkowo szerokie i prawdopodobnie dlatego oceny parametru  $\delta$  w modelu GARCH-M ze stałym parametrem były nieistotne dla obu grup. Dla większości spółek i indeksów z tych trzech grup (poza DZ Bank, Bank Millennium i Sokołów) oceny parametru  $Q^{1/2}$  były stosunkowo niskie ( $1,0e-8$  i niższe). Dla przykładu na rysunku 4.2 zaprezentowano punktowe oceny  $b_t$  oraz 95% przedziały ufności dla spółek Mostostal Export i Sokołów.

Grupa czwarta, to spółki charakteryzujące się większą zmiennością parametru  $b_t$  (o czym świadczą relatywnie większe oceny parametru  $Q^{1/2}$ ), jednakże nie na tyle, aby można uznać parametr za zmienny. Do tej grupy można zaliczyć spółki: Alma, Irena, Kable, Prochem, Rafako, Swarzędz, Tonsil. W przypadku tych spółek można zauważyć pewne okresy, w czasie których nastąpił wzrost lub spadek zależności pomiędzy oczekiwaną stopą zwrotu a wariancją warunkową. Wzrost zależności występował najczęściej w okresie wzrostu cen akcji, a spadek zależności w okresie spadku cen akcji. W tej grupie znalazły się trzy spółki: Irena, Kable i Prochem, dla których ocena parametru  $\delta$  w modelu GARCH-M ze stałym parametrem była istotna. Rysunek 4.2 przedstawia punktowe oceny  $b_t$  dla spółek Alma i Irena. Grupa piąta, to spółki Vistula i Wólczanka, dla których parametr  $b_t$  był zmienny w czasie. W przypadku obu spółek nastąpił wzrost zależności między oczekiwaną stopą zwrotu a wariancją warunkową w latach 1995–1999 i 2003–2004 oraz spadek w latach 2000–2002. Wzrost zależności wystąpił w okresie wzrostu cen akcji (bardzo dobrze widoczne jest to w okresie 2003–2004), a spadek zależności w okresie spadku cen akcji. Odrębną grupę stanowi spółka Próchnik, dla której parametr  $b_t$  jest stały i o małej zmienności, jednakże przedziały ufności były przez większość badanego okresu powyżej zera i dlatego ocena parametru  $\delta$  w mo-



delu GARCH-M ze stałym parametrem była istotna. Różnica we własnościach procesu  $b_t$  w przypadku spółek Vistula, Wólczanka i Próchnik jest o tyle ciekawa, że wszystkie należą do tej samej branży (są to spółki odzieżowe). Inne własności procesu  $b_t$  spółki Próchnik wynikały prawdopodobnie z jej gorszej sytuacji finansowej. Punktowe oceny  $b_t$  oraz 95% przedziały ufności dla spółek Próchnik, Vistula i Wólczanka przedstawia rysunek 4.2.



**RYСУNEK 4.2. PUNKTOWE OCENY  $b_t$  WYGLĄDZONE PRZEZ FILTR KALMANA ORAZ 95% PRZEDZIAŁY UFNOŚCI DLA WYBRANYCH SPÓŁEK**

ŹRÓDŁO: FISZEDER I KWIATKOWSKI (2005A).

Rozbieżność wyników prowadzonych dotychczas badań dotyczących zależności pomiędzy oczekiwaną stopą zwrotu a warunkową wariancją wiąże się prawdopodobnie po części ze zmiennością tej zależności. Jeżeli parametr  $b_t$  zmienia się w czasie, to ocena parametru  $\delta$  w modelu GARCH-M ze stałym parametrem może być w pewnych okresach dodatnia, a w innych ujemna. Duża rozpiętość szacowanych przedziałów ufności może tłumaczyć, dlaczego w wielu badaniach otrzymano nieistotne oceny parametru  $\delta$  w modelu GARCH-M.

Inne spojrzenie na relacje między oczekiwaną stopą zwrotu a ryzykiem może dostarczyć analiza modelu z progowym efektem GARCH-M. Jako zmienną egzogeniczną przyjęto stopy zwrotu indeksu S&P 500 z  $k = 1$ . Indeks ten ze względu na to, że jest obliczany na podstawie pięciuset spółek stosunkowo dobrze mierzy koniunkturę na rynku akcji w Stanach Zjednoczonych i jest jednym z najczęściej analizowanych indeksów rynku akcji. Użyte wyniki zostały zaprezentowane w tabeli 4.13.

Šzacunki parametrów oraz średnich błędów szacunku w modelu GARCH-TM są zbliżone do tych, jakie otrzymano w przypadku modelu GARCH-M. Wyniki dotyczące badania istotności parametrów  $\delta$ ,  $\delta^+$ ,  $\delta^-$  są jednakże diametralnie różne. Tylko dla trzech spółek: Bank Millennium, Elektrim<sup>186</sup> i Polifarb obie oceny parametrów  $\delta^+$ ,  $\delta^-$  były nieistotne statystycznie na poziomie 0,05<sup>187</sup>. Dla indeksów WIG i WIG20 oraz spółek BZ-WBK, Efekt, ING-BŠ, Kredyt Bank, Krosno, Rafako, Swarzędz, Tonsil, Źywiec obie oceny parametrów były istotne. W przypadku pozostałych spółek istotna była ocena jednego z parametrów  $\delta^+$ ,  $\delta^-$ . Dla wszystkich spółek i indeksów ocena parametru  $\delta^+$  była dodatnia i dla większości – istotna statystycznie. Zatem jeżeli stopa zwrotu indeksu S&P 500 była nieujemna, to na następnej sesji zależność między oczekiwaną stopą zwrotu a warunkową wariancją stóp zwrotu badanych indeksów i spółek jest dodatnia. Z kolei dla wszystkich indeksów i spółek poza DZ i Tonsil ocena parametru  $\delta^-$  była ujemna, co oznacza, że po ujemnych stopach zwrotu indeksu S&P 500, na następnej sesji zależność między oczekiwaną stopą zwrotu a warunkową wariancją jest ujemna. Dla dwunastu szeregów czasowych na dwadzieścia osiem badanych ocena parametru  $\delta^-$  była istotna. Jeżeli znaki parametrów  $\delta^+$  i  $\delta^-$  są różne, to można mówić o asymetrycznym efekcie GARCH-M. Taki efekt występował dla zdecydowanej większości badanych procesów. Dla spółki Tonsil obie oceny parametrów  $\delta^+$  i  $\delta^-$  były dodatnie.

<sup>186</sup> Ze względu na trudną sytuację fundamentalną i zainteresowanie kapitału spekulacyjnego ceny akcji spółki Elektrim zachowywały się zupełnie inaczej niż reszta rynku.

<sup>187</sup> Dalsze wyniki badania istotności podawane są dla poziomu 0,05.

TABELA 4.13. WYNIKI ESTYMACJI DLA MODELU Z PROGOWYM EFEKTEM GARCH-M

Badane procesy	$\phi_0$	$\phi_1$	$\phi_2$	$\phi_3$	$\delta^+$	$\delta^-$	$\alpha_0$	$\alpha_1$	$\alpha_2$	$\beta_1$	$\beta_2$
WIG	0,024 (0,046)	0,132 (0,022)	-	-	0,135 (0,024)	-0,120 (0,023)	0,074 (0,034)	0,099 (0,025)	-	0,873 (0,034)	-
WIG20	0,063 (0,056)	0,066 (0,023)	-	-	0,058 (0,020)	-0,066 (0,020)	0,110 (0,045)	0,106 (0,023)	-	0,866 (0,030)	-
Alma	-0,133 (0,148)	-	-	-	0,043 (0,014)	-0,021 (0,014)	0,538 (0,229)	0,171 (0,033)	-0,113 (0,037)	0,899 (0,030)	-
Bank Millennium	-0,015 (0,120)	-	-	-	0,022 (0,015)	-0,021 (0,014)	0,101 (0,058)	0,296 (0,062)	-0,259 (0,060)	0,955 (0,016)	-
BRE	-0,092 (0,089)	-	-	-	0,048 (0,014)	-0,008 (0,014)	0,091 (0,062)	0,212 (0,044)	-0,159 (0,046)	0,937 (0,020)	-
BZ-WBK	0,037 (0,072)	-	-	-	0,033 (0,011)	-0,032 (0,011)	0,024 (0,024)	0,256 (0,046)	-0,225 (0,046)	0,966 (0,018)	-
DZ	-0,362 (0,195)	-0,195 (0,029)	-0,101 (0,024)	-	0,038 (0,014)	0,000 (0,015)	1,683 (0,744)	0,136 (0,032)	-	0,126 (0,095)	0,628 (0,081)
Efekt	-0,154 (0,101)	-	-	-	0,050 (0,013)	-0,029 (0,014)	0,408 (0,188)	0,216 (0,042)	-0,137 (0,044)	0,880 (0,035)	-
Elektrim	0,019 (0,106)	0,068 (0,025)	-	-	0,012 (0,008)	-0,003 (0,009)	0,482 (0,190)	0,335 (0,097)	-0,220 (0,088)	0,869 (0,035)	-
ING-BŚ	0,055 (0,037)	-	-	-	0,033 (0,010)	-0,041 (0,009)	0,029 (0,016)	0,256 (0,042)	-0,154 (0,052)	0,903 (0,024)	-
Irena	-0,223 (0,107)	0,019 (0,027)	-0,029 (0,023)	-0,081 (0,022)	0,049 (0,014)	-0,001 (0,017)	0,187 (0,203)	0,265 (0,061)	-0,207 (0,063)	0,921 (0,066)	-
Jelfa	-0,020 (0,052)	0,057 (0,025)	-	-	0,034 (0,012)	-0,021 (0,013)	0,040 (0,021)	0,244 (0,054)	-0,196 (0,054)	0,946 (0,016)	-
Kable	-0,219 (0,085)	-	-	-	0,032 (0,008)	-0,005 (0,009)	0,095 (0,065)	0,319 (0,060)	-0,260 (0,060)	0,939 (0,020)	-
Kredyt Bank	0,008 (0,052)	-	-	-	0,037 (0,013)	-0,050 (0,014)	0,018 (0,013)	0,148 (0,032)	-0,129 (0,035)	0,978 (0,009)	-
Krosno	0,081 (0,069)	-	-	-	0,029 (0,013)	-0,039 (0,013)	0,082 (0,060)	0,169 (0,038)	-0,111 (0,043)	0,932 (0,025)	-
Mostostal Export	-0,228 (0,128)	-	-	-	0,048 (0,014)	-0,010 (0,015)	0,309 (0,114)	0,158 (0,040)	-0,096 (0,039)	0,910 (0,024)	-
Mostostal Warszawa	-0,111 (0,109)	-	-	-	0,055 (0,016)	-0,029 (0,018)	0,367 (0,125)	0,199 (0,032)	-0,120 (0,033)	0,876 (0,032)	-
Onet	-0,111 (0,136)	-	-	-	0,033 (0,013)	-0,014 (0,012)	0,750 (0,361)	0,189 (0,049)	-0,114 (0,044)	0,875 (0,046)	-
Polifarb	-0,010 (0,084)	-	-	-	0,019 (0,013)	-0,029 (0,015)	0,072 (0,075)	0,165 (0,050)	-0,121 (0,063)	0,949 (0,039)	-
Prochem	-0,289 (0,161)	-	-	-	0,078 (0,021)	-0,021 (0,021)	0,402 (0,379)	0,222 (0,044)	-0,167 (0,057)	0,904 (0,072)	-
Próchnik	-0,464 (0,118)	-0,103 (0,033)	-	-	0,034 (0,007)	-0,007 (0,008)	0,480 (0,242)	0,254 (0,056)	-0,182 (0,058)	0,910 (0,030)	-
Rafako	-0,044 (0,070)	0,018 (0,027)	-	-	0,029 (0,011)	-0,035 (0,012)	0,023 (0,022)	0,217 (0,044)	-0,186 (0,044)	0,967 (0,013)	-
Sokolów	0,083 (0,128)	0,040 (0,026)	-	-	0,006 (0,024)	-0,037 (0,018)	0,019 (0,016)	0,236 (0,046)	-0,220 (0,045)	0,982 (0,009)	-
Swarzędz	-0,241 (0,114)	-	-	-	0,035 (0,010)	-0,026 (0,011)	0,084 (0,102)	0,235 (0,044)	-0,208 (0,049)	0,967 (0,026)	-
Tonsil	-0,403 (0,092)	-0,088 (0,032)	-0,070 (0,028)	-0,086 (0,025)	0,014 (0,005)	0,005 (0,002)	0,029 (0,031)	0,412 (0,104)	-0,384 (0,100)	0,974 (0,009)	-
Vistula	-0,192 (0,092)	-	-	-	0,042 (0,010)	-0,012 (0,013)	0,203 (0,117)	0,246 (0,042)	-0,189 (0,047)	0,924 (0,030)	-
Wólczanka	-0,283 (0,086)	-0,124 (0,027)	-	-	0,050 (0,011)	-0,000 (0,011)	0,860 (0,291)	0,217 (0,042)	-	0,196 (0,088)	0,519 (0,092)
Żywiec	0,048 (0,037)	-0,074 (0,030)	-	-	0,030 (0,012)	-0,037 (0,016)	0,000 (0,000)	0,071 (0,039)	-	0,052 (0,133)	0,882 (0,141)

W nawiasach, pod ocenami parametrów, podano średnie błędy szacunku.

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

Najczęściej moduł oceny parametru  $\delta^+$  jest większy niż moduł oceny parametru  $\delta^-$ . We wszystkich tych przypadkach ocena parametru  $\delta$  w klasycznym modelu GARCH-M była dodatnia. Jeżeli moduły ocen parametrów  $\delta^+$  i  $\delta^-$  są zbliżone, to ocena parametru  $\delta$  w modelu GARCH-M jest nieistotna statystycznie. Dla spółek, w przypadku których ocena parametru  $\delta$  w modelu GARCH-M była istotna, ocena jednego z parametrów  $\delta^+$  lub  $\delta^-$  była co najmniej kilka razy większa od oceny drugiego z parametrów. Występowanie znaczącej różnicy między ocenami parametrów  $\delta^+$  i  $\delta^-$  nie gwarantowało jednak istotności oceny parametru  $\delta$  w modelu GARCH-M. Uzyskane wyniki wskazują, że pomiędzy oczekiwanymi stopami zwrotu a warunkowymi wariancjami istnieją silne powiązania, zależne w dużym stopniu od koniunktury na rynku akcji w Stanach Zjednoczonych.

Interesująca może być odpowiedź na pytanie, czy zaobserwowane zależności będą nadal istotne, jeżeli w badaniu zastosujemy model wielorównaniowy<sup>188</sup>. Analizę przeprowadzono tylko dla indeksów WIG i S&P 500. Estymowano parametry następującego modelu dwurównaniowego:

$$r_{WIGt} = a_{01} + a_{11}r_{WIGt-1} + b_{11}r_{SPt-1} + \delta^+ I_t h_{WIGt} + \delta^- (1 - I_t) h_{WIGt} + \varepsilon_{1t}, \quad (4.4.24)$$

$$r_{SPt} = a_{02} + a_{12}r_{WIGt-1} + b_{12}r_{SPt-1} + \varepsilon_{2t}, \quad (4.4.25)$$

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t \mid \psi_{t-1} \sim D(0, \mathbf{H}_t), \quad (4.4.26)$$

gdzie  $I_t = 1$  gdy  $r_{SPt-1} \geq 0$  i  $I_t = 0$  gdy  $r_{SPt-1} < 0$ ,  $h_{WIGt}$  oznacza wariancję warunkową stóp zwrotu indeksu WIG w chwili  $t$ , a  $\boldsymbol{\varepsilon}_t = (\varepsilon_{1t}, \varepsilon_{2t})'$  jest opisane jako proces BEKK (patrz punkt 2.1.2). Model przedstawiony za pomocą równań (4.4.24–4.4.26) jest rozszerzonym modelem VAR(1)-BEKK(1,1), tak aby mógł opisać progowy efekt GARCH-M. Uzyskane wyniki przedstawiono w tabeli 4.14.

Oceny parametrów  $\delta^+$  i  $\delta^-$  są nieistotne statystycznie, podczas gdy obie oceny były istotne w modelu jednorównaniowym. Oznacza to, że parametryzacja modelu VAR-BEKK jest na tyle złożona, że progowy efekt GARCH-M nie jest już obserwowalny. Z pewnością dwurównaniowy model VAR-BEKK opisuje lepiej zależności między stopami zwrotu indeksów WIG i S&P 500 niż jakikolwiek model jednorównaniowy. Interpretacja parametrów w modelu BEKK nie jest jednak prosta, a przez to analiza różnych powiązań między wariacjami i kowariancjami jest utrudniona.

<sup>188</sup> Autor dziękuje prof. Jackowi Osiewalskiemu za zwrócenie uwagi na to zagadnienie.

**TABELA 4.14. WYNIKI ESTYMACJI MODELU VAR(1)-BEKK(1,1) ROZSZERZONEGO O PROGOWY EFEKT GARCH-M DLA INDEKSÓW WIG I S&P 500**

Parametr	Ocena par.	Błąd oceny	Parametr	Ocena par.	Błąd oceny
$a_{01}$	0,0613	0,0444	$c_{21}$	0,0795*	0,0395
$a_{11}$	0,1432*	0,0211	$c_{22}$	-0,0174	0,1628
$b_{11}$	-0,0775*	0,0259	$d_{11}$	0,2840*	0,0218
$\delta^+$	0,0015	0,0233	$d_{12}$	-0,0122	0,0246
$\delta^-$	-0,0031	0,0233	$d_{21}$	0,0240*	0,0081
$a_{02}$	0,0713*	0,0176	$d_{22}$	0,2353*	0,0165
$a_{12}$	0,0527*	0,0107	$e_{11}$	0,9460*	0,0090
$b_{12}$	0,0145	0,0211	$e_{12}$	0,0081	0,0072
$c_{11}$	-0,0398	0,4942	$e_{21}$	-0,0062*	0,0027
$c_{12}$	-0,2417*	0,0887	$e_{22}$	0,9700*	0,0044

Gwiazdką oznaczono oceny parametrów różniące się istotnie od zera na poziomie istotności 0,05. Parametry  $c_{ij}$ ,  $d_{ij}$  oraz  $e_{ij}$  są parametrami w macierzach  $C$ ,  $D_1$  oraz  $E_1$  (postać 2.1.14).

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

## Wnioski

Brak jednoznacznych wyników dotychczasowych badań był jednym z podstawowych powodów podjęcia analiz dotyczących zależności między oczekiwaną stopą zwrotu a ryzykiem dla wybranych spółek i indeksów notowanych na GPW w Warszawie. W badaniu zastosowano modele GARCH-M ze stałym i zmiennym parametrem oraz model z progowym efektem GARCH-M. W większości przypadków, uzyskane szacunki parametrów dla modelu GARCH-M ze stałym parametrem wskazywały na brak istotnej zależności między oczekiwaną stopą zwrotu a warunkową wariancją badanych procesów finansowych. Wyniki zależały jednak od przyjętej postaci równania dla warunkowej średniej.

Rozbieżność wyników prowadzonych dotychczas badań, dotyczących zależności pomiędzy oczekiwaną stopą zwrotu a warunkową wariancją, może wynikać ze zmienności tej zależności. Jeżeli parametr  $b_t$  w modelu GARCH-M ze zmiennym parametrem zmienia się w czasie, to ocena parametru  $\delta$  w modelu GARCH-M ze stałym parametrem może być w pewnych okresach dodatnia, a w innych ujemna. Duża rozpiętość szacowanych przedziałów ufności w modelu GARCH-M ze zmiennym parametrem może tłumaczyć, dlaczego w wielu badaniach otrzymano nieistotne oceny parametru  $\delta$  w modelu GARCH-M.

Przeprowadzone badanie pokazało również, że zarówno kierunek, jak i siła zależności między oczekiwaną stopą zwrotu a warunkową wariancją mogą zależeć od znaku stopy zwrotu indeksu giełdy w Stanach Zjednoczonych w okresie wcześniejszym.

## Rozdział V

# TEORIA PORTFELA I MODELE RYNKU KAPITAŁOWEGO

W poprzednim rozdziale przedstawiono wybrane zagadnienia związane z ryzykiem rynkowym. Aktywa o wysokiej stopie zwrotu charakteryzują się na ogół wysokim ryzykiem. Inwestorzy poszukują takich możliwości lokowania kapitału, w których przy zwiększeniu stopy zwrotu zmniejsza się również ryzyko. Możliwość zrealizowania tak sformułowanego celu daje portfel aktywów. Analiza portfelowa zajmuje się technikami inwestowania równocześnie w więcej niż jeden walor. Zasadniczym motywem kupowania więcej niż jednego papieru wartościowego jest chęć zmniejszenia ryzyka przez dywersyfikację.

Prekursorem teorii portfela był Markowitz (1952, 1959), który jako pierwszy zaproponował metody wyznaczania portfeli efektywnych. Podejście do tworzenia portfela, zaproponowane przez Markowitza, polegające na wyznaczeniu portfeli, które maksymalizują dochód (oczekiwaną stopę zwrotu) przy zadanym ryzyku (odchyleniu standardowym stopy zwrotu) i minimalizują ryzyko przy zadanym dochodzie, jest prawdopodobnie jedną z najbardziej eleganckich i powszechnie akceptowanych koncepcji w teorii finansów. Model Markowitza został w późniejszym okresie rozwinięty i zmodyfikowany między innymi przez Tobina (1958), który uwzględnił w teorii portfela aktywa wolne od ryzyka oraz Sharpe'a (1963), który uprościł klasyczne podejście, uzależniając stopę zwrotu akcji od stopy zwrotu rynku. Kolejnym modelem, który zyskał uznanie w praktycznych analizach jest model wieloczynnikowy. Podejście wieloczynnikowe zakłada, że na stopę zwrotu akcji poza stopą zwrotu rynku wpływają inne czynniki, jak np. stopa inflacji, stopy procentowe, koszt kapitału, stopa bezrobocia, poziom PKB. Inne ważne rozszerzenia teorii portfela przedstawiają Elton i Gruber (1997, 1998) oraz Jajuga (2002).

Wspomniane wyżej metody konstrukcji portfela odnoszą się do wyboru portfela przez pojedynczego inwestora, który na rynku kapitałowym działa w odosobnieniu. W rzeczywistości wszyscy inwestorzy wzajemnie na siebie oddziałują. Chcąc więc prawidłowo wyjaśnić zjawiska zachodzące na rynku

kapitałowym, należy te wzajemne oddziaływania inwestorów uwzględnić<sup>190</sup>. W związku z tym jednym z najważniejszych zagadnień jest proces kształtowania się cen aktywów na rynku, czy szerzej rozumiane zagadnienie osiągnięcia równowagi rynku kapitałowego. Najbardziej popularnymi modelami próbującymi odpowiedzieć na pytanie, jak będą kształtować się stopy zwrotu akcji na rynku są modele CAPM i APT. Stanowią one fundamentalny wkład w zrozumienie mechanizmu funkcjonowania rynków kapitałowych. Za autorów modelu CAPM należy uznać Sharpe'a (1964), Lintnera (1965) oraz Mossina (1966). Autorem modelu APT jest natomiast Ross (1976). Jedną z podstawowych zalet modelu APT w porównaniu z modelem CAPM jest mniej restrykcyjne założenie dotyczące preferencji inwestorów względem dochodu i ryzyka. Model CAPM zakłada, że inwestorzy są w stanie dokonywać wyborów pomiędzy alternatywnymi portfelami inwestycyjnymi wyłącznie na podstawie dwu charakterystyk tych portfeli: oczekiwanej stopy zwrotu i odchylenia standardowego. Teoria arbitrażu cenowego wymaga co prawda przyjęcia pewnych ograniczeń względem postaci funkcji użyteczności inwestorów, lecz nie są one tak daleko idące jak w przypadku modelu CAPM<sup>191</sup>. Bardzo ciekawy przegląd różnych parametryzacji modeli równowagi rynku kapitałowego zawiera praca Galagedera (2007). Teoria portfela Markowitza i modele równowagi rynku kapitałowego należą do podstawowych zagadnień nowoczesnych finansów<sup>192</sup>.

„Tradycyjne podejście” do konstrukcji portfela, jak i modeli równowagi rynku kapitałowego jest statyczne, tzn. rozważa się wyróżniony okres czy moment, a nie ich sekwencję. Z tego względu podejście takie nie uwzględnia zmienności warunkowych wariancji, jak i kowariancji stóp zwrotu. Fakt ten może mieć wpływ na alokację aktywów, jak i wyniki testów modeli CAPM i APT. Modelami, które pozwalają opisać te ważne własności finansowych szeregów czasowych, są między innymi parametryzacje wielorównaniowych modeli GARCH. Statyczne podejście do konstrukcji portfela i modeli równowagi można zinterpretować jako rozważanie warunkowego (względem przeszłości) rozkładu stóp zwrotu dla jednego ustalonego momentu lub okresu. Przy takiej interpretacji nie ma sprzeczności z nowszym ujęciem dynamicznym poprzez wielorównaniowe procesy GARCH.

<sup>190</sup> Patrz Dębski (2007).

<sup>191</sup> Dalsze różnice między modelami omówiono w podrozdziale 5.3.

<sup>192</sup> Harry Markowitz i William Sharpe wraz z Mertonem Millerem otrzymali w 1990 r. Nagrodę Nobla w dziedzinie ekonomii za nowatorskie prace nad ekonomiczną teorią finansów i finansowaniem przedsiębiorstw.

Korzyści wynikające z zastosowania modeli GARCH w analizie portfelowej i modelach równowagi rynku kapitałowego można podzielić na dwie grupy. Pierwsza grupa dotyczy lepszych własności statystycznych stosowanych modeli, estymatorów i testów. To zaś może prowadzić do lepszego wyjaśnienia opisywanych zjawisk, na przykład zmienności stóp zwrotu (Engel, Frankel, Froot i Rodrigues, 1995), zyskowności strategii opartych na analizie technicznej (Kho, 1996), anomalii związanych z małymi spółkami (Ng, Engle i Rothschild, 1992). Zastosowanie modeli GARCH może również w konsekwencji ograniczyć błędy poznawcze (powstałe w wyniku zastosowania modeli ze stałą macierzą kowariancji stóp zwrotu) w konkretnych aplikacjach modeli, np. błędna specyfikacja premii za ryzyko (np. Bollerslev, Engle i Wooldridge, 1988; Tai, 2001), błędna alokacja inwestycji między aktywa krajowe i zagraniczne (np. De Santis i Gerard, 1997; Flavin i Wickens, 2006), błędna decyzja o liczbie czynników ryzyka w modelu APT (np. De Santis i Gerard, 1998). Druga grupa dotyczy korzyści ekonomicznych i finansowych. Zastosowanie modeli GARCH może prowadzić na przykład do wzrostu dochodu z inwestycji, zmniejszenia ryzyka mierzonego odchyleniem standardowym, wzrostu efektywności inwestycji mierzonej wskaźnikiem Sharpe'a, częstszego pokonywania benchmarku (patrz Pojarliev i Polasek, 2000; Poomimars, Cadle i Theobald, 2002).

Rozdział podzielono na trzy części. W podrozdziale 5.1 przedstawiono dynamiczne podejście do wyznaczania portfeli efektywnych, wykorzystujące prognozy wariancji i kowariancji stóp zwrotu konstruowane na podstawie wielorównaniowych modeli GARCH. Wiadomo, że wybór estymatorów wariancji i kowariancji ma istotny wpływ na alokację aktywów. Głównym celem przeprowadzonych w tej części pracy badań była ocena skuteczności różnych metod tworzenia portfeli, w tym przede wszystkim z wykorzystaniem różnych specyfikacji wielorównaniowych modeli GARCH. W literaturze światowej jest bardzo mało takich badań, szczególnie dotyczących większej liczby aktywów. Analizę przeprowadzono osobno dla wybranych trzech i dwudziestu spółek o największej kapitalizacji na GPW w Warszawie.

W badaniu dla dwudziestu aktywów zastosowano osiem specyfikacji wielorównaniowego modelu GARCH: model skalarno-diagonalny, model skalarno-diagonalny z warunkowym rozkładem t-Studenta, model zintegrowany,  $K$ -czynnikiowy model GARCH dla trzech czynników, model ortogonalny dla trzech oraz dwudziestu czynników, model DCC oraz zintegrowany model DCC. W badaniu dla trzech spółek analizowano dwanaście specyfikacji wielorównaniowego modelu GARCH. Obok wymienionych wyżej dodat-



kowo zastosowano model BEKK z warunkowym rozkładem normalnym, model BEKK z warunkowym rozkładem t-Studenta, diagonalną i skalarną postać modelu BEKK oraz model stałych warunkowych współczynników korelacji. W obu analizach wykorzystano również jednorównaniowy model GARCH. Wyniki uzyskane dla modeli GARCH porównano z wynikami dla sześciu innych metod, w tym metod stosowanych przez praktyków rynku. Uzyskane wyniki skuteczności poszczególnych specyfikacji modeli w konstrukcji portfeli efektywnych porównano z własnościami badanych szeregów czasowych, rankingiem modeli według kryterium informacyjnego Schwarza oraz z wynikami analizy trafności prognoz wewnątrz próby. Pokazano, że można na podstawie analizy wewnątrz próby dla tej samej miary, dla której dokonuje się oceny poza próbą, wskazać postacie modeli, dla których można skonstruować efektywniejsze portfele. Takie badanie wewnątrz próby ma większe szanse na wybór najlepszej parametryzacji modeli niż analiza statystycznych własności szeregów czasowych i kryteriów informacyjnych.

W podrozdziale 5.2 przedstawiono testy modelu CAPM z zastosowaniem wielorównaniowych modeli GARCH-M. Zaproponowano dwie nowe postacie wielorównaniowego modelu GARCH-M: model, w którym rynkowa cena ryzyka jest opisana za pomocą procesu błędzenia przypadkowego oraz wielorównaniowy model z progowym efektem GARCH-M. Obie parametryzacje mogą tłumaczyć brak istotności parametru rynkowej ceny ryzyka w modelu CAPM z wielorównaniowym modelem GARCH-M. W dalszej części pracy przeprowadzono weryfikację modelu CAPM na podstawie sektorów notowanych na GPW w Warszawie. W badaniu testowano osiem różnych parametryzacji modelu: model z wyrazami wolnymi, model z różnymi rynkowymi cenami ryzyka, model rozszerzony o warunkowe wariancje poszczególnych sektorów, model rozszerzony o warunkową wariancję portfela rynkowego, model rozszerzony o stopy zwrotu indeksu S&P 500, model ze zmienną ceną ryzyka, szacowaną na podstawie stóp zwrotu indeksu S&P 500, model, w którym rynkowa cena ryzyka jest opisana za pomocą procesu błędzenia przypadkowego oraz model z progowym efektem GARCH-M.

W podrozdziale 5.3 zaprezentowano model APT z czynnikiem modelem GARCH. Zaproponowano również dwie modyfikacje procedury budowy modelu APT z czynnikiem modelem GARCH. Pierwsza, to rozszerzona postać modelu, która pozwala uwzględnić niewyjaśnioną zmienność warunkowych wariancji i kowariancji stóp zwrotu aktywów. Druga modyfikacja polega na tym, aby w pierwszym kroku premie za ryzyko i wariancje warunkowe czynników były szacowane na podstawie modelu z progowym

efektem GARCH-M, zamiast na podstawie klasycznego modelu GARCH-M. W dalszej części pracy przeprowadzono weryfikację modelu APT dla sektorów notowanych na GPW w Warszawie. Czynniki wyodrębniono na podstawie analizy głównych składowych w odniesieniu do zmiennych ekonomicznych. W badaniu zastosowano dwustopniową metodę estymacji, ale z wykorzystaniem w drugim kroku modelu wielorównaniowego. Przyjęcie takiej metody estymacji umożliwiło testowanie liczby czynników. Dwustopniowa estymacja, stosowana przez innych autorów, oparta na modelach jednorównaniowych, nie pozwalała na przeprowadzenie tego typu testu.

### 5.1. MODEL MARKOWITZA DLA PORTFELA AKCJI

Przy wyznaczaniu portfeli efektywnych według koncepcji zaproponowanej przez Markowitza dużą rolę odgrywa wybór estymatorów wartości oczekiwanej, wariancji i kowariancji stóp zwrotu oraz ściśle z tym związany wybór metod prognozowania wartości oczekiwanej, wariancji i kowariancji stóp zwrotu. Zarówno wśród praktyków rynku finansowego, jak i środowiska akademickiego istnieje konsensus, że stopy zwrotu są trudne do prognozowania, a proces budowy portfela według kryteriów zaproponowanych przez Markowitza jest bardzo wrażliwy na wybór estymatora wartości oczekiwanej stopy zwrotu (patrz Michaud, 1989; Best i Grauer, 1991; Chopra i Ziemba, 1993). Niewielkie różnice w szacunkach wartości oczekiwanych stóp zwrotu często prowadzą do znaczącej przebudowy portfela (patrz np. Jobson i Korkie, 1980). Uważa się również, że estymacja wariancji i kowariancji stóp zwrotu jest łatwiejsza niż estymacja wartości oczekiwanych (Merton 1980; Nelson, 1992), jednakże wybór estymatorów wariancji i kowariancji ma również istotny wpływ na alokację aktywów (patrz np. Litterman i Winkelmann, 1998; Chan, Karceski i Lakonishok, 1999). Tradycyjnie stosowane estymatory wartości oczekiwanej, wariancji i kowariancji stóp zwrotu, czyli średnia arytmetyczna, oraz empiryczna wariancja i kowariancja, obliczane na podstawie dostępnych danych historycznych, nie dają najlepszych wyników przy wyznaczaniu portfeli efektywnych (patrz np. Jorion, 1991; Sheedy, Trevor i Wood, 1999; Johannes, Polson i Stroud, 2002; Flavin i Wickens, 2006).

W niniejszym podrozdziale zaprezentowano dynamiczne podejście do wyznaczania portfeli efektywnych dla jednorodnych aktywów, tj. akcji, wykorzystujące prognozy wariancji i kowariancji stóp zwrotu skonstruowane na podstawie wielorównaniowych modeli GARCH. Wielorównaniowy pro-

ces GARCH pozwala opisać zarówno zmieniające się w czasie warunkowe wariancje, jak i zmieniające się warunkowe kowariancje stóp zwrotu. Jeżeli wariancje i kowariancje stóp zwrotu nie są stałe w czasie, to prognozy uzyskane na podstawie wielorównaniowych modeli GARCH powinny przynieść dodatkowe korzyści przy wyznaczaniu portfeli efektywnych. Literatura dotycząca wykorzystania modeli GARCH przy budowie portfeli jest uboga. Wyniki tych analiz ze względu na złożoność problemu są na razie fragmentaryczne. Dla większej liczby aktywów wykorzystuje się na ogół jednorównaniowe modele GARCH. Badania dla spółek notowanych na GPW w Warszawie z zastosowaniem jednorównaniowego modelu GARCH przeprowadził Sobczak (2005). Dla pięciu wybranych spółek wykorzystanie modelu GARCH przy konstrukcji portfeli okazało się skuteczniejsze niż zastosowanie klasycznych metod analizy portfelowej. Niestety takie podejście nie uwzględnia zmieniających się w czasie warunkowych kowariancji stóp zwrotu, co jest możliwe dopiero przy zastosowaniu wielorównaniowych modeli GARCH.

Głównym celem zaprezentowanych w niniejszym podrozdziale badań jest ocena skuteczności różnych metod tworzenia portfeli, w tym przede wszystkim z wykorzystaniem różnych specyfikacji wielorównaniowych modeli GARCH. Przedstawione podejścia do tworzenia portfela różnią się wyłącznie metodą prognozowania macierzy kowariancji stóp zwrotu. Wstępne analizy dotyczące zastosowań wielorównaniowych modeli GARCH do konstrukcji portfeli zostały opublikowane w pracach autora – Fiszeder (2004a) i (2004b), natomiast prezentowane tutaj badania opublikowano w – Fiszeder (2007e).

### **5.1.1. DYNAMICZNY PROCES BUDOWY PORTFELA Z ZASTOSOWANIEM MODELI GARCH**

Konstruując portfel efektywny, trudno jest odróżnić wpływ wyboru estymatora macierzy kowariancji od wyboru estymatora wartości oczekiwanej. Jednym ze sposobów na wyeliminowanie wpływu wyboru estymatora wartości oczekiwanej jest konstrukcja portfela o minimalnej wariancji. Udziały poszczególnych aktywów w portfelu o minimalnej wariancji zależą wyłącznie od macierzy kowariancji. Dynamiczny proces budowy portfela został przedstawiony najpierw dla portfela o minimalnej wariancji, jednakże, jak zostało pokazane dalej, cała procedura może być łatwo rozszerzona na wyznaczanie dowolnych portfeli efektywnych.

Dla danego  $t$ , na podstawie dostępnych danych z okresu  $[1, t]$ , estymowane są parametry modelu GARCH<sup>193</sup>. Na podstawie oszacowanego modelu konstruowana jest prognoza macierzy kowariancji stóp zwrotu dla okresu  $t + \tau$ , gdzie  $\tau$  oznacza horyzont prognozy. Wyznaczoną prognozę wykorzystuje się do konstrukcji portfela efektywnego. Niech  $\mathbf{W}'_{t+\tau|t,p} = (w_{1t+\tau|t,p}, w_{2t+\tau|t,p}, \dots, w_{Nt+\tau|t,p})$ , gdzie  $w_{it+\tau|t,p}$  oznacza udział  $i$ -tego aktywu w portfelu dla okresu  $t + \tau$ ,  $\mathbf{H}_{t+\tau|t,p}$  to prognoza warunkowej macierzy kowariancji dla okresu  $t + \tau$ . Wariancja portfela jest wówczas równa  $\mathbf{W}'_{t+\tau|t,p} \mathbf{H}_{t+\tau|t,p} \mathbf{W}_{t+\tau|t,p}$ . Aby wyznaczyć portfel o minimalnej wariancji (globalne minimum), wystarczy rozwiązać następujące zadanie programowania kwadratowego:

$$\mathbf{W}'_{t+\tau|t,p} \mathbf{H}_{t+\tau|t,p} \mathbf{W}_{t+\tau|t,p} \rightarrow \min, \quad (5.1.1)$$

przy warunkach:

$$\mathbf{W}'_{t+\tau|t,p} \mathbf{I} = 1, \quad (5.1.2)$$

gdzie  $\mathbf{I}$  jest kolumnowym wektorem o  $N$  składowych, przy czym każda z nich równa jest jedności.

Jeżeli nie występuje krótka sprzedaż, to należy dodatkowo wprowadzić warunki brzegowe:

$$w_{it+\tau|t,p} \geq 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.1.3)$$

Całą procedurę powtarza się następnie dla kolejnych okresów (w miarę napływu kolejnych danych).

Jeżeli dopuszcza się krótką sprzedaż, to udziały aktywów w portfelu o minimalnej wariancji określone są za pomocą formuły:

$$\mathbf{W}_{t+\tau|t,p} = \frac{1}{C_{t+\tau|t,p}} \mathbf{H}_{t+\tau|t,p}^{-1} \mathbf{I}, \quad (5.1.4)$$

gdzie  $C_{t+\tau|t,p} = \mathbf{I}' \mathbf{H}_{t+\tau|t,p}^{-1} \mathbf{I}$ .

Wariancja portfela o minimalnej wariancji jest wówczas równa  $V_{t+\tau|t,p} = 1 / C_{t+\tau|t,p}$ .

<sup>193</sup> Jeżeli warunkowe wartości oczekiwane stóp zwrotu są różne od zera, to należy również estymować parametry w równaniach dla warunkowych średnich.

Inne portfele efektywne można wyznaczyć przez znalezienie portfeli o minimalnej wariancji, przy zadanym minimalnym poziomie oczekiwanej stopy zwrotu. Należy w tym przypadku znaleźć rozwiązanie spełniające następujące warunki:

$$W'_{t+\tau|t,p} H_{t+\tau|t,p} W_{t+\tau|t,p} \rightarrow \min \quad \text{oraz} \quad W'_{t+\tau|t,p} r_{t+\tau|t,p} = \mu_{t+\tau}, \quad (5.1.5)$$

gdzie  $r_{t+\tau|t,p}$  jest to wektor oczekiwanych stóp zwrotu pomniejszonych o stopę wolną od ryzyka dla okresu  $t + \tau$  o wymiarach  $N \times 1$ ,  $\mu_{t+\tau}$  to przyjęta minimalna oczekiwana stopa zwrotu portfela. Niestety dla logarytmicznych stóp zwrotu wyrażenie  $W'_{t+\tau|t,p} r_{t+\tau|t,p}$  jest tylko w przybliżeniu równe oczekiwanej stopie zwrotu portfela.

Udziały aktywów w portfelu dla okresu  $t + \tau$  określone są za pomocą wzoru<sup>194</sup>:

$$W_{t+\tau|t,p} = \frac{H_{t+\tau|t,p}^{-1} r_{t+\tau|t,p}}{r'_{t+\tau|t,p} H_{t+\tau|t,p}^{-1} r_{t+\tau|t,p}} \mu_{t+\tau}. \quad (5.1.6)$$

Suma  $\sum_{i=1}^N w_{it+\tau|t,p}$  nie musi równać się jedności, ponieważ w portfelu może znajdować się instrument wolny od ryzyka. Za oczekiwane stopy zwrotu dla okresu  $t + \tau$  przyjmuje się prognozy skonstruowane na podstawie modeli dla warunkowych średnich. Alternatywne zapisy formuł na wyznaczanie portfeli o minimalnej wariancji można znaleźć na przykład w pracach Jajugi i Jajugi (1996) oraz Campbella, Lo i MacKinlay'a (1997).

### 5.1.2. OCENA EFEKTYWNOŚCI KONSTRUKCJI PORTFELI DLA TRZECH SPÓŁEK

Oceny skuteczności przedstawionego podejścia do wyznaczania portfeli efektywnych dokonano na podstawie rzeczywistych danych finansowych. Przeprowadzono dwa badania. Pierwsze dotyczyło małej liczby aktywów, mianowicie trzech spółek akcyjnych. Budowa portfela na podstawie tylko trzech aktywów wydaje się problemem mało istotnym z praktycznego punktu widzenia, ponieważ przy konstrukcji portfela na ogół bierze się pod uwagę od co najmniej kilkunastu do nawet kilkuset aktywów. Jednakże przyjęcie

<sup>194</sup> Patrz Engle i Colacito (2006).

małej liczby aktywów pozwoliło na zastosowanie dużej liczby specyfikacji wielorównaniowych modeli GARCH, a także umożliwiło analizę określonych restrykcji w modelach. Takie badanie nie byłoby możliwe dla dużej liczby aktywów, ze względu na trudności związane z estymacją parametrów. Do analizy przyjęto dzienne stopy zwrotu od 4 stycznia 1999 roku do 30 czerwca 2006 roku (1880 obserwacji). Spośród spółek notowanych przez cały przyjęty okres na GPW w Warszawie wybrano trzy spółki o największej kapitalizacji: KGHM Polska Miedź, Bank Pekao SA oraz Telekomunikacja Polska. Spółki te należą do najbardziej płynnych na rynku. Wybór takich spółek jest celowy, ponieważ dla spółek o małej płynności szacunki wariancji stóp zwrotu są najczęściej przeszacowane, natomiast szacunki kowariancji niedoszacowane. Przyjęcie do badania małych spółek mogłoby zatem istotnie zmniejszyć wyniki analizy.

Przyjęto jednodniowy horyzont prognozy, ponieważ prognozy zmienności uzyskane na podstawie modeli GARCH są bardziej trafne w przypadku bardzo krótkiego horyzontu, w przeciwieństwie do długiego horyzontu, dla którego prognozy obliczone na podstawie innych modeli są bardzo często dokładniejsze (patrz np. West i Cho, 1995 oraz Andersen i Bollerslev, 1998). Dane z trzech pierwszych lat zostały wykorzystane jedynie przy estymacji modelu. Ocena skuteczności przedstawionej metody została dokonana dla stosunkowo długiego okresu, tj. od stycznia 2002 roku do czerwca 2006 roku (1131 obserwacji). Własności procesów w krótkim okresie mogą znacznie odbiegać od własności w długim okresie, dlatego wyniki analiz przeprowadzonych dla krótkiego okresu mogą być mylące.

Zaczynając od 31 grudnia 2001 roku, na podstawie danych od początku 1999 r. szacowano parametry wszystkich rozważanych modeli. Dla każdego modelu konstruowano prognozę warunkowej macierzy kowariancji na następną sesję. Na podstawie sformułowanej prognozy wyznaczono dwa portfele efektywne. Pierwszy, to portfel o minimalnej wariancji, drugi, to portfel o minimalnej wariancji, przy dziennym minimalnym poziomie oczekiwanej stopy zwrotu równym 0,5%. W obu przypadkach założono nieskończoną podzielną aktywów, możliwość krótkiej sprzedaży oraz brak kosztów transakcyjnych. Następnie – *ex post* – obliczano osobno wariancje dla tych portfeli jako kwadrat zaobserwowanych stóp zwrotu. Dla następnych okresów dodawano kolejno jedną obserwację do danych, na podstawie których szacowano model i powtarzano całą procedurę aż do 29 czerwca 2006 roku. Zatem parametry każdego z zastosowanych w pracy modeli były szacowane 1131 razy. Dla każdego modelu z oszacowanych *ex post* wariancji portfeli dla okresu sty-

czeń 2002 – czerwiec 2006 obliczono średnie, osobno dla portfeli o minimalnej wariancji oraz portfeli o minimalnej wariancji, przy zadanej minimalnej oczekiwanej stopie zwrotu. W tym drugim przypadku prognozy stóp zwrotu były konstruowane na podstawie modelu VAR. Otrzymane wyniki zostały przedstawione w tabeli 5.1 (przedstawiono pierwiastek ze średniej wariancji). Ze względu na to, że nie zbadano statystycznej istotności różnic między szacunkami średnich odchyleń standardowych stóp zwrotu, uzyskane wyniki należy oceniać przede wszystkim z ekonomicznego, a nie statystycznego punktu widzenia<sup>195</sup>.

Przy budowie portfela o minimalnej wariancji, przy zadanej minimalnej oczekiwanej stopie zwrotu nie wiadomo, czy skuteczność (bądź nieskuteczność) metody wynika z prognoz stóp zwrotu, czy też z prognoz wariancji i kowariancji stóp zwrotu. Głównym celem tej analizy jest ocena efektywności tworzenia portfeli z wykorzystaniem różnych specyfikacji wielorównaniowych modeli GARCH, dlatego interpretację wyników przeprowadzono w stosunku do procedury budowy portfela o minimalnej wariancji, która nie zależy od wyboru metody prognozowania stóp zwrotu.

W badaniu zastosowano dwanaście specyfikacji wielorównaniowego modelu GARCH: model BEKK z warunkowym rozkładem normalnym, model BEKK z warunkowym rozkładem t-Studenta, diagonalną i skalarną postać modelu BEKK, model skalarno-diagonalny (postać (2.1.12)), model zintegrowany (postać (2.1.13)), model stałych warunkowych współczynników korelacji,  $K$ -czynnikiowy model, model ortogonalny dla dwóch i trzech czynników, model DCC oraz zintegrowany model DCC. Dodatkowo wykorzystano również jednorównaniowy model GARCH. Wyniki uzyskane dla modeli GARCH porównano z wynikami dla sześciu innych metod: równe udziały dla wszystkich aktywów, bezwarunkowa macierz kowariancji stóp zwrotu, ruchoma macierz kowariancji, ruchoma macierz kowariancji ze stałą wygładzania równą 25, metoda wyrównywania wykładniczego dla macierzy kowariancji oraz metoda wyrównywania wykładniczego dla macierzy kowariancji z parametrem wygasania równym 0,94 (określana dalej jako model RiskMetrics).

<sup>195</sup> Więcej informacji na ten temat zawarto w dalszej części tego podrozdziału.

**TABELA 5.1. SZACUNKI ŚREDNICH ODCHYLEŃ STANDARDOWYCH STÓP ZWROTU PORTFELI O MINIMALNEJ WARIANCJI ORAZ PORTFELI O MINIMALNEJ WARIANCJI, PRZY ZADANYM POZIOMIE OCZEKIWANEJ STOPY ZWROTU**

Oznaczenia portfeli	Bez ograniczenia stopy zwrotu	Ranking	Min. stopa zwrotu 0,5%	Ranking
Jednorówn. modele GARCH	0,016331	6	0,112919	7
BEKK	0,016430	10	0,123315	17
BEKK rozkład t-Studenta	0,016529	11	0,121536	16
Diagonalny BEKK	0,016311	4	0,114276	12
Skalarny BEKK	0,016821	13	0,114074	10
Skalarno-diagonalny	0,016277	1	0,111847	5
Zintegrowany	0,016329	5	0,114606	13
Stałych współ. korelacji	0,016304	3	0,113650	9
K-czynnikowy 2 czynniki	0,016915	16	0,115408	14
Ortogonalny 2 czynniki	0,142260	19	0,230898	18
Ortogonalny 3 czynniki	0,016902	15	0,117250	15
DCC	0,016360	7	0,111523	1
DCC zintegrowany	0,016397	8	0,111817	4
Równe wagi	0,016936	17	–	–
Bezwarunkowa macierz kowariancji	0,016899	14	0,114074	11
Ruchoma macierz kowariancji	0,016282	2	0,111666	2
Ruch. macierz kowariancji $k = 25$	0,017049	18	0,112656	6
Wyrównywanie wykładnicze	0,016424	9	0,113460	8
RiskMetrics	0,016586	12	0,111713	3

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2007E).

W większości prac dotyczących efektywności metod tworzenia portfeli bardzo ogólnikowo analizuje się własności badanych szeregów czasowych, przez co niemożliwe jest sformułowanie bardziej ogólnych wniosków dotyczących poszczególnych metod estymacji macierzy kowariancji stóp zwrotu. W tabeli 5.2 zaprezentowano wyniki testów dotyczących zarówno własności szeregów stóp zwrotu badanych spółek, jak i charakteru zależności między nimi. Stopy zwrotu były pozbawione autokorelacji, miały zmienną wariancję warunkową, a ich rozkłady bezwarunkowe były różne od rozkładu normalnego. Do opisu warunkowej macierzy kowariancji, dla badanych parametryzacji, wystarczająca okazała się specyfikacja o rzędach  $p$  i  $q$  równych jeden. Uzyskane wyniki testowania restrykcji nakładanych na parametry modelu GARCH, omawiane w dalszej części pracy, były niewrażliwe na przyjętą specyfikację rozkładu warunkowego.



TABELA 5.2. ANALIZA WŁASNOŚCI I CHARAKTERU ZALEŻNOŚCI BADANYCH SZEREGÓW

Weryfikowane hipotezy	Statystyka	Oceny statystyk		
		Pekao BP	TP SA	KGHM
Brak autokorelacji	LB (12)	19,31	13,85	11,37
Brak efektu ARCH	LM (12)	56,03*	149,02*	92,36*
Normalność rozkładów bezwarunkowych	JB	372,01*	224,70*	944,14*
Normalność rozkł. warunk. w modelu BEKK	LR	174,08*		
Stołość warunk. współczynników korelacji	LMC	5,58		
BEKK-macierze diagonalne	LR	42,72*		
BEKK-skalary razy macierz jedynek	LR	482,01*		
BEKK- skalary	LR	71,78*		
Diagonalny BEKK – skalary	LR	28,92*		
Skalarno-diagonalny – $W^* = 0, \beta = 1-\alpha$	LR	96,21*		
Zintegrowany GARCH - $1-\alpha = 0,94$	LR	149,41*		

LB, LM, JB i LMC to statystyki testów odpowiednio Ljunga-Boxa, Engle'a, Jarque-Bera oraz Tse. Gwiazdką oznaczono oceny statystyk, w przypadku których weryfikowana hipoteza została odrzucona na poziomie istotności 0,05. Opis badanych parametryzacji modeli przedstawiono w rozdziale 2.

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2007E).

Najbardziej złożoną parametryzacją, spośród rozważanych modeli, jest model BEKK. Estymowano parametry modelu BEKK z warunkowym rozkładem normalnym oraz t-Studenta. Według testu LR model BEKK z warunkowym rozkładem normalnym został zdecydowanie odrzucony na korzyść modelu z warunkowym rozkładem t-Studenta. Jednakże, jak się okazuje, lepsze dopasowanie w próbie, w tym przypadku, nie przekłada się na wzrost skuteczności przy tworzeniu portfeli efektywnych. Ten rezultat jest o tyle ważny, że estymacja parametrów modelu BEKK z warunkowym rozkładem t-Studenta była najbardziej czasochłonna i często występowały problemy ze znalezieniem odpowiednich wartości startowych. W celu wykluczenia przypuszczenia, że uzyskany wynik jest charakterystyczny tylko dla modelu BEKK i jest następstwem trudności z estymacją parametrów tego modelu, rozważono jeszcze dodatkowo najlepszy w rankingu model, czyli model skalarno-diagonalny z warunkowym rozkładem t-Studenta. Dla tego modelu nie było żadnych problemów z estymacją parametrów. Okazało się, że również w tym przypadku lepsze dopasowanie w próbie nie przekłada się na wzrost efektywności przy konstrukcji portfeli. Szacunki średnich odchyłeń standardowych portfeli o minimalnej wariancji wynosiły 0,016277 i 0,016303 odpowiednio dla modeli z warunkowym rozkładem normalnym i t-Studenta.

Liczba parametrów w modelu BEKK w przypadku dużej liczby walorów w portfelu jest na tyle duża, że ich estymacja jest bardzo trudna lub wręcz niemożliwa. Z tego względu zbadano, jaki wpływ na efektywność procesu alokacji aktywów ma uproszczenie postaci wielorównaniowego modelu GARCH. W pierwszej kolejności rozważano diagonalną i skalarną postać modelu BEKK oraz model skalarno-diagonalny. Wszystkie trzy specyfikacje są zagnieżdżone w modelu BEKK, a wyniki testu LR wskazują na odrzucenie restrykcji nałożonych przez te postacie modelu. O ile skalarna postać modelu BEKK prowadzi do spadku efektywności przy konstrukcji portfeli o minimalnej wariancji, o tyle zaskakujący jest wzrost efektywności dla diagonalnego modelu BEKK oraz modelu skalarno-diagonalnego. Model skalarno-diagonalny ma tyle samo parametrów co skalarny model BEKK (dwa parametry poza wyrazami wolnymi), jednakże jego parametryzacja jest znacznie prostsza. Pomimo tak prostej specyfikacji, postać ta okazała się najlepsza przy konstrukcji portfeli o minimalnej wariancji. Najprostszą postacią modelu przy tej parametryzacji jest zintegrowany model GARCH. Jest on zagnieżdżony w modelu skalarno-diagonalnym. Według testu LR model zintegrowany został odrzucony na korzyść modelu skalarno-diagonalnego. Zatem tym razem wyniki testu są zgodne z wynikami skuteczności konstrukcji portfeli efektywnych.

Kolejnym uproszczeniem modelu jest przyjęcie założenia, że warunkowe korelacje stóp zwrotu są stałe w czasie. W pierwszej kolejności zastosowano jednorównaniowe modele GARCH, które pozwalają opisać i prognozować zmieniające się w czasie warunkowe wariancje stóp zwrotu. Estymacja jednorównaniowych modeli GARCH jest znacznie prostsza, jednakże modele te nie pozwalają opisać zmieniających się w czasie warunkowych korelacji. Macierz korelacji była estymowana na podstawie rozkładu brzegowego standaryzowanych reszt. Opisana procedura jest faktycznie dwustopniową estymacją parametrów modelu stałych warunkowych współczynników korelacji, jednakże aby odróżnić ją od jednostopniowej estymacji, jest ona dalej określana jako zastosowanie jednorównaniowych modeli GARCH. Dodatkowo wszystkie parametry modelu stałych warunkowych współczynników korelacji estymowano również łącznie, co przełożyło się na wzrost efektywności przy konstrukcji portfela o minimalnej wariancji. Zauważmy, że powyższe modele znajdują się na wysokich miejscach w rankingu, wyprzedzając większość specyfikacji pozwalających opisać zmieniające się warunkowe współczynniki korelacji. Jak się okazuje, bardziej złożone modele nie muszą dawać lepszych prognoz macierzy kowariancji, szczególnie, że w tym przypadku hipoteza o stałości warunkowych współczynników korelacji nie została odrzucona na podstawie te-

stu Tse (2000). Na podkreślenie zasługuje szóste miejsce w rankingu modeli jednorównaniowych, które można zastosować dla dowolnie dużej liczby aktywów, a ich estymacja jest znacząco krótsza niż łączna estymacja wszystkich parametrów modelu stałych warunkowych współczynników korelacji<sup>196</sup>.

Następne parametryzacje, mianowicie  $K$ -czynnikiowy model GARCH oraz ortogonalny model GARCH zakładają, że stopy zwrotu aktywów są zależne od wspólnych, niezależnych czynników. Podstawową zaletą tych specyfikacji jest łatwość estymacji parametrów, nawet dla bardzo dużej liczby szeregów, za pomocą uproszczonych procedur opartych na modelach jednorównaniowych. W obu przypadkach czynniki zostały wyodrębnione na podstawie analizy głównych składowych. Wspólne czynniki wyjaśniały odpowiednio 64%, 21% i 15% zmienności stóp zwrotu badanych spółek. Model  $K$ -czynnikiowy oraz ortogonalny znajdują się na odległych miejscach w rankingu, co wynika przede wszystkim z utraty istotnych informacji<sup>197</sup>. Dla dwóch czynników zdecydowanie lepiej wypada model  $K$ -czynnikiowy<sup>198</sup>, ponieważ wszystkie parametry tego modelu są estymowane. Jednakże przy dużej liczbie aktywów, w przypadku modelu ortogonalnego, zwiększanie liczby czynników nie powoduje wzrostu trudności w estymacji parametrów modelu.

Kolejną rozważaną parametryzacją wielorównaniowego modelu GARCH był model DCC. Podobnie, jak w przypadku dwóch poprzednich modeli, główną zaletą tej parametryzacji jest możliwość estymacji parametrów za pomocą procedury dwustopniowej. Model DCC i jego zintegrowana wersja uplasowały się na odpowiednio siódmym i ósmym miejscu.

Słabsza efektywność w procesie alokacji aktywów najbardziej złożonych postaci modeli, takich jak model BEKK, może wynikać z dwóch powodów. Po pierwsze, rzeczywiste zależności mogą mieć prostszą strukturę i parametryzacja modelu BEKK jest zbyt złożona. Po drugie, uzyskane oceny parametrów nie gwarantowały stacjonarności wielowymiarowego procesu. Znalezienie ekstremum funkcji wiarygodności przy nałożonych restrykcjach gwarantujących stacjonarność okazało się niemożliwe. Trudności z estymacją parametrów modelu BEKK już przy tak małej liczbie aktywów przemawiają na korzyść prostszych postaci modeli.

---

<sup>196</sup> Dla trzech spółek estymacja parametrów wielorównaniowego modelu GARCH była około dziesięć razy dłuższa, dla większej liczby aktywów różnica jest jeszcze bardziej znacząca.

<sup>197</sup> Modele czynnikowe wypadają słabo już przy opisie szeregów finansowych (patrz badanie Osiewalskiego i Pipienia (2004a) dla modelu GARCH z ukrytym czynnikiem).

<sup>198</sup> Dla trzech czynników jest podobnie, z tym że estymacja 3-czynnikiowego modelu nie ma podstaw teoretycznych.

Uzyskane wyniki dla modeli GARCH zostały porównane z wynikami otrzymanymi na podstawie innych metod konstrukcji portfeli, w tym również metod stosowanych przez praktyków rynku finansowego. Budowano sześć portfeli. Pierwszy portfel – statyczny – został skonstruowany w ten sposób, że dla wszystkich okresów przyjęto równe wagi dla trzech walorów –  $W'_{t+1|t,p} = (1/3, 1/3, 1/3)$ . Portfel ten służy wyłącznie jako punkt odniesienia. Pozostałe portfele różniły się jedynie metodą prognozowania macierzy kowariancji stóp zwrotu. Tradycyjny sposób konstrukcji portfela polega na zastosowaniu bezwarunkowej macierzy kowariancji. Uzyskane wyniki wskazują, że klasyczne podejście, zakładające stałość warunkowych wariancji i kowariancji, prowadzi do spadku efektywności, choć należy zauważyć, iż występowały modele o zmiennej macierzy kowariancji, które znajdowały się jeszcze dalej w rankingach.

Praktycy rynku finansowego do prognozowania macierzy kowariancji stosują najczęściej ruchomą macierz kowariancji oraz metodę wyrównywania wykładniczego. W badaniu przyjęto dwie metody stosowane przez analityków JP Morgan, mianowicie ruchomą macierz kowariancji ze stałą wygładzania równą 25 oraz metodę wyrównywania wykładniczego z parametrem wygasania równym 0,94. Metody te znalazły się na dalekich pozycjach w rankingu przy konstrukcji portfela o najmniejszej wariancji, choć należy podkreślić, że wypadły znacznie lepiej w rankingu przy budowie portfela o minimalnej wariancji, dla zadanej oczekiwanej stopy zwrotu. Zauważmy, że model wyrównywania wykładniczego z parametrem wygasania 0,94 jest szczególnym przypadkiem zintegrowanego wielorównaniowego modelu GARCH. Wynik testu LR zdecydowanie odrzuca model RiskMetrics na korzyść modelu zintegrowanego. Tak jak można było przypuszczać, estymacja parametru wygasania daje lepsze rezultaty niż przyjmowanie pewnych wartości z góry. Dodatkowo zastosowano również procedurę, zaproponowaną w pracy Fiszdera (2004a), polegającą na wyborze stałej wygładzania w metodzie średniej ruchomej oraz parametru wygasania w metodzie wyrównywania wykładniczego dla każdego okresu na podstawie próbki wstępnej. Próbka wstępna miała 150 obserwacji, stała wygładzania mogła przyjmować wartości od 5 do 120, a parametr wygasania – od 0,01 do 0,99 (co 0,01). Wybierano te wartości, dla których średnia wariancja stóp zwrotu wyznaczonych portfeli o minimalnej wariancji była najmniejsza w próbie wstępnej. Przy takiej procedurze znacznie gorzej wypadła metoda wyrównywania wykładniczego, natomiast metoda ruchomej macierzy kowariancji znalazła się na drugim miejscu w rankingu,

wyprzedzając wszystkie, poza modelem skalarno-diagonalnym, specyfikacje wielorównaniowego modelu GARCH.

Dodatkowo dla modeli, których parametry były szacowane jednocześnie oraz tam, gdzie było możliwe oszacowanie łącznej funkcji wiarygodności, podano wartości kryterium informacyjnego Schwarza (tabela 5.3). Wprawdzie uzyskany ranking modeli według tego kryterium nie pokrywa się z rankingiem otrzymanym na podstawie wyników konstrukcji portfeli o minimalnej wariancji, ale jest bardziej do niego zbliżony niż wyniki bezpośredniego testowania restrykcyjnego przedstawione w tabeli 5.2.

**TABELA 5.3 RANKING MODELI WEDŁUG KRYTERIUM INFORMACYJNEGO SCHWARZA**

Oznaczenia portfeli	SIC	Ranking
BEKK	-27 698	8
BEKK rozkład t-Studenta <sub>8</sub>	-27 882	1
Diagonalny BEKK	-27 746	6
Skalarny BEKK	-27 337	10
Skalarno-diagonalny	-27 748	5
Zintegrowany	-27 704	7
Stałych współ. korelacji	-27 783	4
DCC	-27 806	3
DCC zintegrowany	-27 807	2
RiskMetrics	-27 562	9

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2007E).

## WNIOSKI

Uwzględnienie zmieniających się w czasie wariancji i kowariancji stóp zwrotu przy budowie portfela, z pewnymi wyjątkami, wpływa na wzrost efektywności alokacji aktywów. Uproszczenie postaci warunkowej macierzy kowariancji prowadzi na ogół do zmniejszenia szacunków odchyłeń standardowych portfeli o minimalnej wariancji, często na przekór wynikom testów. Wydaje się, że parametryzacja modelu BEKK jest zbyt złożona. Wynik ten jest ważny z praktycznego punktu widzenia, ponieważ estymacja uproszczonych postaci wielorównaniowego modelu GARCH jest znacznie łatwiejsza. Wyjątkiem od tej zasady jest skalarny model BEKK oraz modele *K*-czynnikowy i ortogonalny, przy których występuje znaczna utrata informacji. Wyniki przeprowadzonych testów statystycznych, tylko w części zostały potwierdzone przez badanie sku-

teczności tworzenia portfeli. Ważnym wyjątkiem jest model BEKK z warunkowym rozkładem t-Studenta. Zastąpienie warunkowego rozkładu t-Studenta rozkładem normalnym nie powoduje spadku skuteczności przy budowie portfeli.

Niespełnienie klasycznych założeń dotyczących testowania (np. brak normalności rozkładu) oraz złożoność rozważanych parametryzacji nie pozwala na przeprowadzenie pełnego testu statystycznej istotności różnic pomiędzy odchyleniami standardowymi portfeli otrzymanymi dla rozważanych specyfikacji modeli. Engle i Colacito (2006) proponują test dotyczący oceny dwóch metod estymacji macierzy kowariancji w odniesieniu do konstrukcji portfeli oparty na formułach Diebolda i Mariano (1995). Niestety test ten nie uwzględnia niepewności związanej z estymacją parametrów modeli, na podstawie których konstruuje się prognozę. Możliwa jest jednak ocena ekonomiczna występujących różnic. Na przykład zastosowanie modelu skalarno-diagonalnego przy konstrukcji portfela o minimalnej wariancji prowadzi do spadku dziennego odchylenia standardowego portfela o minimalnej wariancji o 3,7% w stosunku do tradycyjnej metody szacowania macierzy kowariancji, czyli bezwarunkowej macierzy kowariancji. Ważniejsze od zmian stosunkowych są dla inwestorów różnice w poziomach zmiennych (stóp zwrotu), które w tym przypadku wynoszą 0,0642 punktu procentowego dla dziennych stóp zwrotu, co w skali roku daje zmianę o ponad 1 punkt procentowy (spadek z około 26,9% do 25,9%)<sup>199</sup>. Taka różnica dla większości inwestorów nie jest istotna z ekonomicznego punktu widzenia<sup>200</sup>, a różnice pomiędzy innymi modelami są dużo mniejsze. Na przykład różnica pomiędzy pierwszym a szóstym modelem w rankingu, w skali roku jest mniejsza niż 0,1 punktu procentowego. Zatem dla większości inwestorów wystarczające jest zastosowanie prostszych metod estymacji macierzy kowariancji stóp zwrotu, czyli metody ruchomej macierzy kowariancji ze stałą wygładzania wybieraną dla każdego okresu na podstawie próbki wstępnej lub jednorównaniowych modeli GARCH.

Oczywiście otrzymanych wyników nie można uogólnić na dowolne spółki czy aktywa finansowe. Wybrane spółki należą do największych pod względem kapitalizacji oraz najbardziej płynnych spółek notowanych na GPW w Warszawie. W podobnym badaniu przeprowadzonym na danych tygodniowych, dla spółek mniejszych i mniej płynnych (patrz Fiszeder, 2004b), różnice pomiędzy poszczególnymi modelami były bardziej istotne z ekonomicznego punktu widzenia. Jednakże główne wnioski, wynikające z analizy, były

<sup>199</sup> Wyniki zostały przeliczone na zwykłe stopy zwrotu.

<sup>200</sup> Do pełnej oceny należałoby jeszcze zbadać, jaki jest wpływ uwzględnienia kosztów transakcyjnych.

zbliżone do przedstawionych wyżej. Podobnie uzyskanych rezultatów nie można jednoznacznie uogólnić na dowolną liczbę aktywów, dlatego w dalszej części rozdziału przedstawiono wyniki analizy dla dwudziestu spółek.

### 5.1.3. OCENA EFEKTYWNOŚCI KONSTRUKCJI PORTFELI DLA DWUDZIESTU SPÓŁEK

Badanie dla dwudziestu aktywów było analogiczne do tego, które zostało przeprowadzone dla trzech aktywów. Dla dużej liczby aktywów jest bardzo mało analiz, w których ocenia się skuteczność budowy portfeli efektywnych z zastosowaniem prognoz macierzy kowariancji konstruowanych na podstawie wielorównaniowych modeli GARCH. Takie badania zostały przeprowadzone między innymi przez Engle'a i Shepparda (2001) oraz Engle'a i Colacito (2006). W pierwszej pracy autorzy oceniali tylko dwa modele, mianowicie model DCC i model RiskMetrics. Porównywali oni wariancję portfela z prognozowaną wariancją portfela i doszli do wniosku, że przy dużej liczbie aktywów oba modele nie są skuteczne przy konstrukcji portfeli efektywnych. W drugiej pracy zastosowano asymetryczny model DCC i porównano go z podejściem zakładającym stałość warunkowej macierzy kowariancji. Zastosowanie zmiennej warunkowej macierzy kowariancji dało dodatkowe korzyści w postaci wyższej stopy zwrotu przy konstrukcji portfeli. W niniejszej pracy do analizy przyjęto taki sam okres jak przy badaniu trzech spółek, czyli od 4 stycznia 1999 roku do 30 czerwca 2006 roku. Spośród spółek notowanych przez cały przyjęty okres na GPW w Warszawie wybrano dwadzieścia spółek o największej kapitalizacji: Bank BPH, Bank Millennium, Bank Pekao S.A., BRE Bank, Bank Zachodni WBK, Budimex, Cersanit, Citibank Handlowy, Computerland, Firma Oponiarska Dębica, ING Bank Śląski, Grupa Kęty, KGHM Polska Miedź, Kredyt Bank, Mondi Packaging Paper Świecie, Orbis, Polska Grupa Farmaceutyczna, Prokom Software, Softbank, Telekomunikacja Polska. Przy wyborze pominięto spółki, dla których udział liczby sesji, kiedy nie były notowane, przekraczał 5%. Miało to na celu uniknięcie problemu niesynchronicznych transakcji. Dla większości specyfikacji jednoczesna estymacja parametrów wielorównaniowego modelu GARCH jest znacznie trudniejsza w przypadku dwudziestu aktywów. Dla najbardziej złożonych parametryzacji estymacja okazała się nawet niemożliwa ze względu na bardzo dużą liczbę parametrów. Na przykład najprostsza postać modelu BEKK z  $K = 1$  oraz  $p = q = 1$  ma tysiąc dziesięć parametrów w samym równaniu dla

warunkowej macierzy kowariancji. Dlatego konieczne było ograniczenie rozważanych specyfikacji modelu. Przyjęto tylko te postacie, których parametry można oszacować bez konieczności poszukiwania „dobrych” wartości startowych, w czasie nieprzekraczającym kilkunastu godzin (między zamknięciem sesji a otwarciem dnia następnego). W badaniu zastosowano osiem specyfikacji wielorównaniowego modelu GARCH: model skalarno-diagonalny, model skalarno-diagonalny z warunkowym rozkładem t-Studenta, model zintegrowany, K-czynnikowy model GARCH dla trzech czynników, model ortogonalny dla trzech oraz dwudziestu czynników, model DCC oraz zintegrowany model DCC. Wyniki uzyskane dla modeli GARCH porównano z wynikami otrzymanymi na podstawie innych metod, które zastosowano przy badaniu trzech spółek. Rezultaty zaprezentowano w tabeli 5.4. Miejsca poszczególnych modeli w rankingach są bardzo zbliżone, niezależnie od tego, czy portfel o minimalnej wariancji konstruowany jest bez ograniczenia minimalnej stopy zwrotu, czy przy zadanej, minimalnej oczekiwanej dziennej stopie zwrotu na poziomie 0,5%. Dalej interpretowane są tylko wyniki dla portfeli o minimalnej wariancji.

**TABELA 5.4. SZACUNKI ŚREDNICH ODCHYLEŃ STANDARDOWYCH STÓP ZWROTU PORTFELI O MINIMALNEJ WARIANCJI ORAZ PORTFELI O MINIMALNEJ WARIANCJI, PRZY ZADANYM POZIOMIE OCZEKIWANEJ STOPY ZWROTU**

Oznaczenia portfeli	Bez ograniczenia stopy zwrotu	Ranking	Min. stopa zwrotu 0,5%	Ranking
Jednorównaniowe modele GARCH	0,008262	8	0,011437	7
Skalarno-diagonalny	0,007810	3	0,011221	4
Skalarno-diagonalny rozkład t-Studenta	0,007829	4	0,011235	5
Zintegrowany	0,007794	1	0,011154	2
K-czynnikowy 3 czynniki	0,049739	14	0,073727	13
Ortogonalny 3 czynniki	0,274143	15	0,437218	14
Ortogonalny 20 czynników	0,008320	9	0,011520	8
DCC	0,008014	6	0,011157	3
DCC zintegrowany	0,007801	2	0,011036	1
Równe wagi	0,010254	12	–	–
Bezwarunkowa macierz kowariancji	0,008384	10	0,011811	9
Ruchoma macierz kowariancji	0,008038	7	0,011591	12
Ruch. macierz kowariancji k = 25	0,015340	13	0,020486	11
Wyrównywanie wykładnicze	0,007955	5	0,011312	6
RiskMetrics	0,009226	11	0,013628	10

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2007E).



Przeprowadzono również wybrane testy dotyczące własności stóp zwrotu badanych spółek. Poza czterema spółkami (Computerland, Millennium, Prokom i Softbank) stopy zwrotu były pozbawione autokorelacji. Stopy zwrotu wszystkich spółek miały zmienną wariancję warunkową, a ich rozkłady bezwarunkowe były różne od rozkładu normalnego.

W tabeli 5.5 przedstawiono wyniki testów dotyczących charakteru zależności między stopami zwrotu badanych spółek. Uzyskane wyniki testowania restrykcji nakładanych na parametry modeli GARCH były niewrażliwe na przyjętą specyfikację rozkładu warunkowego. Dodatkowo w tabeli 5.6 przedstawiono ranking modeli na podstawie kryterium informacyjnego Schwarza.

**TABELA 5.5. ANALIZA CHARAKTERU ZALEŻNOŚCI BADANYCH SZEREGÓW DLA WIELORÓWNANIOWYCH SPECYFIKACJI MODELU GARCH**

Weryfikowane hipotezy	Statystyka	Ocena statystyki
Normalność rozkładu warunk. w modelu skalarno-diagonalnym	LR	8925*
Stalność warunkowych współczynników korelacji	LMC	409*
Skalarno-diagonalny – $W^* = 0, \beta = 1 - \alpha$	LR	1192*
Zintegrowany GARCH - $1 - \alpha = 0,94$	LR	26382*

LMC to statystyka testu Tse. Gwiazdką oznaczono oceny statystyk, w przypadku których weryfikowana hipoteza została odrzucona na poziomie istotności 0,05. Opis badanych parametryzacji modeli przedstawiono w rozdziale 2.

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2007E).

**TABELA 5.6. RANKING MODELI WEDŁUG KRYTERIUM INFORMACYJNEGO SCHWARZA**

Oznaczenia portfeli	SIC	Ranking
Skalarno-diagonalny	-190 783	5
Skalarno-diagonalny rozkład t-Studenta	-194 311	1
Zintegrowany	-191 179	4
DCC	-192 506	3
DCC zintegrowany	-193 138	2
RiskMetrics	-164 814	6

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2007E).

W celu ograniczenia liczby parametrów dla modeli skalarno-diagonalnego, zintegrowanego oraz DCC zastosowano upraszczające parametryzacje dla procesów kowariancyjnie stacjonarnych. W pierwszej kolejności estymowano parametry modelu skalarno-diagonalnego z warunkowym rozkładem normalnym oraz t-Studenta. Według testu LR model z warunkowym rozkładem normalnym został zdecydowanie odrzucony na korzyść modelu z warunkowym rozkładem t-Studenta. Zastąpienie warunkowego rozkładu normalnego rozkładem t-Studenta nie powoduje jednakże spadku szacunków odchyłeń standardowych portfeli o minimalnej wariancji.

Uproszczeniem modelu skalarno-diagonalnego jest model zintegrowany. Według testu LR model zintegrowany został odrzucony na korzyść modelu skalarno-diagonalnego. Wobec wyniku testu dosyć zaskakujące jest pierwsze miejsce modelu zintegrowanego w rankingu skuteczności przy konstrukcji portfela o minimalnej wariancji. Należy jednakże zauważyć, że różnica między odchyleniami standardowymi portfeli o minimalnej wariancji dla modeli skalarno-diagonalnego i zintegrowanego nie jest istotna z ekonomicznego punktu widzenia. Zastosowanie modelu zintegrowanego przy konstrukcji portfela o minimalnej wariancji prowadzi do spadku dziennego odchylenia standardowego portfela o minimalnej wariancji o 7% w stosunku do tradycyjnej metody szacowania macierzy kowariancji, czyli bezwarunkowej macierzy kowariancji. Ważniejsze od zmian stosunkowych są dla inwestorów różnice w poziomach zmiennych (stóp zwrotu), które w tym przypadku wynoszą 0,059 punktu procentowego dla dziennych stóp zwrotu, co w skali roku daje zmianę prawie 1 punktu procentowego (spadek z około 13,31% do 12,37%). Różnice pomiędzy wieloma modelami są jednakże dużo mniejsze. Różnica pomiędzy modelem zintegrowanym a trzecim w rankingu modelem skalarno-diagonalnym, w skali roku, jest równa 0,03 punktu procentowego.

Następne rozważane parametryzacje wielorównaniowego modelu GARCH, to modele  $K$ -czynnikiowy oraz ortogonalny. W obu przypadkach przy estymacji parametrów zastosowano uproszczone procedury oparte na modelach jednorównaniowych. Czynniki zostały wyodrębnione na podstawie analizy głównych składowych. W większości prac dotyczących modeli czynnikowych autorzy sugerują, że dwa lub trzy czynniki wyjaśniają większość zmienności stóp zwrotu aktywów i są wystarczające do opisu macierzy kowariancji. Z tego względu w badaniu przyjęto trzy czynniki. Wyjaśniały one odpowiednio 32,4%, 5,9% oraz 5,1% zmienności stóp zwrotu badanych spółek. Modele te uplasowały się na ostatnich miejscach w rankingu. Nieuwzględnienie części zmienności prowadzi do zbyt dużej utraty informacji.

Dodatkowo estymacja w drugim kroku równań dla modelu czynnikowego okazała się bardzo wrażliwa na przyjęte wartości startowe. Model ortogonalny wypada zdecydowanie gorzej, ponieważ część jego parametrów jest wyznaczana na podstawie analizy głównych składowych. Ta wada w przypadku małej liczby czynników okazuje się zaletą przy większej ich liczbie. Mianowicie rozszerzenie modelu i uwzględnienie większej liczby czynników (nawet wszystkich) nie powoduje wzrostu trudności w estymacji parametrów modelu. Dlatego rozważono również model ortogonalny z dwudziestoma czynnikami. Ding i Engle (2001) określali taki model jako model GARCH głównych składowych. Model ten wypadł zdecydowanie lepiej przy ocenie skuteczności konstrukcji portfeli efektywnych, jednakże gorzej niż inne nieczynnikowe postacie wielorównaniowych modeli GARCH.

Kolejną rozważaną parametryzacją modelu GARCH był model DCC. Przy estymacji parametrów modelu zastosowano procedurę trzystopniową. W pierwszym kroku szacowane są parametry jednorównaniowych modeli GARCH, w drugim kroku estymuje się bezwarunkową macierz kowariancji dla standaryzowanych reszt z modeli jednorównaniowych, w trzecim kroku szacuje się parametry odpowiedzialne za zmienne kowariancje warunkowe. W przypadku zintegrowanej wersji modelu DCC można było zastosować procedurę dwustopniową, ponieważ parametryzacja modelu jest znacznie prostsza. Model DCC i zintegrowany model DCC znalazły się wysoko w rankingu, mianowicie na szóstym i drugim miejscu.

Obok modeli wielorównaniowych zastosowano również jednorównaniowy model GARCH. Niestety skuteczność tego modelu, przy konstrukcji portfeli efektywnych, jest znacznie mniejsza niż dla trzech aktywów, choć ciągle daje lepsze rezultaty niż zastosowanie bezwarunkowej macierzy kowariancji. Może to wynikać z faktu, że warunkowe współczynniki korelacji dla dwudziestu spółek są zmienne w czasie (patrz wynik testu Tse (2000) w tabeli 5.5). Przyjęcie w takiej sytuacji stałej macierzy korelacji jest nieprawidłowe.

Pozostałe metody szacowania macierzy kowariancji znalazły się na dalszych miejscach w rankingu. Najlepiej wypadła metoda wyrównywania wykładniczego dla macierzy kowariancji (piąte miejsce), w której parametr wygasania wybierano dla każdego okresu na podstawie próbki wstępnej. Test LR zdecydowanie odrzuca natomiast model RiskMetrics, czyli model z parametrem wygasania równym 0,94 na korzyść modelu zintegrowanego. Ten wynik został później potwierdzony przy badaniu skuteczności tworzenia portfela o minimalnej wariancji. W przypadku, gdy parametr wygasania był wybierany dla każdego okresu, przyjmował on najczęściej wartość 0,98 lub 0,99.

Warto zwrócić uwagę na słabszy rezultat, w porównaniu z trzema spółkami, metody ruchomej macierzy kowariancji z wybraną stałą wygładzania. Wynika to prawdopodobnie z ograniczenia maksymalnej wartości stałej wygładzania do 120. W przypadku, gdy stała wygładzania była wybierana dla każdego okresu, przyjmowała ona najczęściej wartość 120 lub nieco niższą. Potwierdzeniem tego jest bardzo dalekie miejsce w rankingu metody ruchomej macierzy kowariancji ze stałą wygładzania równą 25. Otrzymane wyniki wskazują, że modele, dla których podczas konstrukcji prognoz macierzy kowariancji wykorzystuje się małą ilość danych z przeszłości, wypadają słabiej w rankingu.

### WNIOSKI

Generalnie wnioski wynikające z analizy dla dwudziestu spółek są zbliżone do tych, jakie otrzymano dla trzech spółek. Uwzględnienie zmieniających się w czasie wariancji i kowariancji stóp zwrotu przy budowie portfela, z pewnymi wyjątkami, wpływa na wzrost efektywności alokacji aktywów. Wyjątkiem są czynnikowe modele GARCH –  $K$ -czynnikiowy i ortogonalny oraz metody ruchomej macierzy kowariancji ze stałą wygładzania równą 25 i RiskMetrics. Przyjmowana w metodologii RiskMetrics wartość parametru stałej wygładzania dla danych dziennych 0,94 nie jest wartością optymalną dla polskiego rynku akcji (jest zdecydowanie za niska).

Przy dwudziestu aktywach trudno jest oceniać wpływ uproszczenia postaci warunkowej macierzy kowariancji, ponieważ w zasadzie wszystkie rozważane parametryzacje należą do uproszczonych postaci wielorównaniowego modelu GARCH. Należy jednakże zauważyć, że zarówno przy trzech, jak i dwudziestu spółkach wysoko w rankingach wypadły proste postacie modeli GARCH, których parametry szacowane są jednocześnie, mianowicie model skalarno-diagonalny i zintegrowany. Te postacie modeli należy zatem rekomendować spośród wielorównaniowych parametryzacji modeli GARCH. Warto podkreślić, że oba modele, obok modelu stałych współczynników korelacji, okazały się najlepsze ze względu na wyniki testów diagnostycznych (patrz formuły (2.4.2–2.4.4)) w przypadku pięciu spółek z rynku amerykańskiego (patrz Ding i Engle, 2001).

Wyniki przeprowadzonych w niniejszym badaniu testów statystycznych, z wyjątkiem odrzucenia modelu zintegrowanego na korzyść modelu skalarno-diagonalnego oraz odrzucenia modelu skalarno-diagonalnego z warunko-

wym rozkładem normalnym na korzyść modelu z warunkowym rozkładem t-Studenta, zostały potwierdzone przez badanie skuteczności tworzenia portfeli. Rankingi modeli uzyskane na podstawie kryterium informacyjnego Schwartza okazały się nawet bardziej zbliżone do rankingów uzyskanych na podstawie wyników konstrukcji portfeli o minimalnej wariancji, niż wynikałoby to z bezpośredniego testowania restrykcji dotyczących szacowanych modeli.

Wyniki dotyczące zarówno trzech, jak i dwudziestu spółek sugerują, że w przypadku modeli GARCH zastąpienie warunkowego rozkładu normalnego rozkładem t-Studenta nie powoduje spadku szacunków odchyłeń standardowych portfeli o minimalnej wariancji. Ten wynik jest ważny z praktycznego punktu widzenia, ponieważ estymacja parametrów modelu z warunkowym rozkładem t-Studenta jest trudniejsza i bardziej czasochłonna.

Podstawowa różnica w wynikach między trzema a dwudziestoma spółkami dotyczy modeli zintegrowanych. Zarówno model zintegrowany, jak i zintegrowany model DCC wypadły zdecydowanie lepiej w rankingu dla dwudziestu aktywów. Ten rezultat może sugerować, że w przypadku większej liczby aktywów wielowymiarowy proces stóp zwrotu nie jest procesem kowariancyjnie stacjonarnym, co, jak wiadomo, może być związane ze zmianami bezwarunkowych macierzy kowariancji w długim okresie.

Stosowanie jednorównaniowych modeli GARCH oraz szacowanie macierzy korelacji na podstawie rozkładów brzegowych standaryzowanych reszt wydaje się dopuszczalne tylko w przypadku, gdy warunkowe współczynniki korelacji są stałe w czasie.

### **SKUTECZNOŚĆ METOD KONSTRUKCJI PORTFELI WEWNĄTRZ PRÓBY**

Wnioski wynikające z przeprowadzonych testów oraz analizy kryterium SIC nie zawsze pokrywają się z wynikami przy budowie portfela. W celu poszukiwania lepszego kryterium wyboru metod do konstrukcji portfeli przeprowadzono analizę skuteczności tworzenia portfeli wewnątrz próby dla całego badanego okresu. Wyniki przedstawiono w tabelach 5.7 i 5.8.

**TABELA 5.7. SZACUNKI ŚREDNICH ODCHYLEŃ STANDARDOWYCH STÓP ZWROTU WEWNĄTRZ PRÓBY DLA PORTFELI O MINIMALNEJ WARIANCJI ORAZ PORTFELI O MINIMALNEJ WARIANCJI, PRZY ZADANYM POZIOMIE OCZEKIWANEJ STOPY ZWROTU DLA TRZECH SPÓŁEK**

Oznaczenia portfeli	Bez ograniczenia stopy zwrotu	Ranking	Min. stopa zwrotu 0,5%	Ranking
Jednorówn. modele GARCH	0,017797	10	0,096321	5
BEKK	0,017507	5	0,098941	15
BEKK rozkład t-Studenta	0,017424	3	0,096955	7
Diagonalny BEKK	0,017601	6	0,097083	8
Skalarny BEKK	0,017878	14	0,097453	12
Skalarno-diagonalny	0,017821	11	0,095722	2
Zintegrowany	0,017931	16	0,097265	10
Stałych współ. korelacji	0,017654	8	0,096071	4
K-czynnikowy 2 czynniki	0,018183	17	0,097250	9
Ortogonalny 2 czynniki	0,319703	19	0,219379	18
Ortogonalny 3 czynniki	0,017869	13	0,098160	13
DCC	0,017637	7	0,056903	1
DCC zintegrowany	0,017659	9	0,096540	6
Równe wagi	0,018599	18	–	–
Bezwarunkowa macierz kowariancji	0,017865	12	0,097445	11
Ruchoma macierz kowariancji	0,017014	1	0,100508	17
Ruch. macierz kowariancji k = 25	0,017931	15	0,096065	3
Wyrównywanie wykładnicze	0,017412	2	0,099786	16
RiskMetrics	0,017500	4	0,098529	14

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

Podobnie jak w badaniu poza próbą, interpretację wyników przeprowadzono tylko w stosunku do procedury budowy portfela o minimalnej wariancji. Ranking modeli poza próbą dla trzech spółek jest zbliżony do rankingu wewnątrz próby. Poza próbą zdecydowanie gorzej wypadły modele BEKK z warunkowym rozkładem normalnym i t-Studenta, z kolei zdecydowanie wyższe pozycje w rankingu zajęły modele skalarno-diagonalny i zintegrowany. Modele prostsze wypadają zatem relatywnie lepiej w ocenie poza próbą niż wewnątrz próby. Dokładnie odwrotna sytuacja występuje w przypadku modeli bardziej złożonych.

**TABELA 5.8. SZACUNKI ŚREDNICH ODCHYLEŃ STANDARDOWYCH STÓP ZWROTU WEWNĄTRZ PRÓBY DLA PORTFELI O MINIMALNEJ WARIANCJI ORAZ PORTFELI O MINIMALNEJ WARIANCJI, PRZY ZADANYM POZIOMIE OCZEKIWANEJ STOPY ZWROTU DLA DWUDZIESTU SPÓŁEK**

Oznaczenia portfeli	Bez ograniczenia stopy zwrotu	Ranking	Min. stopa zwrotu 0,5%	Ranking
Jednorównaniowe modele GARCH	0,009453	2	0,011604	2
Skalarno-diagonalny	0,009601	5	0,011811	5
Skalarno-diagonalny rozkład t-Studenta	0,009583	4	0,011787	4
Zintegrowany	0,010618	9	0,012657	9
K-czynnikowy 3 czynniki	0,479166	14	0,223587	13
Ortogonalny 3 czynniki	0,509345	15	0,228712	14
Ortogonalny 20 czynników	0,010240	8	0,012360	7
DCC	0,009394	1	0,011534	1
DCC zintegrowany	0,009492	3	0,011704	3
Równe wagi	0,012589	12	–	–
Bezwarunkowa macierz kowariancji	0,010132	7	0,012305	6
Ruchoma macierz kowariancji	0,011267	11	0,012857	10
Ruch. macierz kowariancji $k = 25$	0,019708	13	0,022418	12
Wyrównywanie wykładnicze	0,009653	6	0,012402	8
RiskMetrics	0,010937	10	0,014138	11

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

Ranking modeli wewnątrz próby dla dwudziestu spółek jest bardzo zbliżony do rankingu poza próbą. Wyjątkiem jest model zintegrowany zajmujący pierwsze miejsce poza próbą i dopiero dziewiąte miejsce wewnątrz próby.

Przeprowadzone badania pokazały, że pomocne przy wyborze właściwej parametryzacji modelu do konstrukcji portfela mogą być testy statystyczne. Lepsze rezultaty daje kryterium informacyjne Schwarza, jednakże zdecydowanie najlepszym rozwiązaniem jest analiza skuteczności modeli wewnątrz próby.

## 5.2. MODEL CAPM

Model CAPM (ang. *capital asset pricing model*), nazywany modelem wyceny dóbr kapitałowych lub modelem równowagi rynku kapitałowego, próbuje wyjaśnić kształtowanie się stóp zwrotu i cen instrumentów finansowych. Jest często wykorzystywany w praktyce życia gospodarczego, między innymi do szacowania oczekiwanej stopy zwrotu, do kalkulacji kosztu kapi-

tału oraz do oceny wyników funduszy inwestycyjnych. Ze względu na szereg nierealistycznych założeń model CAPM budzi obawy. Przeprowadzono wiele testów zasadności modelu, zarówno takich, które potwierdziły, jak i takich, które podważyły jego podstawowe założenia (patrz np. Haugen, 1996 oraz Elton i Gruber, 1998).

Liczne badania empiryczne pokazują, że zarówno warunkowe wariancje i kowariancje stóp zwrotu, jak i warunkowe współczynniki beta zmieniają się w czasie (patrz np. Bollerslev, Engle i Nelson, 1994). Większość testów modelu CAPM nie uwzględnia powyższych empirycznych charakterystyk procesów finansowych. Zmienność wariancji warunkowej składnika losowego obniża efektywność estymatorów MNK parametrów w równaniu dla średniej. Zmienność współczynników beta może istotnie wpływać na wyniki testów modelu CAPM. Modelem, który pozwala uwzględnić powyższe własności finansowych szeregów czasowych i jednocześnie opisuje zależności między oczekiwanymi stopami zwrotu instrumentów finansowych a warunkowymi kowariancjami stóp zwrotu, jest wielorównaniowy model GARCH-M. Z tego względu może on być wykorzystany do weryfikacji modelu CAPM. Prezentowane w punktach 5.2.1 i 5.2.2 testy i wyniki badań publikowane były w pracach autora – Fiszeder (2006a) i (2006b).

### 5.2.1. TESTY MODELU CAPM Z ZASTOSOWANIEM WIELORÓWNANIOWYCH MODELI GARCH

Model CAPM można przedstawić w następującej postaci:

$$E(r_i) = r_f + \beta_i[E(r_M) - r_f], \quad (5.2.1)$$

gdzie  $E(r_i)$  to oczekiwana stopa zwrotu  $i$ -tego waloru (może to być również portfel),  $E(r_M)$  – oczekiwana stopa zwrotu portfela rynkowego,  $r_f$  – stopa zwrotu wolna od ryzyka,  $\beta_i$  – współczynnik beta dla  $i$ -tego waloru dany wzorem  $\beta_i = \text{cov}(r_i, r_M) / \text{var}(r_M)$ <sup>201</sup>.

Podstawą modelu CAPM są dwie zależności – przedstawiona powyżej linia rynku papierów wartościowych (SML) oraz linia rynku kapitałowego (CML).

<sup>201</sup> W literaturze można znaleźć wiele informacji na temat klasycznego modelu CAPM, jego założeń oraz modyfikacji. Patrz np. Haugen (1996), Jajuga i Jajuga (1996), Tarczyński (1997a) oraz Elton i Gruber (1998). W niniejszej pracy nie rozważa się dalszych modyfikacji modelu CAPM, jak np. CAPM z zerowym współczynnikiem beta czy konsumpcyjnego modelu CAPM.



Wszystkie stosowane w podrozdziale 5.2 testy opierają się na linii SML, inne podejście wykorzystujące procedurę testowania modelu APT opartą na czynnikowym modelu GARCH zastosowano w pracy Fiszедера (2007c). Warto zwrócić uwagę, że współczynnik beta w równaniu (5.2.1) jest zdefiniowany na podstawie momentów rozkładów bezwarunkowych. Nadwyżka oczekiwanej stopy zwrotu  $i$ -tego waloru nad stopą zwrotu wolną od ryzyka (ang. *excess return*) –  $[E(r_i) - r_f]$  określana jest jako premia za ryzyko dla  $i$ -tego waloru, natomiast nadwyżka oczekiwanej stopy zwrotu portfela rynkowego nad stopą zwrotu wolną od ryzyka –  $[E(r_M) - r_f]$  jako rynkowa premia za ryzyko. Model CAPM zakłada, że oczekiwana stopa zwrotu  $i$ -tego waloru jest liniową funkcją ryzyka systematycznego mierzonego współczynnikiem beta. Co więcej, współczynnik beta jest jedyną determinantą różnic występujących pomiędzy oczekiwanymi stopami zwrotu z różnych walorów. Model wyceny dóbr kapitałowych nie przewiduje dodatkowej stopy zwrotu za ryzyko, którego można uniknąć przez dywersyfikację.

Większość wczesnych testów empirycznych modelu CAPM sprowadzała się do estymacji parametrów funkcji regresji na podstawie szeregów czasowych (pierwszy etap), w celu otrzymania szacunków współczynników beta oraz estymacji parametrów funkcji regresji dla danych przekrojowych (drugi etap), na podstawie której testowano hipotezy dotyczące modelu CAPM. Testy przedstawione w punkcie 5.2.1 dotyczą wyłącznie funkcji regresji szacowanych na podstawie szeregów czasowych.

Oznaczając odpowiednio przez  $y_{it} - [E(r_i) - r_f]$  i  $x_t - [E(r_M) - r_f]$ , model CAPM można uogólnić do równania regresji<sup>202</sup> (patrz np. Mills, 1993; Osińska, 2000):

$$y_{it} = \alpha_i + \beta_i x_t + \varepsilon_{it}. \quad (5.2.2)$$

Parametry w równaniu (5.2.2) można oszacować za pomocą MNK. Test modelu CAPM można przeprowadzić, weryfikując hipotezę  $\alpha_i = 0$ <sup>203</sup>, jednakże zarówno  $y_{it}$ , jak i  $x_t$  muszą być stacjonarne, a zależność pomiędzy nimi po-

<sup>202</sup> Należy pamiętać, że zarówno oczekiwane stopy zwrotu, jak i współczynniki beta nie są bezpośrednio obserwowalne, a przy weryfikacji modelu CAPM wykorzystuje się najczęściej zrealizowane stopy zwrotu i próbkowe oceny współczynników beta. Z drugiej strony Roll (1977) twierdzi, że skonstruowanie portfela rynkowego jest niemożliwe, ponieważ zawiera on wszystkie aktywa, które istnieją w międzynarodowym systemie ekonomicznym. Zatem model CAPM nigdy nie będzie mógł być przedmiotem empirycznej weryfikacji.

<sup>203</sup> Testy modelu CAPM i problemy metodologiczne z nimi związane zostały szeroko omówione, np. w pracach: Haugen (1996), Elton i Gruber (1998).

winna być liniowa, składnik losowy  $\varepsilon_{it}$  powinien być pozbawiony autokorelacji, homoskedastyczny i mieć rozkład normalny, a współczynnik beta powinien być stały w czasie. Rzadko wszystkie powyższe założenia są spełnione jednocześnie w badaniach empirycznych.

Model wyceny dóbr kapitałowych można przedstawić w sposób dynamiczny, na podstawie momentów warunkowych rozkładu:

$$E(r_{it} | \psi_{t-1}) = r_{f,t} + \beta_{it} [E(r_{Mt} | \psi_{t-1}) - r_{f,t}], \quad (5.2.3)$$

gdzie  $\psi_{t-1}$  oznacza zbiór wszystkich informacji dostępnych w chwili  $t-1$ . W modelu (5.2.3) zakłada się, że oczekiwania inwestorów zmieniają się w czasie i są zależne od dostępnych informacji. Przy takiej specyfikacji modelu współczynnik  $\beta_{it}$  nie jest jednoznacznie określony, tak jak to było w modelu w postaci (5.2.1). Współczynnik beta może być na przykład opisany jako proces błędzenia przypadkowego lub proces autoregresyjny. Przy estymacji parametrów odpowiedniego modelu można wówczas wykorzystać filtr Kalmana. Najczęściej jednak przyjmuje się, że:

$$\beta_{it} = \text{cov}(r_{it}, r_{Mt} | \psi_{t-1}) / \text{var}(r_{Mt} | \psi_{t-1}). \quad (5.2.4)$$

Zatem zarówno oczekiwane stopy zwrotu, jak i wariancje, kowariancje oraz współczynniki beta mogą zmieniać się w czasie<sup>204</sup>. Przyjęcie takiej specyfikacji modelu wynika przede wszystkim z rezultatów badań empirycznych (o zmienności warunkowych kowariancji, warunkowych współczynników korelacji oraz współczynników beta patrz w podrozdziałach 2.5, 2.6 oraz 4.3).

Model (5.2.3) można zapisać w postaci modelu dwurównaniowego. Przyjmijmy, że rynkowa cena ryzyka –  $\lambda$  dana jako:

$$\lambda = [E(r_{Mt} | \psi_{t-1}) - r_{f,t}] / \text{var}(r_{Mt} | \psi_{t-1}), \quad (5.2.5)$$

jest stała<sup>205</sup>.

<sup>204</sup> Model CAPM można również zapisać na podstawie wyższych momentów warunkowych rozkładu, tak aby uwzględnić zależności dotyczące asymetrii i koncentracji (patrz np. Fang i Lai, 1997 oraz Harvey i Siddique, 2000).

<sup>205</sup> Założenie takie przyjmuje się często w analizach, ale wymaga ono weryfikacji, o czym jest mowa w dalszej części pracy.

Zatem możemy zapisać:

$$r_{it} = r_{f,t} + \lambda \text{cov}(r_{it}, r_{Mt} | \psi_{t-1}) + \varepsilon_{it}, \quad (5.2.6)$$

$$r_{Mt} = r_{f,t} + \lambda \text{var}(r_{Mt} | \psi_{t-1}) + \varepsilon_{Mt}, \quad (5.2.7)$$

gdzie  $\varepsilon_{it} = r_{it} - E(r_{it} | \psi_{t-1})$  oraz  $\varepsilon_{Mt} = r_{Mt} - E(r_{Mt} | \psi_{t-1})$ .

Oczywiście warunkowe wariancje i kowariancje, występujące w formułach (5.2.4), (5.2.6) i (5.2.7), muszą być zdefiniowane. Często przyjmuje się, że stopy zwrotu są opisane za pomocą wielorównaniowego modelu GARCH. Ponieważ  $\text{var}(r_{Mt} | \psi_{t-1}) = E(\varepsilon_{Mt}^2 | \psi_{t-1}) = h_{Mt}$ ,  $\text{cov}(r_{it}, r_{Mt} | \psi_{t-1}) = E(\varepsilon_{it}, \varepsilon_{Mt} | \psi_{t-1}) = h_{iM,t}$  oraz przyjmując, że  $\varepsilon_t = (\varepsilon_{it}, \varepsilon_{Mt})'$  jest dwurównaniowym procesem GARCH, model w postaci (5.2.6–5.2.7) można przedstawić jako szczególny przypadek dwurównaniowego modelu GARCH-M:

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\alpha} + \lambda \mathbf{H}_t \boldsymbol{\omega} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t | \psi_{t-1} \sim N(0, \mathbf{H}_t), \quad (5.2.8)$$

gdzie  $\mathbf{y}_t = (r_{it} - r_{f,t}, r_{Mt} - r_{f,t})'$ ,  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_i, \alpha_{iM})'$ ,  $\boldsymbol{\omega} = (0, 1)'$  oraz

$$\mathbf{H}_t = \begin{bmatrix} h_{it} & h_{iM,t} \\ h_{iM,t} & h_{Mt} \end{bmatrix}.$$

Test modelu CAPM można przeprowadzić, weryfikując hipotezy  $\alpha_i = \alpha_{iM} = 0$  oraz  $\lambda > 0$ . Zauważmy, że wszystkie rozważane dotychczas modele dotyczyły pojedynczego waloru (portfela). Przy testowaniu modelu CAPM wskazane jest wykorzystanie dużej liczby walorów.

Weryfikacja modelu CAPM może być przeprowadzona na podstawie testu wielowymiarowego. Niech  $\mathbf{y}_t = (y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{Nt})'$ , gdzie  $y_{it}$  oznacza nadwyżkę stopy zwrotu  $i$ -tego waloru nad stopą zwrotu wolną od ryzyka, a  $N$  liczbę walorów. Model CAPM można zapisać jako:

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\alpha} + \boldsymbol{\beta} x_t + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (5.2.9)$$

gdzie  $\boldsymbol{\alpha} = (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_N)'$  i  $\boldsymbol{\beta} = (\beta_1, \beta_2, \dots, \beta_N)'$  są wektorami parametrów,  $x_t = (r_{Mt} - r_{f,t})$ ,  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  to wektor składników losowych o wymiarach  $N \times 1$ . MacKinlay (1987) pokazał, że hipoteza  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_N = 0$  może być testowana na podstawie następującej statystyki:

$$\theta = \frac{(T-N-1)T}{(T-2)N} \left[ 1 + \frac{\bar{x}^2}{s_x^2} \right]^{-1} \hat{\mathbf{a}}' \hat{\mathbf{\Omega}}^{-1} \hat{\mathbf{a}}, \quad (5.2.10)$$

gdzie  $T$  oznacza liczbę obserwacji,  $\bar{x}$  i  $s_x^2$  to próbkowa wartość oczekiwana i wariancja nadwyżki stopy zwrotu z portfela rynkowego ponad stopę zwrotu wolną od ryzyka oraz  $\mathbf{\Omega} = E(\varepsilon_t \varepsilon_t')$ .

Jeżeli hipoteza zerowa głosząca, że  $\alpha_i = 0$  (dla każdego  $i$ ) jest prawdziwa, to statystyka  $\theta$  ma rozkład  $F$  o  $N$  i  $(T-N-1)$  stopniach swobody. Założenia, jakie muszą być spełnione w przypadku tego testu, są podobne do tych w jednowymiarowym teście CAPM, przeprowadzanym na podstawie równania (5.2.2). Zatem również w tym przypadku nie są one najczęściej spełnione w badaniach empirycznych.

Model CAPM dla  $N$ -aktywów można przedstawić w sposób dynamiczny jako<sup>206</sup>:

$$E(\mathbf{y}_t | \psi_{t-1}) = \lambda \mathbf{H}_t \boldsymbol{\omega}_{t-1}, \quad (5.2.11)$$

gdzie  $\mathbf{y}_t = (y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{Nt})'$ ,  $y_{it}$  – nadwyżka stopy zwrotu  $i$ -tego waloru nad stopą zwrotu wolną od ryzyka,  $\lambda$  – rynkowa cena ryzyka (parametr ten jest również czasem określany jako parametr awersji do ryzyka lub cena ryzyka kowariancji),  $\mathbf{H}_t$  – macierz warunkowych kowariancji o wymiarach  $N \times N$ ,  $\boldsymbol{\omega}_{t-1}$  – wektor udziałów poszczególnych walorów w portfelu rynkowym o wymiarach  $N \times 1$  (udział  $i$ -tego waloru jest określony jako iloraz wartości rynkowej danego waloru do wartości rynkowej wszystkich walorów).

Nadwyżka stopy zwrotu portfela rynkowego nad stopą wolną od ryzyka określona jest wzorem:

$$y_{Mt} = \mathbf{y}_t' \boldsymbol{\omega}_{t-1}, \quad (5.2.12)$$

a jej warunkowa wartość oczekiwana oraz warunkowa wariancja dane są odpowiednio formułami:

$$E(y_{Mt} | \psi_{t-1}) = \boldsymbol{\omega}_{t-1}' E(\mathbf{y}_t | \psi_{t-1}), \quad (5.2.13)$$

$$\text{var}(y_{Mt} | \psi_{t-1}) = \boldsymbol{\omega}_{t-1}' \mathbf{H}_t \boldsymbol{\omega}_{t-1}. \quad (5.2.14)$$

<sup>206</sup> Ponieważ model jest zdefiniowany na podstawie momentów warunkowych rozkładu, często określa się go jako warunkowy CAPM.

Teoria finansów nie określa, jaka ma być postać macierzy warunkowych kowariancji  $\mathbf{H}_t$ . Jeżeli przyjmiemy, że stopy zwrotu są opisane za pomocą wielorównaniowego modelu GARCH, to model (5.2.11) można przedstawić w postaci wielorównaniowego modelu GARCH-M (patrz Bollerslev, Engle i Wooldridge, 1988):

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\alpha} + \lambda \mathbf{H}_t \boldsymbol{\omega}_{t-1} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t | \psi_{t-1} \sim N(0, \mathbf{H}_t), \quad (5.2.15)$$

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{C}\mathbf{C}' + \sum_{i=1}^q \mathbf{D}_i \boldsymbol{\varepsilon}_{t-i} \boldsymbol{\varepsilon}_{t-i}' \mathbf{D}_i' + \sum_{j=1}^p \mathbf{E}_j \mathbf{H}_{t-j} \mathbf{E}_j', \quad (5.2.16)$$

gdzie  $\mathbf{C}$ ,  $\mathbf{D}_i$  oraz  $\mathbf{E}_j$  są macierzami parametrów o wymiarach  $N \times N$ . Jako postać wielorównaniowego modelu GARCH przyjęto model BEKK, jednakże możliwe są również inne specyfikacje modelu.

Test modelu CAPM polega na weryfikacji hipotezy  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_N = 0$ . Ponadto parametr  $\lambda$  powinien być dodatni i równy dla wszystkich  $N$ -walorów. Model w postaci (5.2.15–5.2.16) pozwala również na przeprowadzenie dodatkowych testów.

Zauważmy, że  $\mathbf{H}_t \boldsymbol{\omega}_{t-1}$  oznacza wektor kowariancji poszczególnych walorów i portfela rynkowego. Zatem równanie (5.2.15) można zapisać jako:

$$y_{it} = \alpha_i + \lambda \text{cov}(y_{it}, y_{Mt} | \psi_{t-1}) + \varepsilon_{it} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, N. \quad (5.2.17)$$

Model wyceny dóbr kapitałowych nie przewiduje dodatkowej stopy zwrotu za ryzyko, którego można uniknąć przez dywersyfikację, zatem parametr  $\gamma_i$  w następującym równaniu:

$$y_{it} = \alpha_i + \lambda \text{cov}(y_{it}, y_{Mt} | \psi_{t-1}) + \gamma_i \text{var}(y_{it} | \psi_{t-1}) + \varepsilon_{it} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, N \quad (5.2.18)$$

powinien być równy zeru dla wszystkich walorów. Ryzyko poszczególnych walorów (mierzone tutaj warunkowymi wariancjami) nie powinno mieć dodatkowego wpływu na oczekiwane stopy zwrotu walorów. Można również badać, czy inne czynniki, poza ryzykiem rynkowym, mają wpływ na oczekiwane stopy zwrotu. Estymuje się wówczas następujący model wielorównaniowy:

$$y_{it} = \boldsymbol{\varphi}' \mathbf{z}_{t-1} + \lambda \text{cov}(y_{it}, y_{Mt} | \psi_{t-1}) + \varepsilon_{it} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.2.19)$$

gdzie  $\mathbf{z}_{t-1}$  jest to wektor zmiennych zawartych w  $\psi_{t-1}$  o wymiarach  $k \times 1$ . Jako  $\mathbf{z}_{t-1}$  przyjmuje się czynniki, które mogą wpływać na oczekiwane stopy

zwrotu, jak na przykład wskaźnik dywidendy, stopy zwrotu indeksu międzynarodowego, różnice pomiędzy rentownościami długoterminowych obligacji i krótkoterminowych bonów skarbowych, różnice pomiędzy rentownością obligacji przedsiębiorstw a rentownością obligacji rządowych, zmiany stóp procentowych.

Zauważmy, że aby oszacować równania (5.2.11) i (5.2.15), muszą być znane udziały poszczególnych walorów w portfelu rynkowym ( $\omega_{t-1}$ ) dla całego badanego okresu. Dane dotyczące wartości rynkowej nie zawsze są dostępne dla każdego aktywu. Jeżeli nie mamy informacji o wartości rynkowej, model w postaci (5.2.15–5.2.16) można zapisać jako (patrz De Santis i Gerard, 1997):

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\alpha} + \lambda \mathbf{h}_{N_t} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t | \boldsymbol{\psi}_{t-1} \sim N(0, \mathbf{H}_t), \quad (5.2.20)$$

gdzie  $\mathbf{y}_t = (y_{1t}, y_{2t}, \dots, y_{N-1,t}, y_{Mt})'$ ,  $\mathbf{H}_t$  jest określone formułą (5.2.16), a  $h_{N_t}$  to  $N$ -ta kolumna macierzy  $\mathbf{H}_t$ .

Wektor  $\mathbf{y}_t$  zawiera stopy zwrotu dla  $N-1$  aktywów oraz dla portfela rynkowego. Gdyby model obejmował wszystkie  $N$ -aktywów, wówczas ostatnie równanie byłoby liniową kombinacją pozostałych równań. Równanie (5.2.20) można zatem przedstawić jako:

$$y_{it} = \alpha_i + \lambda \text{cov}(y_{it}, y_{Mt} | \boldsymbol{\psi}_{t-1}) + \varepsilon_{it} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, N-1, \quad (5.2.21)$$

$$y_{Mt} = \alpha_M + \lambda \text{var}(y_{Mt} | \boldsymbol{\psi}_{t-1}) + \varepsilon_{Mt}. \quad (5.2.22)$$

We wszystkich rozważanych dotychczas modelach przyjmuje się, że rynkowa cena ryzyka –  $\lambda$  – jest stała. Przypomnijmy, że  $\lambda$  dana jest wzorem  $\lambda = [E(r_{Mt} | \boldsymbol{\psi}_{t-1}) - r_{f,t}] / \text{var}(r_{Mt} | \boldsymbol{\psi}_{t-1})$ . Ponieważ zarówno warunkowa wartość oczekiwana, jak i warunkowa wariancja zmieniają się w czasie, można przypuszczać, że również rynkowa cena ryzyka nie jest stała w czasie. Teoria finansów nie precyzuje zmiennych, które wpływają na rynkową cenę ryzyka. Jakakolwiek parametryzacja dynamiki  $\lambda$  może być uznana jako ad hoc. Najczęściej zakłada się, że rynkowa cena ryzyka jest liniową funkcją zmiennych instrumentalnych:

$$\lambda_t = \boldsymbol{\kappa}' \mathbf{z}_{t-1}. \quad (5.2.23)$$

Jako  $\mathbf{z}_{t-1}$  przyjmuje się podobne zmienne do tych, jakie występują w równaniu (5.2.19). Jeżeli na parametry  $\boldsymbol{\kappa}$  nie zostaną nałożone dodatkowe restrykcje,

wówczas  $\lambda_t$  może przyjmować wartości ujemne. Ponieważ w teorii finansów zakłada się, że rynkowa cena ryzyka jest dodatnia (patrz np. Merton, 1980), dlatego w wielu pracach przyjmuje się następującą parametryzację  $\lambda_t$ :

$$\lambda_t = \exp(\boldsymbol{\kappa}' \mathbf{z}_{t-1}) . \quad (5.2.24)$$

Założenie o dodatniości rynkowej ceny ryzyka w ujęciu dynamicznym oznacza, że stopa zwrotu portfela rynkowego jest dla każdego okresu większa od stopy zwrotu wolnej od ryzyka. W takiej sytuacji żaden inwestor nie byłby zainteresowany inwestowaniem w aktywa wolne od ryzyka.

Przyjęte zmienne instrumentalne mogą nie odzwierciedlać dynamiki  $\lambda_t$ , dlatego parametry  $\boldsymbol{\kappa}$  w równaniach (5.2.23) lub (5.2.24) mogą być nieistotne, pomimo zmienności parametru w czasie. Z tego względu w pracy Fiszede-  
ra (2006a) zaproponowano postać wielorównaniowego modelu GARCH-M, w którym parametr  $\lambda$  jest opisany procesem błędzenia przypadkowego<sup>207</sup>:

$$\mathbf{y}_t = \mathbf{b}_t \mathbf{h}_{N_t} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad \boldsymbol{\varepsilon}_t | \boldsymbol{\psi}_{t-1} \sim N(0, \mathbf{H}_t), \quad (5.2.25)$$

$$\mathbf{b}_t = \mathbf{b}_{t-1} + \mathbf{v}_t, \quad \mathbf{v}_t \sim N(0, \mathbf{q}), \quad (5.2.26)$$

gdzie  $\mathbf{H}_t$  określone jest formułą (5.2.16) oraz  $\text{cov}(\boldsymbol{\varepsilon}_t, \mathbf{v}_t) = 0$ .

Parametry takiego modelu można estymować za pomocą metody quasi-największej wiarygodności, w której do budowy funkcji wiarygodności wykorzystuje się filtr Kalmana.

Już w latach siedemdziesiątych poprzedniego stulecia zauważono, że zależności pomiędzy stopami zwrotu a współczynnikami beta są inne w okresach wzrostów i spadków (patrz Fabozzi i Francis, 1978; Kim i Zumwalt, 1979). W wielu pracach pokazano, że ryzyko systematyczne, mierzone współczynnikiem beta, jest inne podczas hossy i bessy (patrz np. Chen, 1982; Bhardwaj i Brooks, 1993; Pettengill, Sundaram i Mathur, 1995). Ponieważ w modelu CAPM występują oczekiwane stopy zwrotu, a weryfikacja modelu jest przeprowadzana na podstawie zrealizowanych stóp zwrotu, wnioski dotyczące zależności pomiędzy stopami zwrotu a współczynnikami beta mogą być mylące. Pettengill, Sundaram i Mathur (1995) proponują, aby badać warunkową zależność pomiędzy współczynnikami beta a zrealizowanymi stopami zwrotu portfela rynkowego. Pokazują dalej, że zależność pomiędzy stopami zwo-

<sup>207</sup> Podobną postać, w przypadku jednorównaniowego modelu GARCH-M, zaproponowali Chou, Engle i Kane (1992).

tu a współczynnikami beta jest dodatnia, gdy rynkowa premia za ryzyko jest dodatnia. Ujemna zależność występuje natomiast wtedy, gdy rynkowa premia za ryzyko jest ujemna. Wykorzystując metodologię zaproponowaną przez Pettengilla, Sundarama i Mathura, w wielu pracach pokazano występowanie istotnej zależności pomiędzy stopami zwrotu a współczynnikami beta. Należy jednakże pamiętać, że metodologia ta opiera się na teście Famy i MacBetha (1973), a więc również i w tym przypadku założenia dotyczące własności składnika losowego i stałości parametrów nie są najczęściej spełnione w badaniach empirycznych.

Mając na uwadze powyższe własności, Fiszeder (2006a) zaproponował nową postać wielorównaniowego modelu GARCH-M:

$$y_t = \alpha + \lambda^+ I_t h_{Nt} + \lambda^- (1 - I_t) h_{Nt} + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t | \psi_{t-1} \sim N(0, H_t), \quad (5.2.27)$$

gdzie  $H_t$  określone jest formułą (5.2.16), a  $I_t = 1$  gdy  $x_{t-k} \geq 0$  i  $I_t = 0$  gdy  $x_{t-k} < 0$ .

Model zakłada, że rynkowa cena ryzyka może być różna, w zależności od tego, czy zmienna egzogeniczna  $x_{t-k}$  jest dodatnia, czy ujemna. Powyższy model będzie dalej określany jako wielorównaniowy model GARCH z progowym efektem GARCH-M. Model ten można traktować jako rozszerzenie jednorównaniowego modelu GARCH z progowym efektem GARCH-M (patrz GARCH-MT w tabeli 1.1). Podobnie jak w przypadku jednorównaniowym, jako  $x_{t-k}$  można przyjąć np. stopy zwrotu indeksu rynku akcji w Stanach Zjednoczonych lub szerszego indeksu międzynarodowego.

### 5.2.2. WERYFIKACJA MODELU CAPM DLA GPW W WARSZAWIE

Model CAPM był przedmiotem licznych analiz empirycznych (patrz np. Haugen, 1996; Elton i Gruber, 1998). Rezultaty tych badań były bardzo zróżnicowane. Niektóre świadczyły na korzyść, inne przeciwko modelowi CAPM. W wielu badaniach pokazano, że współczynniki beta nie są jedyną determinantą różnic występujących pomiędzy stopami zwrotu. Takie czynniki jak: kapitalizacja spółki, wskaźnik cena do wartości księgowej, wskaźnik cena do zysku, zmienne makroekonomiczne wpływały istotnie na oczekiwane stopy zwrotu. Test modelu CAPM z zastosowaniem wielorównaniowego modelu GARCH przeprowadzili między innymi: Bollerslev, Engle i Wooldridge (1988), Giovannini i Jorion (1989), Ng (1991), Chan, Karolyi i Stulz (1992),



De Santis i Gerard (1997). Wyniki badań z zastosowaniem modelu GARCH również nie były jednoznaczne.

Weryfikacją modelu CAPM dla GPW w Warszawie zajmowali się między innymi: Gajdka i Wolski (1998), Bołt i Miłobędzki (2002), Byrka-Kita i Rozkrut (2004) oraz Trzpiot i Krężolek (2006). Wyniki uzyskane przez Bołta i Miłobędzkiego (2002) przemawiały na korzyść modelu CAPM, jednak ponieważ zastosowali oni test w postaci (5.2.10), weryfikowali więc wyłącznie hipotezę o nieistotności wyrazów wolnych w równaniu (5.2.9). Wyniki pozostałych badań świadczyły przeciwko modelowi CAPM, co było związane przede wszystkim z występowaniem ujemnej premii za ryzyko. Powyższe badania nie uwzględniały zmienności warunkowych wariancji i kowariancji oraz współczynników beta. W pracach Byrki-Kity i Rozkruta (2004) oraz Trzpiot i Krężółka (2006) dopuszczono zmienność współczynników beta, ale jedynie w zależności od tego, czy zrealizowana stopa zwrotu portfela rynkowego jest większa czy mniejsza od stopy zwrotu wolnej od ryzyka. W niniejszej pracy zastosowano wielorównaniowe modele GARCH, co pozwoliło uwzględnić zmienność warunkowych wariancji, kowariancji oraz współczynników beta.

Ponieważ błędy oszacowania współczynników beta portfeli są mniejsze niż błędy oszacowania współczynników beta pojedynczych walorów, dlatego lepiej jest przeprowadzić test modelu CAPM na podstawie portfeli (patrz Elton i Gruber, 1998). W niniejszym badaniu zastosowano indeksy sektorowe. Informacje na temat udziałów poszczególnych sektorów w portfelu rynkowym nie są znane dla całego badanego okresu, z tego względu do analizy przyjęto model w postaci (5.2.20). Gdyby model obejmował wszystkie sektory, wówczas równanie dla portfela rynkowego byłoby liniową kombinacją pozostałych równań. Dodatkowo estymacja zastosowanego modelu GARCH, przy większej liczbie walorów, jest praktycznie niemożliwa (ze względu na liczbę parametrów)<sup>208</sup>. Dlatego też w badaniu pominięto sektory, których udział w kapitalizacji całego rynku był niewielki (poniżej 5%). De Santis i Gerard (1997) zwracają uwagę, że test CAPM może być przeprowadzony na dowolnej podgrupie walorów, jednakże wraz ze zmniejszaniem się liczby badanych walorów, maleje moc testu. Do badania przyjęto następujące sektory: spożywczy, chemiczny, metalowy, banki i telekomunikacja. Spółki wchodzące w skład wybranych sektorów stanowiły ponad 75% kapitalizacji całego rynku, zatem moc testu powinna być stosunkowo duża. Na przykład spółki, na

<sup>208</sup> Na przykład dla 15 walorów w modelu BEKK(1,1) występuje 570 parametrów.

podstawie których oblicza się subindeksy sektorowe indeksu WIG stanowiły tylko około 50% kapitalizacji rynku.

Badano tygodniowe stopy zwrotu w okresie od 1 stycznia 1995 r. (dane dla wcześniejszego okresu nie są dostępne) do 31 lipca 2004 roku. Skrócenie przyjętego okresu nie jest celowe z uwagi na stosowane procedury estymacyjne, które wymagają relatywnie długich szeregów czasowych. Jako stopę wolną od ryzyka przyjęto rentowność 52-tygodniowych bonów skarbowych, a jako portfel rynkowy indeks WIG (indeks ten obejmuje największą liczbę spółek notowanych na GPW w Warszawie)<sup>209</sup>. W pierwszej kolejności zastosowano test bez modelu GARCH dany formułą (5.2.10). Na podstawie uzyskanych wyników ( $\hat{\theta}=1,19$ ), nie było podstaw do odrzucenia hipotezy  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_N = 0$ , co przemawia na korzyść modelu CAPM. Jednakże większość założeń dotyczących składnika losowego  $\varepsilon_t$  w równaniu (5.2.9) nie była w tym przypadku spełniona (homoskedastyczność i normalność). Ponadto test ten weryfikuje wyłącznie hipotezę o nieistotności wyrazów wolnych w równaniu (5.2.9).

W dalszej kolejności estymowano model GARCH-M w postaci (5.2.20) bez wektora  $\alpha$ , gdzie jako wielorównaniowy model GARCH przyjęto model BEKK w postaci (5.2.16) z  $p=1$  i  $q=1$ . Model BEKK zapewnia dodatnią określoność macierzy kowariancji  $H_t$ , a z drugiej strony nie nakłada z góry na macierz kowariancji krępujących ograniczeń, jak np. model stałych korelacji czy model DCC. Ponieważ nie udało się oszacować modelu w ogólnej postaci (prawdopodobnie ze względu na dużą liczbę parametrów, która wynosiła 94), przyjęto model BEKK w postaci diagonalnej, tzn. model, w którym macierze  $D_t$  i  $E_j$  w równaniu (5.2.16) są macierzami diagonalnymi. Słuszność takiego założenia potwierdzają szacunki dla modeli o mniejszych wymiarach (gdzie parametry znajdujące się poza przekątną w macierzach  $D_t$  i  $E_j$  były nieistotne statystycznie) oraz wyniki testu na istotność współczynników korelacji wzajemnej dla kwadratów stóp zwrotu badanych szeregów czasowych. W celu dalszego zmniejszenia liczby szacowanych parametrów przyjęto, że macierz  $C$  w równaniu (5.2.16) jest macierzą trójkątną. Uzyskane wyniki przedstawiono w tabeli 5.9. Liczby od 1 do 6 oznaczają odpowiednio sektory: spożywczy, chemiczny, metale, banki, telekomunikacja i indeks WIG.

<sup>209</sup> Model CAPM nie określa jednoznacznie częstotliwości danych, portfela rynkowego, jak i stopy wolnej od ryzyka. Ich wybór jest zawsze kwestią dyskusyjną i może mieć wpływ na uzyskane wyniki. Weryfikację modelu CAPM z zastosowaniem modeli GARCH dla innych rynków akcji na świecie przeprowadzano najczęściej na podstawie danych miesięcznych, jednakże w przypadku braku wystarczającej liczby obserwacji stosowano również dane o większej częstotliwości, np. dane tygodniowe lub dzienne.

TABELA 5.9. WYNIKI ESTYMACJI MODELU GARCH-M W POSTACI (5.2.20) BEZ WEKTORA  $\alpha$ 

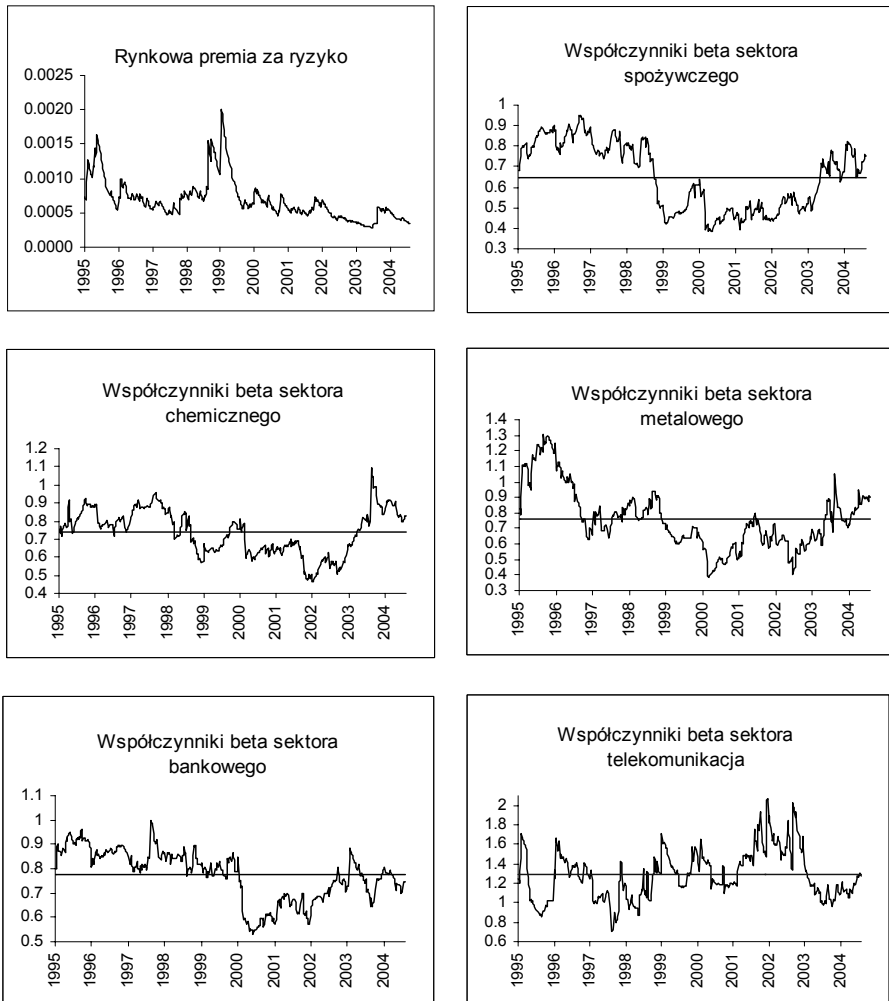
Parametr	Ocena par.	Błąd oceny	Stat. t	Parametr	Ocena par.	Błąd oceny	Stat. t
$\lambda$	0,4365	1,3211	0,33	$c_{62}$	-0,0028	0,0007	3,83
$c_{12}$	0,0049	0,0013	3,73	$c_{63}$	0,0005	0,0005	1,00
$c_{21}$	0,0041	0,0019	2,11	$c_{64}$	-0,0022	0,0007	3,09
$c_{22}$	-0,0046	0,0013	3,52	$c_{65}$	0,0014	0,0003	4,24
$c_{31}$	0,0040	0,0014	2,86	$c_{66}$	0,0025	0,0006	4,51
$c_{32}$	-0,0020	0,0008	2,66	$d_{11}$	0,1851	0,0261	7,09
$c_{33}$	0,0051	0,0012	4,18	$d_{22}$	0,1711	0,0300	5,71
$c_{41}$	0,0027	0,0010	2,59	$d_{33}$	0,2127	0,0306	6,95
$c_{42}$	-0,0020	0,0006	3,60	$d_{44}$	0,2184	0,0295	7,40
$c_{43}$	0,0001	0,0005	0,26	$d_{55}$	0,2635	0,0402	6,56
$c_{44}$	-0,0039	0,0008	5,04	$d_{66}$	0,2126	0,0300	7,09
$c_{51}$	0,0059	0,0029	2,03	$e_{11}$	0,9729	0,0074	130,82
$c_{52}$	-0,0040	0,0019	2,11	$e_{22}$	0,9707	0,0109	88,96
$c_{53}$	0,0001	0,0015	0,06	$e_{33}$	0,9650	0,0095	101,95
$c_{54}$	-0,0026	0,0020	1,32	$e_{44}$	0,9642	0,0091	106,49
$c_{55}$	0,0112	0,0027	4,13	$e_{55}$	0,9487	0,0155	61,29
$c_{61}$	0,0039	0,0017	2,33	$e_{66}$	0,9630	0,0116	82,87

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2006A).

Wszystkie oceny parametrów w macierzach  $D_1$  i  $E_1$  są istotne statystycznie, co wskazuje na występowanie silnych zależności pomiędzy wariancjami badanych szeregów czasowych. Ocena parametru  $\lambda$  jest dodatnia, jednakże nieistotna statystycznie, co świadczy przeciwko modelowi CAPM. Przeprowadzone testy diagnostyczne dotyczące występowania autokorelacji i efektu ARCH potwierdziły prawidłową specyfikację modelu. Rozkłady standaryzowanych reszt mają grube ogony, dlatego do estymacji parametrów zastosowano metodę quasi-największej wiarygodności. Otrzymane tą metodą estymatory są zgodne i asymptotycznie nieobciążone. Rezultaty dodatkowych badań niezamieszczonych w pracy wskazują, że specyfikacja rozkładu warunkowego i przyjęcie na przykład warunkowego rozkładu t-Studenta nie ma istotnego wpływu na prezentowane w pracy wyniki.

Oszacowana na podstawie wielorównaniowego modelu GARCH-M rynkowa premia za ryzyko oraz warunkowe współczynniki beta, wyznaczone na podstawie formuły (5.2.4) dla wszystkich badanych sektorów, zostały przedstawione na rysunku 5.1. Rynkowa premia za ryzyko znacząco zmieniała się

w czasie (na przykład w styczniu 1999 r. była ponad pięciokrotnie większa niż w pierwszym półroczu 2003 r.). Największy jej wzrost wystąpił w sierpniu i wrześniu 1998 r., co było związane z kryzysem finansowym w Rosji oraz w styczniu 1999 r., co było związane z kryzysem finansowym w Brazylii.



**RYСУNEK 5.1. RYNKOWA PREMIA ZA RYZYKO ORAZ WARUNKOWE I BEZWARUNKOWE WSPÓLCZYNNIKI BETA, OSZACOWANE NA PODSTAWIE MODELU GARCH-M W POSTACI (5.2.20)**

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2006A).

Oszacowane warunkowe współczynniki beta również zmieniały się w czasie. Największe zmiany nastąpiły w przypadku sektorów metalowego i telekomunikacji, ale również w przypadku innych sektorów szacunki warunkowych współczynników beta utrzymywały się przez długi okres (nawet przez kilka lat) poniżej lub powyżej średniej wartości. Dla wszystkich sektorów, poza telekomunikacją, przez większą część badanego okresu szacunki warunkowych współczynników beta były poniżej jedności, co oznacza, że sektory te są mało wrażliwe na zmiany zachodzące na rynku (akcje wchodzące w skład tych sektorów są najczęściej akcjami defensywnymi). Sektor telekomunikacja jest sektorem agresywnym, co oznacza, że jest portfelem bardziej ryzykownym aniżeli portfel rynkowy.

W dalszej kolejności przeprowadzono szereg dodatkowych testów dotyczących rozszerzonych postaci modelu, które miały na celu zbadanie poprawności przyjętej specyfikacji. Wyniki tych testów mogą dodatkowo świadczyć na korzyść lub przeciwko modelowi CAPM. Najpierw weryfikowano hipotezę  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_N = 0$ . Oceny parametrów dla modelu GARCH-M, w postaci (5.2.20), z wektorem  $\alpha$  zostały przedstawione w tabeli 5.10.

TABELA 5.10. WYNIKI ESTYMACJI MODELU GARCH-M W POSTACI (5.2.20) Z WEKTOREM  $\alpha$

Parametr	Ocena par.	Błąd oceny	Stat. t
$\alpha_{\text{epoz}}$	-0,0005	0,0027	0,20
$\alpha_{\text{chem}}$	0,0008	0,0031	0,25
$\alpha_{\text{met}}$	-0,0017	0,0033	0,53
$\alpha_{\text{banki}}$	-0,0011	0,0029	0,38
$\alpha_{\text{tel}}$	-0,0021	0,0057	0,37
$\alpha_{\text{WIG}}$	-0,0019	0,0037	0,52
$\lambda$	1,6752	2,6102	0,64

W tabeli pominięto oceny parametrów w warunkowej macierzy kowariancji, ponieważ były bardzo zbliżone do tych, jakie występowały w modelu bez wektora  $\alpha$  (tabela 5.9).

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2006A).

Szacunki parametrów w warunkowej macierzy kowariancji były bardzo zbliżone do tych, jakie występowały w modelu bez stałej, dlatego zaprezentowano jedynie oceny w równaniach dla średnich warunkowych (podobnie było w przypadku pozostałych modeli prezentowanych w dalszej części pracy). Wszystkie oceny parametrów  $\alpha$  są nieistotne statystycznie. Taki sam wynik otrzymano przy weryfikowaniu hipotezy łącznie dla wszystkich parametrów  $\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_N = 0$  (zastosowano test ilorazu wiarygodności LR). Obli-

czenia zostały zaprezentowane w tabeli 5.11. Ten wynik przemawia na korzyść modelu CAPM, jednakże ocena parametru  $\lambda$  pozostała nieistotna.

**TABELA 5.11. TESTOWANIE ROZSZERZONYCH POSTACI MODELU CAPM**

Weryfikowane hipotezy	Liczba stopni swobody	LR
$\alpha_1 = \alpha_2 = \dots = \alpha_N = 0$	6	6,33
$\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_N$	5	4,35
$\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_{N-1} = 0$	5	5,01
$v_1 = v_2 = \dots = v_{N-1} = 0$	5	4,26
$\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_N = 0$ (S&P1)	6	79,46*
$\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_N = 0$ (S&P <sub>t-1</sub> )	6	12,68*

Gwiazdka oznacza oceny statystyk, w przypadku których weryfikowana hipoteza została odrzucona na poziomie istotności 0,05.

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2006A).

Nieistotność parametru  $\lambda$  może wynikać z faktu, że jest on różny dla różnych sektorów. W celu weryfikacji hipotezy  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_N = \lambda$  oszacowano model GARCH-M, przy założeniu, że parametr  $\lambda$  jest różny w każdym równaniu. Uzyskane wyniki przedstawia tabela 5.12. Oceny parametrów  $\lambda$  różnią się między sobą (najwyższe oceny występowały dla sektora chemicznego i spożywczego, a najniższe dla sektora metalowego), jednakże na podstawie testu *LR* (tabela 5.11) nie ma podstaw do tego, aby odrzucić hipotezę  $\lambda_1 = \lambda_2 = \dots = \lambda_N$ . Ponadto wszystkie oceny są nieistotne statystycznie. Zatem zróżnicowanie parametru  $\lambda$  pomiędzy sektorami nie może być powodem braku istotności tego parametru w modelu CAPM.

**TABELA 5.12. WYNIKI ESTYMACJI MODELU GARCH-M W POSTACI (5.2.20) – PARAMETR  $\lambda$  RÓŻNY W KAŻDYM RÓWNANIU**

Parametr	Ocena par.	Błąd oceny	Stat. t
$\lambda_{\text{spoz}}$	1,4641	1,5249	0,96
$\lambda_{\text{chem}}$	1,4666	1,5734	0,93
$\lambda_{\text{met}}$	0,4176	1,5924	0,26
$\lambda_{\text{banki}}$	1,2611	1,4784	0,85
$\lambda_{\text{tel}}$	0,7099	1,6443	0,43
$\lambda_{\text{WIG}}$	0,4530	1,3047	0,35

W tabeli pominięto oceny parametrów w warunkowej macierzy kowariancji, ponieważ były bardzo zbliżone do tych, jakie występowały w modelu bez wektora  $\alpha$  (tabela 5.9).

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2006A).

Model CAPM nie przewiduje dodatkowej stopy zwrotu za ryzyko, którego można uniknąć przez dywersyfikację, zatem parametr  $\gamma_i$  w równaniu (5.2.18) powinien być nieistotny dla wszystkich badanych sektorów. Oszacowany model GARCH-M, rozszerzony o warunkowe wariancje poszczególnych sektorów w równaniach dla średnich warunkowych, przedstawia tabela 5.13. Ocena żadnego z parametrów  $\gamma_i$  nie była istotna statystycznie. Taki sam wynik otrzymano przy weryfikowaniu hipotezy łącznie dla wszystkich parametrów  $\gamma_1 = \gamma_2 = \dots = \gamma_{N-1} = 0$  (obliczenia zostały zaprezentowane w tabeli 5.11). W równaniu (5.2.18) nie dodaje się wariancji dla indeksu WIG, ponieważ zgodnie z formułą (5.2.22) występuje ona już w równaniu (dlatego w tabeli 5.13 nie ma parametru  $\gamma_{WIG}$ ). Ryzyko poszczególnych sektorów (mierzone tutaj warunkowymi wariancjami) nie ma zatem dodatkowego wpływu na oczekiwane stopy zwrotu.

**TABELA 5.13. WYNIKI ESTYMACJI MODELU GARCH-M ROZSZERZONEGO O WARIANCJE WARUNKOWE W RÓWNANIACH DLA ŚREDNICH**

Parametr	Ocena par.	Błąd oceny	Stat. t
$\lambda$	0,4639	1,2211	0,38
$\gamma_{\text{spoz}}$	0,8029	1,1781	0,68
$\gamma_{\text{chem}}$	1,1378	1,1451	0,99
$\gamma_{\text{met}}$	0,0518	0,9512	0,05
$\gamma_{\text{banki}}$	0,6266	1,0671	0,59
$\gamma_{\text{tel}}$	0,1352	1,1483	0,12

W tabeli pominięto oceny parametrów w warunkowej macierzy kowariancji, ponieważ były bardzo zbliżone do tych, jakie występowały w modelu bez wektora  $\alpha$  (tabela 5.9).

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2006A).

W następnych testach zbadano, czy inne czynniki, poza współczynnikiem beta, mają wpływ na oczekiwane stopy zwrotu walorów. Estymowano parametry modelu GARCH-M, w którym, zamiast równań w postaci (5.2.21), stopy zwrotu dane są formułą (5.2.19). Jako  $z_{t-1}$  przyjęto wariancję warunkową stóp zwrotu portfela rynkowego oraz stopy zwrotu indeksu S&P 500. Równanie w modelu rozszerzonym o wariancję stóp zwrotu portfela rynkowego dane jest formułą:

$$y_{it} = v_i \text{var}(y_{Mt} | \psi_{t-1}) + \lambda \text{cov}(y_{it}, y_{Mt} | \psi_{t-1}) + \varepsilon_{it} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, N - 1. \quad (5.2.28)$$

Uzyskane szacunki przedstawiono w tabeli 5.14, a wyniki testu przy badaniu łącznym – w tabeli 5.11. Wszystkie oceny parametrów  $v_i$  są nieistotne statystycznie (ten wynik świadczy na korzyść modelu CAPM), jednakże ocena parametru  $\lambda$  pozostała nieistotna.

**TABELA 5.14. WYNIKI ESTYMACJI MODELU GARCH-M ROZSZERZONEGO O WARIANCJĘ STÓP ZWROTU PORTFELA RYNKOWEGO**

Parametr	Ocena par.	Błąd oceny	Stat. t
$\lambda$	0,4666	1,2585	0,37
$v_{\text{poz}}$	0,5862	0,5938	0,99
$v_{\text{chem}}$	0,7106	0,6534	1,09
$v_{\text{met}}$	-0,2198	0,8173	0,27
$v_{\text{banki}}$	0,6244	0,5576	1,12
$v_{\text{tel}}$	0,4864	1,2465	0,39

W tabeli pominięto oceny parametrów w warunkowej macierzy kowariancji, ponieważ były bardzo zbliżone do tych, jakie występowały w modelu bez wektora  $\alpha$  (tabela 5.9).

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2006A).

Koniunktura na większości rynków akcji na świecie jest w dużym stopniu uzależniona od koniunktury na rynku akcji w Nowym Jorku. Podobnie jest w przypadku GPW w Warszawie. Pomiędzy indeksem WIG a indeksami giełdy w Nowym Jorku występują silne zależności (patrz np. Fiszeder, 2001b, 2003a, punkty 2.5.1 i 2.6.2 niniejszej pracy). W badaniu zastosowano indeks S&P 500, ponieważ dobrze mierzy on koniunkturę na szerokim rynku akcji i jest jednym z najczęściej analizowanych indeksów rynku akcji w Stanach Zjednoczonych. Rozważano dwa modele GARCH-M rozszerzone o stopy zwrotu indeksu S&P 500:

$$y_{it} = \varphi_i r_{S\&P} + \lambda \text{cov}(y_{it}, y_{Mt} | \psi_{t-1}) + \varepsilon_{it} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.2.29)$$

gdzie jako  $r_{S\&P}$  przyjęto stopy zwrotu w chwili  $t$  (pierwszy model) i  $t-1$  (drugi model). Uzyskane szacunki dla pierwszego z modeli zaprezentowano w tabeli 5.15.



**TABELA 5.15. WYNIKI ESTYMACJI MODELU GARCH-M ROZSZERZONEGO O JEDNOCZESNE STOPY ZWROTU INDEKSU S&P**

Parametr	Ocena par.	Błąd oceny	Stat. t
$\lambda$	-0,3885	1,3208	0,29
$\varphi_{\text{spoz}}$	0,3124	0,0575	5,44
$\varphi_{\text{chem}}$	0,3475	0,0745	4,66
$\varphi_{\text{met}}$	0,3405	0,0768	4,43
$\varphi_{\text{banki}}$	0,3769	0,0707	5,33
$\varphi_{\text{tel}}$	0,7499	0,1453	5,16
$\varphi_{\text{WIG}}$	0,4854	0,0735	6,60

W tabeli pominięto oceny parametrów w warunkowej macierzy kowariancji, ponieważ były bardzo zbliżone do tych, jakie występowały w modelu bez wektora  $\alpha$  (tabela 5.9).

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2006A).

Indeks S&P 500 miał bardzo silny wpływ na stopy zwrotu indeksu WIG i wszystkich sektorów (najsilniejszy dla sektora telekomunikacja). Taki sam wynik otrzymano przy weryfikowaniu hipotezy łącznie dla wszystkich parametrów  $\varphi_1 = \varphi_2 = \dots = \varphi_N = 0$  (tabela 5.11). W przypadku, gdy stopy zwrotu indeksu S&P 500 są z chwili  $t-1$ , wpływ na badane sektory jest dużo słabszy (istotny tylko w przypadku sektora banki), ale nadal istotny przy badaniu łącznym (tabela 5.11). Uzyskane rezultaty świadczą przeciwko modelowi CAPM. Wobec istnienia silnych powiązań między GPW w Warszawie a rynkami akcji na świecie, indeks WIG nie powinien być traktowany jako portfel rynkowy lub należałoby rozszerzyć model CAPM o indeks odzwierciedlający koniunkturę na innych rynkach akcji na świecie (model wieloczynnikowy, patrz podrozdział 5.3).

We wszystkich rozważanych dotychczas modelach przyjmuje się, że rynkowa cena ryzyka –  $\lambda$  – jest stała. Przyczyną braku istotności parametru  $\lambda$  w powyższych modelach może być jego zmienność w czasie. W celu weryfikacji tej hipotezy estymowano model GARCH-M, dla którego  $\lambda_t$  jest dane formułą (5.2.23). Jako  $\mathbf{z}_{t-1}$  przyjęto stopy zwrotu indeksu S&P 500. Uzyskane wyniki zaprezentowano w tabeli 5.16.

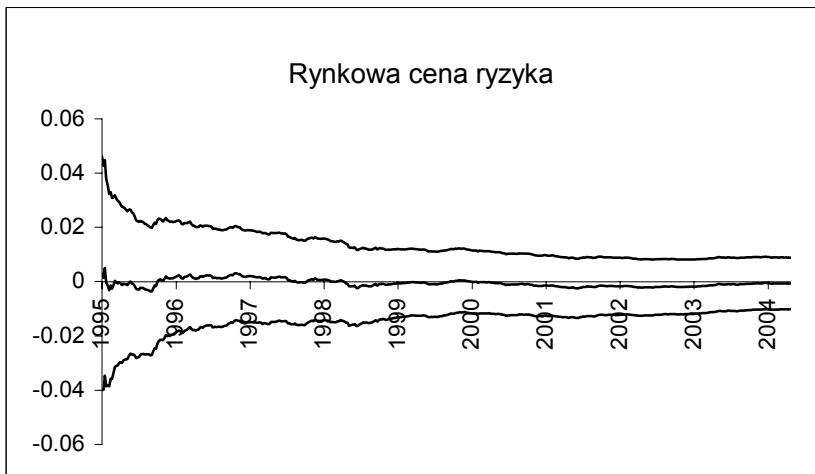
**TABELA 5.16. WYNIKI ESTYMACJI MODELU GARCH-M ZE ZMIENNĄ CENĄ RYZYKA, SZACOWANĄ NA PODSTAWIE STÓP ZWROTU INDEKSU S&P**

Parametr	Ocena par.	Błąd oceny	Stat. t
$\kappa_0$	0,5835	1,2785	0,46
$\kappa_1$	-59,2745	43,7438	1,36

W tabeli pominięto oceny parametrów w warunkowej macierzy kowariancji, ponieważ były bardzo zbliżone do tych, jakie występowały w modelu bez wektora  $\alpha$  (tabela 5.9).

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2006A).

Ocena parametru  $\kappa_1$  jest nieistotna, co wskazuje na stałość parametru  $\lambda_t$ . Przyjęta parametryzacja rynkowej ceny ryzyka może jednak nie odzwierciedlać dynamiki  $\lambda_t$ , dlatego dodatkowo estymowano model w postaci (5.2.25–5.2.26), w którym parametr  $\lambda$  jest opisany jako proces błądzenia przypadkowego. Ponieważ nie można w tradycyjny sposób testować istotności parametru  $q$ , dlatego jako kryterium stałości parametru wykorzystano przedziały ufności wyznaczone na podstawie filtru Kalmana. Jeżeli  $q = 0$ , to jego estymator nie ma standardowego rozkładu (patrz Harvey A. C., 1989). Rysunek 5.2 przedstawia punktowe oceny  $b_t$  wraz z 95% przedziałami ufności wyznaczonymi na podstawie filtru Kalmana.



**RYСУNEK 5.2. PUNKTOWE OCENY  $b_t$  ORAZ 95% PRZEDZIAŁY UFNOŚCI DLA RYNKOWEJ CENY RYZYKA**

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2006A).

Uzyskane oceny  $b_t$  oraz przedziały ufności wskazują na stałość rynkowej ceny ryzyka. Podobne wyniki uzyskali Fiszeder i Kwiatkowski (2005a) dla większości analizowanych spółek i indeksów, notowanych na GPW w Warszawie, w przypadku jednorównaniowych modeli GARCH-M. Stosunkowo szerokie przedziały ufności sugerują, że również ta parametryzacja rynkowej ceny ryzyka może nie odzwierciedlać dynamiki  $\lambda_t$ . Z tego względu estymowano zaproponowany model GARCH z progowym efektem GARCH-M w postaci (5.2.27). Jako zmienną egzogeniczną przyjęto stopy zwrotu indeksu S&P 500. Uzyskane wyniki przedstawia tabela 5.17.

**TABELA 5.17. WYNIKI ESTYMACJI MODELU GARCH Z PROGOWYM EFEKTEM GARCH-M**

Parametr	Ocena par.	Błąd oceny	Stat. t
$\lambda^+$	7,8785	1,5765	4,997
$\lambda^-$	-9,4564	2,1033	-4,496

W tabeli pominięto oceny parametrów w warunkowej macierzy kowariancji, ponieważ były bardzo zbliżone do tych, jakie występowały w modelu bez wektora  $\alpha$  (tabela 5.9).

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2006A).

Oceny parametrów  $\lambda^+$  i  $\lambda^-$  są istotne statystycznie i wskazują, że rynkowa cena ryzyka jest dodatnia, gdy stopa zwrotu indeksu S&P 500 jest dodatnia oraz ujemna, gdy stopa zwrotu indeksu S&P 500 jest ujemna. Występuje zatem asymetryczny efekt GARCH-M, podobny do tego, jaki zaobserwowano w przypadku analizy jednowymiarowej dla większości spółek i indeksów notowanych na GPW w Warszawie (patrz punkt 4.4.2). Otrzymane rezultaty wyjaśniają, dlaczego dla modelu w postaci (5.2.25–5.2.26) uzyskano tak szerokie przedziały ufności dla  $b_t$  oraz dlaczego w pozostałych modelach GARCH-M otrzymano nieistotne szacunki parametru  $\lambda$ . Uzyskany wynik świadczy przeciwko klasycznemu modelowi CAPM, ponieważ rynkowa cena ryzyka powinna być dodatnia (patrz Merton, 1980). Wydaje się, że zaproponowany model pozwala lepiej opisać zależności między oczekiwanymi stopami zwrotu a warunkowymi kowariancjami stóp zwrotu badanych sektorów, jednakże wobec wyników przedstawionych w podrozdziale 5.3 nie stanowi mocnego argumentu przemawiającego za teorią CAPM. Podobnie jak w przypadku jednorównaniowym, zaobserwowana zależność mogłaby okazać się nieistotna, gdyby zastosować model VAR-BEKK dla wszystkich badanych sektorów i indeksów WIG i S&P 500 łącznie, jednakże ze względu na dużą liczbę parametrów nie udało się oszacować parametrów takiego modelu.

## WNIOSKI

Model CAPM opisuje mechanizm kształtowania się stóp zwrotu i cen instrumentów finansowych przy założeniu, że inwestorzy działają w sposób racjonalny. W podrozdziale 5.2 przedstawiono testy modelu CAPM z zastosowaniem wielorównaniowych modeli GARCH-M. Zaproponowano dwie nowe postacie wielorównaniowego modelu GARCH-M: model, w którym rynkowa cena ryzyka jest opisana za pomocą procesu błędzenia przypadkowego oraz wielorównaniowy model z progowym efektem GARCH-M. Przeprowadzono również weryfikację modelu CAPM na podstawie sektorów notowanych na GPW w Warszawie. Oszacowane, na podstawie wielorównaniowego modelu GARCH-M warunkowe współczynniki beta oraz rynkowa premia za ryzyko zmieniały się w czasie. Największy wzrost rynkowej premii za ryzyko nastąpił w okresach kryzysów finansowych w Rosji i Brazylii.

Część uzyskanych wyników przemawiała na korzyść modelu CAPM: wyrazy wolne w równaniach nie różniły się istotnie od zera, rynkowa cena ryzyka była równa dla wszystkich sektorów, wariancja warunkowa stóp zwrotu portfela rynkowego oraz ryzyko poszczególnych sektorów (ryzyko, którego nie można uniknąć przez dywersyfikację) nie miało dodatkowego wpływu na oczekiwane stopy zwrotu. Inne wyniki świadczyły jednakże przeciwko modelowi CAPM. Zależność pomiędzy oczekiwanymi stopami zwrotu badanych sektorów a kowariancjami stóp zwrotu sektorów i portfela rynkowego, badana na podstawie standardowych postaci modelu GARCH-M, nie była istotna statystycznie. Ponadto model CAPM powinien być rozszerzony o indeks odzwierciedlający koniunkturę na innych rynkach akcji na świecie (indeks S&P 500 miał bardzo silny wpływ na stopy zwrotu indeksu WIG i wszystkich badanych sektorów). Propozycja rozszerzenia modelu CAPM o indeks światowej koniunktury dotyczy prawdopodobnie również innych rynków akcji na świecie i jest zgodna z krytyką Rolla (1977), który twierdził, że skonstruowanie portfela rynkowego jest niemożliwe, ponieważ zawiera on wszystkie aktywa istniejące w międzynarodowym systemie ekonomicznym. Wyniki uzyskane na podstawie zaproponowanego modelu z progowym efektem GARCH-M wskazują, że zależność pomiędzy oczekiwanymi stopami zwrotu a kowariancjami jest istotna statystycznie, jednakże rynkowa cena ryzyka jest dodatnia, gdy stopa zwrotu indeksu S&P 500 jest dodatnia oraz ujemna, gdy stopa zwrotu indeksu S&P 500 jest ujemna.

Wiele spośród rozważanych specyfikacji modeli GARCH nie dało potwierdzenia pożądanых cech modelu równowagi rynku. Może to być spowo-

dowane wieloma czynnikami, o których wspomina się również przy testowaniu klasycznej wersji modelu CAPM, jak np. niewłaściwie dobrany portfel rynkowy czy niewłaściwy miernik stopy wolnej od ryzyka. Przyjęte w pracy zmienne są jednymi z najczęściej stosowanych w tego typu badaniach, co nie oznacza, że są to zmienne właściwe. Haugen (1996) oraz Elton i Gruber (1998) wyjaśniają szerzej powszechnie znane trudności z weryfikacją modelu CAPM.

### 5.3. MODEL APT

Problemy związane z weryfikacją modelu CAPM legły u podstaw gwałtownego wzrostu zainteresowania alternatywnymi teoriami wyceny aktywów kapitałowych. Spośród nich duże uznanie zyskała teoria arbitrażu cenowego APT (Ross, 1976). Model APT można z jednej strony potraktować jako teorię konkurencyjną, a z drugiej strony jako teorię rozszerzającą CAPM. W odróżnieniu od modelu CAPM, w modelu APT zakłada się, że istnieje wiele czynników ryzyka determinujących sytuację na rynku papierów wartościowych, dlatego równowaga występująca w teorii arbitrażu cenowego ma charakter bardziej ogólny od równowagi określonej przez model CAPM.

Klasyczna wersja modelu APT jest statyczna, tzn. rozważa się wyróżniony okres czy moment, a nie ich sekwencję. Z tego względu podejście takie nie uwzględnia zmienności warunkowych wariancji stóp zwrotu czynników i aktywów oraz zmienności kowariancji stóp zwrotu aktywów. Fakt ten może mieć wpływ na alokację aktywów, jak i na wyniki testów modeli CAPM i APT. W pracy zaprezentowano dynamiczny model APT z czynnikowym modelem GARCH, który pozwala uwzględnić w badaniu zmienność warunkowych wariancji stóp zwrotu czynników i aktywów oraz zmienność kowariancji stóp zwrotu aktywów. Przedstawiony model zastosowano następnie do testowania modelu APT dla GPW w Warszawie. W badaniu zastosowano dwustopniową metodę estymacji, ale z wykorzystaniem, w drugim kroku, modelu wielorównaniowego. Przyjęcie takiej metody estymacji umożliwiło testowanie liczby czynników. Dwustopniowa estymacja, stosowana przez innych autorów, oparta na modelach jednorównaniowych nie pozwala na przeprowadzenie tego typu testu. Prezentowane testy i wyniki zostały opublikowane w pracy Fiszdera (2008a) i są rozszerzeniem badań przedstawionych w pracach tego autora (2007d) i (2007g), w których czynniki zostały wyodrębnione na podstawie analizy głównych składowych, w odniesieniu do stóp zwrotu portfeli akcji.

W niniejszej pracy analiza głównych składowych została przeprowadzona na podstawie zmiennych makroekonomicznych i finansowych.

### 5.3.1. SPECYFIKACJA MODELU APT Z CZYNNIKOWYM MODELEM GARCH

W teorii arbitrażu cenowego przyjmuje się założenie, że stopy zwrotu z dowolnej akcji (lub portfela) są liniowo zależne od  $K$  czynników:

$$r_{it} = \mu_i + \beta_{i1}f_{1t} + \beta_{i2}f_{2t} + \dots + \beta_{iK}f_{Kt} + \varepsilon_{it} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, N, \quad t = 1, 2, \dots, \quad (5.3.1)$$

gdzie  $r_{it}$  oznacza stopę zwrotu  $i$ -tej akcji (lub portfela) w chwili  $t$ ,  $\mu_i$  – to oczekiwana stopa zwrotu  $i$ -tej akcji,  $f_{kt}$  –  $k$ -ty czynnik ryzyka w chwili  $t$ ,  $\beta_{ik}$  – współczynnik wrażliwości stopy zwrotu  $i$ -tej akcji względem  $k$ -tego czynnika,  $\varepsilon_{it}$  – składnik losowy równania<sup>210</sup>.

Przyjmuje się następujące założenia dotyczące zmiennych w równaniu (5.3.1):

$$E(\varepsilon_{it}) = 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.3.2)$$

$$E(\varepsilon_{it}\varepsilon_{jt}) = \begin{cases} 0 & \text{dla } i \neq j, \\ \sigma_i^2 & \text{dla } i = j, \end{cases} \quad \text{dla } i, j = 1, 2, \dots, N, \quad (5.3.3)$$

$$E(\varepsilon_{it}f_{kt}) = 0 \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, N, \quad k = 1, 2, \dots, K. \quad (5.3.4)$$

Najbardziej znanym w finansach modelem jednoczynnikowym jest model Sharpe'a (patrz podrozdział 4.3). Zmienność składnika losowego w równaniu (5.3.1) odzwierciedla ryzyko specyficzne, związane z daną akcją. Teoria wyceny arbitrażowej nie precyzuje czynników ryzyka. Istnieje kilka metod wyznaczania czynników (por. Elton i Gruber, 1998; Kuziak, 1999). Ponieważ w teorii arbitrażu cenowego czynniki nie są sprecyzowane, dlatego każdy test APT będzie warunkowy względem przyjętych czynników.

Podstawą teorii arbitrażu cenowego jest prawo jednej ceny, które głosi, że to samo dobro nie może być sprzedawane po dwóch różnych cenach. Zatem instrumenty finansowe o równym ryzyku powinny mieć te same stopy zwrotu.

<sup>210</sup> W literaturze można znaleźć wiele informacji na temat modelu APT i jego założeń, patrz np. Ross (1976), Jajuga i Jajuga (1996), Tarczyński (1997a), Elton i Gruber (1998).

Oprócz założenia prawa jednej ceny i funkcjonowania arbitrażu, APT zakłada również jednorodność oczekiwań inwestorów. Przyjmuje się, że wszyscy inwestorzy mają te same oczekiwania co do charakterystyk instrumentów finansowych (oczekiwanych stóp zwrotu, ryzyka, współczynników korelacji). Klasyyczna teoria APT opiera się również na szeregu dodatkowych założeń, jak na przykład krótka sprzedaż dozwolona jest bez żadnych ograniczeń (patrz np. Haugen, 1996; Jajuga i Jajuga, 1996; Tarczyński, 1997a).

Model APT wyprowadza się przy założeniu portfela arbitrażowego. Wieloczynnikowy model APT można przedstawić jako:

$$\mu_i = \lambda_0 + \lambda_1\beta_{i1} + \lambda_2\beta_{i2} + \dots + \lambda_K\beta_{iK}, \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.3.5)$$

gdzie  $\lambda_k$  ( $k = 0, 1, \dots, K$ ) oznaczają współczynniki równania.

Można pokazać, że współczynniki  $\lambda_k$  dane są jako:

$$\lambda_0 = r_f, \quad \lambda_k = r_{pk} - r_f \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, K, \quad (5.3.6)$$

gdzie  $r_f$  oznacza stopę zwrotu wolną od ryzyka,  $r_{pk}$  – oczekiwaną stopę zwrotu portfela, który jest niewrażliwy na wszystkie czynniki, oprócz  $k$ -tego, a którego wrażliwość na  $k$ -ty czynnik jest jednostkowa. Zatem współczynnik  $\lambda_k$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) może być określany jako premia za ryzyko, związana z czynnikiem  $f_k$ . Z równania (5.3.5) wynika, że oczekiwana premia za ryzyko jest średnią ważoną oczekiwanych premii za ryzyko, związanych z poszczególnymi rodzajami ryzyka.

Wybór metody estymacji parametrów równania (5.3.1) zależy w dużym stopniu od wyboru metody wyznaczania czynników. Czynniki, będące sztucznymi konstrukcjami, można wyodrębnić za pomocą analizy czynnikowej lub analizy głównych składowych. Należy podkreślić, że inny jest cel tych metod (patrz Jajuga, 1993). W analizie czynnikowej wyjaśniane są kowariancje między zmiennymi. Z kolei analiza głównych składowych powstała jako metoda transformacji zbioru zmiennych, której głównym zadaniem jest wyjaśnienie wariacji zmiennych. Istnieje kilka metod estymacji parametrów oraz czynników w równaniu (5.3.1). Do najczęściej stosowanych należą metoda największej wiarygodności oraz metoda głównego czynnika, bezpośrednio wykorzystująca analizę głównych składowych.

Większość metod, bazujących na metodzie największej wiarygodności, wymaga dosyć silnych założeń dotyczących rozkładów stóp zwrotu. Connor i Korajczyk (1986) zaproponowali metodę wyznaczania czynników, która nie

wymaga spełnienia założenia o normalności rozkładów stóp zwrotu. Metoda ta jednakże wymaga stałości macierzy kowariancji składników losowych w modelu czynnikowym. Jones (2001) przedstawił alternatywną metodę, która jest odporna na heteroskedastyczność.

Jeżeli czynnikami są portfele, a zmienne ekonomiczne lub czynniki są zdefiniowane na gruncie teorii preferencji, to do estymacji parametrów równania (5.3.1) stosuje się najczęściej metodę najmniejszych kwadratów<sup>211</sup>. Należy jednakże pamiętać, że założenia klasycznej metody najmniejszych kwadratów często nie są spełnione dla szeregów finansowych.

Estymację parametrów modelu APT w postaci (5.3.5) przeprowadza się na podstawie danych przekrojowych, wykorzystując oceny parametrów  $\beta_{ik}$ , otrzymane dla równania (5.3.1). Najczęściej stosuje się metodę najmniejszych kwadratów. Oceny parametrów  $\lambda_k$  można również wyznaczyć, konstruując portfele o jednakowej wrażliwości na  $k$ -ty czynnik i niewrażliwe na pozostałe czynniki<sup>212</sup> oraz korzystając z zależności (5.3.6). Parametr  $\lambda_0$  jest wówczas równy oczekiwanej stopie zwrotu portfela niewrażliwego na wszystkie czynniki.

Testowanie modelu APT polega na zbadaniu istotności parametrów  $\lambda_k$  w równaniu (5.3.5). W wielu pracach bada się również stałość parametrów. Jak dotąd wyniki testów APT są niejednoznaczne i w dużym stopniu zależą od metodologii, według której zostały przeprowadzone. Dokonując porównań na podstawie APT, nie wiemy, czy odchylenia od linii arbitrażu są odzwierciedleniem rzeczywistości, czy nie wynikają z wyboru niewłaściwych czynników. Z kolei stwierdzenie, że więcej niż jeden ze współczynników  $\lambda_k$  istotnie różni się od zera nie wystarcza, by móc odrzucić model CAPM (patrz Elton i Gruber, 1998).

Istnieją stosunkowo mocne argumenty świadczące o tym, że na stopy zwrotu oddziałuje więcej niż jeden czynnik i oceny parametrów  $\lambda_k$  w modelu APT (równanie (5.3.5)) są istotne statystycznie. Jednakże możliwe, że oceny parametrów  $\lambda_k$  dla dodatkowych czynników są istotne nie dlatego, że model APT jest poprawny, ale ze względu na to, że konstruując model, nie zidentyfikowano właściwie portfela rynkowego. Nawet jeśli rzeczywiście tak jest, wykorzystanie modeli wielowskaźnikowych pozwala lepiej wyjaśnić stopy zwrotu niż jakikolwiek dotychczas zaproponowany reprezentant portfela rynkowego.

<sup>211</sup> Jeżeli składniki losowe  $\varepsilon_{it}$  ( $i = 1, 2, \dots, N$ ) będą skorelowane, to estymatory nie będą najefektywniejsze.

<sup>212</sup> Rozwiązując układy równań:  $\beta_{pk} = \sum_{i=1}^N w_i \beta_{ik}$  dla  $k = 1, 2, \dots, K$  przy znanych współczynnikach wrażliwości poszczególnych akcji i portfela.



Jeżeli wariancja składnika losowego w równaniu (5.3.1) ma zmienną wariancję warunkową, to estymatory MNK parametrów  $\beta_{ik}$  nie będą najefektywniejsze (strata efektywności może być stosunkowo duża). Jeżeli współczynniki  $\beta_{ik}$  zostaną oszacowane z błędami, wówczas oceny parametrów  $\lambda_k$  w równaniu (5.3.5) będą obciążone (na przykład dla modelu CAPM ocena  $\lambda_1$  jest najczęściej zaniżona, a ocena wyrazu wolnego – zawyżona – patrz Elton i Gruber, 1998). Podobnie nieuwzględnienie zmiennej wariancji może wpływać istotnie na wyniki testu APT (patrz Jones, 2001). Obok niespełnionego założenia o stałości macierzy kowariancji stóp zwrotu, w literaturze można również znaleźć krytyczne uwagi dotyczące liniowej postaci modeli wyceny oraz egzogeniczności czynników makroekonomicznych względem stóp zwrotu (patrz np. Hiemstra i Kramer, 1997). Trudno jednoznacznie wskazać przyczyny obserwowanych nieliniowych zależności, ale przynajmniej w części mogą one być związane z zależnościami w wariancji<sup>213</sup>. Niespełnienie założenia o słabej egzogeniczności czynników makroekonomicznych względem stóp zwrotu może stanowić problem w przypadku standardowych metod estymacji.

W celu uwzględnienia zmienności warunkowych wariancji stóp zwrotu czynników i aktywów oraz kowariancji stóp zwrotu aktywów można zastosować wielorównaniowe modele GARCH<sup>214</sup>. Ze względu na dużą liczbę parametrów, które należy oszacować oraz warunek dodatniej określoności macierzy kowariancji wiele postaci wielorównaniowych modeli GARCH jest bardzo trudna lub niemożliwa do estymacji dla dużej liczby aktywów. Jedną z postaci modelu GARCH, którą można oszacować nawet dla bardzo dużej liczby aktywów, jest czynnikowy model GARCH. Powstało kilka postaci czynnikowego modelu GARCH, między innymi<sup>215</sup>:  $K$ -czynnikowy model GARCH (Engle, 1987), model GARCH z ukrytym czynnikiem ARCH (Diebold i Nerlove, 1989), czynnikowy model GARCH z obserwowalnymi i ukrytymi czynnikami (King, Sentana i Wadhvani, 1994), pełnoczynnikowy model GARCH (Vrontos, Dellaportas i Politis, 2003). Nie każda postać wielorównaniowego modelu GARCH umożliwia testowanie liczby czynników w mo-

<sup>213</sup> Zależności w wariancji można opisać za pomocą czynnikowego modelu GARCH stosowanego w niniejszej pracy, choć jak pokazują wyniki badań, model ten wyjaśnia zależności w wariancji bardzo słabo.

<sup>214</sup> Do alternatywnych rozwiązań można zaliczyć metodologię RiskMetrics oraz zastosowanie wielorównaniowych modeli SV. Nardari i Scruggs (2008) wykorzystują model SV do testowania modelu APT. Metodologia RiskMetrics ma stosunkowo słabe podstawy teoretyczne, natomiast estymacja parametrów modeli SV jest generalnie znacznie trudniejsza niż estymacja dla modeli GARCH (choć zależy to oczywiście od konkretnej specyfikacji modelu).

<sup>215</sup> Patrz punkt 2.1.5.

delu APT<sup>216</sup>. Wydaje się, że najlepiej do tego celu może służyć  $K$ -czynnikowy model GARCH, zastosowany po raz pierwszy w testach APT przez Engle'a, Ng i Rothschilda (1990).  $K$ -czynnikowy model GARCH( $p, q$ ), wprowadzony przez Engle'a (1987), można przedstawić w następującej postaci (patrz równanie (2.1.32)):

$$\boldsymbol{\varepsilon}_t | \boldsymbol{\psi}_{t-1} \sim D(\mathbf{0}, \mathbf{H}_t), \quad (5.3.7)$$

$$\mathbf{H}_t = \mathbf{G} + \sum_{k=1}^K \mathbf{g}_k \mathbf{g}'_k \left( \sum_{i=1}^q \gamma_{ik}^2 \mathbf{w}'_k \boldsymbol{\varepsilon}_{t-i} \boldsymbol{\varepsilon}'_{t-i} \mathbf{w}_k + \sum_{j=1}^p \kappa_{jk}^2 \mathbf{w}'_k \mathbf{H}_{t-j} \mathbf{w}_k \right), \quad (5.3.8)$$

gdzie:  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  jest wektorem zmiennych losowych o wymiarach  $N \times 1$ ,  $\boldsymbol{\psi}_{t-1}$  oznacza zbiór wszystkich informacji dostępnych w chwili  $t-1$ ,  $D(\mathbf{0}, \mathbf{H}_t)$  oznacza określoną postać wielowymiarowej funkcji gęstości prawdopodobieństwa o wartościach oczekiwanych równych zeru i macierzy kowariancji  $\mathbf{H}_t$ ,  $\mathbf{w}_k$  i  $\mathbf{g}_k$  są wektorami parametrów o wymiarach  $N \times 1$ ,  $\gamma_{ik}, \kappa_{jk}$  oznaczają parametry,  $\mathbf{G}$  jest symetryczną macierzą parametrów o wymiarach  $N \times N$ . Model czynnikowy zapewnia dodatnią określoność macierzy  $\mathbf{H}_t$ , a jednocześnie ma relatywnie mniejszą, np. w stosunku do modelu BEKK, liczbę parametrów.

Engle, Ng i Rothschild (1990) rozważają następujący model<sup>217</sup>:

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu}_t + \sum_{k=1}^K \boldsymbol{\beta}_k f_{kt} + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (5.3.9)$$

gdzie  $\mathbf{y}_t$  jest wektorem o wymiarach  $N \times 1$  i oznacza stopy zwrotu z  $N$  aktywów pomniejszone o stopę zwrotu wolną od ryzyka (nadwyżkowe stopy zwrotu),  $\boldsymbol{\mu}_t$  to wektor oczekiwanych stóp zwrotu z  $N$  aktywów pomniejszonych o stopę zwrotu wolną od ryzyka (wektor premii za ryzyko) o wymiarach  $N \times 1$ ,  $\boldsymbol{\beta}_k$  to wektor parametrów o wymiarach  $N \times 1$  (w analizie czynnikowej określanych jako ładunki czynników lub zasoby czynników),  $f_{kt}$  oznaczają czynniki wspólne,  $K$  to liczba czynników ( $K < N$ )<sup>218</sup>,  $\boldsymbol{\varepsilon}_t$  jest wektorem czynników specyficznych o wymiarach  $N \times 1$ .

<sup>216</sup> Większość parametryzacji jest zbyt złożona i estymacja parametrów jest bardzo trudna. W przypadku prostszych specyfikacji nie jest łatwe połączenie estymacji parametrów macierzy kowariancji z estymacją parametrów w średnich, opisujących zależność między współczynnikami beta a premiami za ryzyko (konieczna jest estymacja łączna).

<sup>217</sup> W pracy Ng, Engle i Rothschild (1992) powyższy model został nieco rozszerzony i zawiera zarówno czynniki statyczne, jak i dynamiczne.

<sup>218</sup> Warunek jest konieczny, jeżeli czynniki są konstruowane na podstawie stóp zwrotu aktywów.

Przyjmuje się następujące założenia:

$$E(f_{kt} | \psi_{t-1}) = 0 \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, K, \quad (5.3.10)$$

$$E(f_{kt} f_{lt} | \psi_{t-1}) = 0 \quad \text{dla } k \neq l, \quad k, l = 1, 2, \dots, K, \quad (5.3.11)$$

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}_t | \psi_{t-1}) = E(\boldsymbol{\varepsilon}_t | f_{1t}, f_{2t}, \dots, f_{Kt}, \psi_{t-1}) = 0 \quad (5.3.12)$$

$$E(\boldsymbol{\varepsilon}_t \boldsymbol{\varepsilon}_t' | \psi_{t-1}) = \boldsymbol{\Omega}. \quad (5.3.13)$$

Specyfikacja (5.3.9) jest bardzo zbliżona do modelu czynnikowego w postaci (5.3.1), z tym że oczekiwane stopy zwrotu nie są stałe w czasie i równanie jest zapisane dla stóp zwrotu pomniejszonych o stopę wolną od ryzyka. Przyjęcie nadwyżkowych stóp zwrotu nie ma wpływu na wyniki testowania modelu APT, jednakże z tego powodu w równaniu (5.3.16) nie pojawia się  $\lambda_0$  (oznaczające stopę wolną od ryzyka), tak jak w równaniu (5.3.5).

Niech  $P_{kt}$  ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) oznaczają nadwyżkowe stopy zwrotu portfeli reprezentujących czynniki<sup>219</sup>, obliczane według formuły  $P_{kt} = \boldsymbol{\alpha}'_k \mathbf{y}_t$ , gdzie  $\boldsymbol{\alpha}_k$  oznacza wektor wag. Warunkowa macierz kowariancji  $\mathbf{y}_t$  ma wówczas następującą postać<sup>220</sup>:

$$\mathbf{H}_t = \sum_{k=1}^K \boldsymbol{\beta}_k \boldsymbol{\beta}_k' h_{kt} + \boldsymbol{\Omega}, \quad (5.3.14)$$

gdzie  $h_{kt}$  oznacza wariancję warunkową czynnika  $f_{kt}$  w chwili  $t$ .

Pomiędzy czynnikami a stopami zwrotu aktywów występuje przyczynowość w wariancji (patrz Granger, Robins i Engle, 1984). Czynniki są przyczynami w wariancji stóp zwrotu aktywów. Zamiast badać dynamikę warunkowej macierzy kowariancji wszystkich aktywów (co z uwagi na dużą liczbę aktywów jest praktycznie niemożliwe, bez dodatkowych założeń upraszczających), wystarczy zbadać dynamikę warunkowych wariancji czynników. Podobnie do prognozy warunkowych wariancji i kowariancji stóp zwrotu aktywów wystarczające są prognozy wariancji czynników.

<sup>219</sup> Engle, Ng i Rothschild (1990) konstruują czynniki na podstawie nadwyżkowych stóp zwrotu aktywów, dlatego nazywają je nadwyżkowymi stopami zwrotu portfeli reprezentujących czynniki. Dalej w tekście dla uproszczenia posługiwano się pojęciem czynnika.

<sup>220</sup> Model ten jest szczególnym przypadkiem K-czynnikowego modelu GARCH w postaci (5.3.8) (odpowiednie przekształcenia można znaleźć w pracy Engle'a, Ng i Rothschilda, 1990).

Model w postaci (5.3.9) może być interpretowany jako dynamiczny model czynnikowy, w którym ładunki czynników są stałe, natomiast czynniki wspólne mają zmienne w czasie wariancje warunkowe. Równanie (5.3.9) można zapisać w nieco innej postaci:

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\mu}_t + \sum_{k=1}^K v_{kt} f_{kt}^* + \boldsymbol{\varepsilon}_t, \quad (5.3.15)$$

gdzie  $v_{kt} = \boldsymbol{\beta}_k h_{kt}^{1/2}$ ,  $f_{kt}^* = f_{kt} / h_{kt}^{1/2}$ , czynniki  $f_{kt}^*$  są zatem standaryzowane, tzn.  $E_{t-1}(f_k^*) = 0$  i  $\text{var}_{t-1}(f_k^*) = 1$ .

Model ten można interpretować jako dynamiczny model czynnikowy, w którym ładunki czynników są zmienne w czasie.

Niech  $\lambda_{kt}$  oznacza premię za ryzyko związane z czynnikiem  $f_k$  w chwili  $t$ . Model APT można zapisać w następującej formie:

$$\boldsymbol{\mu}_t = \sum_{k=1}^K \lambda_{kt} \boldsymbol{\beta}_k. \quad (5.3.16)$$

Równanie (5.3.16) jest analogiczne do równania (5.3.5) w klasycznym modelu APT i można je wyprowadzić przy założeniu modelu konsumpcyjnego beta (patrz Engle, Ng i Rothschild, 1990). Zakładając dodatkowo stałość preferencji w czasie,  $\lambda_{kt}$  może być wyrażone jako funkcja liniowa warunkowej wariancji  $k$ -tego czynnika:

$$\lambda_{kt} = c_k + \delta_k h_{kt} \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, K. \quad (5.3.17)$$

Do pełnej specyfikacji modelu konieczne jest określenie  $h_{kt}$ . Zauważmy, że  $h_{kt}$  może być dowolną funkcją zmiennych obserwowalnych w chwili  $t-1$ <sup>221</sup>. Jednakże bardzo ogólna specyfikacja będzie bardzo trudna lub wręcz niemożliwa do oszacowania. Można założyć, że czynniki są niezależnymi procesami. W takiej sytuacji często przyjmuje się, że  $k$ -ty czynnik ( $k = 1, 2, \dots, K$ ) jest opisany za pomocą jednorównaniowego modelu GARCH(1,1)-M<sup>222</sup>:

$$P_{kt} = c_k + \delta_k h_{kt} + \varepsilon_{kt}, \quad \varepsilon_{kt} | \psi_{t-1} \sim N(0, h_{kt}), \quad (5.3.18)$$

$$h_{kt} = \phi_k + \phi_k \varepsilon_{kt-1}^2 + \varphi_k h_{kt-1}. \quad (5.3.19)$$

<sup>221</sup> Oczywiście zapewniającą dodatniość wariancji.

<sup>222</sup> Jeżeli zachodzi taka konieczność, należy zastosować wyższe rzędy opóźnień  $p$  i  $q$  w modelu GARCH( $p, q$ ).

W przypadku, gdy hipoteza o normalności rozkładu warunkowego  $\varepsilon_{kt}$  zostanie odrzucona, można zastosować inne rozkłady. W niniejszej pracy zastosowano rozkład t-Studenta<sup>223</sup>. W przypadku złagodzenia założenia o niezależności procesów czynników, równanie (5.3.19) może być zastąpione następującą formułą:

$$h_{kt} = w_k + \phi_{kk} \varepsilon_{kt-1}^2 + \varphi_{kk} h_{kt-1} + \sum_{l=1}^{k-1} [\phi_{kl} \varepsilon_{lt-1}^2 + \varphi_{kl} h_{lt-1}]. \quad (5.3.20)$$

Na zmienność  $k$ -tego czynnika wpływa zmienność z wcześniejszych okresów  $k - 1$  pierwszych czynników. Pomiędzy czynnikami występuje przyczynowość w wariancji.

Rozważane postacie modeli wariancji i kowariancji warunkowych (postacie (5.3.14), (5.3.19) lub (5.3.20)) są szczególnymi przypadkami czynnikowego modelu GARCH w postaci (5.3.8). Bardziej ogólny model można uzyskać, zakładając, że zmienność  $k$ -tego czynnika zależy od zmienności z wcześniejszych okresów wszystkich czynników. W tym przypadku w celu konstrukcji wariancji  $h_{kt}$  konieczna jest estymacja parametrów modelu wielorównaniowego.

Zamiast równania (5.3.16), szacuje się następujące równanie:

$$\mathbf{y}_t = \boldsymbol{\psi}_0 + \sum_{k=1}^K \lambda_{kt} \boldsymbol{\beta}_k + \boldsymbol{\eta}_t, \quad (5.3.21)$$

gdzie  $\boldsymbol{\psi}_0$  jest wektorem parametrów o wymiarach  $N \times 1$ ,  $\boldsymbol{\eta}_t$  jest wektorem składników losowych o wymiarach  $N \times 1$ . W równaniu (5.3.21), w porównaniu z równaniem (5.3.16), pojawia się wektor składników losowych oraz wektor wyrazów wolnych  $\boldsymbol{\psi}_0$ . Wyrazy wolne zostały dodane w celu uwzględnienia części indywidualnych premii za ryzyko poszczególnych aktywów związanych z nieuwzględnionymi w modelu czynnikami o stałych warunkowych wariancjach, kowariancjach i premiach za ryzyko.

Do estymacji parametrów modelu w postaci równań (5.3.14), (5.3.18), (5.3.19) lub (5.3.20) oraz (5.3.21) można zastosować MNW<sup>224</sup>. Estymatory MNW parametrów strukturalnych oraz macierzy kowariancji są zgod-

<sup>223</sup> Model z rozkładem t-Studenta okazał się wystarczający do opisu stóp zwrotu badanych czynników.

<sup>224</sup> MNW jest najczęściej stosowaną metodą estymacji parametrów modelu GARCH. Do estymacji parametrów modelu APT można zastosować szereg innych metod, między innymi: MNK, metody bayesowskie, techniki nieliniowej regresji pozornie niezależnej. Więcej na temat innych metod można znaleźć w pracy Eltona i Grubera (1998).

ne<sup>225</sup>. Ze względu na dużą liczbę parametrów, które trzeba oszacować, jednoczesna estymacja wszystkich równań dla dużej liczby aktywów jest bardzo trudna lub niemożliwa. Przy założeniu niezależności procesów czynników, w modelu występują następujące parametry  $\{w_k, \phi_k, \varphi_k, c_k, \delta_k, \beta_{ki}, \psi_{0i}, \Omega_{ij} \mid (i, j = 1, 2, \dots, N), (k = 1, 2, \dots, K)\}$ . Na przykład tylko dla jednego czynnika dla  $N = 10$  i  $N = 20$  liczba parametrów jest równa odpowiednio 80 i 5255.

Parametry modelu można oszacować za pomocą dwustopniowej procedury (patrz np. Engle, Ng i Rothschild, 1990; Bodurtha i Mark, 1991). W pierwszym kroku dla każdego z czynników estymowane są parametry jednorównaniowych modeli GARCH-M w postaci (5.3.18) i (5.3.19). Oszacowane na ich podstawie premie za ryzyko oraz warunkowe wariancje wykorzystywane są następnie w drugim kroku do estymacji parametrów równań (5.3.14) i (5.3.21), dla każdego z analizowanych aktywów oddzielnie:

$$y_{it} = \psi_{0i} + \sum_{k=1}^K \hat{\lambda}_{ki} \beta_{ki} + \eta_{it} \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.3.22)$$

$$h_{it} = \sigma_{ii} + \sum_{k=1}^K \beta_{ki}^2 \hat{h}_{kt}, \quad \text{dla } i = 1, 2, \dots, N, \quad (5.3.23)$$

gdzie  $h_{it}$  oznacza wariancję warunkową  $y_{it}$ ,  $\sigma_{ii}$  jest  $i$ -tym diagonalnym elementem macierzy  $\Omega$  w równaniu (5.3.14).

Estymatory MNW parametrów w równaniach (5.3.22) i (5.3.23) dla metody dwustopniowej są zgodne, ale nieefektywne (patrz np. Lin, 1992). Dwustopniowa estymacja jest stosunkowo prosta i może być bardzo łatwo rozszerzona na większą liczbę aktywów bez konieczności ponownego szacowania całego modelu dla wszystkich aktywów. Jednak ponieważ macierz informacji nie jest macierzą blokowo-diagonalną ze względu na estymatory parametrów otrzymanych w pierwszym i drugim kroku, dlatego estymator macierzy kowariancji w drugim kroku nie jest zgodny. Estymatory średnich błędów szacunku są obciążone i nie są zgodne, a wynik wnioskowania o istotności parametrów w równaniu (5.3.22) może być błędny (patrz Lin, 1992).

We wszystkich powyższych metodach estymacji zakłada się, że liczba czynników, jak i same czynniki są znane. Jeżeli czynniki zostaną błędnie wyspecyfikowane, to estymatory parametrów nie będą zgodne. Problemy związane z estymacją i testowaniem nieistotnych czynników dotyczą w mniejszym lub większym stopniu również innych metod estymacji (patrz np. Kan i Zhang,

<sup>225</sup> K-czynnikowy model GARCH jest szczególnym przypadkiem modelu BEKK, dlatego przedstawione w punkcie 2.3 własności estymatora MNW dla modelu BEKK dotyczą również modelu K-czynnikowego.

1999a, 1999b, Jagannathan i Wang, 1998), W przypadku czynników ukrytych, wszystkie parametry można estymować łącznie za pomocą MNW, w której do budowy funkcji wiarygodności wykorzystuje się filtr Kalmana (patrz Diebold i Nerlove, 1989 oraz King, Sentana i Wadhvani, 1994). Engle i Kozicki (1993) zaproponowali test, który pozwala weryfikować hipotezę, że stopy zwrotu są generowane za pomocą czynnikowego modelu ARCH. Łączna estymacja wszystkich parametrów i testowanie liczby czynników jest, jak na razie, możliwe tylko dla bardzo ograniczonej liczby aktywów i czynników.

Wiele procesów finansowych ma wspólną wariancję warunkową, którą można opisać za pomocą czynnikowego modelu GARCH, jednakże jest mało prawdopodobne, aby przyjęte czynniki wyjaśniały w pełni zmienność warunkowych wariancji stóp zwrotu. Z tego względu Koutmos, Knif i Philipatos (2002) zakładają, że  $\sigma_{ii}$  w równaniu (5.3.23) jest opisane jako jednorównaniowy proces GARCH(1,1). Takie założenie można przyjąć, jednakże tylko w przypadku dwustopniowej estymacji, opartej na modelach jednorównaniowych. Aby uwzględnić niewyjaśnioną zmienność warunkowych wariancji stóp zwrotu aktywów w ogólnym przypadku, Fiszeder (2008a) zaproponował przyjęcie następującej postaci modelu APT z  $K$ -czynnikowym modelem GARCH( $p, q$ ):

$$y_t = \psi_0 + \sum_{k=1}^K \lambda_{kt} \beta_k + \eta_t, \quad (5.3.24)$$

$$\mathbf{H}_t = \sum_{k=1}^K \beta_k \beta_k' h_{kt} + \sum_{i=1}^q \mathbf{F}_i \eta_{t-i} \eta_{t-i}' \mathbf{F}_i' + \sum_{j=1}^p \mathbf{G}_j \mathbf{H}_{t-j} \mathbf{G}_j', \quad (5.3.25)$$

gdzie  $\mathbf{H}_t$  oznacza warunkową macierz kowariancji wektora  $y_t$ , a  $\mathbf{F}_i$  i  $\mathbf{G}_j$  są macierzami parametrów o wymiarach  $N \times N$ .

Powyższa postać pozwala również opisać niewyjaśnioną zmienność warunkowych kowariancji stóp zwrotu aktywów. Taka specyfikacja umożliwia uzyskanie efektywniejszych estymatorów parametrów w równaniu (5.3.24). Oczywiście ogólna postać tego modelu będzie bardzo trudna lub niemożliwa do estymacji dla większej liczby aktywów, jednakże w przypadku, gdy przyjęte czynniki wyjaśniają w znacznym stopniu zmienność warunkowych wariancji i kowariancji stóp zwrotu aktywów, może zostać przyjęta znacznie prostsza postać modelu. W empirycznych zastosowaniach może okazać się, że macierze  $\mathbf{F}_i$  i  $\mathbf{G}_j$  są macierzami diagonalnymi lub można je nawet zastąpić skalarami. Podobnie może się okazać, że do wyjaśnienia zmienności wariancji i kowariancji wystarczającym będzie model ARCH ( $p = 0$ ).

### 5.3.2. WERYFIKACJA MODELU APT DLA GPW W WARSZAWIE

W literaturze można znaleźć liczne badania empiryczne dotyczące modeli czynnikowych i modelu APT (patrz np. Haugen, 1996; Elton i Gruber, 1998). W większości prac, w tym również dotyczących rynków wschodzących, pokazuje się, że na stopy zwrotu oddziałuje więcej niż jeden czynnik i oceny parametrów  $\lambda_k$  stojących przy współczynnikach wrażliwości względem tych czynników w modelu APT są istotne statystycznie. Badania dotyczące testowania modelu APT, z zastosowaniem wielorównaniowego modelu GARCH, są stosunkowo nieliczne (patrz np. Engle, Ng i Rothschild, 1990; Ng, Engle i Rothschild, 1992; King, Sentana i Wadhvani, 1994). Weryfikacją modelu APT dla GPW w Warszawie zajmowali się między innymi: Adamczak i Majerowska (2002), Rubaszek (2002), Sklinda (2004). Wyniki tych badań są bardzo zróżnicowane. W pracy Adamczak i Majerowskiej (2002) co najmniej sześć współczynników wrażliwości wyjaśniało oczekiwane stopy zwrotu akcji w modelu APT, w pracy Rubaszka (2002) – dwa współczynniki, a w badaniu Sklindy (2004) żaden współczynnik wrażliwości nie wpływał istotnie na oczekiwane stopy zwrotu akcji. Różnice wynikają z zastosowanych metodologii i przyjętych do badania okresów. Jeżeli czynniki są wyznaczane na podstawie analizy czynnikowej, to większa liczba współczynników wrażliwości związanych z tymi czynnikami wyjaśnia oczekiwane stopy zwrotu akcji.

W powyższych badaniach nie została wzięta pod uwagę zmienność wariancji warunkowych czynników oraz zmienność wariancji i kowariancji warunkowych stóp zwrotu aktywów. W niniejszej pracy zastosowano wielorównaniowy model GARCH, co pozwoliło uwzględnić w badaniu wspomniane charakterystyki stóp zwrotu. Ponieważ błędy oszacowania współczynników beta portfeli są mniejsze niż błędy oszacowania współczynników beta pojedynczych walorów, z tego względu lepiej jest przeprowadzić test modelu APT (podobnie jak i modelu CAPM) na podstawie portfeli. W niniejszym badaniu zastosowano indeksy sektorowe. Wydaje się, że wielorównaniowym modelem GARCH, który najlepiej nadaje się do testowania modelu APT, jest czynnikowy model GARCH. Estymacja parametrów ogólnych postaci wielorównaniowego modelu GARCH, jak np. postaci VECH czy modelu BEKK, jest bardzo trudna już przy kilku (nawet pięciu czy sześciu) aktywach. Podobnie wygląda sytuacja z jednostopniową estymacją parametrów czynnikowego modelu GARCH. Dwustopniowa estymacja parametrów czynnikowego modelu GARCH, na podstawie jednorównaniowych modeli, jest natomiast możliwa nawet dla bardzo dużej liczby aktywów, jednakże nie pozwala ona na pełen



test modelu APT. W niniejszej pracy zastosowano dwustopniową metodę estymacji, ale z wykorzystaniem w drugim kroku modelu wielorównaniowego. Przyjęcie takiej metody estymacji umożliwiło testowanie liczby czynników dla modelu APT. Ze względu na przyjęcie w drugim kroku modelu wielorównaniowego, konieczne było ograniczenie liczby aktywów, dlatego w badaniu pominięto sektory, których udział w kapitalizacji całego rynku jest mniejszy niż 5% (dane na 19 sierpnia 2005 roku). W badaniu zastosowano te same dane, co w punkcie 5.2.2, z tym że okres wydłużono do 19 sierpnia 2005 roku.

Czynniki zostały wyodrębnione za pomocą analizy głównych składowych na podstawie zmiennych ekonomicznych. Wybrano zmienne, które są obserwowane z częstotliwością co najmniej tygodniową. Badano następujące zmienne: indeksy WIG, S&P 500, DAX, BUX, kursy walutowe USD/PLN, EUR/PLN, rentowność 52-tygodniowych bonów skarbowych, 1-miesięczny WIBOR, rentowność 10-letnich obligacji rządowych w Stanach Zjednoczonych, ceny ropy naftowej, miedzi, złota oraz wskaźnik cen towarów CRB (ang. *Commodity Research Bureau*). Przyjęcie danych miesięcznych umożliwiłoby analizę większej liczby zmiennych ekonomicznych<sup>226</sup>, jednakże uniezwolniby estymację przyjętych modeli z powodu niewystarczającej liczby obserwacji. Wobec niemożności dotarcia do przyczyn w postaci wielkości popytu i podaży można powiedzieć, że wybrane czynniki mają charakter symptomatyczny. Przykład ten pokazuje, jak trudno jest modelować krótkotrwałe prawidłowości zachodzące na rynkach finansowych.

Indeks WIG w sposób syntetyczny informuje o sytuacji na rynku i może być substytutem portfela rynkowego. Jest to najstarszy indeks rynku akcji charakteryzujący GPW w Warszawie. Odzwierciedla on informacje napływające na rynek dotyczące sfery realnej i nominalnej gospodarki polskiej. Indeksy rynku akcji S&P 500, DAX, BUX opisują klimat inwestycyjny w Stanach Zjednoczonych, Niemczech i na Węgrzech. Gospodarka amerykańska ma silny wpływ na gospodarkę światową, Niemcy są największym partnerem gospodarczym Polski, natomiast Węgry stanowią przykład kraju z Europy Środkowo-Wschodniej. Wymienione indeksy mają bardzo duży wpływ na koniunkturę na GPW w Warszawie (patrz np. Fiszedler, 2001b).

Zmiany kursów walutowych USD/PLN, EUR/PLN mogą odzwierciedlać przepływy kapitału zagranicznego, którego część jest lokowana na GPW w Warszawie. Zmiany kursów walutowych wpływają również pośrednio na wycenę akcji polskich przedsiębiorstw poprzez zmiany cen eksportowanych

<sup>226</sup> Dane makroekonomiczne dotyczą najczęściej okresów kwartalnych lub miesięcznych.

i importowanych towarów, a także przez wielkość zadłużenia spółek w walutach obcych.

Dynamika stóp procentowych oraz struktura terminowa stóp procentowych mogą wpływać na ceny akcji przez stopę dyskontowania, którą wykorzystuje się do szacowania sumy zdyskontowanych przychodów z akcji. Dynamika stóp procentowych szacowana była na podstawie pierwszych różnic, oddzielnie dla rentowności 52-tygodniowych bonów skarbowych i 1-miesięcznego WIBOR-u. Dodatkowo obliczono pierwsze różnice dla rentowności 10-letnich obligacji rządowych w Stanach Zjednoczonych (czynnik istotny dla inwestorów zagranicznych). Zmienną, która odzwierciedlała zmiany struktury terminowej stóp procentowych była różnica między rentownością 52-tygodniowych bonów skarbowych a 1-miesięcznym WIBOR-em.

Ceny surowców z jednej strony odzwierciedlają skalę światowych inwestycji, z drugiej strony, wpływają bezpośrednio na ceny akcji producentów surowców czy przedsiębiorstw, których działalność jest w dużym stopniu uzależniona od cen surowców. Ze względu na duży udział w najważniejszych indeksach GPW w Warszawie takich spółek, jak PKN Orlen, Lotos czy KGHM największy wpływ na ceny akcji mają ceny ropy naftowej i miedzi. Dodatkowo zbadano wskaźnik cen towarów CRB, który w sposób syntetyczny informuje o cenach surowców oraz cenę złota, które traktowane jest często jako alternatywna forma inwestycji.

Dla rentowności obliczono tygodniowe przyrosty, a dla pozostałych zmiennych – tygodniowe stopy zwrotu. W przypadku niektórych zmiennych występowała słaba autokorelacja, która mogła powodować zmienność warunkowych średnich czynników, co zgodnie z formułą (5.3.10) jest niedopuszczalne. Z tego względu analiza głównych składowych została przeprowadzona dla reszt z modelu VAR<sup>227</sup>. W konsekwencji badany jest wpływ nieoczekiwanych zmian zmiennych ekonomicznych<sup>228</sup>. Ze względu na to, że zaobserwowana autokorelacja tygodniowych stóp zwrotu jest słaba oraz nie występują silne korelacje wzajemne między nimi, takie podejście nie ma istotnego wpływu na uzyskane wyniki. Zbliżone wyniki uzyskano przeprowadzając analizę głównych składowych bezpośrednio na stopach zwrotu. Wartości własne macierzy kowariancji (będące jednocześnie wariancjami odpowiednich czynników) zostały przedstawione w tabeli 5.18. Zamieszczono tam również wskaźniki procentowe, pokazujące, w jakim stopniu poszczególne czynniki wyjaśniają cał-

<sup>227</sup> Wcześniej przeprowadzono standaryzację zmiennych.

<sup>228</sup> Takie podejście zastosowano w wielu innych badaniach (patrz np. King, Sentana i Wadhvani, 1994).

kowitą wariancję badanych zmiennych. Warto zwrócić uwagę, że nie ma tu dominacji żadnego z czynników. W przypadku, gdy czynniki są wyodrębniane za pomocą analizy głównych składowych w odniesieniu do stóp zwrotu akcji, to jeden czynnik zdecydowanie dominuje, a już dwa czynniki wyjaśniają większość zmienności wariancji (patrz np. Fiszeder, 2007d, 2007g).

TABELA 5.18. WARTOŚCI WŁASNE

Miary	Numer czynnika													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
Wartość własna	2,84	1,81	1,39	1,13	1,06	0,99	0,91	0,78	0,71	0,47	0,38	0,35	0,24	0,20
% ogółu wariancji	21,4	13,7	10,5	8,5	8	7,5	6,9	5,9	5,3	3,5	2,9	2,7	1,8	1,5
Skumulowany %	21,4	35	45,6	54,1	62,1	69,5	76,4	82,3	87,6	91,1	94	96,7	98,5	100

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2008A).

Wektory własne (patrz tabela 5.19) zostały tak skonstruowane, aby były ortonormalne (ortogonalne i unormowane). Na przykład dla pierwszego czynnika największe udziały mają indeksy rynków akcji, a dla drugiego – ceny surowców.

TABELA 5.19. WEKTORY WŁASNE

Zmienna	Numer czynnika													
	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14
WIG	0,44	-0,05	0,00	0,16	-0,01	0,03	0,31	-0,22	0,30	-0,46	0,56	-0,07	0,00	0,08
S&P 500	0,41	-0,16	-0,16	0,05	-0,21	-0,08	-0,50	0,08	-0,26	-0,01	0,16	0,25	0,50	-0,25
DAX	0,47	-0,18	-0,15	-0,11	-0,05	-0,06	-0,29	0,01	-0,24	0,09	-0,05	-0,21	-0,67	0,25
BUX	0,43	-0,09	0,01	0,10	-0,08	0,07	0,18	-0,36	0,41	0,32	-0,54	0,22	0,07	-0,08
USD/PLN	-0,17	-0,41	-0,52	0,10	-0,20	0,17	0,05	0,01	0,12	-0,06	-0,15	-0,61	0,20	-0,08
EUR/PLN	-0,29	-0,13	-0,46	0,49	-0,16	0,05	0,06	-0,08	-0,07	0,01	0,10	0,56	-0,28	0,10
Bony skarb.	-0,20	0,07	-0,31	-0,43	0,27	-0,08	-0,38	-0,57	0,26	-0,05	0,15	0,07	-0,07	-0,17
WIBOR	-0,04	0,00	-0,06	-0,12	-0,07	-0,09	-0,09	-0,12	0,04	0,08	0,00	0,04	0,37	0,89
Bony-WIBOR	0,08	0,18	0,01	0,07	0,22	0,89	-0,10	-0,16	-0,24	0,02	0,02	-0,02	0,06	0,08
Oblig. USA	-0,17	0,05	0,37	0,24	-0,43	0,17	-0,52	0,04	0,48	0,06	0,13	-0,11	-0,15	0,03
Ropa	0,05	0,38	-0,22	-0,40	-0,52	0,16	0,08	0,15	0,04	-0,45	-0,26	0,17	-0,07	0,00
Miedź	0,15	0,23	-0,32	0,16	0,49	0,00	-0,20	0,55	0,43	-0,08	-0,11	0,05	0,01	0,08
Złoto	0,02	0,45	-0,01	0,50	0,05	-0,28	-0,17	-0,35	-0,23	-0,31	-0,30	-0,27	0,05	0,01
CRB	0,10	0,55	-0,29	0,01	-0,22	-0,06	0,17	0,01	0,00	0,60	0,35	-0,20	0,02	-0,07

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2008A).

Dla każdego czynnika estymowano parametry jednorównaniowych modeli GARCH-M( $p, q$ ) w postaci (5.3.18) i (5.3.19)<sup>229</sup>. Zastosowano metodę największej wiarygodności. Otrzymane wyniki, dla wybranych czynników<sup>230</sup>, zostały zaprezentowane w tabeli 5.20.

**TABELA 5.20. WYNIKI ESTYMACJI JEDNORÓWNANIOWEGO MODELU GARCH-M DLA WYBRANYCH CZYNNIKÓW**

Czynnik	$c_k$	$\delta_k$	$w_k \times 10^{-4}$	$\phi_k$	$\psi_k$	$v$
1	0,0013 (0,0013)	-1,5119 (5,0956)	0,0839 (0,0636)	0,0908 (0,0445)	0,8802 (0,0641)	8,5651 (3,0317)
4	-0,0000 (0,0012)	-0,3837 (7,3085)	0,0775 (0,0451)	0,0912 (0,0376)	0,8437 (0,0705)	11,7006 (5,2381)
5	0,0036 (0,0067)	-34,4743 (63,6462)	0,0951 (0,1196)	0,0234 (0,0222)	0,8865 (0,1201)	9,1439 (3,3123)
6	0,0005 (0,0005)	-2,4148 (8,9532)	0,0792 (0,0338)	0,1298 (0,0593)	0,7259 (0,0900)	4,3441 (0,7874)
7	0,0004 (0,0017)	-6,2279 (19,1946)	0,0243 (0,0306)	0,0415 (0,0242)	0,9302 (0,0531)	–
12	0,0019 (0,0104)	-21,4903 (29,1378)	0,01281 (0,0248)	0,0064 (0,0179)	0,9689 (0,0836)	–
13	0,0004 (0,0004)	-12,6726 (10,8926)	0,0548 (0,0145)	0,3022 (0,1559)	0,5752 (0,2033)	4,9554 (1,0886)

W nawiasach, pod ocenami parametrów, podano średnie błędy szacunku, parametr  $v$  oznacza liczbę stopni swobody warunkowego rozkładu t-Studenta.

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2008A).

Dla wszystkich czynników kryterium informacyjne Schwarza wskazywało na oszczędnie sparametryzowany model wariancji warunkowej o rzędach  $p$  i  $q$  równych jeden. Wariancja warunkowa wszystkich czynników była zmienna w czasie, jednakże zależność pomiędzy oczekiwaną stopą zwrotu a wariancją warunkową była istotna statystycznie tylko dla czynnika trzeciego (podobny wynik otrzymali Ng, Engle i Rothschild, 1992, dla trzyczynnikowego modelu GARCH). Dla pięciu czynników: drugiego, trzeciego, ósmego, dziewiątego i jedenastego zależność była dodatnia. Natomiast dla wszystkich wybranych na podstawie testu LR czynników zależność była ujemna. Oszacowane na podstawie modeli GARCH-M premie za ryzyko oraz warunkowe wariancje wykorzystano w drugim kroku do łącznej estymacji parametrów równań (5.3.21) i (5.3.14) dla wszystkich analizowanych sektorów.

<sup>229</sup> Przed estymacją czynniki zostały podzielone przez 100, aby ułatwić osiągnięcie zbieżności w drugim kroku przy estymacji parametrów modelu wielorównaniowego.

<sup>230</sup> Wyboru czynników dokonano na podstawie testu LR (patrz tabela 5.21).

Najlepszym rozwiązaniem byłaby łączna estymacja wszystkich parametrów modeli (razem z parametrami modeli opisującymi czynniki). Dla czternastu czynników należałoby wówczas oszacować ponad pięćset parametrów, co ze względu na złożoność modeli jest, jak na razie, zadaniem zbyt złożonym<sup>231</sup>. Do estymacji parametrów zastosowano metodę największej wiarygodności (nadwyżkowe stopy zwrotu sektorów zostały pomnożone przez 100, co znacznie ułatwia i przyspiesza estymację). Liczbę czynników określono za pomocą testu ilorazu wiarygodności (LR). Wyniki testów przedstawiono w tabeli 5.21.

TABELA 5.21. TESTOWANIE LICZBY CZYNNIKÓW

Liczba czynników	Czynniki	Funkcja wiarygodności	Weryfikowane hipotezy (i=1,2,3,4,5)	LR
0	–	-5575,66	–	–
1	1	-5535,03	$\beta_{1i} = 0$	81,27*
2	1,2	-5531,44	$\beta_{2i} = 0$	7,18
2	1,3	-5532,10	$\beta_{3i} = 0$	5,86
2	1,4	-5527,64	$\beta_{4i} = 0$	14,77*
3	1,4,5	-5519,00	$\beta_{5i} = 0$	17,29*
4	1,4,5,6	-5507,66	$\beta_{6i} = 0$	22,66*
5	1,4,5,6,7	-5496,71	$\beta_{7i} = 0$	21,90*
6	1,4,5,6,7,8	-5493,93	$\beta_{8i} = 0$	5,57
6	1,4,5,6,7,9	-5494,71	$\beta_{9i} = 0$	4,00
6	1,4,5,6,7,10	-5496,52	$\beta_{10i} = 0$	0,38
6	1,4,5,6,7,11	-5495,71	$\beta_{11i} = 0$	2,00
6	1,4,5,6,7,12	-5488,92	$\beta_{12i} = 0$	15,58*
7	1,4,5,6,7,12,13	-5481,46	$\beta_{13i} = 0$	14,93*
8	1,4,5,6,7,12,13,14	-5481,23	$\beta_{14i} = 0$	0,45

Gwiazdka oznacza oceny statystyk, w przypadku których weryfikowana hipoteza została odrzucona na poziomie istotności 0,05.

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2008A).

Uzyskane wyniki wskazują na siedem czynników. Otrzymane wyniki estymacji zaprezentowano w tabeli 5.22. Współczynnik  $\beta_{ki}$  oznacza współczynnik beta  $i$ -tego sektora względem  $k$ -tego czynnika<sup>232</sup>, wartości od 1 do 5 ozna-

<sup>231</sup> Taka estymacja byłaby równie trudna, jeśli nie trudniejsza, niż estymacja modelu BEKK, który miał być zastąpiony modelem prostszym.

<sup>232</sup> Przy interpretacji ocen współczynników beta, przedstawionych w tablicy 5.22, należy

czają odpowiednio sektory: spożywczy, chemiczny, metalowy, banki i telekomunikacja. Zupełnie inne wyniki otrzymano wówczas, gdy analiza głównych składowych została przeprowadzona w odniesieniu do stóp zwrotu sektorów. W takiej sytuacji udało się w pełni zidentyfikować tylko jeden czynnik związany z portfelem rynkowym (patrz Fiszeder, 2007g). Inne czynniki były słabo skorelowane ze zmiennymi ekonomicznymi.

**TABELA 5.22. WYNIKI ESTYMACJI SIĘDMIOCZYNNIKOWEGO MODELU APT Z CZYNNIKOWYM MODELEM GARCH**

Parametr	Ocena param.	Błąd oceny	Parametr	Ocena param.	Błąd oceny	Parametr	Ocena param.	Błąd oceny
$\psi_{01}$	0,5631*	0,1935	$\beta_{45}$	-320,0963*	116,3327	$\beta_{74}$	-38,3229	142,9309
$\psi_{02}$	0,7256*	0,1803	$\beta_{51}$	-301,9506	161,7849	$\beta_{75}$	368,9751*	139,4384
$\psi_{03}$	0,3235	0,2432	$\beta_{52}$	-148,7230	168,6496	$\beta_{12,1}$	1180,893*	171,4507
$\psi_{04}$	0,3512	0,2057	$\beta_{53}$	83,8479	226,7612	$\beta_{12,2}$	1392,696*	158,7199
$\psi_{05}$	-0,0664	0,3506	$\beta_{54}$	-287,1462	175,1409	$\beta_{12,3}$	1299,776 *	232,5792
$\beta_{11}$	8,3474	19,5121	$\beta_{55}$	-117,3137	475,8486	$\beta_{12,4}$	1265,323*	167,1126
$\beta_{12}$	55,7679*	20,5830	$\beta_{61}$	-346,2183*	66,3164	$\beta_{12,5}$	1438,917*	359,5535
$\beta_{13}$	55,6985*	27,2116	$\beta_{62}$	-429,9749*	61,2392	$\beta_{13,1}$	38,1884	76,2849
$\beta_{14}$	74,2237	54,1284	$\beta_{63}$	-327,0886*	90,0138	$\beta_{13,2}$	-32,0416	82,6378
$\beta_{15}$	348,4021*	65,6737	$\beta_{64}$	-242,7103*	72,9668	$\beta_{13,3}$	-17,7876	101,9535
$\beta_{41}$	5,0590	63,9518	$\beta_{65}$	-237,5212	130,2916	$\beta_{13,4}$	72,0520	89,8907
$\beta_{42}$	24,3973	65,3924	$\beta_{71}$	-59,3919	137,1559	$\beta_{13,5}$	-565,7562*	154,7188
$\beta_{43}$	-22,9152	85,0045	$\beta_{72}$	41,5769	131,0143	v	10,5523*	0,4249
$\beta_{44}$	-87,8343	151,713	$\beta_{73}$	-272,8902	157,9868	–	–	–

Gwiazdka oznacza oceny parametrów, różniące się istotnie od zera na poziomie istotności 0,05, parametr v oznacza liczbę stopni swobody warunkowego rozkładu t-Studenta. W tabeli pominięto szacunki parametrów  $\Omega$ .

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2008A).

Najsilniejszy wpływ na badane sektory miały czynniki dwunasty (największe udziały miały kursy walutowe USD/PLN oraz EUR/PLN) i szósty (w największym stopniu zależny od zmiany struktury terminowej stóp procentowych, mierzonej różnicą między rentownością 52-tygodniowych bonów skarbowych a 1-miesięcznym WIBOR-em). Niestety przy takiej specyfikacji modelu i sposobie estymacji nie wiadomo, czy istotność współczynników

pamiętać, że zmienne ekonomiczne poddano standaryzacji, czynniki zostały podzielone przez 100, a stopy zwrotu sektorów pomnożono przez 100.

beta wynika z wpływu czynnika na stopy zwrotu badanych sektorów, czy też na wariancję lub kowariancję stóp zwrotu sektorów. Przedstawione w dalszej części tego podrozdziału wyniki badań pokazują, że większe znaczenie ma wyjaśnianie przez zmienność czynników zmienności warunkowej macierzy kowariancji stóp zwrotu sektorów.

W celu weryfikacji poprawności przyjętej specyfikacji przeprowadzono również dodatkowe testy dotyczące niezależności średnich i wariancji warunkowych czynników oraz słabej egzogeniczności czynników. Za pomocą statystyki LR testowano istotność parametrów w modelu VAR. Dla wariancji, ze względu na dużą liczbę zmiennych, nie udało się oszacować modelu BEKK, dlatego niezależność była testowana przez wprowadzenie do równania dla wariancji warunkowej w modelu jednorównaniowym (postać (5.3.19)) opóźnionych kwadratów reszt z modeli w postaci (5.3.18) dla innych czynników<sup>233</sup>. Wyniki testów wskazują, że przyjęte założenia są spełnione. Wybrane czynniki były zmiennymi słabo egzogenicznymi względem stóp zwrotu sektorów.

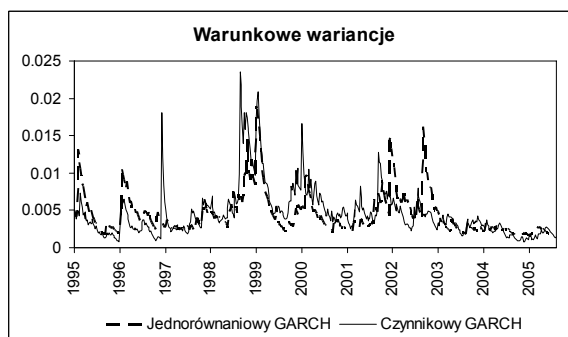
W badaniach empirycznych przyjęte czynniki najczęściej nie będą wyjaśniały w pełni zmienności warunkowych wariancji stóp zwrotu badanych aktywów. Wyniki testu LM na występowanie efektu ARCH dla standaryzowanych reszt z modelu APT z czynnikowym modelem GARCH ( $LM(3) = 5,54; 3,96; 27,33; 18,09; 3,39$  odpowiednio dla sektorów spożywczy, chemiczny, metalowy, banki i telekomunikacja) wskazują, że część zmienności wariancji warunkowej nie została wyjaśniona dla sektora metalowego i banków. Aby uwzględnić niewyjaśnioną zmienność, oszacowano zaproponowane rozszerzenie modelu APT z czynnikowym modelem GARCH w postaci (5.3.24–5.3.25). Przyjęte czynniki były wyznaczone na podstawie analizy głównych składowych, dlatego wyjaśniły stosunkowo dużą część zmienności wariancji warunkowych i wystarczający okazał się model ARCH(1) w postaci skalarnej (macierz  $F_1$  zastąpiono skalarą). Wyniki testu LM na występowanie efektu ARCH ( $LM(3) = 1,57; 1,09; 3,55; 6,19; 2,56$ ) wskazują, że dla wszystkich sektorów nie było podstaw do odrzucenia hipotezy o stałości wariancji warunkowej standaryzowanych składników losowych. Również wynik testu ilorazu wiarygodności ( $LR = 16,14$ ) sugeruje, że rozszerzenie modelu jest celowe.

Porównując uzyskane wyniki z rezultatami innych badań dotyczących GPW w Warszawie, można ocenić, że są one najbardziej zbliżone do rezultatów otrzymanych przez Adamczak i Majerowską (2002), według których współczynniki wrażliwości związane z co najmniej sześcioma czynnikami wyjaśniały oczeki-

<sup>233</sup> W ten sam sposób weryfikację przeprowadzili Engle, Ng i Rothschild (1990).

wane stopy zwrotu. Autorki nie podają jednakże wyników testów dotyczących stałości parametrów w modelu APT. W pracy Rubaszka (2002) parametry oznaczające premie za ryzyko związane z czynnikami były niestabilne w czasie. Przyjęty w niniejszym badaniu model nie wymaga stałości premii za ryzyko, ponieważ są one opisane za pomocą jednorównaniowych modeli GARCH-M.

Poważną słabością procedury budowy modelu APT z zastosowaniem czynnikowego modelu GARCH, zaproponowanej w pracy Engle'a, Ng i Rothschilda (1990), są jednakże bardzo niskie szacunki współczynników determinacji, dla równania (5.3.21), wynoszące odpowiednio: 0,0007; 0,0043; 0,0004; 0,0002; 0,0004. Wynikają one prawdopodobnie z faktu, że wartości teoretyczne, wyznaczone na podstawie jednorównaniowych modeli GARCH-M, są słabą miarą premii za ryzyko<sup>234</sup>. Być może nie są spełnione któreś z przyjętych założeń, np. stałość preferencji w czasie<sup>235</sup>. Dla wszystkich czynników mających istotny wpływ na badane sektory, zależność pomiędzy oczekiwaną stopą zwrotu a wariancją warunkową nie była istotna statystycznie (patrz tabela 5.20). Podobny wynik otrzymali Fiszeder i Kwiatkowski (2005a) dla większości badanych spółek, notowanych na GPW w Warszawie. Przedstawiony model siedmioczynnikowy znacznie lepiej opisuje zmienność macierzy kowariancji. Średnia z ocen współczynników korelacji między wariancjami warunkowymi, oszacowanymi na podstawie jednorównaniowego modelu GARCH a wariancjami warunkowymi, oszacowanymi na podstawie czynnikowego modelu GARCH wynosiła 0,27. Szacunki wariancji warunkowych dla wybranego sektora przedstawia rysunek 5.3.



**RYСУNEK 5.3. WARUNKOWE WARIANCJE STÓP ZWROTU SEKTORA TELEKOMUNIKACJA**

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2008A).

<sup>234</sup> Również pewien wpływ na otrzymane wyniki może mieć zmienność współczynników beta, patrz Fiszeder (2006a).

<sup>235</sup> Patrz założenia do formuły (5.3.17).



Słabe wyjaśnienie zmienności stóp zwrotu wynika też z pewnością z nieuwzględnienia zmiennych makroekonomicznych i finansowych, które są dostępne z częstotliwością miesięczną lub kwartalną. Można zastanawiać się, czy wyspecyfikowane czynniki są wystarczające do tego, aby model był w stanie opisać równowagę. Na to pytanie nie można jednoznacznie odpowiedzieć. Z drugiej strony należy pamiętać, że w wyniku analizy danych o niskiej częstotliwości traci się wiele informacji o zmienności macierzy kowariancji stóp zwrotu. Krótkookresowe wahania rynku mogą nie mieć wpływu na długookresową równowagę, ale mogą wpłynąć na równowagę krótkookresową. Znaczące krótkookresowe wahania są ważne dla wielu inwestorów, stąd więc wynika potrzeba analizy modeli równowagi rynku również dla danych o większej częstotliwości.

Do opisu zależności pomiędzy oczekiwaną stopą zwrotu a wariancją czynników można zastosować model GARCH z progowym efektem GARCH-M (GARCH-MT, patrz tabela 1.1):

$$P_{kt} = c_k + \delta_k^+ I_t h_{kt} + \delta_k^- (1 - I_t) h_{kt} + \varepsilon_{kt}, \quad \varepsilon_{kt} | \psi_{t-1} \sim D(0, h_{kt}), \quad (5.3.26)$$

$$h_{kt} = w_k + \phi_k \varepsilon_{kt-1}^2 + \varphi_k h_{kt-1} \quad \text{dla } k = 1, 2, \dots, K, \quad (5.3.27)$$

gdzie  $I_t = 1$  gdy  $x_{t-1} \geq 0$  i  $I_t = 0$  gdy  $x_{t-1} < 0$ .

Jako  $x_t$  przyjęto tygodniowe stopy zwrotu indeksu S&P 500. Koniunktura na GPW w Warszawie jest w dużym stopniu uzależniona od koniunktury na rynku akcji w Nowym Jorku (patrz np. Fiszeder, 2003a). Dlatego wydaje się, że sytuacja na giełdzie w Stanach Zjednoczonych może również wpływać na zależność między stopą zwrotu a wariancją (a przez to także na premie za ryzyko, szacowane na podstawie modelu GARCH-M). Oszacowane dla wybranych na podstawie testu LR czynników modele GARCH z progowym efektem GARCH-M przedstawiono w tabeli 5.23. Dla wszystkich istotnych czynników, poza piątym, oceny parametrów  $\delta_k^+$  oraz  $\delta_k^-$  mają przeciwne znaki, zatem w tych przypadkach można mówić o asymetrycznym efekcie GARCH-M. Taka postać modelu ma znaczący wpływ na oszacowane na podstawie tego modelu premie za ryzyko.

**TABELA 5.23. WYNIKI ESTYMACJI JEDNORÓWNIANOWEGO MODELU GARCH-MT DLA WYBRANYCH CZYNNIKÓW**

Czynnik	$c_k$	$\delta_k^+$	$\delta_k^-$	$w_k \times 10^{-4}$	$\phi_k$	$\varphi_k$	$v$
1	0,0027 (0,0020)	26,963 (10,675)	-59,345 (13,258)	0,3419 (0,1718)	0,0913 (0,0359)	0,7251 (0,1185)	6,7290 (1,8036)
4	-0,0000 (0,0012)	-1,0473 (10,983)	0,6045 (10,538)	0,0777 (0,0491)	0,0924 (0,0369)	0,8427 (0,0653)	11,3919 (5,0252)
5	-0,0069 (0,0144)	43,424 (128,48)	82,244 (129,13)	0,0301 (0,0333)	0,0101 (0,0166)	0,9623 (0,0373)	6,4270 (2,0109)
6	0,0005 (0,0007)	-12,828 (15,615)	8,1187 (14,602)	0,0520 (0,0225)	0,1250 (0,0488)	0,7787 (0,0675)	4,8973 (1,0416)
7	-0,0011 (0,0034)	-25,215 (46,369)	61,956 (46,144)	0,0241 (0,0802)	0,0292 (0,0471)	0,9381 (0,1495)	–
12	-0,0007 (0,0003)	39,808 (16,368)	-0,2723 (3,6934)	0,0159 (0,0182)	0,0081 (0,0147)	0,9459 (0,0529)	–
13	0,0005 (0,0003)	1,3545 (11,289)	-33,114 (13,125)	0,0638 (0,0302)	0,3312 (0,1226)	0,5169 (0,1592)	5,1577 (1,1410)

W nawiasach, pod ocenami parametrów, podano średnie błędy szacunku, parametr  $v$  oznacza liczbę stopni swobody warunkowego rozkładu t-Studenta.

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2008A).

Zależność między oczekiwaną stopą zwrotu a wariancją jest dodatnia dla czynnika piątego, niezależnie od znaku stopy zwrotu indeksu S&P 500. Istotne na poziomie 0,05 są oceny parametrów  $\delta_k^+$  dla pierwszego i dwunastego czynnika oraz  $\delta_k^-$  dla pierwszego i trzynastego czynnika. Model z progowym efektem GARCH-M lepiej opisuje zależność między oczekiwaną stopą zwrotu a wariancją niż model GARCH-M. Z tego względu wydaje się, że wartości teoretyczne  $P_{kt}$ , wyliczane na podstawie modelu z progowym efektem GARCH-M, będą lepszą miarą premii za ryzyko niż wartości teoretyczne, wyliczane na podstawie modelu GARCH-M.

Oszacowane na podstawie modeli GARCH z progowym efektem GARCH-M premie za ryzyko i wariancje warunkowe czynników, wykorzystano do estymacji modelu APT z czynnikowym modelem GARCH. Logarytm funkcji wiarygodności, dla modelu APT, w którym premie za ryzyko i wariancje szacowane były na podstawie modelu GARCH-M (model 1), wynosił -5481,46. Dla modelu APT, w którym premie za ryzyko i wariancje szacowane były na podstawie modelu z progowym efektem GARCH-M (model 2) logarytm funkcji wiarygodności wynosił -5463,57. Powyższe wyniki wskazują na model drugi, jednakże rozważane modele są niezagnieżdzone. W celu wskazania modelu lepszego przeprowadzono test obejmowania względem

wariancji. Zastosowano test zaproponowany przez Davidsona i MacKinnona (1981). Polega on na tym, że do modelu wprowadza się dodatkową zmienną objaśniającą – wartości teoretyczne oszacowane na podstawie innego modelu – i bada się istotność parametru stojącego przy tej zmiennej. Wyniki testu obejmowania wskazują, że model 2 obejmuje w zakresie wariancji model 1 ( $LR = 43,86$ ), natomiast model 1 nie obejmuje modelu 2 ( $LR = 6,86$ ). Zatem model APT, w którym wykorzystano premie za ryzyko i wariacje szacowane na podstawie modelu z progowym modelem GARCH-M jest modelem lepszym. Wykorzystanie premii za ryzyko i wariacji szacowanych na podstawie modelu z progowym modelem GARCH-M wyraźnie zwiększa również szacunki współczynników determinacji dla równania (5.3.21), wynoszące odpowiednio: 0,02; 0,05; 0,04; 0,08; 0,08. Wartości te są ciągle na stosunkowo niskim poziomie, jednakże tylko trochę większe szacunki (równe średnio 0,13) otrzymali King, Sentana i Wadhvani (1994) dla danych miesięcznych<sup>236</sup>, na podstawie innej procedury estymacyjnej.

## WNIOSKI

W pracy zaprezentowano model APT z czynnikowym modelem GARCH oraz przeprowadzono weryfikację na podstawie indeksów sektorowych notowanych na GPW w Warszawie. Uzyskane wyniki wskazują, że zmienne ekonomiczne mają istotny wpływ na dynamikę cen akcji spółek notowanych na GPW w Warszawie. Wybrano siedmioczynnikowy model APT z czynnikami wyodrębnionymi na podstawie analizy głównych składowych w odniesieniu do zmiennych ekonomicznych. Zaprezentowany model znacznie lepiej opisywał zmienność macierzy kowariancji stóp zwrotu badanych sektorów niż zmienność samych stóp zwrotu.

Przedstawiono tu także rozszerzoną postać modelu APT z czynnikowym modelem GARCH, która pozwala uwzględnić niewyjaśnioną zmienność warunkowych wariancji i kowariancji stóp zwrotu aktywów. Zaproponowano również, aby w pierwszym kroku premie za ryzyko i wariacje warunkowe czynników były szacowane na podstawie modelu z progowym efektem GARCH-M zamiast na podstawie klasycznego modelu GARCH-M. Przeprowadzone testy wskazują na przewagę tak skonstruowanego modelu.

<sup>236</sup> Mając zatem dostęp do znacznie szerszej grupy czynników ekonomicznych.

Wyniki przedstawione w podrozdziałach 5.2 i 5.3 wskazują, że model CAPM jest niewystarczający do opisu oczekiwanych stóp zwrotu akcji na GPW w Warszawie. Konieczne jest uwzględnienie dodatkowych czynników makroekonomicznych oraz finansowych. Rezultaty badań wskazują na bardzo ograniczone możliwości zastosowań modeli GARCH w konstrukcji i testowaniu modeli CAPM i APT. Zaletą zastosowania modeli GARCH jest możliwość testowania różnych specyfikacji i restrykcji dla modeli CAPM i APT z uwzględnieniem zmiennych wariancji i kowariancji stóp zwrotu aktywów. Jednakże ze względu na złożoność estymacji parametrów modeli GARCH, jak dotąd istniejące specyfikacje modeli mają ograniczone zastosowanie w testach CAPM i APT, a analiza musi być przeprowadzona dla niedużej liczby portfeli.

## Rozdział VI

# **INSTRUMENTY POCHODNE – WYCENA OPCJI I HEDGING KONTRAKTAMI FUTURES**

Początki instrumentów pochodnych związane były z handlem towarami rolnymi i surowcami naturalnymi. Instrumenty pochodne powstały w odpowiedzi na zapotrzebowanie ze strony producentów i pośredników, narażonych na ryzyko związane z fluktuacją cen. Na szerszą skalę na rynkach finansowych pojawiły się one w latach siedemdziesiątych dwudziestego wieku. Przyczyną ich wprowadzenia był wzrost zmienności kursów walutowych, stóp procentowych, cen akcji i cen towarów na rynkach światowych. Wzrost zmienności cen instrumentów finansowych oznaczał zwiększenie ryzyka inwestowania w te instrumenty finansowe. Poza zabezpieczaniem przed ryzykiem instrumenty pochodne są wykorzystywane również do innych celów, takich jak spekulacja czy arbitraż. Obecnie rynki transakcji terminowych odgrywają bardzo ważną i stale rosnącą rolę w świecie inwestycji i finansów.

Jednym z najważniejszych zagadnień teoretycznych dotyczących instrumentów pochodnych jest wycena opcji. Pierwszy model wyceny opcji zaproponował w 1900 roku Bachelier. Przyjął on założenie, że cena akcji zmienia się zgodnie z arytmetycznym ruchem Browna. Formuła Bacheliera (1900) bazowała na nierealistycznym założeniu, że ceny akcji mogą być ujemne. Osborne (1959) i Samuelson (1965) w miejsce arytmetycznego ruchu Browna zaproponowali geometryczny ruch Browna. Kolejne modele wyceny opcji przedstawiają Sprengle (1961) i Boness (1964). Podstawowe osiągnięcia teorii wyceny to dwa słynne artykuły autorstwa Blacka i Scholesa (1973) oraz Mertona (1973). Pierwsza praca dotyczy europejskich opcji wystawionych na akcję nie płacącą dywidendy. W drugiej pracy Merton (1973) rozszerzył formułę na przypadek wyceny europejskiej opcji kupna wystawionej na akcję (portfel akcji) przynoszącą dochód w postaci dywidendy. W kolejnych latach powstawały modele wyceny oparte na innych założeniach, wystawiane na inne instrumenty oraz dotyczące innych

rodzajów opcji<sup>237</sup>. W ostatnich dwudziestu latach nastąpił ogromny rozwój metod matematycznych i ekonometrycznych wykorzystywanych do wyceny instrumentów pochodnych.

Jednym z założeń klasycznych modeli wyceny opcji jest stałość wariancji instrumentu bazowego. Może to prowadzić do znacznych obciążeń wycen opcji, konstruowanych na ich podstawie. Dlatego też zaproponowano szereg modeli wyceny, w których próbuje się uwzględnić zmienność wariancji<sup>238</sup>. W większości z nich przyjmuje się założenie, że ceny instrumentu bazowego są realizacjami procesów z czasem ciągłym. Najczęściej stosowany do modelowania zmienności na rynkach finansowych proces GARCH jest jednakże procesem z czasem dyskretnym. Wyceny opcji przy założeniu, że stopy zwrotu są realizacją procesu GARCH dokonał po raz pierwszy Duan (1995). Zastosowanie modeli klasy GARCH pozwala w stosunkowo prosty sposób opisać wiele własności finansowych szeregów czasowych. Uwzględnienie tych własności przy wycenie opcji prowadzi często do wzrostu trafności wycen (patrz np. Duan i Zhang, 2001, Lehar, Scheicher i Schittenkopf, 2002, Christoffersen i Jacobs, 2004). Zastosowanie modeli GARCH do wyceny opcji pozwala dodatkowo wyjaśnić większość obciążeń modelu Blacka i Scholesa (BS) (patrz np. Duan, 1999, Hafner i Herwartz, 2001).

Równie ważnym z praktycznego punktu widzenia zastosowaniem instrumentów pochodnych jest hedging, czyli zabezpieczanie przed ryzykiem. Podstawowym celem transakcji zabezpieczających jest ochrona przed stratami, jakie mogą wyniknąć ze zmian cen. Zawierane mogą być one zarówno przez sprzedawców jak i nabywców, którzy chcą sprzedać lub kupić określone aktywa w przyszłości, aby wyeliminować lub zmniejszyć ryzyko związane z możliwą niekorzystną zmianą ich cen na rynku kasowym do czasu realizacji rzeczywistych transakcji. Do transakcji zabezpieczających mogą być stosowane różne instrumenty pochodne, np. opcje czy kontrakty futures. Stosowane tradycyjne metody estymacji współczynnika zabezpieczenia nie biorą pod uwagę zmieniających się w czasie warunkowych wariancji i kowariancji stóp zwrotu. To może prowadzić do spadku efektywności zabezpieczenia, szczególnie w przypadku dynamicznych strategii zabezpieczających, wymagających częstych zmian pozycji. Jedną z metod, która pozwala opisać te ważne własności finansowych szeregów czasowych są wielorównaniowe modele GARCH. Korzyści wynikające z zastosowania modeli GARCH przy za-

<sup>237</sup> Szerszy kontekst historyczny i przegląd modeli można znaleźć w pracy Jajugi (2004).

<sup>238</sup> Patrz punkt 6.1.1.

bezpieczeniu mają najczęściej charakter ekonomiczny i finansowy. Aplikacje modeli GARCH mogą na przykład prowadzić do stabilizacji kosztów obsługi zadłużenia zagranicznego (Kroner i Claessens, 1991) oraz wzrostu efektywności strategii zabezpieczających mierzonej za pomocą: wariancji (np. Bera, Garcia i Roh, 1997) wymogów kapitałowych z tytułu ryzyka rynkowego (np. Brooks, Henry i Persaud, 2002), funkcji użyteczności (np. Gagnon, Lypny i McCurdy, 1998), VaR i wskaźnika efektywności Sharpe'a (np. Bos, Mahieu i van Dijk, 2000) czy też wskaźnika zyskowności (np. Gannon i Chng, 2000). Korzyści wynikające z zastosowania modeli GARCH mogą również dotyczyć lepszego wyjaśnienia opisywanych zjawisk, na przykład przeprowadzenie dynamicznej analizy relatywnej ważności komponentów współczynnika zabezpieczenia związanych z czynnikami makroekonomicznymi i specyficznymi dla określonych akcji (Tong, 1996) czy pokazanie, że wprowadzenie pieniężnego rozliczenia kontraktów zmniejszyło ryzyko zabezpieczanych portfeli (Lien i Tse, 2002).

Rozdział podzielono na dwie części. W podrozdziale 6.1 przedstawiono zagadnienia związane z zastosowaniem modeli GARCH do wyceny opcji. W pierwszej kolejności omówiono obciążenia wynikające z zastosowania modelu BS, będące następstwem zmienności wariancji procesów. Dalej zaprezentowano metody wyceny opcji dla różnych parametryzacji procesów GARCH. Przedstawiono również wyniki analizy empirycznej dla opcji wystawianych na indeks WIG20. Jest to pierwsza analiza dotycząca rynku instrumentów opcyjnych w Polsce, w której rozważa się trafność wycen konstruowanych na podstawie różnych specyfikacji jednorównaniowych modeli GARCH. W badaniu zastosowano następujące specyfikacje modeli jednorównaniowych: GARCH, GARCH-M, NGARCH, NGARCH-M, GJR-GARCH oraz GJR-GARCH z warunkowym rozkładem t-Studenta. Wyceny skonstruowane na podstawie modeli GARCH porównano dodatkowo z wycenami konstruowanymi na podstawie innych metod: modelu BS, modelu BS w połączeniu z modelem wynikającym z koncepcji RiskMetrics oraz podejścia stosowanego przez praktyków rynku.

W podrozdziale 6.2 modele GARCH zostały zastosowane do zabezpieczenia przed ryzykiem. Dokonano oceny skuteczności strategii zabezpieczających za pomocą kontraktów terminowych dla portfeli notowanych na GPW w Warszawie. Do szacowania współczynnika zabezpieczenia zastosowano następujące parametryzacje dwurównaniowego modelu GARCH: BEKK, BEKK z warunkowym dwuwymiarowym rozkładem t-Studenta, diagonalny BEKK, model skalarno-diagonalny, DCC, zintegrowany DCC, model stałych współczynni-

ków korelacji. Badano również różne parametryzacje warunkowych średnich: stałe średnie, model VAR, model z mechanizmem korekty błędów. Poza modelami GARCH zastosowano również inne metody oraz modele, na podstawie których estymowano współczynnik zabezpieczenia, takie jak: zabezpieczenie naiwne, zabezpieczenie MNK, ruchomą macierz kowariancji, wyrównywanie wykładnicze, model wynikający z koncepcji RiskMetrics, modele regresji z losowymi parametrami, opisanymi jako proces błędzenia przypadkowego i proces autoregresyjny. Zaproponowano również sposób wyznaczania stałej wygładzania i parametru wygasania, w metodach ruchomej macierzy kowariancji i wyrównywania wykładniczego dla wariancji, który daje lepsze wyniki przy zabezpieczaniu portfeli.

Dotychczasowe wyniki badań empirycznych są niejednoznaczne i nie wskazują jednego modelu jako najbardziej skutecznego w zabezpieczaniu przed ryzykiem. W celu uzyskania bardziej ogólnych wniosków dotyczących efektywności metod przy zabezpieczaniu portfela, uzyskane w pracy wyniki porównano z własnościami badanych szeregów czasowych. W innych badaniach empirycznych ten aspekt jest często pomijany, co utrudnia znalezienie przyczyn zróżnicowanej skuteczności różnych metod i modeli, wykorzystywanych do zabezpieczania przed ryzykiem. Dodatkowo przeprowadzono również analizę skuteczności zabezpieczania wewnątrz próby. Pokazano, że można na podstawie analizy wewnątrz próby dla tej samej miary, na podstawie której dokonuje się oceny poza próbą, wskazać postacie modeli, których zastosowanie do estymacji współczynnika zabezpieczenia pozwoli skuteczniej ograniczać ryzyko. Takie badanie wewnątrz próby ma większe szanse na wybór najlepszych parametryzacji modeli niż analiza statystycznych własności szeregów czasowych i kryteriów informacyjnych.

W pracy zaproponowano również metodę oceny efektywności strategii zabezpieczającej z wykorzystaniem danych o wysokiej częstotliwości. Przeprowadzono również dynamiczną analizę kształtowania się współczynników zabezpieczenia w powiązaniu z kształtowaniem się warunkowej wariancji. Wyniki takiego badania pozwalają określić, w jakich okresach należy zwiększyć lub zmniejszyć poziom zabezpieczenia. W większości prac bada się efektywność różnych strategii zabezpieczających dla instrumentów finansowych, w przypadku których są notowane kontrakty terminowe. Nie wiadomo natomiast, jak skuteczne są strategie, gdy zabezpieczany jest instrument, dla którego nie ma notowanych instrumentów pochodnych. W pracy przeprowadzono analizę również dla takiego portfela.



## 6.1. WYCENA OPCJI WYSTAWIONYCH NA AKCJE I INDEKSY AKCJI

Od czasu opublikowania przełomowych prac Blacka i Scholesa (1973) oraz Mertona (1973)<sup>239</sup> obserwuje się prawdziwą eksplozję teoretycznych i empirycznych badań dotyczących problemu wyceny instrumentów pochodnych. Zagadnienie wyceny opcji należy do najważniejszych zagadnień matematyki finansowej. Problem wyceny był również przedmiotem wielu badań ekonometrycznych. Kluczową rolę w wycenie opcji odgrywa zmienność instrumentu bazowego. Poniżej zaprezentowano wycenę opcji dla różnych specyfikacji jednorównaniowych procesów GARCH, a następnie zbadano trafność takiego podejścia dla opcji wystawianych na indeks WIG20. Przedstawione sposoby wyceny opcji pozwalają wyjaśnić większość obciążeń modelu BS.

### 6.1.1. WYCENA OPCJI NA PODSTAWIE MODELU BLACKA I SCHELESA I JEJ OBCIĄŻENIA

Początkowo wszystkie formuły na wycenę opcji opierały się na procesach z czasem ciągłym. Najczęściej stosowany model wyceny opcji<sup>240</sup>, czyli model Blacka i Scholesa, został wyprowadzony przy założeniu, że ceny instrumentu bazowego zmieniają się zgodnie z geometrycznym ruchem Browna o stałych parametrach  $\mu$  i  $\sigma$ :

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dz_t, \quad (6.1.1)$$

gdzie  $S_t$  to cena instrumentu bazowego,  $\mu$  – parametr oznaczający dryf,  $\sigma$  – parametr oznaczający zmienność,  $z_t$  – standardowy ruch Browna. Przy wyprowadzeniu modelu, poza opisem procesu cen, przyjęto szereg innych założeń<sup>241</sup>. Równania określające ceny europejskich opcji kupna i opcji sprzedaży w chwili  $t$  mają następującą postać:

$$c_t = S_t N(d_{1t}) - X e^{-r_f(T-t)} N(d_{2t}), \quad (6.1.2)$$

<sup>239</sup> Robert Merton i Myron Scholes w 1997 roku otrzymali Nagrodę Nobla za nową metodę wyceny instrumentów pochodnych (współtwórca Fischer Black zmarł w 1995 r.).

<sup>240</sup> Wraz z późniejszymi uogólnieniami modelu.

<sup>241</sup> Patrz np. Jajuga i Jajuga (1996), Hull (1998).

$$p_t = Xe^{-r_f(T-t)}N(-d_{2t}) - S_tN(-d_{1t}), \quad (6.1.3)$$

przy czym:

$$d_{1t} = [\ln(S_t / X) + (r_f + \sigma^2 / 2)(T - t)] / \sigma\sqrt{T - t},$$

$$d_{2t} = d_{1t} - \sigma\sqrt{T - t},$$

gdzie  $c_t$  – cena opcji kupna w chwili  $t$ ,  $p_t$  – cena opcji sprzedaży,  $S_t$  – cena instrumentu bazowego,  $X$  – cena wykonania opcji,  $r_f$  – stała stopa procentowa wolna od ryzyka,  $T$  – okres ważności opcji,  $\sigma$  – zmienność waloru bazowego,  $N(\cdot)$  – dystrybuanta standaryzowanego rozkładu normalnego.

Na przykład dla obserwacji dziennych stosuje się dzienną stopę procentową wolną od ryzyka, odchylenie standardowe dziennych stóp zwrotu oraz okres ważności wyrażony w dniach<sup>242</sup>.

Formułę na wycenę europejskiej opcji sprzedaży można wyprowadzić, korzystając z parytetu kupna-sprzedaży opcji (ang. *put-call parity*)<sup>243</sup>:

$$c_t + Xe^{-r_f(T-t)} = p_t + S_t. \quad (6.1.4)$$

Liczne badania empiryczne pokazują, że ceny rynkowe opcji różnią się od teoretycznych wycen skonstruowanych na podstawie modelu BS (patrz np. Rubinstein, 1985). Gdyby model BS wyceniał opcje prawidłowo, to zmienność implikowana powinna mieć stałą wartość, niezależną od ceny wykonania i terminu do wygaśnięcia. Tymczasem płaszczyzna zmienności implikowanej charakteryzuje się występowaniem „uśmiechu zmienności” lub „grymasu zmienności”. Efekt „uśmiechu zmienności” polega na tym, że zmienność implikowana, wyznaczona na podstawie modelu BS, jest niższa dla opcji po cenie (ATM), a rośnie im bardziej opcja jest w cenie (ITM) lub poza ceną (OTM)<sup>244</sup>. Wykres zmienności implikowanej, dla różnych cen wykonania, jest symetryczny i ma kształt zbliżony do wypukłej paraboli (przypomina uśmiech). Na części rynków opcji występuje efekt „grymasu zmienności”, który polega na tym, że zmienność implikowana jest różna dla opcji ITM

<sup>242</sup> W alternatywnym zapisie formuły BS wartości te podawane są w skali roku.

<sup>243</sup> Zależność ta dotyczy cen opcji, o takich samych cenach wykonania i wygasających w tym samym terminie.

<sup>244</sup> Opcja jest: ITM, jeżeli opłaca się ją wykonać, OTM, gdy nie opłaca się jej wykonać oraz ATM, gdy cena wykonania (alternatywnie zdyskontowana cena wykonania) jest równa bieżącej cenie instrumentu bazowego.

i OTM (najczęściej jest znacznie wyższa dla opcji ITM niż dla opcji OTM). Wykres zmienności implikowanej względem różnych cen wykonania jest asymetryczny. Do obciążeń związanych z wyceną na podstawie modelu BS można również zaliczyć: niedoszacowanie cen opcji dla instrumentów bazowych o niskiej zmienności stóp zwrotu, niedoszacowanie cen opcji o krótkich terminach do wygaśnięcia (zmienność implikowana wyznaczana na podstawie cen opcji o różnych terminach do wygaśnięcia również nie jest stała i tworzy określoną strukturę czasową<sup>245</sup>).

Obciążenia wynikające z zastosowania modelu BS są rezultatem niespełnienia przyjętych przy wyprowadzeniu formuły założeń. Ze względu na tematykę pracy w dalszej części zostaną omówione wyłącznie obciążenia wynikające z niespełnienia założenia o procesie generującym ceny instrumentu bazowego, mianowicie założenia o stałości parametru zmienności  $\sigma$ . Dla geometrycznego ruchu Browna logarytmiczne stopy zwrotu mają rozkład normalny, tymczasem rozkład empirycznych stóp zwrotu większości instrumentów finansowych jest leptokurtyczny i często asymetryczny. Jeżeli oba ogony empirycznego rozkładu stóp zwrotu są grubsze niż w rozkładzie normalnym, to model BS niedoszacowuje ceny opcji kupna i sprzedaży OTM oraz ITM. Podobna sytuacja występuje w przypadku zmiennej wariancji i braku korelacji pomiędzy bieżącą stopą zwrotu a przyszłą zmiennością<sup>246</sup>. W przypadku, gdy lewy ogon rozkładu jest grubszy, a prawy cieńszy niż w rozkładzie normalnym, to model BS przeszacowuje ceny opcji kupna OTM i sprzedaży ITM oraz niedoszacowuje ceny opcji kupna ITM i sprzedaży OTM. Podobnie jest w przypadku zmiennej wariancji, gdy pomiędzy bieżącą stopą zwrotu a przyszłą zmiennością występuje ujemna korelacja (patrz np. Wiggins, 1987; Heston, 1993). Badania empiryczne pokazują, że formuła BS najczęściej znacząco przeszacowuje ceny opcji kupna OTM w stosunku do cen opcji kupna ITM (patrz np. Wiggins, 1987; Bakshi, Cao i Chen, 1997). Te wyniki sugerują, że ważną rolę przy wycenie odgrywa zarówno leptokurtyczność, jak i ujemna asymetria rozkładu stóp zwrotu (alternatywnie zmienność wariancji i ujemna korelacja między bieżącą stopą zwrotu a przyszłą zmiennością<sup>247</sup>).

Zaprezentowane powyżej formuły wyceny opcji, na podstawie modelu BS, pierwotnie określały ceny europejskich opcji kupna i sprzedaży akcji

<sup>245</sup> Obciążenia z tym związane można próbować wytłumaczyć na podstawie modeli ze zmiennymi stopami procentowymi.

<sup>246</sup> Ze statycznego punktu widzenia, czyli analizując jedynie rozkład bezwarunkowy i nie uwzględniając zależności dynamicznych, obie sytuacje są identyczne.

<sup>247</sup> Patrz własności empirycznych stóp zwrotu w podrozdziale 1.1.

spółek niewypłacających dywidendy. Na bazie modelu BS powstało jednakże wiele uogólnień i rozszerzeń pozwalających dokonać wyceny opcji, odstępując od niektórych założeń bądź też dokonać wycen dla innych instrumentów finansowych<sup>248</sup>. Poniżej omówiono tylko te modele wyceny, które były wykorzystywane w dalszej części pracy<sup>249</sup>. Cena europejskiej opcji kupna, dla akcji spółki wypłacającej dywidendę, jest równa:

$$c_t = S_t e^{-q(T-t)} N(d_{1t}) - X e^{-r_f(T-t)} N(d_{2t}), \quad (6.1.5)$$

przy czym:

$$d_{1t} = [\ln(S_t / X) + (r_f - q + \sigma^2 / 2)(T - t)] / \sigma \sqrt{T - t},$$

$$d_{2t} = d_{1t} - \sigma \sqrt{T - t},$$

gdzie  $q$  oznacza średnią wartość stopy dywidendy<sup>250</sup>.

Jeżeli znana jest wysokość dywidendy, to alternatywnie można wykorzystać wzór BS, w którym początkowa cena akcji zmniejszona została o wartość bieżącą dywidend wypłaconych w okresie ważności opcji.

Liczne badania empiryczne pokazują, że wariancja procesów finansowych nie jest stała w czasie. Dlatego też bardzo szybko zaproponowano kilka modeli wyceny, w których próbuje się uwzględnić zmienność wariancji, np.: model stałej elastyczności wariancji (Cox, 1975), model skoku i dyfuzji (Merton, 1976), model opcji złożonych (Geske, 1979). Hull i White (1987) dokonali wyceny opcji przy założeniu procesu ze stochastyczną zmiennością i braku korelacji między procesami opisującymi dynamikę cen i zmienności:

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma_t S_t dw_{1t}, \quad (6.1.6)$$

$$d\sigma_t^2 = \varsigma \sigma_t^2 dt + \vartheta \sigma_t^2 dw_{2t}, \quad (6.1.7)$$

gdzie  $w_{1t}, w_{2t}$  są standardowymi niezależnymi ruchami Browna.

Cena europejskiej opcji kupna w chwili  $t$  ma postać:

$$c_t = E[\text{BS}(\sigma_{t,T}) | \psi_t], \quad (6.1.8)$$

<sup>248</sup> Patrz Hull (1998).

<sup>249</sup> Przedstawiono tylko opcje wystawione na akcje.

<sup>250</sup> Dla danych dziennych jest to średnia dzienna stopa dywidendy.

gdzie  $BS(\cdot)$  oznacza wartość obliczoną z modelu BS,  $\sigma_{t,T}$  – to średnia zmienność w okresie do wygaśnięcia opcji  $\sigma_{t,T}$ .

Podobne formuły, przy założeniu, że proces cen instrumentu bazowego jest procesem dyfuzji ze stochastyczną wariancją, wyprowadzili Johnson i Shanno (1987), Scott (1987) oraz Wiggins (1987). Poza pracą Wigginsa (1987), autorzy wyceniają opcje przy neutralnym podejściu do ryzyka z zastosowaniem symulacji Monte Carlo. Stein i Stein (1991), Heston (1993) oraz Ball i Roma (1994) wyprowadzili formuły na wycenę opcji, przy założeniu określonych postaci stochastycznej zmienności, dla procesów z czasem ciągłym.

Feinstein (1988) pokazał, że dla opcji ATM, o terminie bliskim wykonania, model BS jest zbliżony do liniowego ze względu na  $\sigma$ , dlatego:

$$E[BS(\sigma_{t,T})|\psi_t] \approx BS(E[\sigma_{t,T}|\psi_t]). \quad (6.1.9)$$

Jeżeli przybliżenie jest dokładne<sup>251</sup>, wówczas zmienność implikowana, otrzymana na podstawie modelu BS, spełnia warunek:

$$\bar{\sigma}_{t,T} = E[\sigma_{t,T}|\psi_t]. \quad (6.1.10)$$

Wynik ten jest ważny z praktycznego punktu widzenia, ponieważ zmienność implikowana jest na ogół obliczana z wykorzystaniem modelu BS.

### 6.1.2. WYCENA OPCJI DLA PROCESÓW GARCH

Po raz pierwszy wycenę opcji przy założeniu, że stopy zwrotu są realizacją procesu GARCH-M<sup>252</sup>, czyli procesu z czasem dyskretnym, zaproponował Duan (1995). Założmy, że ceny instrumentu finansowego są realizacjami procesu GARCH-M w postaci<sup>253</sup>:

$$r_t = r_f + \delta h_t^{-1/2} - 0,5h_t + \varepsilon_t, \quad (6.1.11)$$

<sup>251</sup> W badaniu Duana (1995) na podstawie modeli GARCH różnica między wycenami, zakładającymi stałe i zmienne warunkowe odchylenie standardowe, nie była duża dla opcji ATM o terminie bliskim wykonania i nie przekraczała średnio 4% wartości opcji.

<sup>252</sup> Patrz tabela 1.1.

<sup>253</sup> Na parametry modelu GARCH oraz przedstawionych w dalszej części pracy rozszerzeń modelu muszą być oczywiście nałożone restrykcje zapewniające dodatniość wariancji warunkowej oraz stacjonarność procesu.

$$\varepsilon_t = z_t h_t^{1/2}, \quad z_t \sim N(0,1), \quad (6.1.12)$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i \varepsilon_{t-i}^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}, \quad (6.1.13)$$

gdzie  $r_t = \ln(S_t / S_{t-1})$ ,  $S_t$  oznacza cenę instrumentu bazowego w chwili  $t$ , parametr  $\delta$  oznacza jednostkową premię za ryzyko.

Tradycyjna metoda wyceny opcji przy neutralnym podejściu do ryzyka musi być w tym przypadku uogólniona. Wycena przy lokalnie neutralnym podejściu do ryzyka polega na takiej modyfikacji procesu stóp zwrotu, by nie zmienić warunkowej wariancji na jeden okres do przodu, a warunkowa oczekiwana stopa zwrotu była równa stopie wolnej od ryzyka. Wprowadza się pojęcie probabilistycznej miary  $Q$  neutralizującej ryzyko, przy której cenę opcji można obliczyć przez zdyskontowanie wartości oczekiwanej wypłaty opcji. W przypadku zmiennej w czasie wariancji stóp zwrotu instrumentu bazowego istnieje wiele możliwych miar  $Q$ . Dlatego niezbędne jest przyjęcie założenia o preferencjach inwestora względem ryzyka i postaci funkcji użyteczności. Duan (1995) dowodzi, że jeżeli inwestorzy maksymalizują oczekiwaną użyteczność, a funkcja użyteczności jest separowalna względem czasu i addytywna, to wycena przy lokalnie neutralnym podejściu do ryzyka jest prawidłowa, gdy spełnione jest jedno z trzech poniższych założeń:

- (i) funkcja użyteczności zapewnia stałą relatywną awersję do ryzyka, a przyrosty logarytmów zagregowanej konsumpcji mają rozkład normalny ze stałą średnią i wariancją;
- (ii) funkcja użyteczności zapewnia stałą absolutną awersję do ryzyka, a przyrosty zagregowanej konsumpcji mają rozkład normalny ze stałą średnią i wariancją;
- (iii) funkcja użyteczności jest liniowa.

W rozpatrywanym przykładzie proces stóp zwrotu instrumentu bazowego, względem miary  $Q$ , ma postać:

$$r_t = r_f - 0,5h_t + \xi_t, \quad (6.1.14)$$

$$\xi_t = u_t h_t^{1/2}, \quad u_t \sim N(0,1), \quad (6.1.15)$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (\xi_{t-i} - \delta \sqrt{h_t})^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}. \quad (6.1.16)$$

Jak łatwo zauważyć  $\xi_t = \varepsilon_t + \delta\sqrt{h_t}$ . Jeżeli  $p = q = 1$  oraz  $|\delta| < [(1 - \alpha_1 - \beta_1) / \alpha_1]^{1/2}$ , to wariancja bezwarunkowa  $\xi_t$ , względem miary  $Q$ , jest większa niż wariancja bezwarunkowa  $\varepsilon_t$  dla równań (6.1.12–6.1.13), czyli procesu nie przekształconego i wynosi:

$$\text{var}(\xi_t) = \alpha_0[1 - (1 + \delta^2)\alpha_1 - \beta_1]^{-1}.$$

Cena instrumentu bazowego w dniu wygaśnięcia opcji jest równa:

$$S_T = S_t \exp\left[r_f(T-t) - 0,5 \sum_{i=t+1}^T h_i + \sum_{i=t+1}^T \xi_i\right]. \quad (6.1.17)$$

Zdyskontowany przy stopie wolnej od ryzyka proces cen instrumentu bazowego, względem miary  $Q$ , jest martyngałem. Cena europejskiej opcji kupna jest równa zdyskontowanej wartości wypłaty opcji:

$$c_t = e^{-r_f(T-t)} E^Q[\max(S_T - X, 0) | \psi_t], \quad (6.1.18)$$

gdzie  $E^Q(\cdot)$  oznacza operator warunkowej wartości oczekiwanej względem miary  $Q$ .

Wyceny dokonuje się najczęściej na podstawie symulacji Monte Carlo. Szacuje się parametry modelu w postaci (6.1.11–6.1.13) dla szeregu stóp zwrotu instrumentu bazowego, dalej na podstawie formuł (6.1.14–6.1.16), a następnie (6.1.17) symuluje się  $N$  realizacji cen instrumentu bazowego, względem miary  $Q$ , o długości  $T$ . Cenę opcji oblicza się jako:

$$\hat{c}_t = e^{-r_f(T-t)} \frac{1}{N} \sum_{j=1}^N \max(S_{tj} - X, 0). \quad (6.1.19)$$

Zamiast symulacji, można zastosować przybliżenia wartości opcji (patrz np. Duan, Gauthier i Simonato, 1999, Ritchken i Trevor, 1999). Alternatywnym rozwiązaniem jest oszacowanie parametrów modelu w postaci (6.1.14–6.1.16), względem miary  $Q$ , na podstawie cen opcji dla wcześniejszego okresu. Oceny parametrów uzyskuje się minimalizując funkcję straty, najczęściej średni błąd kwadratowy, między ceną rynkową a ceną teoretyczną opcji. Otrzymane w ten sposób oceny parametrów nazywa się często implikowanymi. Następnie przeprowadza się symulacje i wycenę opcji, tak jak w opisanej powyżej procedurze.

Podejście zaproponowane przez Duana (1995) dotyczyło modelu GARCH-M z warunkowym rozkładem normalnym, jednakże bardzo szybko

zostało uogólnione na inne specyfikacje warunkowej średniej (np. opisujące autoregresję), warunkowej wariancji (np. modele GJR-GARCH, NGARCH, FIGARCH) oraz warunkowego rozkładu (np. rozkład t-Studenta, GED). Poniżej przedstawiono formuły tylko dla wybranych modeli, które zastosowano w badaniu.

W celu uwzględnienia obserwowanego asymetrycznego wpływu dodatnich i ujemnych stóp zwrotu na wariancję, Duan (1999) zastosował nieliniowy asymetryczny model GARCH<sup>254</sup>. Model ten można przedstawić w następującej postaci<sup>255</sup>:

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i h_{t-i} (z_{t-i} - \gamma_i)^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}. \quad (6.1.20)$$

Model NGARCH-M w postaci równań (6.1.11–6.1.12) i (6.1.20), względem miary  $Q$ , ma postać równań (6.1.14–6.1.15) oraz:

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i h_{t-i} (u_{t-i} - \gamma_i - \delta)^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}. \quad (6.1.21)$$

Hafner i Herwartz (2001), zamiast efektu GARCH-M, uwzględniają autoregresję stóp zwrotu. Do wyceny opcji zastosowali oni model AR(1)-GJR-GARCH(1,1):

$$r_t = \phi_0 + \phi_1 r_{t-1} - 0,5h_t + \varepsilon_t, \quad (6.1.22)$$

$$\varepsilon_t = z_t h_t^{1/2}, \quad z_t \sim N(0,1), \quad (6.1.23)$$

$$h_t = \alpha_0 + [(\alpha_1 + \omega_1 I_{(z_{t-1} < 0)}) z_{t-1}^2 + \beta_1] h_{t-1}, \quad (6.1.24)$$

gdzie  $I$  oznacza zmienną zero-jedynkową, przyjmującą wartość jeden, gdy  $z_{t-1} < 0$ .

Model ten ma następującą postać względem miary  $Q$ :

$$r_t = r_f - 0,5h_t + \xi_t, \quad (6.1.25)$$

$$\xi_t = u_t h_t^{1/2}, \quad u_t \sim N(0,1), \quad (6.1.26)$$

<sup>254</sup> Duan określał ten model jako NGARCH.

<sup>255</sup> Por. AGARCH w tabeli 1.1.



$$h_t = \alpha_0 + [(\alpha_1 + \omega_1 I_{(u_{t-1} - \lambda_{t-1} < 0)}) (u_{t-1} - \lambda_{t-1})^2 + \beta_1] h_{t-1}, \quad (6.1.27)$$

$$\lambda_t = \frac{\phi_0 + \phi_1 r_{t-1} - r_f}{h_t^{1/2}}. \quad (6.1.28)$$

W celu uwzględnienia warunkowej leptokurtyczności Duan (1999) zastosował rozkład GED. Badania empiryczne pokazują jednakże, że model GARCH z warunkowym rozkładem t-Studenta najczęściej lepiej opisuje zmienność większości procesów finansowych. Zastosowanie rozkładu t-Studenta wymaga przyjęcia, zamiast logarytmicznych stóp zwrotu, zwykłych stóp zwrotu<sup>256</sup>. Należy jednakże pamiętać, że z modelowaniem zwykłych stóp zwrotu związane są problemy natury statystycznej (patrz podrozdział 1.1). Rozkład t-Studenta jest określony na przedziale  $(-\infty, +\infty)$ , natomiast zwykłe stopy zwrotu należą do przedziału  $(-1, +\infty)$ . Hafner i Herwartz (2001) przyjęli model w postaci (6.1.22–6.1.24), z tym że zamiast  $r_t$ , przyjęli  $R_t$ , określone jako  $R_t = (S_t - S_{t-1}) / S_{t-1}$  oraz  $z_t \sim t_\nu(0, 1)$ , gdzie  $t_\nu(0, 1)$  oznacza standaryzowany rozkład t-Studenta o  $\nu$  stopniach swobody. Niech  $G_\nu$  oznacza dystrybuantę rozkładu t-Studenta. Zmienną  $z_t$  można przekształcić na zmienną standaryzowaną o rozkładzie normalnym za pomocą przekształcenia:

$$\Psi_\nu(z_t) = N^{-1}[G_\nu(z_t)], \quad (6.1.29)$$

gdzie  $N^{-1}(\cdot)$  oznacza funkcję odwrotną do dystrybuanty rozkładu normalnego.

Rozważany model ma następującą postać względem miary  $Q$ :

$$R_t = \phi_0 + \phi_1 R_{t-1} + \xi_t, \quad (6.1.30)$$

$$\xi_t = h_t^{1/2} \Psi_\nu^{-1}(u_t - \lambda_t), \quad u_t \sim N(0, 1), \quad (6.1.31)$$

$$h_t = \alpha_0 + [(\alpha_1 + \omega_1 I_{(u_{t-1} - \lambda_{t-1} < 0)}) (u_{t-1} - \lambda_{t-1})^2 + \beta_1] h_{t-1}, \quad (6.1.32)$$

gdzie  $\lambda_t$  jest rozwiązaniem równania:

$$E^Q[\Psi_\nu^{-1}(u_t - \lambda_t) | \psi_{t-1}] = \frac{r_f - \phi_0 - \phi_1 R_{t-1}}{h_t^{1/2}}. \quad (6.1.33)$$

<sup>256</sup> Dla logarytmicznych stóp zwrotu oczekiwana stopa zwrotu jest nieograniczona, w związku z tym nie istnieje drugi moment funkcji wypłaty z aktywu.

Równanie (6.1.33) można rozwiązać numerycznie.

Dla zwykłych stóp zwrotu musi być również zmieniona formuła (6.1.18). Cena europejskiej opcji kupna jest równa:

$$c_t = (1 + r_f)^{-(T-t)} E^Q[\max(S_T - X, 0) | \psi_t]. \quad (6.1.34)$$

Heston i Nandi (2000) przedstawili analityczne rozwiązanie wyceny opcji dla procesu GARCH, o następującej postaci:

$$r_t = r_f + \delta h_t + h_t^{1/2} z_t, \quad (6.1.35)$$

$$h_t = \alpha_0 + \sum_{i=1}^q \alpha_i (z_{t-i} - \gamma_i h_t^{1/2})^2 + \sum_{j=1}^p \beta_j h_{t-j}. \quad (6.1.36)$$

Specyfikacja modelu GARCH w (6.1.36) jest bardzo zbliżona do modelu NGARCH. Inne podejście do wyceny opcji proponują Barone-Adesi, Engle i Mancini (2008).

Przedstawione sposoby wyceny opcji z zastosowaniem modeli GARCH umożliwiają wyjaśnienie większości obciążeń modelu BS: uwzględnienie zmiennej wariancji warunkowej pozwala opisać uśmiech zmienności, natomiast wzięcie pod uwagę ujemnej korelacji pomiędzy bieżącą stopą zwrotu a przyszłą zmiennością (poprzez np. model NGARCH lub GJR-GARCH) lub dodatniej premii za ryzyko<sup>257</sup> (GARCH-M) pozwala opisać grymas zmienności. Przyjęcie leptokurtycznego rozkładu warunkowego powoduje wzrost wartości wycen opcji ITM i OTM. Wycena opcji dla modelu GARCH umożliwia opisanie również innych charakterystycznych własności. Uśmiechy zmienności stają się coraz bardziej płaskie wraz ze wzrostem terminów do wygaśnięcia. Struktura czasowa zmienności implikowanej dla opcji ATM jest rosnąca wraz ze wzrostem terminu do wygaśnięcia, gdy poziom wariancji warunkowej w momencie wyceny jest niższy od poziomu wariancji bezwarunkowej<sup>258</sup>. Struktura czasowa zmienności implikowanej dla opcji ATM jest malejąca wraz ze wzrostem terminu do wygaśnięcia, gdy poziom wariancji warunkowej w momencie wyceny jest wyższy od poziomu wariancji bezwarunkowej. Ceny opcji OTM i opcji o krótkich terminach do wygaśnięcia są niedoszacowane.

<sup>257</sup> Wpływ dodatniej premii za ryzyko jest znacznie silniejszy w przypadku modelu GARCH z leptokurtycznym rozkładem warunkowym.

<sup>258</sup> Ta i następująca własność dotyczą stacjonarnych procesów GARCH. Zmienność takiego procesu charakteryzuje się powrotem do poziomu średniego.

Wycena opcji z zastosowaniem modelu GARCH była przedmiotem wielu analiz. Dotychczasowe wyniki badań wskazują, że wyceny opcji dokonane na podstawie modeli GARCH są bardziej trafne niż wyceny dokonane na podstawie modelu BS (patrz np. Duan i Zhang, 2001). Niewiele jest analiz, w których ocenia się trafność prognoz cen opcji z zastosowaniem alternatywnych specyfikacji modeli GARCH. Christoffersen i Jacobs (2004) pokazują, że konieczne jest uwzględnienie efektu asymetrii w wariancji. Wyniki dotyczące porównania modelu GARCH z innymi modelami są bardziej zróżnicowane, np. Pipień i Pajor (2005) pokazują, że wyceny opcji z zastosowaniem modelu SV są trafniejsze niż dokonane na podstawie modelu GARCH, z kolei Lehar, Scheicher i Schittenkopf (2002) otrzymali dokładnie odwrotny wynik.

### 6.1.3. WYCENA OPCJI WYSTAWIONYCH NA INDEKS WIG20

Wyceną opcji z zastosowaniem modeli GARCH dla instrumentów z polskiego rynku finansowego zajmowali się między innymi Piontek (2003b, 2007), Osiewalski i Pipień (2003), Kuziak (2005), Pipień i Pajor (2005) oraz Oczadły (2007). Piontek (2003b) oraz Osiewalski i Pipień (2003) dokonali wyceny hipotetycznej opcji dla indeksu WIG. Ze względu na to, że opcje takie nie są notowane na GPW, nie mogli porównać uzyskanych wycen z rzeczywistymi notowaniami. Oczadły (2007) wyznaczył ceny teoretyczne opcji barierowych dla kursu EUR/PLN, jednakże nie porównywał ich z wycenami rynkowymi. Kuziak (2005) dokonała wyceny opcji dla indeksu WIG20 w wybranym dniu. Pipień i Pajor (2005) dokonali porównania wycen z cenami rynkowymi dla opcji kupna na kurs terminowy dolara amerykańskiego. Najlepszy okazał się model SV, następnie GARCH i na końcu 30-wyrazowa wariancja ruchoma. W badaniu Piontki (2007), dla opcji na indeks WIG20, wyceny skonstruowane na podstawie modelu GARCH okazały się trafniejsze niż wyceny skonstruowane na podstawie modelu BS. Niniejsze badanie zostało przeprowadzone również dla opcji na indeks WIG20<sup>259</sup>, jednakże od innych badań odróżnia je zastosowanie różnych specyfikacji modeli GARCH. Opcje na indeks WIG20 są najbardziej płynnymi opcjami notowanymi na GPW w Warszawie, co jest sprawą bardzo istotną w tego typu badaniach.

<sup>259</sup> Do wyceny opcji indeksowych stosuje się te same formuły co do wyceny opcji akcyjnych, ponieważ indeks można traktować jako akcję przynoszącą dywidendę o znanej stopie, wypłacaną w sposób ciągły. Należy uwzględnić jedynie te dywidendy, dla których dzień ustalenia praw do dywidendy przypada w okresie ważności opcji (patrz Hull, 1998).

Głównym celem analizy jest ocena trafności wycen skonstruowanych na podstawie wybranych parametryzacji jednorównaniowych modeli GARCH i porównanie wyników z metodami stosowanymi przez praktyków rynku. W badaniu zastosowano modele: GARCH, GARCH-M, NGARCH-M, NGARCH, GJR-GARCH oraz GJR-GARCH z warunkowym rozkładem t-Studenta. W celach porównawczych zastosowano trzy dodatkowe metody opierające się na wykorzystaniu modelu BS. Pierwsza metoda, to wykorzystanie modelu BS z zastosowaniem bezwarunkowego odchylenia standardowego (BS)<sup>260</sup>. Druga metoda, to modyfikacja stosowana powszechnie przez praktyków rynku, polegająca na podstawieniu do modelu BS zmienności implikowanej, wyznaczonej dla wcześniejszego okresu (BS praktycy). Na przykład wyceniając opcje ITM, należy zastosować zmienność implikowaną, wyznaczoną z opcji ITM o zbliżonym współczynniku moneyness<sup>261</sup> oraz zbliżonym terminie do wygaśnięcia. Trzecia metoda polega na wykorzystaniu modelu BS z zastosowaniem odchylenia standardowego oszacowanego na podstawie modelu wynikającego z koncepcji RiskMetrics (BS-RM).

Do analizy przyjęto dzienne stopy zwrotu od 2 stycznia 2001 roku do 29 czerwca 2007 roku (1628 obserwacji). Wyceny opcji konstruowano dla okresu od 2 stycznia 2006 roku do 29 czerwca 2007 roku (375 obserwacji). Parametry wszystkich analizowanych modeli estymowano 375 razy, dodając za każdym razem kolejną obserwację. Badano logarytmiczne stopy zwrotu<sup>262</sup>, obliczane według formuły  $r_t = \ln(P_t / P_{t-1})$ , gdzie  $P_t$  jest ceną zamknięcia indeksu w chwili  $t$ . Dla indeksu WIG20, dla całego badanego okresu występowała słaba autokorelacja pierwszego rzędu o niestabilnej strukturze w czasie<sup>263</sup>, nieistotna statystycznie dla okresu, w którym konstruowano wyceny. Estymacji parametrów modeli GARCH dokonano metodą quasi-MNW. Wyjątkiem jest model GARCH z warunkowym rozkładem t-Studenta, w przypadku którego zastosowano metodę największej wiarygodności. Na podstawie kryterium informacyjnego Schwarz'a i testów na występowanie efektu ARCH, jako wystarczający do opisu zmienności warunkowej wariancji, przyjęto model GARCH(1,1).

<sup>260</sup> W nawiasach podano stosowane dalej oznaczenia metod.

<sup>261</sup> Współczynnik moneyness określa się najczęściej jako iloraz ceny instrumentu bazowego do ceny wykonania opcji, alternatywnie do zdyskontowanej ceny wykonania.

<sup>262</sup> Poza modelem GARCH z warunkowym rozkładem t-Studenta, dla którego przyjęto zwykłe stopy zwrotu.

<sup>263</sup> Podobny wniosek uzyskano w pracy Doman i Doman (2004) dla indeksu WIG, który ma własności zbliżone do indeksu WIG20.

Badania autora dotyczące prognozowania zmienności wskazywały na różne wartości zmienności implikowanej dla opcji call i put, dlatego analizowano zarówno ceny opcji call, jak i put. Ponieważ jednym z celów badania była dynamiczna analiza wycen w czasie, z tego względu wybór opcji i ich podział różni się trochę od spotykanych w literaturze. Badano trzy szeregi czasowe cen opcji. Pierwszy szereg dotyczył serii opcji, dla których cena instrumentu bazowego, pomniejszona o zdyskontowane dywidendy, była najbardziej zbliżona do zdyskontowanej ceny wykonania opcji (opcje takie określano dalej jako opcje ATM). Opcje, należące do tej grupy, posiadały współczynnik moneyness w przedziale (0,98; 1,02). Drugi szereg stanowiły opcje OTM, których cena instrumentu bazowego, pomniejszona o zdyskontowane dywidendy, była najbardziej zbliżona do zdyskontowanej ceny wykonania opcji, pomijając opcje określone jako ATM. Poza kilkoma przypadkami współczynnik moneyness należał dla tej grupy do przedziałów (0,94; 0,98) oraz (1,02; 1,06), odpowiednio dla opcji call i put. Analogicznie utworzono trzeci szereg opcji ITM. Poza kilkoma przypadkami, współczynnik moneyness należał dla tej grupy do przedziałów (0,94; 0,98) oraz (1,02; 1,06), odpowiednio dla opcji put i call. Dodatkowo usunięto wszystkie opcje, których cena była niższa niż 10 zł. Takich opcji w badanych szeregach było kilka, a w ich przypadku istotne znaczenie dla uzyskanych wyników mają koszty transakcyjne.

W każdym przypadku badano tylko opcje o najkrótszym terminie do wygaśnięcia. Aby wyeliminować wpływ wygasania opcji, na tydzień przed wygaśnięciem analizowano kolejną serię opcji o najbliższym terminie do wygaśnięcia. Wybór badanych serii był podyktowany w pierwszej kolejności chęcią uniknięcia mało płynnych aktywów, dzięki czemu minimalizuje się negatywny wpływ niesynchronicznych transakcji. Analizowane serie opcji należały na ogół do najbardziej płynnych na rynku. Badane opcje zostały podzielone dodatkowo na trzy grupy ze względu na okres ważności: do 35, powyżej 35 do 70 i powyżej 70 do 105 dni. W badaniu uwzględniono wypłacone w okresie ważności opcji dywidendy<sup>264</sup>. Przyjęto stosowany przez GPW w Warszawie sposób obliczania stopy procentowej wolnej od ryzyka. W obliczeniach wykorzystuje się stopy procentowe WIBOR i WIBID<sup>265</sup>.

Oceny trafności wycen dokonano na podstawie następujących miar: błędu średniego (ME), średniego błędu absolutnego (MAE), pierwiastka błędu

<sup>264</sup> Wartość indeksu została zmniejszona o wartość bieżącą wypłaconych w okresie ważności opcji dywidend, w odpowiedniej proporcji, zgodnej ze składem indeksu.

<sup>265</sup> Szczegółowy opis procedury można znaleźć na stronach GPW w Warszawie: [www.gpw.com.pl](http://www.gpw.com.pl).

średniokwadratowego (RMSE), średniego absolutnego błędu prognozy skorygowanego o heteroskedastyczność (HMAE), pierwiastka błędu średniokwadratowego skorygowanego o heteroskedastyczność (HRMSE). Podano również procent wycen przeszacowanych. Przy wycenie cen opcji, w odróżnieniu od prognozowania zmienności, różnice między miarami MAE i HMAE oraz RMSE i HRMSE mogą mieć istotne znaczenie. Wynika to z dużo większego zróżnicowania cen opcji, które w badanym przypadku przyjmują wartości od kilku do kilkuset złotych. Miary MAE i RMSE będą zatem przypisywać większą wagę opcjom o większej wartości, czyli ITM, oraz o dalekich terminach do wygaśnięcia. Z kolei miary procentowe HMAE i HRMSE bardzo dużą wagę przypiszą opcjom o niskiej wartości, czyli o bardzo bliskich terminach do wygaśnięcia i głęboko OTM.

Otrzymane wyniki zostały przedstawione w tabelach 6.1–6.9 oraz 6.10–6.18, odpowiednio dla opcji call i put. Rankingi badanych modeli są zbliżone według wszystkich czterech kryteriów. Drobne różnice występują najczęściej dla opcji o krótkich terminach do wygaśnięcia i przy wycenach konstruowanych na podstawie modelu BS. Największa zbieżność występuje między rankingami MAE i RMSE oraz między HMAE i HRMSE. Dla większości opcji zdecydowanie najtrafniejsze wyceny są konstruowane na podstawie podejścia stosowanego przez praktyków. Istotnym wyjątkiem są opcje call ITM o krótkim okresie ważności, dla których metoda ta znajdowała się na przedostatnim miejscu. Najmniej dokładne wyceny, poza opcjami put OTM, konstruowane są na podstawie modelu GJR-GARCH z warunkowym rozkładem t-Studenta. Ten wynik jest z pewnością dosyć zaskakujący i wymaga dalszych szczegółowych badań<sup>266</sup>. Mało dokładne prognozy są również konstruowane na podstawie modelu BS, który często znajdował się na przedostatnim miejscu w rankingu. Wyceny konstruowane na podstawie modeli GARCH są częściej przeszacowane (wyjątkiem są opcje put OTM). W przypadku opcji call OTM, nawet ponad 90% takich wycen jest przeszacowana. Sumarycznie wyceny te są również najczęściej przeszacowane. Z kolei wyceny oparte na modelach BS i BS-RM są najczęściej niedoszacowane. Dla opcji put OTM ponad 90% takich wycen jest niedoszacowana. Sumarycznie wyceny te są również niedoszacowane. Zastosowanie metodologii RiskMetrics do wyceny opcji daje stosunkowo dobre rezultaty dla opcji call (najczęściej druga pozycja w rankingach) i stosunkowo słabe wyniki dla opcji put (najczęściej siódma lub ósma pozycja w rankingach).

<sup>266</sup> Trudno ocenić, czy jest to ogólniejsza reguła, ponieważ w literaturze światowej jest niewiele badań dotyczących porównań tego modelu z innymi parametryzacjami przy wycenie opcji.

**TABELA 6.1. OCENA DOKŁADNOŚCI WYCEN OPCJI CALL ATM O OKRESIE WAŻNOŚCI DO 35 DNI: PROCENT PROGNOZ PRZESZACOWANYCH, ME, MAE, RMSE, HMAE I HRMSE**

Model	% przesz.	ME	MAE		RMSE		HMAE		HRMSE	
			Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.
BS	39,67	6,41	13,462	8	18,256	8	0,169	3	0,213	3
BS prakt.	48,76	-0,52	8,362	1	10,675	1	0,116	1	0,148	1
BS – RM	41,32	3,53	10,646	2	12,962	2	0,150	2	0,191	2
GARCH	76,86	-9,66	11,952	4	14,850	4	0,194	5	0,271	5
GARCH-M	78,51	-10,61	12,568	7	15,616	7	0,204	8	0,283	8
NGARCH-M	79,34	-10,40	12,394	6	15,404	6	0,201	7	0,279	7
NGARCH	76,86	-9,72	11,965	5	14,865	5	0,194	5	0,271	5
GJR-GARCH	76,86	-9,36	11,453	3	14,348	3	0,188	4	0,264	4
GJR-GARCH-t	98,35	-24,56	24,637	9	31,158	9	0,386	9	0,535	9

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

**TABELA 6.2. OCENA DOKŁADNOŚCI WYCEN OPCJI CALL ATM O OKRESIE WAŻNOŚCI POWYŻEJ 35 DO 70 DNI: PROCENT PROGNOZ PRZESZACOWANYCH, ME, MAE, RMSE, HMAE I HRMSE**

Model	% przesz.	ME	MAE		RMSE		HMAE		HRMSE	
			Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.
BS	47,14	8,53	18,939	6	26,250	8	0,137	3	0,175	3
BS prakt.	45,00	0,67	11,746	1	15,226	1	0,094	1	0,120	1
BS – RM	35,00	8,59	15,930	2	20,261	2	0,124	2	0,157	2
GARCH	78,72	-13,62	18,075	5	21,223	4	0,153	5	0,192	4
GARCH-M	82,27	-17,16	20,54	8	24,057	7	0,174	8	0,217	8
NGARCH-M	80,85	-15,83	19,498	7	23,018	6	0,164	7	0,207	7
NGARCH	78,72	-13,61	17,986	4	21,183	3	0,152	4	0,192	4
GJR-GARCH	78,72	-13,88	17,983	3	21,366	5	0,153	5	0,195	6
GJR-GARCH-t	97,16	-31,11	31,849	9	36,026	9	0,268	9	0,318	9

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

**TABELA 6.3. OCENA DOKŁADNOŚCI WYCEN OPCJI CALL ATM O OKRESIE WAŻNOŚCI POWYŻEJ 70 DO 105 DNI: PROCENT PROGNOZ PRZESZACOWANYCH, ME, MAE, RMSE, HMAE I HRMSE**

Model	% przesz.	ME	MAE		RMSE		HMAE		HRMSE	
			Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.
BS	38,32	5,49	16,858	2	21,965	2	0,106	2	0,135	2
BS prakt.	51,89	-0,86	14,093	1	18,758	1	0,089	1	0,119	1
BS – RM	39,25	3,79	19,831	3	25,545	3	0,125	3	0,163	3
GARCH	87,74	-24,22	26,478	5	32,249	4	0,182	4	0,231	4
GARCH-M	92,45	-30,60	31,867	8	37,760	8	0,218	8	0,269	8
NGARCH-M	91,51	-28,95	30,398	7	36,422	7	0,208	7	0,259	7
NGARCH	88,68	-24,21	26,473	4	32,261	5	0,182	4	0,231	4
GJR-GARCH	91,51	-24,86	27,126	6	32,589	6	0,186	6	0,232	6
GJR-GARCH-t	96,23	-48,78	49,376	9	54,830	9	0,332	9	0,380	9

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

**TABELA 6.4. OCENA DOKŁADNOŚCI WYCEN OPCJI CALL OTM O OKRESIE WAŻNOŚCI DO 35 DNI: PROCENT PROGNOZ PRZESZACOWANYCH, ME, MAE, RMSE, HMAE I HRMSE**

Model	% przesz.	ME	MAE		RMSE		HMAE		HRMSE	
			Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.
BS	40,87	5,79	11,631	8	16,341	8	0,297	3	0,367	3
BS prakt.	48,70	-0,11	6,070	1	7,894	1	0,180	1	0,244	1
BS – RM	41,74	3,23	8,378	2	10,267	2	0,244	2	0,310	2
GARCH	84,35	-9,28	10,393	5	12,858	5	0,364	6	0,517	6
GARCH-M	87,83	-10,84	11,538	7	14,204	7	0,402	8	0,559	8
NGARCH-M	87,83	-10,59	11,315	6	13,972	6	0,395	7	0,552	7
NGARCH	85,22	-9,27	10,327	4	12,807	4	0,362	5	0,515	5
GJR-GARCH	83,48	-8,64	9,898	3	12,246	3	0,344	4	0,483	4
GJR-GARCH-t	98,26	-19,17	19,230	9	21,790	9	0,634	9	0,802	9

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

**TABELA 6.5. OCENA DOKŁADNOŚCI WYCEN OPCJI CALL OTM O OKRESIE WAŻNOŚCI POWYŻEJ 35 DO 70 DNI: PROCENT PROGNOZ PRZESZACOWANYCH, ME, MAE, RMSE, HMAE I HRMSE**

Model	% przesz.	ME	MAE		RMSE		HMAE		HRMSE	
			Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.
BS	53,57	5,41	16,366	3	23,921	6	0,182	3	0,238	3
BS prakt.	49,29	0,53	8,432	1	10,656	1	0,106	1	0,131	1
BS – RM	38,57	5,43	12,727	2	15,672	2	0,165	2	0,210	2
GARCH	90,78	-16,63	18,156	6	21,340	5	0,255	6	0,324	6
GARCH-M	92,91	-21,30	22,294	8	25,531	8	0,308	8	0,379	8
NGARCH-M	91,49	-19,77	20,891	7	24,227	7	0,288	7	0,359	7
NGARCH	90,78	-16,62	18,102	5	21,329	4	0,253	5	0,321	4
GJR-GARCH	90,07	-16,53	17,955	4	21,253	3	0,251	4	0,322	5
GJR-GARCH-t	98,58	-34,07	34,232	9	37,646	9	0,463	9	0,542	9

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

**TABELA 6.6. OCENA DOKŁADNOŚCI WYCEN OPCJI CALL OTM O OKRESIE WAŻNOŚCI POWYŻEJ 70 DO 105 DNI: PROCENT PROGNOZ PRZESZACOWANYCH, ME, MAE, RMSE, HMAE I HRMSE**

Model	% przesz.	ME	MAE		RMSE		HMAE		HRMSE	
			Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.
BS	47,27	4,64	17,265	3	21,385	2	0,157	3	0,196	2
BS prakt.	55,96	-1,27	11,462	1	15,113	1	0,103	1	0,136	1
BS – RM	49,09	1,91	17,148	2	22,049	3	0,152	2	0,196	2
GARCH	90,83	-25,83	27,196	6	32,154	5	0,267	6	0,328	6
GARCH-M	96,33	-33,89	34,563	8	39,458	8	0,335	8	0,398	8
NGARCH-M	95,41	-31,95	32,784	7	37,805	7	0,317	7	0,379	7
NGARCH	91,74	-25,82	27,167	4	32,179	6	0,266	4	0,327	5
GJR-GARCH	91,74	-26,01	27,184	5	31,964	4	0,266	4	0,324	4
GJR-GARCH-t	99,08	-48,46	48,645	9	52,877	9	0,461	9	0,516	9

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.



**TABELA 6.7. OCENA DOKŁADNOŚCI WYCEN OPCJI CALL ITM O OKRESIE WAŻNOŚCI DO 35 DNI: PROCENT PROGNOZ PRZESZACOWANYCH, ME, MAE, RMSE, HMAE I HRMSE**

Model	% przesz.	ME	MAE		RMSE		HMAE		HRMSE	
			Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.
BS	36,21	7,74	16,049	6	22,122	7	0,109	1	0,141	1
BS prakt.	55,17	-2,07	17,185	8	24,536	8	0,120	8	0,170	8
BS – RM	37,93	5,63	16,120	7	21,415	6	0,112	2	0,143	2
GARCH	68,10	-5,50	15,546	3	19,665	2	0,116	4	0,150	4
GARCH-M	68,10	-5,72	15,728	5	19,817	5	0,117	6	0,151	6
NGARCH-M	68,10	-5,58	15,671	4	19,802	4	0,117	6	0,151	6
NGARCH	68,10	-5,54	15,530	2	19,639	1	0,116	4	0,150	4
GJR-GARCH	68,97	-5,35	15,450	1	19,781	3	0,115	3	0,149	3
GJR-GARCH-t	81,03	-14,91	20,516	9	24,913	9	0,159	9	0,200	9

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

**TABELA 6.8. OCENA DOKŁADNOŚCI WYCEN OPCJI CALL ITM O OKRESIE WAŻNOŚCI POWYŻEJ 35 DO 70 DNI: PROCENT PROGNOZ PRZESZACOWANYCH, ME, MAE, RMSE, HMAE I HRMSE**

Model	% przesz.	ME	MAE		RMSE		HMAE		HRMSE	
			Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.
BS	40,63	11,03	21,557	8	29,529	8	0,109	5	0,140	3
BS prakt.	46,88	1,29	19,390	4	24,907	6	0,105	1	0,133	2
BS – RM	33,59	11,07	20,181	7	25,977	7	0,107	2	0,131	1
GARCH	69,77	-9,14	18,899	1	23,475	1	0,107	2	0,140	3
GARCH-M	72,09	-11,32	20,062	6	24,749	5	0,114	8	0,148	8
NGARCH-M	68,99	-10,27	19,691	5	24,291	4	0,111	7	0,144	7
NGARCH	68,99	-9,22	18,957	2	23,513	2	0,107	2	0,140	3
GJR-GARCH	70,54	-9,50	19,318	3	23,749	3	0,110	6	0,142	6
GJR-GARCH-t	87,60	-26,07	30,256	9	35,139	9	0,173	9	0,214	9

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

Modele GJR-GARCH, NGARCH oraz GARCH znajdują się na zbliżonych pozycjach, a różnice między wycenami konstruowanymi na podstawie tych modeli są niewielkie (nie przekraczają nawet 1% ceny opcji). Najwyżej w rankingach spośród rozważanych parametryzacji modeli GARCH znajduje się jednak najczęściej model GJR-GARCH. Mniej trafne wyceny konstruowane są na podstawie modeli GARCH-M i NGARCH-M, najmniej dokładne natomiast na podstawie modelu GJR-GARCH z warunkowym rozkładem t-Studenta.

Błędy wycen konstruowanych na podstawie modeli GARCH są mniejsze dla opcji put, natomiast w przypadku modeli BS i BS-RM, mniejsze błędy są dla opcji call. Wydaje się również, że wyceny konstruowane na podstawie modelu GARCH są trafniejsze dla opcji ITM.

**TABELA 6.9. OCENA DOKŁADNOŚCI WYCEN OPCJI CALL ITM O OKRESIE WAŻNOŚCI POWYŻEJ 70 DO 105 DNI: PROCENT PROGNOZ PRZESZACOWANYCH, ME, MAE, RMSE, HMAE I HRMSE**

Model	% przesz.	ME	MAE		RMSE		HMAE		HRMSE	
			Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.
BS	35,00	8,70	19,169	1	24,164	1	0,086	1	0,104	1
BS prakt.	56,96	-2,70	20,461	2	27,409	3	0,095	2	0,125	3
BS – RM	33,75	5,24	20,582	3	26,290	2	0,095	2	0,123	2
GARCH	81,01	-20,35	23,856	4	31,016	4	0,120	4	0,160	4
GARCH-M	87,34	-25,34	27,510	8	34,972	8	0,138	8	0,181	8
NGARCH-M	86,08	-23,76	26,321	7	33,835	7	0,132	7	0,175	7
NGARCH	81,01	-20,39	23,856	4	31,055	6	0,120	4	0,161	6
GJR-GARCH	87,34	-21,39	24,207	6	31,052	5	0,121	6	0,160	4
GJR-GARCH-t	96,20	-42,42	43,217	9	49,184	9	0,213	9	0,251	9

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

**TABELA 6.10. OCENA DOKŁADNOŚCI WYCEN OPCJI PUT ATM O OKRESIE WAŻNOŚCI DO 35 DNI: PROCENT PROGNOZ PRZESZACOWANYCH, ME, MAE, RMSE, HMAE I HRMSE**

Model	% przesz.	ME	MAE		RMSE		HMAE		HRMSE	
			Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.
BS	19,83	12,17	14,457	8	19,256	8	0,188	8	0,230	8
BS prakt.	49,59	-0,31	7,342	1	9,085	1	0,113	1	0,155	1
BS – RM	30,58	9,28	12,108	7	16,017	7	0,158	5	0,202	2
GARCH	63,64	-3,90	10,042	3	12,139	3	0,157	3	0,211	4
GARCH-M	65,29	-4,84	10,307	6	12,620	6	0,161	7	0,216	7
NGARCH-M	65,29	-4,60	10,288	5	12,542	5	0,160	6	0,214	6
NGARCH	61,98	-3,93	10,064	4	12,156	4	0,157	3	0,211	4
GJR-GARCH	60,33	-3,604	9,225	2	11,155	2	0,146	2	0,203	3
GJR-GARCH-t	90,08	-18,81	19,667	9	26,652	9	0,307	9	0,420	9

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

**TABELA 6.11. OCENA DOKŁADNOŚCI WYCEN OPCJI PUT ATM O OKRESIE WAŻNOŚCI POWYŻEJ 35 DO 70 DNI: PROCENT PROGNOZ PRZESZACOWANYCH, ME, MAE, RMSE, HMAE I HRMSE**

Model	% przesz.	ME	MAE		RMSE		HMAE		HRMSE	
			Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.
BS	16,43	19,00	20,803	8	29,949	9	0,160	7	0,209	8
BS prakt.	47,86	0,58	9,378	1	11,652	1	0,082	1	0,102	1
BS – RM	10,71	19,12	20,323	7	23,975	7	0,174	8	0,205	7
GARCH	57,14	-3,15	10,860	4	13,506	3	0,099	3	0,129	3
GARCH-M	69,29	-6,73	12,349	6	15,341	6	0,113	6	0,145	6
NGARCH-M	64,29	-5,42	11,811	5	14,836	5	0,107	5	0,139	5
NGARCH	57,14	-3,16	10,828	3	13,502	2	0,099	3	0,128	2
GJR-GARCH	60,71	-3,40	10,796	2	13,755	4	0,098	2	0,129	3
GJR-GARCH-t	90,65	-20,60	21,758	9	26,009	8	0,193	9	0,235	9

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

**TABELA 6.12. OCENA DOKŁADNOŚCI WYCEN OPCJI PUT ATM O OKRESIE WAŻNOŚCI POWYŻEJ 70 DO 105 DNI: PROCENT PROGNOZ PRZESZACOWANYCH, ME, MAE, RMSE, HMAE I HRMSE**

Model	% przesz.	ME	MAE		RMSE		HMAE		HRMSE	
			Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.
BS	23,21	21,44	25,522	8	34,157	8	0,167	8	0,210	8
BS prakt.	50,45	0,43	11,142	1	14,832	1	0,079	1	0,103	1
BS – RM	14,29	18,85	21,263	7	26,359	7	0,150	7	0,185	7
GARCH	66,04	-7,78	16,443	4	18,725	4	0,120	3	0,140	2
GARCH-M	75,47	-14,20	19,649	6	22,768	6	0,145	6	0,172	6
NGARCH-M	73,58	-12,49	18,696	5	21,536	5	0,137	5	0,161	5
NGARCH	66,04	-7,81	16,352	3	18,657	3	0,120	3	0,140	2
GJR-GARCH	66,04	-8,49	15,857	2	18,433	2	0,116	2	0,140	2
GJR-GARCH-t	94,39	-32,31	33,123	9	37,468	9	0,244	9	0,281	9

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

**TABELA 6.13. OCENA DOKŁADNOŚCI WYCEN OPCJI PUT ITM O OKRESIE WAŻNOŚCI DO 35 DNI: PROCENT PROGNOZ PRZESZACOWANYCH, ME, MAE, RMSE, HMAE I HRMSE**

Model	% przesz.	ME	MAE		RMSE		HMAE		HRMSE	
			Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.
BS	31,03	9,90	15,735	8	20,558	8	0,116	8	0,147	4
BS prakt.	50,86	-0,54	12,713	1	16,142	2	0,104	1	0,141	2
BS – RM	33,62	7,24	14,757	7	18,026	7	0,112	5	0,133	1
GARCH	58,04	-5,21	13,431	4	16,763	4	0,111	3	0,147	4
GARCH-M	61,61	-6,81	13,781	6	17,511	6	0,115	6	0,154	8
NGARCH-M	61,61	-6,51	13,753	5	17,396	5	0,115	6	0,153	7
NGARCH	57,14	-5,22	13,390	3	16,747	3	0,111	3	0,147	4
GJR-GARCH	58,04	-4,53	12,917	2	16,122	1	0,108	2	0,144	3
GJR-GARCH-t	81,25	-15,24	18,031	9	22,620	9	0,154	9	0,205	9

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

**TABELA 6.14. OCENA DOKŁADNOŚCI WYCEN OPCJI PUT ITM O OKRESIE WAŻNOŚCI POWYŻEJ 35 DO 70 DNI: PROCENT PROGNOZ PRZESZACOWANYCH, ME, MAE, RMSE, HMAE I HRMSE**

Model	% przesz.	ME	MAE		RMSE		HMAE		HRMSE	
			Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.
BS	28,83	13,80	20,852	8	29,000	8	0,117	8	0,150	8
BS prakt.	48,65	0,54	15,378	3	20,246	4	0,095	1	0,124	1
BS – RM	21,62	14,61	19,307	7	24,207	7	0,116	7	0,140	5
GARCH	66,07	-7,62	15,258	1	19,468	2	0,098	2	0,129	2
GARCH-M	75,89	-12,28	17,789	6	22,233	6	0,114	6	0,149	7
NGARCH-M	69,64	-10,76	16,878	5	21,303	5	0,108	5	0,142	6
NGARCH	66,07	-7,68	15,289	2	19,451	1	0,098	2	0,129	2
GJR-GARCH	66,07	-7,49	15,378	3	19,711	3	0,099	4	0,131	4
GJR-GARCH-t	91,00	-25,10	27,931	9	32,756	9	0,179	9	0,218	9

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

**TABELA 6.15. OCENA DOKŁADNOŚCI WYCEN OPCJI PUT ITM O OKRESIE WAŻNOŚCI POWYŻEJ 70 DO 105 DNI: PROCENT PROGNOZ PRZESZACOWANYCH, ME, MAE, RMSE, HMAE I HRMSE**

Model	% przesz.	ME	MAE		RMSE		HMAE		HRMSE	
			Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.
BS	28,09	22,02	29,007	8	40,359	8	0,137	7	0,175	8
BS prakt.	50,56	-0,18	17,586	1	23,302	1	0,089	1	0,113	1
BS – RM	25,84	18,35	22,317	2	30,760	7	0,109	2	0,142	5
GARCH	64,77	-9,16	22,609	5	26,545	3	0,118	5	0,138	4
GARCH-M	73,86	-17,32	26,082	7	30,740	6	0,139	8	0,166	7
NGARCH-M	70,45	-15,25	25,009	6	29,403	5	0,133	6	0,157	6
NGARCH	64,77	-9,11	22,391	4	26,337	2	0,117	3	0,137	2
GJR-GARCH	64,77	-9,46	22,387	3	26,895	4	0,117	3	0,137	2
GJR-GARCH-t	86,52	-31,47	35,825	9	41,903	9	0,193	9	0,230	9

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

Wartość bezwzględna błędów wycen zwiększa się wraz ze wzrostem okresu ważności opcji. Nominalnie największe błędy są dla opcji o okresie ważności powyżej 70 dni. Błędy względne na ogół maleją wraz ze wzrostem okresu ważności i najmniejsze są dla opcji o okresie ważności powyżej 70 dni.

**TABELA 6.16. OCENA DOKŁADNOŚCI WYCEN OPCJI PUT OTM O OKRESIE WAŻNOŚCI DO 35 DNI: PROCENT PROGNOZ PRZESZACOWANYCH, ME, MAE, RMSE, HMAE I HRMSE**

Model	% przesz.	ME	MAE		RMSE		HMAE		HRMSE	
			Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.
BS	6,03	15,15	15,328	9	19,746	9	0,348	9	0,399	9
BS prakt.	50,00	-0,01	5,417	1	6,974	1	0,147	1	0,198	1
BS – RM	11,21	12,86	13,333	8	17,310	8	0,309	8	0,365	7
GARCH	50,44	1,26	7,489	4	9,610	4	0,184	3	0,223	4
GARCH-M	49,56	1,09	7,676	6	9,815	5	0,189	6	0,228	6
NGARCH-M	49,56	1,18	7,673	5	9,817	6	0,188	5	0,227	5
NGARCH	50,44	1,23	7,460	3	9,540	3	0,184	3	0,222	3
GJR-GARCH	46,90	1,48	6,825	2	8,831	2	0,172	2	0,214	2
GJR-GARCH-t	76,11	-8,25	10,752	7	13,072	7	0,304	7	0,386	8

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

Jako wyniki odbiegające od pozostałych, można uznać pierwsze miejsce w rankingach modelu BS dla opcji call ITM o okresie ważności powyżej 70 dni oraz przedostatnie miejsce modelu BS praktycy dla opcji call ITM o okresie ważności do 35 dni.

**TABELA 6.17. OCENA DOKŁADNOŚCI WYCEN OPCJI PUT OTM O OKRESIE WAŻNOŚCI POWYŻEJ 35 DO 70 DNI: PROCENT PROGNOZ PRZESZACOWANYCH, ME, MAE, RMSE, HMAE I HRMSE**

Model	% przesz.	ME	MAE		RMSE		HMAE		HRMSE	
			Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.
BS	3,57	24,11	24,292	9	31,720	9	0,269	8	0,316	8
BS prakt.	50,71	0,25	7,002	1	8,926	1	0,088	1	0,111	1
BS – RM	0,71	23,92	23,968	8	26,905	8	0,302	9	0,335	9
GARCH	40,31	3,11	9,021	3	11,520	4	0,118	3	0,152	3
GARCH-M	48,84	0,85	9,225	5	11,711	5	0,120	5	0,155	5
NGARCH-M	41,09	1,94	9,397	6	11,806	6	0,122	6	0,156	6
NGARCH	39,53	3,02	9,066	4	11,507	3	0,118	3	0,152	3
GJR-GARCH	41,86	2,57	8,833	2	11,310	2	0,115	2	0,146	2
GJR-GARCH-t	85,94	-13,89	16,781	7	19,748	7	0,218	7	0,263	7

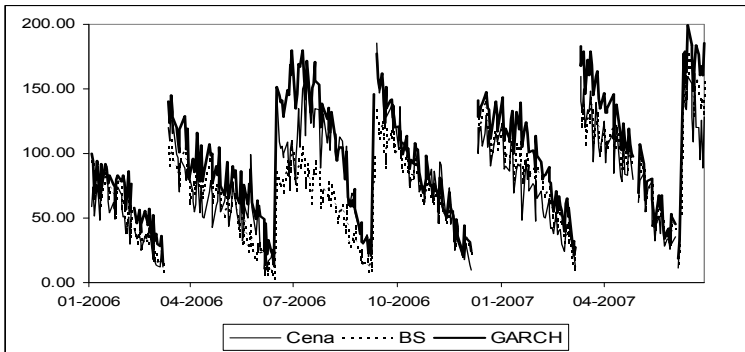
ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

**TABELA 6.18. OCENA DOKŁADNOŚCI WYCEN OPCJI PUT OTM O OKRESIE WAŻNOŚCI POWYŻEJ 70 DO 105 DNI: PROCENT PROGNOZ PRZESZACOWANYCH, ME, MAE, RMSE, HMAE I HRMSE**

Model	% przesz.	ME	MAE		RMSE		HMAE		HRMSE	
			Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.	Ocena	Rank.
BS	5,45	27,61	28,381	9	36,344	9	0,246	9	0,291	9
BS prakt.	50,46	-0,65	9,028	1	13,988	3	0,085	1	0,132	4
BS – RM	2,73	24,55	25,066	8	29,556	8	0,237	7	0,274	8
GARCH	63,29	-1,36	10,650	3	14,013	4	0,098	3	0,122	2
GARCH-M	74,68	-6,31	12,999	6	15,832	6	0,122	6	0,146	6
NGARCH-M	74,68	-4,74	12,268	5	15,340	5	0,114	5	0,139	5
NGARCH	63,29	-1,36	10,505	2	13,897	1	0,097	2	0,121	1
GJR-GARCH	63,29	-2,55	10,699	4	13,947	2	0,100	4	0,125	3
GJR-GARCH-t	93,75	-23,26	24,191	7	27,441	7	0,238	8	0,273	7

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

Interesująca jest również dynamiczna analiza wycen opcji w czasie. Na rysunku 6.1 przedstawiono wyceny opcji call OTM konstruowane na podstawie modeli BS i GARCH. Przedstawiona dynamika jest charakterystyczna również dla pozostałych opcji. Wyceny konstruowane na podstawie modelu GARCH są najczęściej przeszacowane, gdy okres ważności opcji jest długi. Z kolei opcje konstruowane na podstawie modelu BS są niedoszacowane, co jest szczególnie widoczne dla okresu o podwyższonej zmienności maj–lipiec 2006 roku.



**RYSUNEK 6.1. WYCENY OPCJI CALL OTM NA INDEKS WIG20 KONSTRUOWANE NA PODSTAWIE MODELI BS I GARCH**

ŹRÓDŁO: OPRACOWANIE WŁASNE.

W badaniu przeprowadzono również wiele testów dotyczących prawidłowości przyjętych specyfikacji modeli GARCH, najczęściej przez weryfikację odpowiednich restrykcyj (patrz tabela 6.19). Wyniki testowania restrykcyj nakładanych na parametry modeli GARCH były niewrażliwe na przyjętą specyfikację rozkładu warunkowego. Analiza została przeprowadzona dla całego badanego okresu.

**TABELA 6.19. ANALIZA WŁASNOŚCI STÓP ZWROTU I WARIANCJI INDEKSU WIG20**

Weryfikowane hipotezy	Statystyka	Ocena statystyki	Istotność ocen parametrów
Brak autokorelacji	LB(12)	13,95	–
Brak efektu ARCH	LM(12)	114,22*	–
Normalność rozkł. bezwarunkowego	JB	65,68*	–
$\delta = 0$ w modelu GARCH-M	LR	3,03	$\delta$ nieistotny
$\gamma_1 = 0$ w modelu NGARCH	LR	0,02	$\gamma_1$ nieistotny
$\delta = 0$ w modelu NGARCH-M	LR	3,07	$\delta$ nieistotny
$\omega_1 = 0$ w modelu GJR-GARCH	LR	2,23	$\omega_1$ nieistotny
Normalność rozkł. warunk. w modelu GJR-GARCH	LR	24,39*	v istotny

LB to statystyka testu Ljung-Boxa, LM to statystyka testu Engle'a, JB to statystyka testu Jarque-Bera. Gwiazdką oznaczono oceny statystyk, w przypadku których weryfikowana hipoteza została odrzucona na poziomie istotności 0,05.

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

Dodatkowo dla każdego z badanych modeli oszacowano wartość kryterium informacyjnego Schwarza (SIC). Kolejność modeli według kryterium SIC przedstawiała się następująco: GJR-GARCH z warunkowym rozkładem t-Studenta, GARCH, GARCH-M, GJR-GARCH, NGARCH, NGARCH-M. Wnioski dotyczące poszczególnych parametryzacji modeli płynące z wyników testów są zgodne z wnioskami wynikającymi z analizy kryterium SIC. Wnioski wynikające z przeprowadzonych testów są zbliżone do rankingów badanych specyfikacji modeli, jakie uzyskano przy wycenie opcji, z wyjątkiem modelu GJR-GARCH z warunkowym rozkładem t-Studenta, który znajdował się na ostatnich miejscach w rankingu. Zależność pomiędzy oczekiwaną stopą zwrotu a warunkową wariancją była nieistotna statystycznie<sup>267</sup>, a wyceny konstruowane na podstawie modeli GARCH-M oraz NGARCH-M okazały się mniej trafne niż na podstawie modelu GARCH. W badanym szeregu nie było również ujemnej korelacji pomiędzy bieżącą stopą zwrotu a przyszłą zmiennością. Modele GJR-GARCH, NGARCH i GARCH znajdowały się na zbliżonych pozycjach. Różnice między wycenami, skonstruowanymi na podstawie tych modeli były niewielkie, choć nieznacznie lepiej w rankingach wypadał najczęściej model GJR-GARCH z warunkowym rozkładem normalnym. Porównując ranking modeli według kryterium SIC z rankingami przy wycenie opcji, należy zauważyć zdecydowanie dalsze miejsca przy wycenie opcji modeli GJR-GARCH z warunkowym rozkładem t-Studenta i modelu GARCH-M.

## WNIOSKI

Wyceny opcji konstruowane na podstawie modeli GARCH są trafniejsze niż wyceny konstruowane na podstawie modelu BS. Ponadto zastosowanie modeli GARCH pozwala wyjaśnić większość obciążeń modelu BS. Rankingi, jakie uzyskano przy wycenie opcji, pokrywają się z wnioskami z przeprowadzonych testów statystycznych, z wyjątkiem modelu GJR-GARCH z warunkowym rozkładem t-Studenta, który zajmował ostatnie miejsca w rankingu. Dla większości opcji zdecydowanie najtrafniejsze wyceny są konstruowane na podstawie podejścia stosowanego przez praktyków, polegającego na podstawieniu do modelu BS zmienności implikowanej, wyznaczonej dla wcześniejszego okresu.

<sup>267</sup> Ocena parametru  $\delta$  była ujemna.

## 6.2 DYNAMICZNE ZABEZPIECZANIE PORTFELA PRZED RYZYKIEM ZA POMOCĄ KONTRAKTÓW TERMINOWYCH

Jedną z podstawowych funkcji instrumentów pochodnych jest funkcja zabezpieczająca. Inwestorzy stosują te instrumenty w celu zabezpieczenia się przed wzrostem lub spadkiem wartości instrumentu bazowego. W strategiach zabezpieczających można stosować różne instrumenty pochodne. Wykorzystywanie kontraktów futures do zabezpieczenia przed ryzykiem polega na stworzeniu pozycji neutralizującej ryzyko w maksymalnym możliwym do osiągnięcia stopniu (patrz Hull, 1998). W niniejszej pracy analizowana jest strategia zabezpieczająca polegająca na minimalizowaniu wariacji stopy zwrotu portfela, składającego się z pozycji zajętej w kontraktach futures i pozycji zabezpieczanej. Rozważana jest dynamiczna strategia zabezpieczająca, która wymaga ścisłej kontroli oraz częstego korygowania zajmowanych pozycji. Badane strategie zabezpieczające różniły się jedynie metodą estymacji współczynnika zabezpieczenia.

Tradycyjnie stosowane metody estymacji współczynnika zabezpieczenia nie uwzględniają jednej z podstawowych własności procesów finansowych, czyli zmieniających się w czasie warunkowych wariacji i kowariancji stóp zwrotu. Z tego względu w ostatnich kilkunastu latach powstało wiele prac, w których do estymacji współczynnika zabezpieczenia wykorzystuje się modele GARCH. Cecchetti, Cumby i Figlewski (1988) jako pierwsi zastosowali jednorównaniowy model GARCH. Wielorównaniowe modele GARCH wykorzystywali między innymi: Baillie i Myers (1991), Myers (1991) – dla kontraktów towarowych, Kroner i Sultan (1993) – dla kontraktów walutowych, Gagnon i Lypny (1995) – dla kontraktów na stopy procentowe, Park i Switzer (1995), Tong (1996) – dla kontraktów na indeksy rynku akcji.

Badania dotyczące polskiego rynku finansowego prowadzili Fiszedler (2003b), Pipień (2004) i Humeńczuk (2006). Pipień (2004) nie badał rzeczywistych notowań instrumentów pochodnych, tylko wartości symulowane. Badania Humeńczuka (2006) dotyczyły stosunkowo krótkiego okresu, na podstawie którego przeprowadzono ocenę efektywności. Własności badanych procesów w krótkim okresie mogą znacznie odbiegać od własności długookresowych, co może znacząco wpływać na ocenę skuteczności różnych metod zabezpieczania. Zastosowania modeli GARCH w badaniu Humeńczuka (2006) dotyczyły przede wszystkim szerokiej klasy modeli jednorównaniowych. Z modeli wielorównaniowych analizował tylko modele BEKK, diagonalny BEKK i DCC. W niniejszym badaniu zastosowano inne postacie modeli



GARCH oraz modele z losowym parametrem, a ocenę efektywności przeprowadzono dla stosunkowo długiego okresu (dwa i pół roku). Przedstawione tutaj wyniki analiz były już częściowo publikowane; patrz Fiszeder i Kwiatkowski (2005b) oraz Fiszeder (2007a).

Dotychczasowe wyniki badań są niejednoznaczne i nie wskazują konkretnego modelu jako najbardziej skutecznego w zabezpieczaniu przed ryzykiem. Niektóre analizy mówią o wyższości prostych metod, inne wskazują na przewagę bardziej zaawansowanych metod szacowania współczynnika zabezpieczenia, jak na przykład wykorzystanie modelu GARCH. W niniejszym badaniu, po pierwsze, porównano skuteczność dla różnych modeli GARCH. W dotychczasowych badaniach przyjmuje się najczęściej wybraną postać modelu GARCH. Po drugie, zbadano, jaki wpływ na efektywność strategii zabezpieczających ma uwzględnienie w modelu występowania kointegracji pomiędzy procesem cen terminowych a procesem cen spot. Po trzecie, analizowano skuteczność różnych strategii zabezpieczających wykorzystujących modele z losowymi parametrami. Po czwarte, uzyskane wyniki porównano ze strategią zabezpieczającą, polegającą na wykorzystaniu do estymacji współczynnika zabezpieczenia metod estymacji wariancji i kowariancji stosowanych przez praktyków rynku finansowego. Zaproponowano również sposób wyznaczania stałej wygładzania i parametru wygasania, który daje lepsze wyniki przy zabezpieczaniu portfeli. Po piąte, zbadano własności badanych szeregów czasowych, a wyniki testów porównano z wynikami efektywności zabezpieczania badanych modeli. Po szóste, zaproponowano, aby do oceny skuteczności wspomnianej strategii zabezpieczającej wykorzystywać dane o wysokiej częstotliwości.

W większości prac bada się efektywność różnych strategii zabezpieczających dla instrumentów finansowych, w przypadku których są notowane kontrakty terminowe. Nie wiadomo natomiast, jak skuteczne są strategie, gdy zabezpieczany jest instrument, dla którego nie ma notowanych instrumentów pochodnych. W pracy przeprowadzono analizę właśnie dla takiego portfela. W części pierwszej podrozdziału przedstawiono zastosowane w badaniu metody estymacji współczynnika zabezpieczenia. W części drugiej dokonano oceny skuteczności zaprezentowanych strategii zabezpieczających (rozważano kilkanaście różnych metod estymacji współczynnika zabezpieczenia), na przykładzie dwóch portfeli: indeksu WIG20 i indeksu WIG-Budownictwo oraz kontraktów futures na indeks WIG20, notowanych na GPW w Warszawie. Część trzecia zawiera wyniki analizy własności badanych szeregów i porównanie wyników testów z wynikami efektywności przy zabezpieczaniu portfela. W części czwartej przedstawiono zaproponowaną metodę oceny

efektywności strategii zabezpieczającej z wykorzystaniem danych o wysokiej częstotliwości i dokonano porównania rankingów z tradycyjnym podejściem.

### 6.2.1. METODY ESTYMACJI WSPÓŁCZYNNIKA ZABEZPIECZENIA

Współczynnik zabezpieczenia jest ilorazem wielkości pozycji zajętej w kontraktach futures do wielkości pozycji zabezpieczanej (patrz Hull, 1998). Stopa zwrotu portfela, składającego się z pozycji zabezpieczanej i krótkiej pozycji zajętej w kontraktach futures, wynosi:

$$x_{t+1} = s_{t+1} - b_t f_{t+1}, \quad (6.2.1)$$

gdzie  $s_{t+1}$  oraz  $f_{t+1}$  oznaczają logarytmiczne stopy zwrotu:

$s_{t+1} = \ln S_{t+1} - \ln S_t$ ,  $f_{t+1} = \ln F_{t+1} - \ln F_t$ ,  $S_t$  – cena instrumentu bazowego,  $F_t$  – cena kontraktu terminowego,  $b_t$  – współczynnik zabezpieczenia.

Optymalna wartość współczynnika zabezpieczenia, minimalizująca warunkową wariancję stopy zwrotu (6.2.1), dana jest formułą:

$$b_t = \frac{\text{cov}(s_{t+1}, f_{t+1} | \psi_t)}{\text{var}(f_{t+1} | \psi_t)}, \quad (6.2.2)$$

gdzie  $\psi_t$  oznacza zbiór wszystkich informacji, dostępnych w chwili  $t$ .

Można łatwo wykazać, że formuła (6.2.2) ma również zastosowanie w przypadku inwestora maksymalizującego kwadratową funkcję użyteczności:

$$E(U(x_{t+1}) | \psi_t) = E(x_{t+1} | \psi_t) - \xi \text{var}(x_{t+1} | \psi_t), \quad (6.2.3)$$

przy założeniu, że proces cen terminowych jest martyngałem ( $E(\ln F_{t+1} | \psi_t) = \ln F_t$ ). Parametr  $\xi$  może być interpretowany jako parametr awersji do ryzyka. Jeżeli warunkowe wariancje i kowariancje stóp zwrotu są stałe w czasie, to współczynnik zabezpieczenia można wyznaczyć, szacując metodą najmniejszych kwadratów równanie regresji:

$$s_t = \alpha + \beta f_t + \varepsilon_t. \quad (6.2.4)$$

Optymalna wartość współczynnika zabezpieczenia jest wówczas równa szacunkowi parametru  $\beta$ . Taki sposób zabezpieczenia jest określany

w literaturze jako zabezpieczenie MNK (ang. OLS *hedging*). Liczne badania empiryczne pokazują jednakże, że warunkowe wariancje i kowariancje stóp zwrotu procesów finansowych zmieniają się w czasie. Z tego względu, do estymacji współczynnika zabezpieczenia można wykorzystać modele GARCH. Zmieniający się w czasie współczynnik zabezpieczenia dany jest formułą:

$$b_t = \frac{h_{sf, t+1|t,p}}{h_{f, t+1|t,p}}, \quad (6.2.5)$$

gdzie  $h_{sf, t+1|t,p}$  i  $h_{f, t+1|t,p}$  oznaczają prognozy odpowiednio warunkowej kowariancji stóp zwrotu instrumentu bazowego i kontraktu futures oraz warunkowej wariancji stopy zwrotu kontraktu futures, wyznaczone na podstawie dwurównaniowego modelu GARCH.

W przypadku analizy kilku szeregów czasowych jedną z najczęściej stosowanych postaci wielorównaniowego modelu GARCH jest model BEKK (patrz punkt 2.1.2). Zastosowano ją w pierwszej kolejności, ponieważ z jednej strony jest postacią relatywnie złożoną, nie nakładającą na parametry zbyt krępujących ograniczeń, z drugiej strony jest postacią na ogół nie sprawiającą problemów przy estymacji dla dwóch szeregów czasowych.

Rozważano różne specyfikacje równań dla średnich. Najprostsza postać zakłada stałość stóp zwrotu cen spot i terminowych:

$$s_t = \alpha_{s0} + \varepsilon_{st}, \quad (6.2.6)$$

$$f_t = \alpha_{f0} + \varepsilon_{ft}, \quad (6.2.7)$$

gdzie  $\varepsilon_t | \psi_{t-1} \sim N(0, \mathbf{H}_t)$ ,  $\varepsilon_t = (\varepsilon_{st}, \varepsilon_{ft})'$  i opisane jest jako proces BEKK.

Aby uwzględnić występujące pomiędzy stopami zwrotu instrumentu bazowego i kontraktu futures krótkoterminowe zależności, szacowano parametry modelu VAR-BEKK:

$$s_t = \alpha_{s0} + \sum_{i=1}^k \alpha_{si} s_{t-i} + \sum_{i=1}^k \beta_{si} f_{t-i} + \varepsilon_{st}, \quad (6.2.8)$$

$$f_t = \alpha_{f0} + \sum_{i=1}^k \alpha_{fi} s_{t-i} + \sum_{i=1}^k \beta_{fi} f_{t-i} + \varepsilon_{ft}, \quad (6.2.9)$$

gdzie  $\varepsilon_t | \psi_{t-1} \sim N(0, \mathbf{H}_t)$ ,  $\varepsilon_t$  opisane jest jako proces BEKK.

W ostatnim dniu obrotu kontraktu futures na indeks WIG20, cena rozliczenia jest średnią arytmetyczną ze wszystkich wartości indeksu WIG20

w czasie ostatniej godziny notowań ciągłych oraz wartości tego indeksu, ustalonej na zamknięcie sesji giełdowej. Taki sposób konstrukcji ceny rozliczenia powoduje zbliżanie się lub zrównanie ceny terminowej z ceną spot w dniu wygaśnięcia kontraktu. Z tego względu oraz z powodu możliwości dokonywania transakcji arbitrażowych, procesy cen terminowych i spot mogą być skointegrowane. Rozważano model wektorowej korekty błędem (VECM)<sup>268</sup>:

$$s_t = \alpha_{s0} + \sum_{i=1}^k \alpha_{si} s_{t-i} + \sum_{i=1}^k \beta_{si} f_{t-i} + \gamma_s (S_{t-1} - \gamma F_{t-1}) + \varepsilon_{st}, \quad (6.2.10)$$

$$f_t = \alpha_{f0} + \sum_{i=1}^k \alpha_{fi} s_{t-i} + \sum_{i=1}^k \beta_{fi} f_{t-i} + \gamma_f (S_{t-1} - \gamma F_{t-1}) + \varepsilon_{ft}, \quad (6.2.11)$$

gdzie  $\varepsilon_t | \psi_{t-1} \sim N(0, \mathbf{H}_t)$ ,  $\varepsilon_t$  opisane jest jako proces BEKK.

Na skuteczność strategii zabezpieczających może mieć również wpływ zastosowana postać wielorównaniowego modelu GARCH. Dlatego rozważano również inne specyfikacje macierzy warunkowych kowariancji  $\mathbf{H}_t$ : diagonalny BEKK, skalarno-diagonalny (postać (2.1.12)), BEKK z warunkowym rozkładem t-Studenta, model stałych współczynników korelacji<sup>269</sup>, DCC i zintegrowaną postać modelu DCC.

Inną alternatywną metodą obliczenia wartości współczynnika zabezpieczenia jest zastosowanie modelu z losowym parametrem. Związek między pozycją zajęą w kontraktach futures i wielkością pozycji zabezpieczanej można wyrazić następująco:

$$s_t = \alpha + \beta_t f_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t | \psi_{t-1} \sim N(0, \sigma_\varepsilon^2), \quad (6.2.12)$$

$$\beta_t = \delta \beta_{t-1} + \eta_t, \quad \eta_t | \psi_{t-1} \sim N(0, \sigma_\eta^2). \quad (6.2.13)$$

Jak pokazuje równanie (6.2.13), wartość współczynnika zabezpieczenia może zmieniać się w czasie i jest opisana za pomocą procesu autoregresyjnego. W zależności od ograniczeń nałożonych na współczynnik autoregresji, można rozpatrywać dwa przypadki, mianowicie stacjonarny proces autoregresyjny ( $\delta \in (-1, 1)$ ) oraz proces błądzenia przypadkowego (RW,  $\delta = 1$ ). Dla modeli przestrzeni stanów równanie (6.2.12) nazywa się równaniem obserwacji, natomiast (6.2.13) równaniem przejścia. Dodatkowo w równaniu obserwacji można założyć, że proces losowy  $\varepsilon_t$  może być opisany za pomocą procesu GARCH. W tym przypadku równanie (6.2.12) przybierze następującą postać:

<sup>268</sup> Wcześniej testowano występowanie kointegracji dla modelu (6.2.8)–(6.2.9).

<sup>269</sup> Model stałych współczynników korelacji był szacowany na podstawie jednorównaniowych modeli GARCH.

$$s_t = \alpha + \beta_t f_t + \varepsilon_t, \quad \varepsilon_t | \psi_{t-1} \sim N(0, h_t). \quad (6.2.14)$$

Parametry modelu w postaci (6.2.12) – (6.2.13) można estymować za pomocą filtru Kalmana. Jego szczegółowy opis dla modeli przestrzeni stanów z błędami typu GARCH można znaleźć w pracy Kima i Nelsona (1999)<sup>270</sup>.

Do prognozy wariancji i kowariancji stóp zwrotu można również zastosować metody wykorzystywane przez praktyków rynku finansowego: ruchomą macierz kowariancji oraz wyrównywanie wykładnicze dla macierzy kowariancji. Praktycy rynku finansowego przyjmują najczęściej stałe wartości stałej wygładzania i parametru wygasania. W badaniu przyjęto stałą wygładzania równą 25 oraz parametr wygasania równy 0,94 (określany dalej jako model RiskMetrics, patrz punkt 3.2.2). Dodatkowo wyboru stałej wygładzania i parametru wygasania dokonywano dla każdego okresu na podstawie próbki wstępnej. Wybierano te wartości, dla których średnie odchylenie standardowe stóp zwrotu zabezpieczonych portfeli było najmniejsze w próbie wstępnej. Taki sposób wyboru parametrów  $k$  i  $\lambda$  daje lepsze wyniki przy zabezpieczaniu portfeli.

### 6.2.2. OCENA EFEKTYWNOŚCI ZABEZPIECZENIA DLA WYBRANYCH PORTFELI

Oceny efektywności wybranych metod estymacji współczynnika zabezpieczenia dokonano na przykładzie dwóch portfeli: indeksu WIG20, indeksu WIG-Budownictwo oraz kontraktów futures na indeks WIG20, notowanych na GPW w Warszawie. Indeks WIG20 obejmuje 20 największych i najpłynniejszych spółek, indeks WIG-Budownictwo obliczany jest na podstawie spółek zakwalifikowanych do sektora „budownictwo” i wchodzących w skład indeksu WIG. W większości prac bada się efektywność różnych strategii zabezpieczających dla instrumentów finansowych, w przypadku których notowane są kontrakty terminowe. Nie wiadomo natomiast, jak skuteczne są strategie, gdy zabezpieczany jest instrument, dla którego nie ma notowanych instrumentów pochodnych. Indeks WIG-Budownictwo został wybrany jako przykład portfela, dla którego nie ma notowanych kontraktów terminowych i jednocześnie jest słabo skorelowany z kontraktem, który wykorzystuje się do zabezpieczania. Kontrakty terminowe futures na indeks WIG20 charakteryzują się największym obrotem i największą płynnością spośród wszystkich kontraktów terminowych,

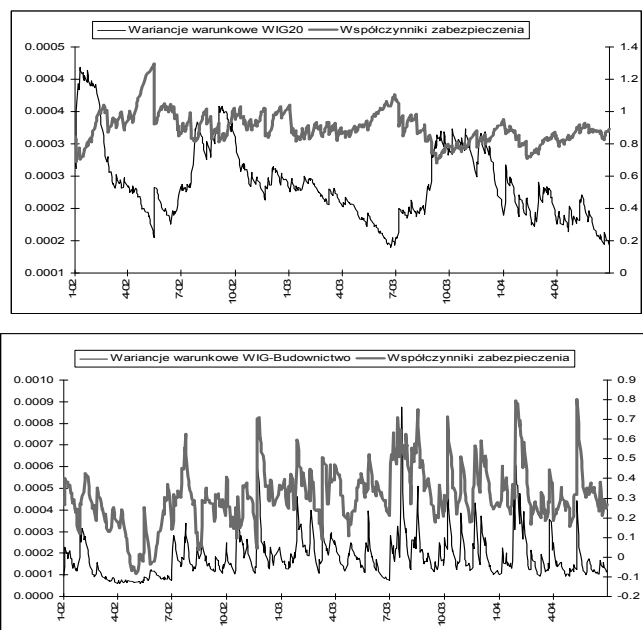
<sup>270</sup> Filtr Kalmana został przedstawiony w punkcie 4.4.1. Przedstawiono tam również rozszerzenie dla błędów typu GARCH w odniesieniu do modelu GARCH-M.

notowanych na GPW w Warszawie. Obroty na kontraktach terminowych na inne instrumenty finansowe były stosunkowo nieduże (szczególnie w początkowym okresie notowań), dlatego wydaje się, że są one notowane zbyt krótko, aby przeprowadzić dla nich wiarygodną ocenę skuteczności wszystkich rozważanych w pracy metod estymacji (wymagają one najczęściej dużej liczby obserwacji). Do badania przyjęto dzienne stopy zwrotu od 4 stycznia 1999 roku do 30 czerwca 2004 roku (1373 obserwacje). Ocena efektywności strategii zabezpieczających została przeprowadzona dla stosunkowo długiego okresu: od 2 stycznia 2002 roku do 30 czerwca 2004 roku (625 obserwacji). Do analizy wybierano zawsze najbardziej płynną serię kontraktów futures. Rolowania (zamykania pozycji w danym kontrakcie futures przy jednoczesnym otwieraniu takiej samej pozycji w kontrakcie o późniejszym terminie realizacji) dokonywano zawsze na tydzień przed wygaśnięciem danej serii kontraktów. Przy badaniu efektywności dla każdego okresu konstruowano portfel składający się z indeksu (WIG20, WIG-Budownictwo) i kontraktu futures na indeks WIG20. Rozważane strategie zabezpieczające różniły się jedynie metodą estymacji współczynnika zabezpieczenia (równanie (6.2.2)). Zatem parametry każdego z zastosowanych w pracy modeli były szacowane 625 razy. Takie postępowanie ogranicza skutki błędów wynikających z niestabilności parametrów.

Dla każdej strategii obliczono (ex post) średnią wariancję i średnią stopę zwrotu zabezpieczonego portfela dla okresu styczeń 2002–czerwiec 2004 roku. Uzyskane wyniki zostały zaprezentowane dla indeksu WIG20 w tabeli 6.20, a dla indeksu WIG-Budownictwo – w tabeli 6.21 (w tabelach podano odchylenia standardowe z średnich wariancji). Na podstawie przedstawionych wyników nie można stwierdzić, czy różnice w wynikach pomiędzy poszczególnymi metodami są istotne statystycznie, dlatego należy je oceniać raczej z ekonomicznego punktu widzenia, o czym będzie mowa w dalszej części tego podrozdziału. Dla każdej metody estymacji współczynnika zabezpieczenia przedstawiono również stopień redukcji ryzyka mierzonego średnim odchyleniem standardowym stopy zwrotu w stosunku do portfela niezabezpieczonego (analogiczne wartości, w przypadku redukcji wariancji, są większe od przedstawionych w tabelach, np. dla indeksu WIG20 przekraczają 80%). Dla porównania zaprezentowano najpierw średnie odchylenie standardowe i średnią stopę zwrotu w przypadku, gdy portfel nie jest zabezpieczony (współczynnik zabezpieczenia równy zeru) oraz w przypadku, gdy współczynnik zabezpieczenia jest stały i równy jeden (jest to tzw. zabezpieczenie naiwne). Zabezpieczenie naiwne portfela, dla indeksu WIG20, prowadzi do znacznej redukcji ryzyka, mierzonego średnim odchyleniem standardowym

stopy zwrotu portfela, natomiast dla indeksu WIG-Budownictwo powoduje wzrost ryzyka. Stopy zwrotu indeksu WIG20 są silnie skorelowane ze stopami zwrotu kontraktu futures na indeks WIG20 ( $\hat{\rho} = 0,91$ ), co wynika z konstrukcji tego kontraktu, natomiast stopy zwrotu indeksu WIG-Budownictwo są stosunkowo słabo skorelowane ze stopami zwrotu kontraktu futures na indeks WIG20 ( $\hat{\rho} = 0,41$ ).

Tradycyjnie stosowane podejście do szacowania współczynnika zabezpieczenia polega na estymacji metodą najmniejszych kwadratów równania regresji (6.2.4). Współczynnik zabezpieczenia MNK jest wówczas równy szacunkowi parametru  $\beta$ . Zabezpieczenie MNK prowadzi do dalszej redukcji ryzyka (indeks WIG20).



**RYСУNEK 6.2. OSZACOWANE NA PODSTAWIE MODELU BEKK WSPÓŁCZYNNIKI ZABEZPIECZENIA ORAZ WARUNKOWE WARIANCJE INSTRUMENTU BAZOWEGO.**

ŹRÓDŁO: FISZEDER I KWIATKOWSKI (2005B).

Kolejne strategie zabezpieczające polegały na wykorzystaniu, przy estymacji współczynnika zabezpieczenia, dwurównaniowych modeli GARCH (formuła (6.2.5)). W pierwszej kolejności do badania przyjęto, zapewniającą dodatnią określoność macierzy kowariancji oraz stosunkowo ogólną postać wielorównaniowego modelu GARCH – model BEKK ( $p = q = 1$ ). Oszacowa-

ne współczynniki zabezpieczenia wraz z wariancjami warunkowymi instrumentów bazowych przedstawiono na rysunku 6.2.

W przypadku indeksu WIG-Budownictwo wyraźny jest wzrost wartości współczynników zabezpieczenia w okresach wzrostu zmienności instrumentu bazowego. Zatem w okresach zwiększonego ryzyka (np. w okresach kryzysów finansowych) należy zwiększyć liczbę pozycji zabezpieczających w kontraktach futures. Podobna zależność nie występuje jednak w przypadku indeksu WIG20, gdzie wzrost wartości współczynników zabezpieczenia jest związany ze spadkiem wariancji warunkowej. Zaobserwowane różnice wynikają z charakteru zależności pomiędzy instrumentami bazowymi a kontraktami futures. Wraz ze wzrostem zmienności indeksu WIG20 wzrasta proporcjonalnie kowariancja tego indeksu i instrumentu pochodnego, dlatego współczynnik zmienności utrzymuje się na zbliżonym poziomie (szacunki wariancji kontraktu futures na indeks WIG20 były zbliżone do szacunków wariancji indeksu WIG20). Wraz ze spadkiem zmienności indeksu WIG20 zmniejsza się kowariancja indeksu i instrumentu pochodnego, jednakże w mniejszym stopniu, co powoduje wzrost współczynnika zabezpieczenia.

Badano, jaki wpływ na efektywność strategii zabezpieczających mają różne specyfikacje równań dla średniej: model zakładający stałość stóp zwrotu cen spot i terminowych (równania (6.2.6–6.2.7)), model VAR (równania (6.2.8–6.2.9),  $k = 1$ ), model z mechanizmem korekty błędów (równania (6.2.10–6.2.11)). Uwzględnienie występujących pomiędzy instrumentem bazowym i kontraktem futures krótkoterminowych (model VAR) i długoterminowych (model VECM) zależności powoduje zmniejszenie ryzyka zabezpieczonego portfela, jednakże skala zmniejszenia jest niewielka.

Ponieważ warunkowa normalność procesu (założona dla  $\varepsilon_t$  w modelu BEKK) nie jest w stanie wyjaśnić zwiększonej kurtozy występującej w rozkładach brzegowych badanych procesów, dlatego dodatkowo przyjęto dwuwymiarowy rozkład t-Studenta. Wprowadzenie rozkładu t-Studenta, dla indeksu WIG20, nie powoduje wzrostu efektywności strategii zabezpieczającej, natomiast dla indeksu WIG-Budownictwo, zmniejszenie ryzyka zabezpieczonego portfela jest nieduże.

Model BEKK jest stosunkowo ogólną postacią wielorównaniowego modelu GARCH i nie nakłada na parametry zbyt krępujących ograniczeń. Zbadano, jaki wpływ na skuteczność strategii zabezpieczającej ma uproszczenie postaci dwurównaniowego modelu GARCH, na podstawie którego szacowany jest współczynnik zabezpieczenia lub zastosowanie modeli nie zagnieżdżonych w BEKK. Rozważano modele: diagonalny BEKK, skalarno-diagonalny,



CCC, DCC, zintegrowany DCC. Uproszczenie postaci warunkowej macierzy kowariancji (poza przypadkiem diagonalnego modelu BEKK dla indeksu WIG-Budownictwo) prowadzi do zmniejszenia szacunków średnich odchyłeń standardowych stóp zwrotu zabezpieczonych portfeli. Na tej podstawie można przypuszczać, że parametryzacja modelu BEKK jest zbyt złożona. Najmniejszy szacunek średniego odchylenia standardowego, spośród wszystkich parametryzacji modelu GARCH, otrzymano w przypadku, gdy do estymacji współczynnika zabezpieczenia wykorzystano prognozy konstruowane na podstawie modelu skalarno-diagonalnego (indeks WIG20) oraz zintegrowanego modelu DCC (indeks WIG-Budownictwo). Wyniki pozostałych modeli były jednakże bardzo zbliżone. Wynik ten jest ważny z praktycznego punktu widzenia, ponieważ estymacja uproszczonych postaci wielorównaniowego modelu GARCH jest znacznie łatwiejsza. Strategie zabezpieczające, w których do estymacji współczynnika zabezpieczenia wykorzystuje się prognozy wyznaczone na podstawie uproszczonych postaci wielorównaniowych modeli GARCH (DCC i model stałych korelacji) były bardziej efektywne od zabezpieczenia MNK.

**TABELA 6.20. OCENA EFEKTYWNOŚCI METOD ESTYMACJI WSPÓŁCZYNNIKA ZABEZPIECZENIA DLA INDEKSU WIG20**

Metoda estymacji współczynnika zabezpieczenia	Średnie odchylenie standardowe	Redukcja ryzyka (w %)	Ranking	Średnia stopa zwrotu ( $\times 10^{-4}$ )
Brak zabezpieczenia (b = 0)	0,014458	0,00	–	5,6031
Zabezpieczenie naiwne (b = 1)	0,005792	59,94	19	0,2298
Zabezpieczenie MNK	0,005320	63,20	8	0,7147
BEKK	0,005337	63,09	15	0,0331
VAR-BEKK	0,005323	63,18	10	0,0119
VECM-BEKK	0,005322	63,19	9	0,0036
BEKK – rozkład t-Studenta	0,005346	63,02	16	-0,0599
Diagonalny BEKK	0,005300	63,34	4	0,8396
Skalarno-diagonalny	0,005280	63,48	1	1,0791
DCC	0,005304	63,31	5	-0,0856
DCC zintegrowany	0,005293	63,39	2	0,7155
Stałych współ. korelacji	0,005319	63,21	7	0,8289
Ruchoma macierz kowar.	0,005301	63,34	3	1,0963
Ruchoma macierz kowar. (k = 25)	0,005363	62,91	18	0,4353
Wyrównywanie wykładnicze	0,005355	62,96	17	1,4571
RiskMetrics	0,005317	63,23	6	1,1370
Losowy parametr jako RW	0,005330	63,13	12	1,2100
Jak wyżej plus GARCH	0,005330	63,13	11	1,1900
Losowy parametr jako AR	0,005336	63,09	14	1,3000
Jak wyżej plus GARCH	0,005336	63,09	13	1,2400

W tabeli przedstawiono średnie odchylenia standardowe i średnie stopy zwrotu zabezpieczonych portfeli. Redukcja ryzyka mierzona jest średnim odchyleniem standardowym stopy zwrotu w stosunku do portfela niezabezpieczonego.

ŹRÓDŁO: FISZEDER I KWIATKOWSKI (2005B).

Zastosowanie metod ruchomej macierzy kowariancji ze stałą wygładzania równą 25 oraz modelu RiskMetrics dało zbliżone lub nawet gorsze wyniki niż zabezpieczenie MNK. Wzrost efektywności strategii zabezpieczających (poza modelem wygładzania wykładniczego dla indeksu WIG20) wystąpił wtedy, gdy wyboru stałej wygładzania i parametru wygasania dokonywano dla każdego okresu na podstawie próbki wstępnej. Spośród rozważanych metod ruchomej macierzy kowariancji oraz wyrównywania wykładniczego dla macierzy kowariancji, zarówno dla indeksu WIG20, jak i WIG-Budownictwo, najlepszą pod względem redukcji ryzyka była metoda ruchomej macierzy kowariancji, dla której wyboru stałej wygładzania dokonywano dla każdego okresu na podstawie próbki wstępnej.

**TABELA 6.21. OCENA EFEKTYWNOŚCI WYBRANYCH METOD ESTYMACJI WSPÓŁCZYNNIKA ZABEZPIECZENIA DLA INDEKSU WIG-BUDOWNICTWO**

Metoda estymacji współczynnika zabezpieczenia	Średnie odchylenie standardowe	Redukcja ryzyka (w %)	Ranking	Średnia stopa zwrotu ( $\times 10^{-4}$ )
Brak zabezpieczenia (b = 0)	0,013358	0,00	–	7,4792
Zabezpieczenie naiwne (b = 1)	0,015160	-13,49	19	2,1059
Zabezpieczenie MNK	0,011907	10,86	10	5,6875
BEKK	0,012035	9,90	15	5,0481
VAR-BEKK	0,012036	9,90	16	5,3196
VECM-BEKK	0,012025	9,98	14	5,3505
BEKK – rozkład t-Studenta	0,011987	10,26	13	4,4351
Diagonalny BEKK	0,012074	9,61	18	4,6990
Skalarno-diagonalny	0,011963	10,44	11	4,4640
DCC	0,011900	10,91	9	4,3294
DCC zintegrowany	0,011870	11,14	5	4,2392
Stalych współ. korelacji	0,011879	11,07	7	4,4038
Ruchoma macierz kowar.	0,011758	11,98	1	3,5460
Ruchoma macierz kowar. (k = 25)	0,012061	9,71	17	3,0876
Wyrównywanie wykładnicze	0,011863	11,19	4	4,4224
RiskMetrics	0,011978	10,33	12	3,2187
Losowy parametr jako RW	0,011843	11,34	2	4,7700
Jak wyżej plus GARCH	0,011845	11,32	3	4,6200
Losowy parametr jako AR	0,011894	10,95	8	4,5700
Jak wyżej plus GARCH	0,011876	11,09	6	4,6000

W tabeli przedstawiono średnie odchylenia standardowe i średnie stopy zwrotu zabezpieczonych portfeli. Redukcja ryzyka mierzona jest średnim odchyleniem standardowym stopy zwrotu w stosunku do portfela niezabezpieczonego.

ŹRÓDŁO: FISZEDER I KWIATKOWSKI (2005B).

Do prognozowania współczynnika zabezpieczenia można również wykorzystać modele z losowym parametrem. Zarówno dla indeksu WIG20, jak i WIG-Budownictwo analizowano po cztery modele z losowym parametrem. W modelach tych losowy parametr podlega błędzeniu przypadkowemu lub

można jego realizację opisać za pomocą procesu autoregresyjnego. Dodatkowo rozważono dwa przypadki, mianowicie ze stałą i zmienną wariancją warunkową. Do opisu wariancji warunkowej składnika losowego przyjęto model GARCH(1,1). Oceny współczynnika autoregresji były bardzo zbliżone do jedności. Efektywność strategii zabezpieczających jest dla obydwu modeli, tj. z losowym parametrem typu AR i RW, zbliżona, jednakże większą redukcję ryzyka otrzymujemy dla modelu błędzenia przypadkowego. Wydaje się, że modelem bardziej preferowanym przez dane jest model błędzenia przypadkowego. Uwzględnienie efektu GARCH nie przyczyniło się w znaczącym stopniu do redukcji ryzyka. Dla indeksu WIG-Budownictwo stopień redukcji ryzyka, uzyskany dla modeli z losowym parametrem, jest podobny do wyników, otrzymanych za pomocą uproszczonych modeli GARCH, mianowicie DCC i modelu stałych warunkowych współczynników korelacji, natomiast dla indeksu WIG20 jest niższy niż przy zabezpieczeniu MNK.

Dla indeksu WIG20 wszystkie strategie zabezpieczające prowadzą do znacznej redukcji ryzyka mierzonego średnim odchyleniem standardowym stopy zwrotu portfela. Natomiast w przypadku indeksu WIG-Budownictwo, którego stopy zwrotu są stosunkowo słabo skorelowane ze stopami zwrotu kontraktu futures na indeks WIG20, redukcja ryzyka jest znacznie mniejsza.

Najmniejszy szacunek średniego odchylenia standardowego stopy zwrotu zabezpieczonego portfela dla indeksu WIG20 otrzymano w przypadku, gdy do estymacji współczynnika zabezpieczenia wykorzystano prognozy wyznaczone na podstawie zintegrowanego modelu DCC, a dla indeksu WIG-Budownictwo – metody ruchomej macierzy kowariancji, dla której wyboru stałej wygładzania dokonywano dla każdego okresu na podstawie próbki wstępnej.

W tabelach 6.20–6.21 obok średniego odchylenia standardowego dla każdej metody estymacji współczynnika zabezpieczenia podano również średnią stopę zwrotu zabezpieczonego portfela. Zrealizowana stopa zwrotu może być dodatkowym kryterium brany pod uwagę przy wyborze strategii zabezpieczającej. Ponieważ w pracy analizowana była strategia zabezpieczająca polegająca na minimalizowaniu wariancji stopy zwrotu zabezpieczonego portfela, dlatego średnia stopa zwrotu ma znaczenie drugorzędne.

Wiele spośród badanych metod zabezpieczania, które uwzględniają zmienność warunkowych wariancji, kowariancji lub współczynników beta, okazało się bardziej skutecznych od tradycyjnie stosowanego zabezpieczenia MNK. Należy jednakże podkreślić, że różnice między różnymi metodami estymacji współczynnika zabezpieczenia są nieduże i dla większości inwestorów nieistotne z ekonomicznego punktu widzenia. Ryzyko portfela, (odchy-

lenie standardowe) dla najlepszej metody w rankingu, jest mniejsze średnio o około 0,004 punktu procentowego (dla indeksu WIG20) i 0,01 punktu procentowego (dla indeksu WIG-Budownictwo) niż ryzyko zabezpieczenia MNK. W skali roku różnica ta wynosi około 1,03 punktu procentowego (dla indeksu WIG20) i 3,01 punktu procentowego (dla indeksu WIG-Budownictwo). W przypadku indeksu WIG20 czyli portfela, który jest instrumentem bazowym kontraktów terminowych różnica między metodami jest wielkością nieistotną dla większości inwestorów<sup>271</sup>. Zatem dla zdecydowanej większości uczestników rynku wystarczające jest zastosowanie najprostszej metody estymacji, czyli metody najmniejszych kwadratów. Dla indeksu WIG-Budownictwo, portfela dla którego nie ma notowanych kontraktów terminowych, ta różnica jest większa i dla wielu inwestorów może być istotna.

Dotychczasowe wyniki badań w literaturze są niejednoznaczne i nie wskazują jednej metody jako najbardziej skutecznej w zabezpieczaniu przed ryzykiem. Niektóre analizy mówią o wyższości prostych metod, jak MNK, inne wskazują na przewagę bardziej zaawansowanych metod szacowania współczynnika zabezpieczenia, jak na przykład wykorzystanie modelu GARCH. W wielu pracach (np. Baillie i Myers, 1991; Tong, 1996) autorzy nie podają szacunków wariancji zabezpieczonych portfeli, tylko wielkość redukcji ryzyka w stosunku do portfela niezabezpieczonego. To nie pozwala ocenić absolutnych różnic pomiędzy metodami. Jeżeli nawet bardziej zaawansowane metody estymacji współczynnika zabezpieczenia są skuteczniejsze niż MNK (na przykład Park i Switzer, 1995; Rossi i Zucca, 2002), to w wielu przypadkach dotyczących zabezpieczenia instrumentu bazowego, dla którego jest notowany kontrakt terminowy, autorzy interpretują różnice w redukcji ryzyka w stosunku do innego portfela (np. niezabezpieczonego), nie zwracając uwagi na to, że są to wielkości podobnego rzędu do tych, jakie uzyskano w niniejszym badaniu. Podawanie i interpretowanie tylko wielkości stosunkowych może w tych przypadkach wprowadzać w błąd.

Interesujące mogą być również własności oszacowanych współczynników zabezpieczenia. W tabelach 6.22 i 6.23 przedstawiono podstawowe statystyki oszacowanych współczynników zabezpieczenia dla wszystkich rozważanych metod estymacji: średnią, odchylenie standardowe, wartość maksymalną i minimalną. Najmniejsza zmienność współczynnika zabezpieczenia występowała w przypadku zabezpieczenia MNK (oczywiście poza brakiem zabezpieczenia i zabezpieczeniem naiwnym). Pojawianie się nowych obserwacji zmienia-

<sup>271</sup> Do pełnej oceny należałoby jeszcze zbadać, jaki jest wpływ uwzględnienia kosztów transakcyjnych.

ło szacunek współczynnika zabezpieczenia MNK tylko w niewielkim stopniu. Zmienność współczynnika zabezpieczenia MNK (mierzona odchyleniem standardowym) była średnio 25 (dla indeksu WIG20) i 8 (dla indeksu WIG-Budownictwo) razy mniejsza niż zmienność współczynnika zabezpieczenia estymowanego na podstawie innych metod. Największe szacunki odchylenia standardowego współczynników zabezpieczenia występowały dla metod wariancji i kowariancji ruchomych. Im większa zmienność współczynnika zabezpieczenia, tym większe koszty transakcyjne związane ze zmianą wielkości pozycji w kontraktach futures (należy jednakże podkreślić, że koszty transakcyjne związane z kontraktami futures są niewielkie w porównaniu z kosztami, jakie ponosi się przy zakupie i sprzedaży instrumentów bazowych).

**TABELA 6.22. PODSTAWOWE STATYSTYKI WSPÓŁCZYNNIKÓW ZABEZPIECZENIA DLA INDEKSU WIG20**

Metoda estymacji współczynnika zabezpieczenia	Średnia	Odchylenie standardowe	Minimum	Maksimum
Brak zabezpieczenia ( $b = 0$ )	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Zabezpieczenie naiwne ( $b = 1$ )	1,0000	0,0000	1,0000	1,0000
Zabezpieczenie MNK	0,8783	0,0040	0,8703	0,8846
BEKK	0,8982	0,0981	0,6779	1,2954
VAR-BEKK	0,8934	0,1001	0,6853	1,2910
VECM-BEKK	0,8970	0,1006	0,6942	1,3171
BEKK – rozkład t-Studenta	0,9016	0,0914	0,6718	1,2074
Diagonalny BEKK	0,8484	0,0889	0,6673	1,1538
Skalarno-diagonalny	0,8884	0,0656	0,7317	1,0434
DCC	0,8975	0,1007	0,7007	1,3137
DCC zintegrowany	0,9057	0,1002	0,5616	1,3160
Model stałych korelacji	0,8967	0,1022	0,5538	1,3137
Ruchoma macierz kowar.	0,8735	0,1216	0,5395	1,5001
Ruchoma macierz kowar. ( $k = 25$ )	0,8711	0,1040	0,6545	1,2788
Wyrównywanie wykładnicze	0,8748	0,0971	0,5464	1,2730
RiskMetrics	0,8657	0,0858	0,6773	1,0978
Losowy parametr jako RW	0,8646	0,0816	0,6638	1,0423
Losowy parametr jako RW (GARCH)	0,8675	0,0814	0,6578	1,0505
Losowy parametr jako AR	0,8530	0,0807	0,6507	1,0309
Losowy parametr jako AR (GARCH)	0,8580	0,0812	0,6468	1,0394

ŹRÓDŁO: FISZEDER I KWIATKOWSKI (2005B).

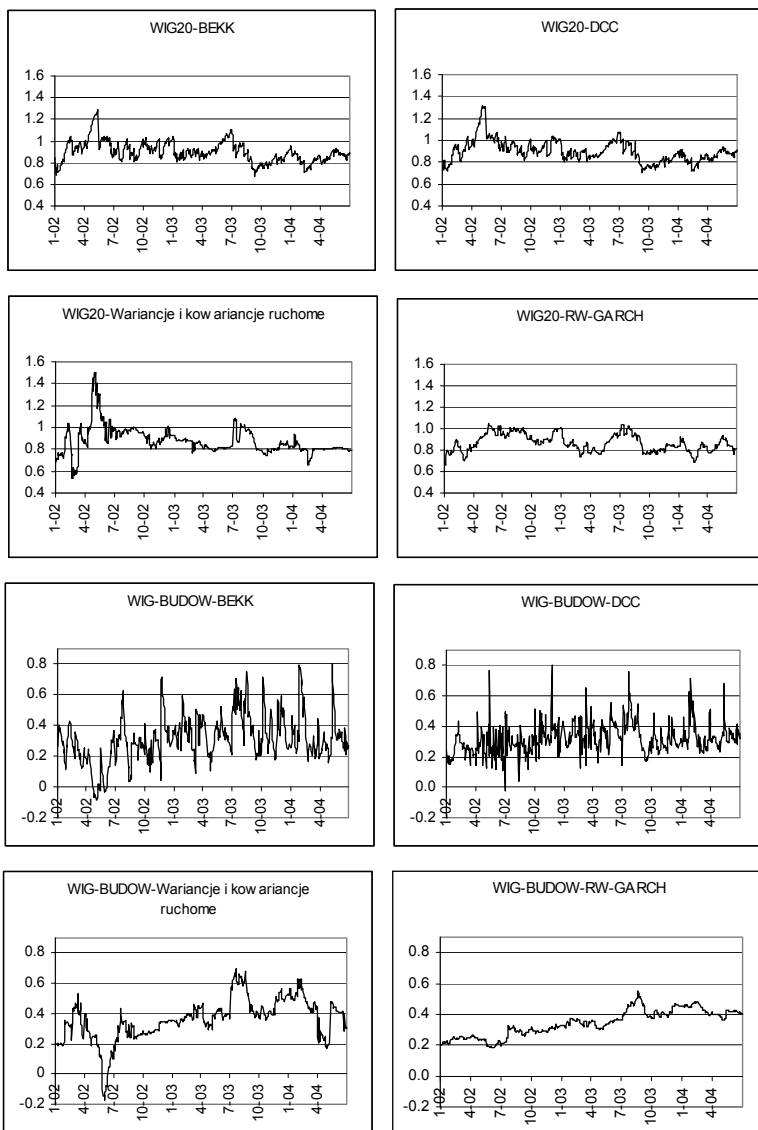
**TABELA 6.23. PODSTAWOWE STATYSTYKI WSPÓŁCZYNNIKÓW ZABEZPIECZENIA DLA INDEKSU WIG-BUDOWNICTWO**

Metoda estymacji współczynnika zabezpieczenia	Średnia	Odchylenie standardowe	Minimum	Maksimum
Brak zabezpieczenia (b = 0)	0,0000	0,0000	0,0000	0,0000
Zabezpieczenie naiwne (b = 1)	1,0000	0,0000	1,0000	1,0000
Zabezpieczenie MNK	0,2912	0,0153	0,2717	0,3179
BEKK	0,3158	0,1486	-0,0842	0,8056
VAR-BEKK	0,3151	0,1425	0,0013	0,8834
VECM-BEKK	0,3192	0,1431	0,0115	0,8979
BEKK – rozkład t-Studenta	0,3371	0,1211	0,0630	0,7172
Diagonalny BEKK	0,2833	0,1381	-0,0733	0,6961
Skalarno-diagonalny	0,3339	0,1203	0,0427	0,7048
DCC	0,3213	0,0994	-0,0261	0,8047
DCC zintegrowany	0,3279	0,0863	0,1379	0,7764
Model stałych korelacji	0,3241	0,0839	0,1284	0,7540
Ruchoma macierz kowar.	0,3628	0,1381	-0,1703	0,6965
Ruchoma macierz kowar. (k = 25)	0,3760	0,1788	-0,1672	0,7311
Wyrównywanie wykładnicze	0,3754	0,1164	-0,0885	0,7702
RiskMetrics	0,3923	0,1581	-0,0561	0,8927
Losowy parametr jako RW	0,3429	0,0916	0,2037	0,5236
Losowy parametr jako RW (GARCH)	0,3432	0,0839	0,1826	0,5528
Losowy parametr jako AR	0,3255	0,1144	0,1903	0,5496
Losowy parametr jako AR (GARCH)	0,3318	0,0932	0,1496	0,5656

ŹRÓDŁO: FISZEDER I KWIATKOWSKI (2005B).

Analizując własności współczynników zabezpieczenia, można wyróżnić cztery klasy metod, różniące się znacznie dynamiką współczynników zabezpieczenia: (1) – modele BEKK (poza modelem diagonalnym), (2) – modele DCC i CCC, (3) – metody ruchomej macierzy kowariancji oraz wyrównywania wykładniczego dla macierzy kowariancji, (4) – modele z losowym parametrem. Na rysunku 6.3 przedstawiono szacunki współczynników zabezpieczenia dla wybranych metod spośród powyższych klas.

Odchylenie standardowe współczynnika zabezpieczenia było większe dla indeksu WIG-Budownictwo niż dla indeksu WIG20 (poza modelami DCC i CCC). Wyraźne różnice pomiędzy indeksami WIG20 i WIG-Budownictwo dotyczące własności współczynników zabezpieczenia, konstruowanych na podstawie różnych metod estymacji, widoczne są na rysunku 6.3.



**RYСУNEK 6.3. OCENY WSPÓŁCZYNNIKÓW ZABEZPIECZENIA DLA WYBRANYCH METOD ESTYMACJI**

ŹRÓDŁO: FISZEDER I KWIATKOWSKI (2005B).

Zmienność współczynników zabezpieczenia konstruowanych na podstawie modeli z losowym parametrem była na ogół mniejsza niż zmienność innych dynamicznych metod zabezpieczenia. W tabeli 6.24 przedstawiono dodatko-

wo szacunki współczynników korelacji między współczynnikami zabezpieczenia wyznaczonymi na podstawie wybranych metod przedstawionych na rysunku 6.3.

**TABELA 6.24. EMPIRYCZNE WSPÓŁCZYNNIKI KORELACJI MIĘDZY WSPÓŁCZYNNIKAMI ZABEZPIECZENIA DLA WYBRANYCH METOD ESTYMACJI DLA INDEKSÓW WIG20 I WIG-BUDOWNICTWO**

Oznaczenia		Metody estymacji współ. zabezpieczenia			
		A	B	C	D
Metody estymacji	A	1	0,95	0,60	0,59
	B	0,53	1	0,74	0,66
	C	0,62	0,39	1	0,67
	D	0,52	0,34	0,79	1

Powyżej przekątnej zamieszczono szacunki dla indeksu WIG20, poniżej dla indeksu WIG-Budownictwo. Przyjęte oznaczenia metod: A – model BEKK, B – model DCC, C – rucho ma macierz kowariancji, D – model RW-GARCH. Wszystkie oceny współczynników są istotne statystycznie na poziomie istotności 0,05.

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

Największe podobieństwo występowało między empirycznymi współczynnikami zabezpieczenia skonstruowanymi na podstawie modeli BEKK i DCC dla indeksu WIG20. Dynamika współczynników zabezpieczenia konstruowanych na podstawie modelu DCC dla indeksu WIG-Budownictwo najbardziej różniła się od dynamiki współczynników, konstruowanych na podstawie innych metod.

Badania nad efektywnością zabezpieczania przed ryzykiem za pomocą kontraktów terminowych futures, dotyczące różnych aktywów z polskiego rynku finansowego, prowadził również Humeńczuk (2006). Ocena efektywności dotyczyła maksymalnie okresu 90 dni sesyjnych, a więc znacznie krótszego niż przyjęty w niniejszym badaniu. Średni poziom zabezpieczenia minimalizującego wariację, w przypadku indeksu WIG20, był podobny w obu badaniach. Zastosowania modeli GARCH w badaniu Humeńczuka dotyczyły przede wszystkim szerokiej klasy modeli jednorównaniowych. Z modeli wielorównaniowych analizowane były tylko modele BEKK, diagonalny BEKK i DCC, dlatego trudno było wyciągnąć wnioski dotyczące skuteczności wielorównaniowych modeli GARCH<sup>272</sup>. Niektóre ogólne wnioski wynikające z obu

<sup>272</sup> Wyniki dotyczące modeli DCC i diagonalnego modelu BEKK znacząco odbiegały od pozostałych oraz od uzyskanych w niniejszym badaniu. Prawdopodobną przyczyną tego były problemy związane z estymacją parametrów.



analiz pokrywają się. Na przykład uwzględnienie w modelu krótkoterminowych i długoterminowych zależności oraz zmiennych warunkowych wariancji prowadzi do wzrostu efektywności zabezpieczenia.

### 6.2.3. ANALIZA WŁASNOŚCI BADANYCH SZEREGÓW A SKUTECZNOŚĆ ZABEZPIECZANIA

W większości prac dotyczących efektywności strategii zabezpieczających bada się tylko podstawowe własności szeregów czasowych, przez co niemożliwe jest sformułowanie ogólnych wniosków dotyczących poszczególnych metod estymacji współczynnika zabezpieczenia. W tabelach 6.25 i 6.26 zaprezentowano wyniki testów dotyczących zarówno własności szeregów stóp zwrotu badanych indeksów i kontraktów futures na indeks WIG20, jak i charakteru zależności między nimi. Wyniki testowania restrykcji nakładanych na parametry modeli GARCH były niewrażliwe na przyjętą specyfikację rozkładu warunkowego. W badaniu przyjęto taki sam okres, jaki był przy ocenie skuteczności metod estymacji współczynnika zabezpieczenia, czyli od 2 stycznia 2002 do 30 czerwca 2004 roku (w przypadku testów dotyczących wielorównaniowych modeli GARCH, ze względu na problemy z osiągnięciem zbieżności, przyjęto okres całej próby, czyli od 4 stycznia 1999 do 30 czerwca 2004 roku). Dodatkowo dla każdego z badanych wielorównaniowych modeli GARCH oszacowano wartość kryterium informacyjnego Schwarz'a (SIC). Wnioski płynące z analizy SIC były na ogół zgodne z wnioskami, płynącymi z wyników testów, dlatego pominięto ich prezentację.

Stopy zwrotu indeksu WIG20 i kontraktów futures na indeks WIG20 miały bardzo zbliżone własności, były pozbawione autokorelacji, miały zmienną wariancję warunkową, a ich rozkłady bezwarunkowe były różne od rozkładu normalnego. W przypadku stóp zwrotu indeksu WIG-Budownictwo występowała autokorelacja, zmienna wariancja warunkowa, a rozkład bezwarunkowy także był różny od rozkładu normalnego. Zarówno dla indeksu WIG20 jak i WIG-Budownictwo wyniki testu CUSUM wskazywały na niestabilność predyktywną liniowego modelu regresji<sup>273</sup> (brak stabilności był zdecydowanie bardziej widoczny w przypadku indeksu WIG-Budownictwo).

<sup>273</sup> Postać (6.2.4).

**TABELA 6.25. ANALIZA WŁASNOŚCI BADANYCH SZEREGÓW I CHARAKTERU ZALEŻNOŚCI MIĘDZY NIMI DLA INDEKSU WIG20**

Weryfikowane hipotezy	Statystyka	Oceny statystyk	
		WIG20	FW20
Brak autokorelacji	Ljunga-Boxa(12)	9,38	12,37
Brak efektu ARCH	LM(12)	23,28*	34,18*
Normalność rozkładu bezwarunkowego	Jarque-Bera	21,54*	38,41*
Brak VAR(1)	LR	47,10*	
Brak wektorów kointegrujących	Testu śladu	37,58*	
	Maks. wart. własnej	37,09*	
Jeden wektor kointegrujący	Testu śladu	0,49	
	Maks. wart. własnej	0,49	
Normalność rozkładu warunkowego	LR	82,86*	
Stołość warunkowych współczyn. korelacji	LMC	1,79	
BEKK – macierze diagonalne	LR	-0,64	
BEKK – skalary	LR	18,76*	

Gwiazdką oznaczono oceny statystyk, w przypadku których weryfikowana hipoteza została odrzucona na poziomie istotności 0,05.

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2007A).

Test ilorazu wiarygodności wskazuje, że w badaniu dla indeksu WIG20 należało uwzględnić opóźnione wartości zmiennych (model VAR), natomiast dla indeksu WIG-Budownictwo, rozszerzenie modelu nie jest konieczne. Według testu Johansena, zarówno stopy zwrotu indeksu WIG20 i kontraktów futures na indeks WIG20, jak i stopy zwrotu indeksu WIG-Budownictwo i kontraktów futures na indeks WIG20, były skointegrowane. Uwzględnienie występujących pomiędzy instrumentem bazowym i kontraktem futures krótkoterminowych (model VAR) i długoterminowych (model VECM) zależności, spowodowało zmniejszenie ryzyka zabezpieczonego portfela, co było zgodne z wynikami testów. Skala zmniejszenia odchylenia standardowego zabezpieczonego portfela była jednakże niewielka.

Według testu ilorazu wiarygodności modele BEKK z warunkowym rozkładem normalnym zostały zdecydowanie odrzucone na korzyść modeli z warunkowym rozkładem t-Studenta. Wprowadzenie warunkowego rozkładu t-Studenta nie spowodowało wzrostu efektywności strategii zabezpieczającej dla indeksu WIG20 i niewielki wzrost efektywności dla indeksu WIG-Budownictwo.

Wyniki testu Tse wskazują, że warunkowe współczynniki korelacji między stopami zwrotu indeksu WIG20 i kontraktów futures były stałe w czasie, natomiast między stopami zwrotu indeksu WIG-Budownictwo i kontraktów futures zmieniały się istotnie w czasie.

**TABELA 6.26. ANALIZA WŁASNOŚCI BADANYCH SZEREGÓW I CHARAKTERU ZALEŻNOŚCI MIĘDZY NIMI DLA INDEKSU WIG-BUDOWNICTWO**

Weryfikowane hipotezy	Statystyka	Oceny statystyk	
		WIG-Bud	FW20
Brak autokorelacji	Ljunga-Boxa(12)	25,53*	12,37
Brak efektu ARCH	LM(12)	27,15*	34,18*
Normalność rozkładu bezwarunkowego	Jarque-Bera	68,57*	38,41*
Brak VAR(1)	LR	4,92	
Brak wektorów kointegrujących	Testu śladu	21,38*	
	Maks. wart. własnej	20,81*	
Jeden wektor kointegrujący	Testu śladu	0,58	
	Maks. wart. własnej	0,58	
Normalność rozkładu warunkowego	LR	91,60*	
Stołość warunkowych współczyn. korelacji	LMC	5,70*	
BEKK – macierze diagonalne	LR	44,99*	
BEKK – skalary	LR	25,69*	

Gwiazdką oznaczono oceny statystyk, w przypadku których weryfikowana hipoteza została odrzucona na poziomie istotności 0,05.

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

Model CCC w obu przypadkach prowadził do zmniejszenia szacunków średnich odchyłeń standardowych stóp zwrotu zabezpieczonych portfeli. Wyniki testu ilorazu wiarygodności wskazują na złożoną postać modelu BEKK i odrzucają prostsze specyfikacje tego modelu (z wyjątkiem diagonalnego modelu BEKK dla indeksu WIG20). Uproszczenie macierzy w modelu BEKK prowadziło jednakże do wzrostu skuteczności strategii zabezpieczającej (poza diagonalnym modelem BEKK dla indeksu WIG-Budownictwo).

Uproszczenie postaci warunkowej macierzy kowariancji (diagonalna postać modelu BEKK, model skalarno-diagonalny, model CCC oraz model DCC) prowadziło na ogół do zmniejszenia szacunków średnich odchyłeń standardowych stóp zwrotu zabezpieczonych portfeli. Zatem zarówno na podstawie wyników testów, jak i rezultatów badania skuteczności metod zabezpieczania, można przypuszczać, że parametryzacja modelu BEKK jest zbyt złożona. Wynik ten jest ważny z praktycznego punktu widzenia, ponieważ estymacja uproszczonych postaci wielorównaniowego modelu GARCH jest znacznie łatwiejsza.

### OCENA EFEKTYWNOŚCI METOD ZABEZPIECZENIA WEWNĄTRZ PRÓBY

Wnioski wynikające z przeprowadzonych testów oraz analizy kryterium SIC były często zgodne (z pewnymi wyjątkami) z wynikami badania skuteczności wybranych metod estymacji współczynnika zabezpieczenia. Mimo wszystko, podobnie jak przy innych zastosowaniach przedstawionych w poprzednich rozdziałach pracy, dokonano oceny skuteczności metod zabezpieczenia wewnątrz próby dla całego badanego okresu. Uzyskane wyniki zaprezentowano w tabelach 6.27 i 6.28.

**TABELA 6.27. OCENA EFEKTYWNOŚCI METOD ESTYMACJI WSPÓŁCZYNNIKA ZABEZPIECZENIA WEWNĄTRZ PRÓBY DLA INDEKSU WIG20**

Metoda estymacji współczynnika zabezpieczenia	Średnie odchylenie standardowe	Redukcja ryzyka (w %)	Ranking	Średnia stopa zwrotu ( $\times 10^{-4}$ )
Brak zabezpieczenia ( $b = 0$ )	0,017221	0,00	–	2,2701
Zabezpieczenie naiwne ( $b = 1$ )	0,007356	57,28	19	0,6386
Zabezpieczenie MNK	0,006974	59,50	13	0,8497
BEKK	0,006775	60,66	6	0,9313
VAR-BEKK	0,006772	60,68	3	1,0010
VECM-BEKK	0,006775	60,66	6	1,0982
BEKK – rozkład t-Studenta	0,006777	60,65	8	0,9801
Diagonalny BEKK	0,006839	60,29	11	1,3220
Skalarno-diagonalny	0,006838	60,29	10	1,3972
DCC	0,006774	60,66	5	1,0323
DCC zintegrowany	0,006787	60,59	9	1,0918
Stałych współ. korelacji	0,006770	60,69	2	0,9968
Ruchoma macierz kowar.	0,006698	61,11	1	2,1022
Ruchoma macierz kowar. ( $k = 25$ )	0,006975	59,50	14	0,6532
Wyrównywanie wykładnicze	0,006839	60,29	11	2,2302
RiskMetrics	0,006773	60,67	4	1,8656
Losowy parametr jako RW	0,007172	58,35	16	2,1645
Jak wyżej plus GARCH	0,007180	58,31	18	1,9734
Losowy parametr jako AR	0,007168	58,38	15	2,1772
Jak wyżej plus GARCH	0,007177	58,32	17	1,9843

W tabeli przedstawiono średnie odchylenia standardowe i średnie stopy zwrotu zabezpieczonych portfeli. Redukcja ryzyka mierzona jest średnim odchyleniem standardowym stopy zwrotu w stosunku do portfela niezabezpieczonego.

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

**TABELA 6.28. OCENA EFEKTYWNOŚCI WYBRANYCH METOD ESTYMACJI WSPÓŁCZYNNIKA ZABEZPIECZENIA WEWNĄTRZ PRÓBY DLA INDEKSU WIG-BUDOWNICTWO**

Metoda estymacji współczynnika zabezpieczenia	Średnie odchylenie standardowe	Redukcja ryzyka (w %)	Ranking	Średnia stopa zwrotu ( $\times 10^{-4}$ )
Brak zabezpieczenia ( $b = 0$ )	0,014045	0,00	–	2,5773
Zabezpieczenie naiwne ( $b = 1$ )	0,017786	-26,64	19	0,9459
Zabezpieczenie MNK	0,012813	8,77	6	2,0609
BEKK	0,012946	7,82	17	1,1857
VAR-BEKK	0,012927	7,96	14	1,6353
VECM-BEKK	0,012930	7,94	15	1,6431
BEKK – rozkład t-Studenta	0,012904	8,12	13	0,5563
Diagonalny BEKK	0,012993	7,49	18	0,5946
Skalarno-diagonalny	0,012932	7,92	16	0,7145
DCC	0,012795	8,90	5	1,2671
DCC zintegrowany	0,012790	8,94	4	1,2389
Stałych współ. korelacji	0,012786	8,96	3	1,2849
Ruchoma macierz kowar.	0,011816	15,87	1	-0,6179
Ruchoma macierz kowar. ( $k = 25$ )	0,012814	8,77	7	-0,0235
Wyrównywanie wykładnicze	0,012511	10,92	2	0,8645
RiskMetrics	0,012825	8,69	8	-0,3725
Losowy parametr jako RW	0,012861	8,43	9	1,3373
Jak wyżej plus GARCH	0,012870	8,37	11	1,3724
Losowy parametr jako AR	0,012861	8,43	9	1,3371
Jak wyżej plus GARCH	0,012871	8,36	12	1,3448

W tabeli przedstawiono średnie odchylenia standardowe i średnie stopy zwrotu zabezpieczonych portfeli. Redukcja ryzyka mierzona jest średnim odchyleniem standardowym stopy zwrotu w stosunku do portfela niezabezpieczonego.

ŹRÓDŁO: OBLICZENIA WŁASNE.

Szacunki wskaźników procentowych redukcji ryzyka mierzonego w stosunku do portfela niezabezpieczonego były średnio o 2–3% mniejsze od tych, jakie uzyskano w badaniu wewnątrz próby. Rankingi modeli wewnątrz próby były zbliżone do rankingów poza próbą. W badaniu dla indeksu WIG20 modele BEKK wypadły lepiej, natomiast uproszczone parametryzacje modelu, czyli diagonalny BEKK, skalarno-diagonalny i zintegrowany DCC, gorzej w rankingu wewnątrz próby. Modele prostsze wypadają zatem relatywnie lepiej w ocenie poza próbą niż wewnątrz próby. Odwrotnie jest w przypadku

modeli bardziej złożonych. Taka sama sytuacja wystąpiła w badaniu skuteczności metod konstrukcji portfeli (patrz podrozdział 5.1). Tak jak i w innych zastosowaniach, badanie wewnątrz próby ma większe szanse na wybór najlepszej parametryzacji niż analiza statystycznych własności badanych szeregów czasowych i kryteriów informacyjnych.

#### 6.2.4. ZASTOSOWANIE DANYCH INTRADAY DO OCENY EFEKTYWNOŚCI ZABEZPIECZANIA

Do oceny efektywności strategii zabezpieczających wykorzystuje się obserwacje o niskiej częstotliwości, najczęściej dane dzienne lub tygodniowe. Tymczasem wiadomo, że kwadrat stopy zwrotu dla danych o niskiej częstotliwości nie jest najlepszą miarą zmienności, ponieważ jest zanieczyszczony szumem (patrz punkt 3.2.1). W pracy Fiszdera (2007a) zaproponowano, aby do oceny skuteczności strategii zabezpieczającej wykorzystywać dane o wysokiej częstotliwości. Suma kwadratów stóp zwrotu dla danych o częstotliwości wyższej niż dzienna jest lepszą miarą zmienności. Wydaje się zatem, że zastosowanie tej miary jest również celowe do oceny skuteczności strategii zabezpieczającej. Głównym celem analizy było zbadanie, czy zastosowanie danych o wysokiej częstotliwości, wpłynie w istotny sposób na ocenę skuteczności rozważanych metod estymacji współczynnika zabezpieczenia.

Jako realizacje zmienności przyjęto dwie miary zmienności. Pierwsza, powszechnie stosowana w innych badaniach i przyjęta w punkcie 6.2.2, to kwadrat dziennej stopy zwrotu zabezpieczonego portfela:

$$\sigma_{t+1}^2 = (s_{t+1} - b_t f_{t+1})^2. \quad (6.2.15)$$

Druga, zaproponowana przez autora, to miara wykorzystująca dane o częstotliwości wyższej niż dzienna:

$$\sigma_{\text{int},t+1}^2 = \sum_{m=1}^M (s_{m,t+1} - b_t f_{m,t+1})^2, \quad (6.2.16)$$

gdzie  $s_{m,t+1}$  i  $f_{m,t+1}$  to stopy zwrotu o częstotliwości wyższej niż dzienna, odpowiednio dla instrumentu bazowego i terminowego,  $M$  – liczba obserwacji w ciągu dnia.

W badaniu przyjęto 15-minutowe stopy zwrotu. Wybrana częstotliwość danych jest kompromisem między – z jednej strony – jak najlepszą aproksy-

macją nieobserwowalnej zmienności, a z drugiej strony – uniknięciem problemów związanych z mikrostrukturą rynku. Inwestorzy podejmują działania na rynku przez cały okres trwania sesji. Większość inwestorów instytucjonalnych obserwuje i reaguje na bieżące zmiany cen, a nie tylko na ceny zamknięcia. Zastosowanie danych o częstotliwości wyższej niż dzienna do oceny trafności prognoz zmienności wpływa na ocenę skuteczności różnych modeli.

Oceny skuteczności wybranych metod estymacji współczynnika zabezpieczenia dokonano tylko dla indeksu WIG20 i kontraktów futures na indeks WIG20, notowanych na GPW w Warszawie. W przypadku indeksu WIG-Budownictwo niskie obroty powodują, że dane intraday charakteryzują się stosunkowo niską częstotliwością i duży wpływ na wyniki badania mają czynniki związane z mikrostrukturą rynku. Uzyskane wyniki przedstawiono w tabeli 6.29. Zastosowano te same metody, co w punkcie 6.2.2. Dla porównania zamieszczono również prezentowane wcześniej wyniki, gdzie jako realizacje zmienności przyjęto kwadrat dziennej stopy zwrotu zabezpieczonego portfela.

Niezależnie od metody estymacji współczynnika zabezpieczenia, redukcja ryzyka była znacząco mniejsza w przypadku, gdy jako realizacje zmienności przyjęto sumy kwadratów 15-minutowych stóp zwrotu. O wiele trudniej jest zabezpieczyć portfel przed ryzykiem, tak aby minimalizować zmienność portfela szacowaną na podstawie danych o wysokiej częstotliwości.

Miejsca, które zajęły określone metody w rankingu, zależą w dużym stopniu od przyjętej do oceny skuteczności miary zmienności. Niektóre modele znajdują się wysoko według jednej miary, natomiast zajmują odległe miejsca według drugiej miary. Na przykład model skalarno-diagonalny był najbardziej skuteczny w zmniejszaniu ryzyka, jeżeli zmienność zabezpieczonego portfela była mierzona na podstawie kwadratów dziennych stóp zwrotu oraz dopiero dwunasty, jeżeli zmienność była mierzona na podstawie sumy kwadratów 15-minutowych stóp zwrotu. Z kolei modele z losowym parametrem zajmują odległe miejsca w rankingu, gdzie zastosowano dzienne stopy zwrotu oraz wysokie miejsca w przypadku, gdy zastosowano dane 15-minutowe. Występują również modele, jak na przykład model BEKK z rozkładem normalnym, t-Studenta, diagonalna postać modelu BEKK czy model RiskMetrics, które zajęły podobne miejsca w obu rankingach. Na podkreślenie zasługuje bardzo wysoka pozycja w obu rankingach (piąta i pierwsza) diagonalnej postaci modelu BEKK oraz odległa pozycja ogólnej postaci modelu BEKK. Najmniejszy szacunek średniego odchylenia standardowego stopy zwrotu zabezpieczonego portfela w przypadku, gdy zmienność zabezpieczonego port-

fela była mierzona na podstawie kwadratów dziennych stóp zwrotu, otrzymano dla modelu skalarno-diagonalnego oraz w przypadku, gdy zmienność była mierzona na podstawie sumy kwadratów 15-minutowych stóp zwrotu dla diagonalnej postaci modelu BEKK.

**TABELA 6.29. OCENA EFEKTYWNOŚCI WYBRANYCH METOD ESTYMACJI WSPÓŁCZYNNIKA ZABEZPIECZENIA DLA INDEKSU WIG20 DLA DWÓCH REALIZACJI ZMIENNOŚCI**

Metoda estymacji współczynnika zabezpieczenia	Kwadrat dziennej stopy zwrotu			Suma kwadratów 15-min stóp zwrotu		
	Średnie odchylenie standardowe	Redukcja ryzyka (w %)	Ranking	Średnie odchylenie standardowe	Redukcja ryzyka (w %)	Ranking
Brak zabezpieczenia (b = 0)	0,014458	0,00	–	0,013680	0,00	–
Zabezpieczenie naiwne (b = 1)	0,005792	59,94	19	0,009379	31,44	19
Zabezpieczenie MNK	0,005320	63,20	8	0,008793	35,72	12
BEKK	0,005337	63,09	15	0,008820	35,53	16
VAR-BEKK	0,005323	63,18	10	0,008804	35,64	14
VECM-BEKK	0,005322	63,19	9	0,008812	35,58	15
BEKK – rozkład t-Studenta	0,005346	63,02	16	0,008835	35,42	18
Diagonalny BEKK	0,005300	63,34	4	0,008678	36,56	1
Skalarno-diagonalny	0,005280	63,48	1	0,008793	35,72	11
DCC	0,005304	63,31	5	0,008792	35,73	10
DCC zintegrowany	0,005293	63,39	2	0,008822	35,51	17
Stałych współ. korelacji	0,005319	63,21	7	0,008795	35,71	13
Ruchoma macierz kowar.	0,005301	63,34	3	0,008783	35,80	9
Ruchoma macierz kowar. (k=25)	0,005363	62,91	18	0,008779	35,83	8
Wyrównywanie wykładnicze	0,005355	62,96	17	0,008777	35,84	7
RiskMetrics	0,005317	63,23	6	0,008748	36,05	5
Losowy parametr jako RW	0,005330	63,13	12	0,008757	35,93	6
Jak wyżej plus GARCH	0,005330	63,13	11	0,008765	36,20	2
Losowy parametr jako AR	0,005336	63,09	14	0,008727	36,11	4
Jak wyżej plus GARCH	0,005336	63,09	13	0,008740	36,11	3

W tabeli przedstawiono średnie odchylenia standardowe stóp zwrotu zabezpieczonych portfeli przy zastosowaniu dwóch miar zmienności. Redukcja ryzyka mierzona jest średnim odchyleniem standardowym stopy zwrotu w stosunku do portfela niezabezpieczonego.

ŹRÓDŁO: FISZEDER (2007A).



## WNIOSKI

Nie wszystkie dynamiczne metody zabezpieczania (to znaczy takie, które uwzględniają zmienność warunkowych wariancji, kowariancji lub współczynników beta) okazały się efektywniejsze niż zabezpieczenie MNK. Wyniki zależą w dużej mierze od własności instrumentów bazowych i kontraktów terminowych. Uproszczenie postaci modelu GARCH prowadzi na ogół do wzrostu skuteczności strategii zabezpieczających. Różnice w redukcji ryzyka, pomiędzy poszczególnymi modelami, są znacznie mniejsze dla indeksu WIG20 niż indeksu WIG-Budownictwo. Przy zabezpieczeniu instrumentu bazowego, dla którego jest notowany kontrakt terminowy (WIG20), uwzględnienie przy estymacji współczynnika zabezpieczenia zmieniających się wariancji i kowariancji warunkowych nie wpłynęło w istotny, z ekonomicznego punktu widzenia, sposób na wzrost efektywności strategii zabezpieczającej.

Wyniki przeprowadzonych testów statystycznych nie do końca są zgodne z wynikami badania skuteczności wybranych metod estymacji współczynnika zabezpieczenia. Znacznie lepsze rezultaty w poszukiwaniu metod, które będą lepiej zabezpieczały przed ryzykiem, daje analiza efektywności strategii zabezpieczających wewnątrz próby. Zastosowanie danych o wysokiej częstotliwości przy szacowaniu miar zmienności zabezpieczonego portfela, wpływa znacząco na ocenę skuteczności rozważanych metod estymacji współczynnika zabezpieczenia.

## ZAKOŃCZENIE

Powstanie modelu ARCH stanowiło kamień milowy w rozwoju ekonometrii finansowej. Przed jego wprowadzeniem modelowanie procesów finansowych dotyczyło przede wszystkim pierwszych momentów warunkowych. Jeżeli badano wyższe momenty szeregów czasowych, to najczęściej w sposób statyczny, nie uwzględniając dynamiki momentów warunkowych. Model GARCH jest jednym z najczęściej stosowanych w analizie finansowych szeregów czasowych. Pomimo obszernej literatury dotyczącej zarówno zagadnień teoretycznych, jak i aplikacji finansowych, nie wiadomo, w których zastosowaniach modele GARCH mają przewagę nad innymi modelami, które postaci modeli GARCH są najbardziej użyteczne w konkretnych zastosowaniach oraz nie jest jasne, dla jakich własności statystycznych finansowych szeregów czasowych modele GARCH są bardziej przydatne od innych modeli. W niniejszej pracy starano się odpowiedzieć na te pytania. Szczegółowe wnioski z przeprowadzonych badań dotyczące określonych parametryzacji modeli zawarto w podsumowaniach dotyczących poszczególnych analiz, dlatego poniżej przedstawiono jedynie ogólne uwagi i główne konkluzje.

Zaproponowano w literaturze dziesiątki różnych modyfikacji i rozszerzeń jednorównaniowego modelu GARCH. Liczba uogólnień jest tak duża, że znalezienie modelu, który najlepiej opisuje badany szereg czasowy jest zadaniem bardzo trudnym, a w wielu zastosowaniach praktycznych niecelowym. Wydaje się, że lepszym rozwiązaniem jest analizowanie wybranych modeli GARCH, które pozwalają uwzględnić określone charakterystyki szeregów czasowych, istotne w określonym zastosowaniu modelu.

W przypadku wielorównaniowych modeli GARCH wybór modelu zależy w pierwszej kolejności od liczby badanych szeregów. Jeżeli liczba szeregów jest duża, to najważniejszą charakterystyką modelu jest oszczędność parametryzacji i związana z tym łatwość estymacji. Wyboru modelu najlepiej opisującego szeregi stóp zwrotu dokonuje się dopiero spośród modeli łatwych do estymacji. Oszczędność parametryzacji można uzyskać jedynie przez uprosz-

czenie opisu badanych szeregów (przyjmując określone restrykcje lub założenia). Prostsze postacie modelu nie są w stanie wyjaśnić pewnych własności szeregów. Wpływ uproszczenia modelu na wyniki analizy zależy przede wszystkim od dwóch czynników. Po pierwsze od tego, czy pominięte własności są istotne lub też czy restrykcje są spełnione dla konkretnych stóp zwrotu. Po drugie, od dziedziny zastosowania modelu. Na przykład w analizie transmisji zmienności między aktywami istotne są powiązania między warunkowymi wariancjami, dlatego upraszczające specyfikacje, takie jak diagonalna i skalarna postać modelu BEKK czy model stałych współczynników korelacji są zdecydowanie niewystarczające.

W pracy pokazano, że wybór postaci modelu GARCH zależy przede wszystkim od rodzaju zastosowania modeli, miary, na podstawie której dokonuje się oceny i własności badanych szeregów finansowych. Niemożliwe jest jednoznaczne rekomendowanie postaci modeli do konkretnych zastosowań. Oczywiście na podstawie badania własności statystycznych można wskazać postacie, które mogą być potencjalnie najbardziej użyteczne. Na przykład jeżeli w danym szeregu występuje silna ujemna korelacja pomiędzy bieżącą stopą zwrotu a przyszłą zmiennością, to zastosowanie modeli, które opisują ten efekt, takich jak np. GJR-GARCH, EGARCH i TGARCH będzie prawdopodobnie bardziej efektywne. Jeżeli odrzucono hipotezę o stałości warunkowych współczynników korelacji, to modele, które pozwalają opisać ich zmienność, jak np. BEKK czy DCC będą prawdopodobnie bardziej skuteczne w aplikacjach finansowych.

W kolejnych rozdziałach dotyczących: prognozowania zmienności, prognozowania VaR, konstrukcji portfeli efektywnych i zabezpieczania przed ryzykiem starano się pokazać, że można na podstawie analizy wewnątrz próby dla tej samej miary, na podstawie której dokonuje się oceny poza próbą, wskazać postacie modeli, które będą prawdopodobnie lepiej zachowywały się w wybranych aplikacjach. Takie badanie wewnątrz próby ma większe szanse na wybór najlepszej parametryzacji niż analiza statystycznych własności szeregów czasowych i kryteriów informacyjnych.

Różne miary trafności wskazują na różne modele, na podstawie których konstruuje się najdokładniejsze prognozy zmienności. Prognozy konstruowane na podstawie modelu GARCH są bardziej trafne niż prognozy konstruowane na podstawie modeli zakładających stałą wariancję. Dalsze rozszerzanie modeli i badania powinny być ukierunkowane na wykorzystanie informacji powszechnie dostępnych na rynku niż formułowanie kolejnych parametryzacji, dążących do coraz lepszego dopasowania modelu do danych empi-

rycznych. Wykorzystanie dodatkowych informacji przy konstrukcji modelu GARCH lub estymacji jego parametrów nie zawsze prowadzi do wzrostu trafności prognoz zmienności. Wyniki zależą nie tylko od rodzaju informacji, ale również od sposobu ich wykorzystania. Przy wyborze najlepszego do prognozowania zmienności modelu ważna jest analiza własności wariancji badanych szeregów, ponieważ pozwala na wstępnie wyeliminować z dalszych badań niektóre specyfikacje modeli.

Żadna z metod szacowania VaR nie dała zadowalających wyników dla wszystkich poziomów tolerancji oraz zajmowanych przez inwestora pozycji. Zastosowanie podejścia z jednorównaniowym modelem GARCH do prognozowania wartości zagrożonej dla portfela akcji daje nie gorsze, a często nawet lepsze wyniki niż zastosowanie wielorównaniowych modeli GARCH. Wynik ten jest ważny z praktycznego punktu widzenia, ponieważ przy dużej liczbie aktywów estymacja parametrów większości specyfikacji wielorównaniowych modeli GARCH jest bardzo trudna lub wręcz niemożliwa.

Brak jednoznacznych wyników dotychczasowych badań w literaturze światowej był jednym z podstawowych powodów podjęcia badań dotyczących zależności między oczekiwaną stopą zwrotu a ryzykiem dla wybranych spółek i indeksów notowanych na GPW w Warszawie. Uzyskane szacunki dla modeli GARCH-M ze zmiennym parametrem oraz modelu z progowym efektem GARCH-M pozwoliły w odmienny sposób tłumaczyć rozbieżność wyników prowadzonych dotychczas analiz empirycznych, dotyczących zależności pomiędzy oczekiwaną stopą zwrotu a warunkową wariancją, przeprowadzonych z wykorzystaniem modelu GARCH-M ze stałym parametrem.

Estymacja współczynników beta na podstawie dwurównaniowego modelu VAR-GARCH pozwala uwzględnić w badaniu autokorelację stóp zwrotu, zmienność warunkowych wariancji i kowariancji stóp zwrotu, grube ogony rozkładów stóp zwrotu oraz zmienność współczynników beta. Korzyści z wykorzystania dwurównaniowego modelu VAR-GARCH nie ograniczają się wyłącznie do uzyskania efektywniejszych estymatorów, co można by otrzymać stosując jednorównaniowy model GARCH, ale polegają na opisaniu zmieniających się zależności między stopami zwrotu waloru a stopami zwrotu portfela rynkowego. Zastosowanie dwurównaniowego modelu VAR-GARCH w przykładzie empirycznym przy budowie portfela wpłynęło na znaczny wzrost efektywności procesu alokacji aktywów w porównaniu do portfela, przy konstrukcji którego wykorzystano tradycyjne metody estymacji parametrów modelu Sharpe'a.

Uwzględnienie zmieniających się w czasie wariancji i kowariancji stóp zwrotu przy budowie portfela wpływa z pewnymi wyjątkami na wzrost efek-

tywności alokacji aktywów. Zaobserwowane w pracy różnice nie były istotne z ekonomicznego punktu widzenia, jednakże wyniki innych badań autora sugerują, że stosowanie modeli GARCH do opisu wariancji i kowariancji stóp zwrotu przy budowie portfela jest jak najbardziej celowe. Uproszczenie postaci warunkowej macierzy kowariancji prowadzi na ogół do zmniejszenia szacunków odchyłeń standardowych portfeli o minimalnej wariancji, często na przekór wynikom testów. Wniosek ten jest ważny z praktycznego punktu widzenia, ponieważ estymacja uproszczonych postaci wielorównaniowego modelu GARCH jest znacznie łatwiejsza.

Wyniki badań wskazują na bardzo ograniczone możliwości zastosowań modeli GARCH w konstrukcji i testowaniu modeli CAPM i APT. Zaletą zastosowania modeli GARCH jest możliwość testowania różnych specyfikacji i restrykcji dla modeli CAPM i APT z uwzględnieniem zmiennych wariancji i kowariancji stóp zwrotu aktywów. Jednakże ze względu na złożoność estymacji parametrów modeli GARCH, jak dotąd istniejące specyfikacje modeli mają ograniczone zastosowanie w testach CAPM i APT. Analiza musi być przeprowadzona dla niedużej liczby portfeli. Słabością procedur testowania modeli APT i CAPM z wykorzystaniem modeli czynnikowych jest szacowanie premii za ryzyko na podstawie jednorównaniowych modeli GARCH-M. Wyniki badań pokazują, że analizowana w ten sposób zależność pomiędzy oczekiwaną stopą zwrotu a wariancją warunkową nie jest istotna statystycznie.

Wyceny opcji konstruowane na podstawie modeli GARCH są trafniejsze niż wyceny konstruowane na podstawie modelu Blacka i Scholesa. Zastosowanie modeli GARCH pozwala wyjaśnić większość obciążeń modelu Blacka i Scholesa.

Nie wszystkie dynamiczne metody zabezpieczania uwzględniające zmienność warunkowych wariancji, kowariancji lub współczynników beta okazały się efektywniejsze niż tradycyjne zabezpieczenie MNK. Wyniki zależą w dużej mierze od własności instrumentów bazowych i kontraktów terminowych. Uproszczenie postaci modelu GARCH prowadzi na ogół do wzrostu skuteczności strategii zabezpieczających. Przy zabezpieczeniu instrumentu bazowego, dla którego jest notowany kontrakt terminowy, uwzględnienie przy estymacji współczynnika zabezpieczenia zmieniających się wariancji i kowariancji warunkowych nie wpływa w istotny sposób na wzrost efektywności strategii zabezpieczających.

Zastosowanie modeli GARCH w takich aplikacjach jak prognozowanie zmienności, prognozowanie VaR, konstrukcja portfeli efektywnych, wycena opcji daje lepsze wyniki niż modele zakładające stałe wariancje i kowarian-

cje. Wyjątkiem jest hedging, gdy portfel akcji jest zabezpieczany kontraktem futures, którego instrumentem bazowym jest zabezpieczany portfel. Przyczyną odmiennych wyników są zbliżone własności i podobne zachowanie takiego portfela i kontraktu terminowego, co powoduje, że współczynnik beta wykorzystywany w zabezpieczaniu jest stabilny i bliski jedności.

W opracowaniu wskazano postacie modeli GARCH, które można rekomendować jako jedne z najbardziej użytecznych: w prognozowaniu zmienności – model GARCH, szacowany na podstawie przeskalowanego prawdziwego zakresu zmiany, w prognozowaniu VaR portfela akcji dla poziomu tolerancji 0,01 – jednorównaniowy model GARCH, w konstrukcji portfeli efektywnych dla większej liczby aktywów – modele skalarno-diagonalny i zintegrowany, w wycenie opcji – model GJR-GARCH, w zabezpieczaniu przed ryzykiem – zintegrowany model DCC. Należy jednakże podkreślić, że w przypadku zastosowania innych miar oceny lub szeregów o innych własnościach, może się okazać, że te postacie nie będą miały już przewagi nad innymi specyfikacjami.

Zaproponowano nowe parametryzacje modeli GARCH: jednorównaniowy i wielorównaniowy model z progowym efektem GARCH-M, wielorównaniowy model GARCH-M, w którym rynkowa cena ryzyka jest opisana za pomocą procesu błędzenia przypadkowego, rozszerzona postać modelu APT z czynnikowym modelem GARCH, która pozwala uwzględnić niewyjaśnioną zmienność warunkowych wariancji i kowariancji stóp zwrotu aktywów. Przedstawiono nowe procedury estymacji: model GARCH szacowany na podstawie przeskalowanego prawdziwego zakresu zmiany, premie za ryzyko i wariancje warunkowe czynników szacowane na podstawie modelu z progowym efektem GARCH-M zamiast na podstawie klasycznego modelu GARCH-M w pierwszym kroku estymacji modelu APT z czynnikowym modelem GARCH. W pracy zaproponowano również kilka nowych klasyfikacji wielorównaniowych modeli GARCH.

W niektórych zastosowaniach wskazano również relatywnie proste metody, pozwalające uzyskać lepsze wyniki niż wykorzystanie modeli GARCH. Na przykład w wycenie opcji – podejście, stosowane przez praktyków rynku, polegające na podstawieniu do modelu Blacka i Scholesa zmienności implikowanej, wyznaczonej dla wcześniejszego okresu, w zabezpieczaniu przed ryzykiem - metoda ruchomej macierzy kowariancji, dla której wyboru stałej wygładzania dokonywano dla każdego okresu na podstawie próbki wstępnej.

W pracy modelowano również długą pamięć procesów finansowych za pomocą modeli ARFIMA-FIGARCH, sezonowość i efekt dnia tygodnia za

pomocą rozszerzonych postaci modeli GARCH, analizowano zależności między rynkiem akcji w Warszawie a wybranymi rynkami akcji na świecie oraz weryfikowano występowanie efektu zarażania za pomocą zaproponowanego testu konstruowanego na podstawie wielorównaniowych modeli GARCH.

Niektóre z poruszanych zagadnień były rozważane po raz pierwszy w Polsce, jak np. weryfikacja modeli CAPM i APT z zastosowaniem wielorównaniowych modeli GARCH. Inne z kolei zostały w znacznym stopniu rozszerzone przez stosowanie szerszej klasy modeli. Badań dotyczących zastosowań różnych specyfikacji wielorównaniowych modeli GARCH dla dużej liczby aktywów, w takich zastosowaniach jak analiza portfelowa czy prognozowanie VaR, jest bardzo mało, nawet w literaturze światowej. Duży nacisk położono na powiązanie uzyskanych wyników z analizą własności warunkowych wariancji badanych procesów. Ten aspekt badań jest najczęściej zaniedbywany w literaturze światowej, a pozwala na sformułowanie szerszych wniosków dotyczących zasadności i skuteczności rozważanych modeli.

Na tle rozważań zawartych w pracy można wskazać zagadnienia wymagające dalszych badań. Należy do nich z pewnością formułowanie nowych parametryzacji wielorównaniowych modeli GARCH oraz metod estymacji ich parametrów. Istniejące parametryzacje na ogół nie dają zadowalających wyników w przypadku modelowania i prognozowania dużej liczby szeregów czasowych. Brak takich specyfikacji jest szczególnie widoczny w takich zastosowaniach, jak analiza portfelowa, modele rynku kapitałowego, szacowanie VaR. Niezbędne są dalsze prace nad własnościami estymatorów MNW i quasi-MNW w przypadku bardziej złożonych specyfikacji modeli GARCH oraz ewentualnego złagodzenia koniecznych do wyprowadzenia własności warunków dla parametryzacji, dla których takie własności ustalono. W pracy opierano wnioski przede wszystkim na punktowych ocenach zmienności, warunkowej korelacji oraz innych miar mających zastosowanie w konkretnych aplikacjach finansowych bez bezpośredniego ujęcia niepewności związanej z estymacją parametrów modeli. Uwzględnienie tej niepewności jest jak na razie zadaniem trudnym lub niemożliwym poza bayesizmem, dlatego konieczny jest dalszy rozwój metod wnioskowania statystycznego. Większy nacisk powinien również zostać położony na analizę przyczyn zmienności i wykorzystanie ich w prognozowaniu zmienności i innych zastosowaniach finansowych.

## LITERATURA

- Adamczak A., Majerowska E., (2002), *Is the Warsaw Stock Exchange Mature Enough to Analyse the Returns by the Models Known on the Developed Markets?*, *East European Transition and EU Enlargement, A Quantitative Approach*, Physica-Verlag, A Springer-Verlag Company, Heidelberg.
- Akgiray V., (1989), *Conditional Heteroscedasticity in Time Series of Stock Returns: Evidence and Forecasts*, *Journal of Business*, 62, 55–80.
- Alexander C., (2001), *Market Models. A Guide to Financial Data Analysis*, John Wiley & Sons, Chichester.
- Alexander C., Chibumba A., (1996), *Multivariate Orthogonal Factor GARCH*, University of Sussex Discussion Papers in Mathematics.
- Andersen T. G., Bollerslev T., (1997), *Intraday Periodicity and Volatility Persistence in Financial Markets*, *Journal of Empirical Finance*, 4, 115–158.
- Andersen T. G., Bollerslev T., (1998), *Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models Do Provide Accurate Forecasts*, *International Economic Review*, 39, 4, 885–905.
- Andersen T. G., Bollerslev T., Christoffersen P. F., Diebold F. X., (2006), *Volatility and Correlations Forecasting*, [w:] Elliott G., Granger C. W. J., Timmermann A. (red.), *Handbook of Economic Forecasting*, Vol. 1, North-Holland, Elsevier B. V, Amsterdam.
- Andersen T. G., Bollerslev T., Diebold F. X., Labys P., (2000), *Great Realizations*, *Risk*, March, 105–108.
- Andersen T. G., Bollerslev T., Diebold F. X., Labys P., (2001), *Applications and Case Studies – The Distribution of Exchange Rate Volatility*, *Journal of the American Statistical Association*, 96, 42–55.
- Andersen T. G., Bollerslev T., Diebold F. X., Labys P., (2003), *Modelling and Forecasting Realized Volatility*, *Econometrica*, 71, 529–626.
- Andersen T. G., Bollerslev T., Lange S., (1999), *Forecasting Financial Market Volatility: Sample Frequency vis-à-vis Forecast Horizon*, *Journal of Empirical Finance*, 6, 457–477.



- Angelidis T., Benos A., Degiannakis S., (2004), *The Use of GARCH Models in VaR Estimation*, *Statistical Methodology*, 1 (2), 105–128.
- Angelidis T., Degiannakis S., (2006), *Backtesting VaR Models: An Expected Shortfall Approach*, SSRN, Working Paper.
- Ansell J. Wharton F., (1995), *Risk: Analysis, Assessment and Management*, John Wiley and Sons.
- Arrow K. J., (1979), *Eseje z teorii ryzyka*, PWN, Warszawa.
- Asai M., McAleer M., Yu J., (2006), *Multivariate Stochastic Volatility: A Review*, *Econometric Reviews*, 25, 2–3, 145–175.
- Baba Y., Engle R. F., Kraft D. F., Kroner K. F., (1990), *Multivariate Simultaneous Generalized ARCH*, Department of Economics, University of California at San Diego, Working Paper.
- Bachelier L., (1900), *Theorie de la Speculation*, *Annales de l'Ecole Normale Supérieure*, 17, Paris.
- Backus D. K., Gregory A. W., (1993), *Theoretical Relations between Risk Premiums and Conditional Variances*, *Journal of Business & Economic Statistics*, 11, 177–185.
- Baillie R. T., Bollerslev T., (1989), *The Message in Daily Exchange Rates: A Conditional Variance Tale*, *Journal of Business and Economic Statistics*, 7, 297–305.
- Baillie R. T., Bollerslev T., (1990), *A Multivariate Generalized ARCH Approach to Modeling Risk Premia in Foreign Exchange Markets*, *Journal of International Money and Finance*, 9, 309–324.
- Baillie R. T., Bollerslev T., (1992), *Prediction in Dynamic Models with Time – Dependent Conditional Variances*, *Journal of Econometrics*, 52, 91–113.
- Baillie R. T., Bollerslev T., Mikkelsen H. O., (1996), *Fractionally Integrated Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*, *Journal of Econometrics*, 74, 3–30.
- Baillie, R. T., Myers, R. J., (1991), *Bivariate GARCH Estimation of the Optimal Commodity Futures Hedge*, *Journal of Applied Econometrics*, 6, 109–124.
- Bakshi G., Cao C., Chen Z., (1997), *Empirical Performance of Alternative Option Pricing Models*, *The Journal of Finance*, 52, 2003–2049.
- Ball C., Roma A., (1994), *Stochastic Volatility Option Pricing*, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 29, 589–607.
- Banerjee A., Urga G., (2005), *Modeling Structural Breaks, Long Memory and Stock Market Volatility: An Overview*, *Journal of Econometrics*, 129, 1–34.

- Barndorff-Nielsen O. E., Shephard N., (2004), *Econometric Analysis of Realized Covariation: High Frequency Based Covariance, Regression and Correlation in Financial Economics*, *Econometrica*, 72, 885–925.
- Barone-Adesi G., Engle R. F., Mancini L., (2008), *A GARCH Option Pricing Model with Filtered Historical Simulation*, *Review of Financial Studies*, 21(3), 1223–1258.
- Bauwens L., Laurent S., Rombouts J. V. K., (2006), *Multivariate GARCH Models: A Survey*, *Journal of Applied Econometrics*, 21, 1, 79–110.
- Bekaert G., Harvey C., (1997), *Emerging equity market volatility*, *Journal of Financial Economics*, 43,1, 29–77.
- Bekaert, G., Wu, G., (2000), *Asymmetric Volatility and Risk in Equity Markets*, *Review of Financial Studies*, 13, 1–42.
- Bera A. K., Garcia P., Roh J-S., (1997), *Estimation of Time-Varying Hedge Ratios for Corn and Soybeans: BGARCH and Random Coefficient Approaches*, OFOR Working Paper, No. 97–06.
- Bera A. K., Higgins M. L., (1993), *ARCH Models: Properties, Estimation and Testing*, *Journal of Economic Surveys*, 7, 305–366.
- Bera A. K., Kim S., (2002), *Testing constancy of correlation and other specifications of the BGARCH model with an application to international equity returns*, *Journal of Empirical Finance*, 9, 171–195.
- Berkes I., Horvath L., Kokoszka P., (2003), *GARCH Processes: Structure and Estimation*, *Bernoulli*, 9, 201–228.
- Berkowitz J., (1999), *Evaluating the Forecasts of Risk Models*, *Board of Governors of the Federal Reserve System*, Finance and Economics Discussion Series No. 1999–11.
- Bernstein J., (1996), *Cykle giełdowe*, WIG-Press, Warszawa.
- Bertero E., Mayer C., (1990), *Structure and Performance: Global Interdependence of Stock Markets Around the Crash of October 1987*, *European Economic Review*, 34, 1155–1180.
- Best M. J., Grauer R. R., (1991), *On the Sensitivity of Mean-Variance-Efficient Portfolios to Changes in Asset Means: Some Analytical and Computational Results*, *Review of Financial Studies*, 4, 315–342.
- Best P., (2000), *Wartość narażona na ryzyko. Obliczanie i wdrażanie modelu VAR*, Oficyna Ekonomiczna, Kraków.
- Bhardwaj R. K., Brooks L. D., (1993), *Dual Betas from Bull and Bear Markets: Reversal of the Size Effect*, *The Journal of Financial Research*, 16, 269–283.
- Billio M., Caporin M., Gobbo M., (2006), *Flexible Dynamic Conditional Cor-*

- relation Multivariate GARCH for Asset Allocation*, Applied Financial Economics Letters, 2, 123–130.
- Black F., Scholes M., (1973), *The Pricing of Options and Corporate Liabilities*, Journal of Political Economy, 81, 637–654.
- Blair B., Poon S-H., Taylor S. J., (2001), *Forecasting S&P 100 Volatility: The Incremental Information Content of Implied Volatilities and High Frequency Index Returns*, Journal of Econometrics, 105, 5–26.
- Bodie Z., Merton R. C., (1995), *The Information Role of Asset Prices: The Case of Implied Volatility*, [w:] Crane D. B., Froot K. A., Mason S. P., Perold A. F., Merton R. C., Bodie Z., Sirri E. R., Tufano P. (red.), *The Global Financial System: A Functional Perspective*, Harvard Business School Press.
- Bodurtha J. N., Mark N. C., (1991), *Testing the CAPM with Time-Varying Risk and Returns*, Journal Finance, 46, 1485–1505.
- Bollerslev T., (1986), *Generalized Autoregressive Conditional Heteroskedasticity*, Journal of Econometrics, 31, 307–327.
- Bollerslev T., (1987), *A Conditionally Heteroskedastic Time Series Model for Speculative Prices and Rates of Return*, Review of Economics and Statistics, 69, 542–547.
- Bollerslev T., (1990), *Modelling the Coherence in Short-Run Nominal Exchange Rates: A Multivariate Generalized ARCH Approach*, Review of Economics and Statistics, 72, 498–505.
- Bollerslev T., Chou R. Y., Kroner K. F., (1992), *ARCH Modelling in Finance: A Review of the Theory and Empirical Evidence*, Journal of Econometrics, 52, 5–59.
- Bollerslev T., Engle R. F., Nelson D. B., (1994), *ARCH Models*, [w:] Engle R. F., McFadden D., (red.), *Handbook of Econometrics*, Vol. 4, Elsevier Science B. V., Amsterdam.
- Bollerslev T., Engle, R. F., Wooldridge, J. M., (1988), *A Capital Asset Pricing Model with Time-Varying Covariances*, Journal of Political Economy, 96, 1988, 116–131.
- Bollerslev T., Ghysels E., (1996), *Periodic Autoregressive Conditional Heteroscedasticity*, Journal of Business and Economic Statistics, 14, 139–151.
- Bollerslev T., Mikkelsen H. O., (1999), *Long-Term Equity Anticipation Securities and Stock Market Volatility Dynamics*, Journal of Econometrics, 92, 75–99.
- Bollerslev T., Wooldridge J. M., (1992), *Quasi-Maximum likelihood Estimation and Inference in Dynamic Models with Time-Varying Covariances*, Econometric Reviews, 11, 143–179.

- Bollerslev T., Zhou H., (2006), *Volatility Puzzles: A Simple Framework for Gauging Return-Volatility Regressions*, Journal of Econometrics, 131, 123–150.
- Bolt T., Miłobędzki P., (2002), *Weryfikacja modelu CAPM dla giełdy warszawskiej, Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a polski rynek*, Prace naukowe AE we Wrocławiu, nr 952, Wrocław.
- Bond S. A., Satchell S. E., (2006), *Asymmetry, Loss Aversion, and Forecasting*, Journal of Business, 79, No. 4, 1809–1830.
- Boness A. J., (1964), *Elements of a Theory of Stock Option Value*, Journal of Political Economy, 72, 163–175.
- Borensztein E., Gelos R. G., (2000), *A Panic Prone Pack? The Behavior of Emerging Market Mutual Funds*, IMF Working Paper, WP/00/198.
- Bos C., Mahieu R. J., van Dijk H. K., (2000), *Daily Exchange Rate Behaviour and Hedging of Currency Risk*, Journal of Applied Econometrics, 15, 671–696.
- Boussama F., (2000), *Asymptotic Normality for the Quasi-Maximum Likelihood Estimator of a GARCH Model*, C. R. Acad. Sci. Paris, Serie I 331, 81–84.
- Box G. E. P., Jenkins G. M., (1983), *Analiza szeregów czasowych*, PWN, Warszawa.
- Boyer B. H., Gibson M. S., Loretan M., (1997), *Pitfalls in Tests for Changes in Correlations*, Board of the Governors of the Federal Reserve System, International Finance Discussion Paper 597.
- Brailsford T. J., Faff R. W., (1996), *An Evaluation of Volatility Forecasting Techniques*, Journal of Banking and Finance, 20, 419–438.
- Braun P. A., Nelson D. B., Sunier A. M., (1995), *Good News, Bad News, Volatility, and Betas*, The Journal of Finance, 50, 1575–1603.
- Breen W., Glosten L. R., Jagannathan R., (1989), *Economic Significance of Predictable Variations in Stock Index Returns*, Journal of Finance, 44, 1177–1189.
- Brockwell P. J., Davis R. A., (1996), *Introduction to Time Series and Forecasting*, Springer-Verlag, New York.
- Brooks C., Henry O. T., Persaud G., (2002), *The Effect of Asymmetries on Optimal Hedge Ratios*, Journal of Business, 75, 333–352.
- Brooks C., Persaud G., (2002), *Model Choice and Value-at-Risk Performance*, Financial Analysts Journal, 58, 5, 87–98.
- Brooks R. D., Faff R. W., McKenzie M. D., (1998), *Time-Varying Beta Risk of Australian Industry Portfolios: A Comparison of Modelling Techniques*, Australian Journal of Management, 23, No. 1, 1–22.

- Brunetti C., Gilbert C., (2000), *Bivariate FIGARCH and Fractional Cointegration*, *Journal of Empirical Finance*, 7, 509–530.
- Bruzda J., (2007), *Procesy nieliniowe i zależności długookresowe w ekonomii. Analiza kointegracji nieliniowej*, UMK, Toruń.
- Brzeszczyński J., Kelm R., (2002), *Ekonometryczne modele rynków finansowych. Modele kursów giełdowych i kursów walutowych*, WIG–Press, Warszawa.
- Byrka-Kita K., Rozkrut D., (2004), *Testowanie modelu CAPM na polskim rynku kapitałowym*, *Rynek Kapitałowy, Skuteczne inwestowanie*, cz. I, Uniwersytet Szczeciński, Szczecin.
- Calvo G. A., Mendoza E. G., (2000), *Rational Contagion and the Globalization of Securities Markets*, *Journal of International Economics*, 51, 79–114.
- Campa J. M., Chang P. H. K., (1998), *The Forecasting Ability of Correlations Implied in Foreign Exchange Options*, *Journal of International Money and Finance*, 17, 855–880.
- Campbell J. Y., (1987), *Stock Returns and the Term Structure*, *Journal of Financial Economics*, 18, 373–399.
- Campbell J. Y., Hentschel L., (1992), *No News is Good News: An Asymmetric Model of Changing Volatility in Stock Returns*, *Journal of Financial Economics*, 31, 281–318.
- Campbell J. Y., Lo A. W., MacKinlay, A. C., (1997), *The Econometrics of Financial Markets*, Princeton University Press.
- Canina L., Figlewski S., (1993), *The Informational Content of Implied Volatility*, *Review of Financial Studies*, 6, 3, 659–681.
- Caporale G. M., Pittis N., Spagnolo N., (2002), *Testing for Causality-in-Variance: an Application to the East Asian Markets*, *International Journal of Finance and Economics* 7, 3, 235–245.
- Cappiello L., Engle R. F., Sheppard K., (2006), *Asymmetric Dynamics in the Correlations of Global Equity and Bond Returns*, *Journal of Financial Econometrics*, Oxford University Press, 4 (4), 537–572.
- Carr P., Madan D., (1998), *Towards a Theory of Volatility Trading*, [w:] Jarrow R., (red.) *Volatility: New Estimation Techniques for Pricing Derivatives*, Risk Books, Londyn.
- Cecchetti S. G., Cumby R. E., Figlewski S., (1988), *Estimation of Optimal Hedge*, *Review of Economics and Statistics*, 50, 623–630.
- Chan K. C., Karolyi G. A., Stulz R. M., (1992), *Global Financial Markets and the Risk Premium on U. S. Equity*, *Journal of Financial Economics*, 32, 137–168.

- Chan K., Chan K. C., Karolyi G. A., (1991), *Intraday Volatility in the Stock Index and Stock Index Futures Markets*, Review of Financial Studies, 4, 657–684.
- Chan L. K. C., Karceski J., Lakonishok J., (1999), *On Portfolio Optimization: Forecasting Covariances and Choosing the Risk Model*, Review of Financial Studies, 12, 937–974.
- Chen S. N., (1982), *An Examination of Risk-Return Relationship in Bull and Bear Markets Using Time-Varying Security Betas*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 17, 265–286.
- Chesnay F., Jondeau E., (2001), *Does Correlation Between Stock Returns Really Increase During Turbulent Periods?*, Economic Notes, 30, 53–80.
- Cheung Y. W. Ng L. K., (1996), *A Causality-in-Variance Test and its Application to Financial Market Prices*, Journal of Econometrics, 72, 33–48.
- Chopra V. K., Ziemba W. T., (1993), *The Effect of Errors in Means, Variances and Covariances on Optimal Portfolio Choice*, Journal of Portfolio Management, 19, 6–11.
- Chou R., (1988), *Volatility Persistence and Stock Valuations: Some Empirical Evidence Using GARCH*, Journal of Applied Econometrics, 3, 279–294.
- Chou R., Engle R. F., Kane A., (1992), *Measuring Risk Aversion from Excess Returns on a Stock Index*, Journal of Econometrics, 52, 201–224.
- Christensen B. J., Prabhala N. R., (1998), *The Relation Between Implied and Realized Volatility*, Journal of Financial Economics, 50, 125–150.
- Christiansen C., (1999), *Value at Risk Using the Factor-ARCH Model*, Journal of Risk, 1, 2, 65–87.
- Christie A. A., (1982), *The Stochastic Behaviour of Common Stock Variances: Value, Leverage and Interest Rate Effects*, Journal of Financial Economics, 10, 407–432.
- Christoffersen P. F., (1998), *Evaluating Interval Forecasts*, International Economic Review, 39, 841–862.
- Christoffersen P. F., Diebold F. X., (1997), *Optimal Prediction under Asymmetric Loss*, Econometric Theory, 13, 808–17.
- Christoffersen P. F., Diebold F. X., (2000), *How Relevant is Volatility Forecasting for Financial Risk Management?*, Review of Economics and Statistics, 82, 12–22.
- Christoffersen P. F., Hahn J., Inoue A., (2001), *Testing and Comparing Value-at-Risk Measures*, Journal of Empirical Finance, 8, 325–342.
- Christoffersen P. F., Jacobs K., (2004), *Which Volatility Model for Option Valuation?*, Management Science, 50, 9, 1204–1221.

- Chung, C. F., (1999), *Estimating the Fractionally Integrated GARCH Model*, National Taiwan University, Working Paper.
- Cochrane J., (1999), *New Facts in Finance*, *Economic Perspectives*, 23, 36–58.
- Comte F., Lieberman O., (2000), *Second Order Noncausality in Multivariate GARCH Processes*, *Journal of Time Series Analysis*, 21, 535–557.
- Comte F., Lieberman O., (2003), *Asymptotic Theory for Multivariate GARCH Processes*, *Journal of Multivariate Analysis*, 84, 61–84.
- Connor G., Korajczyk R., (1986), *Performance Measurement with the Arbitrage Pricing Theory*, *Journal of Financial Economics*, 15, 373–394.
- Corsetti G., Pericoli M., Sbracia M., (2001), *Correlation Analysis of Financial Contagion: What One Should Know Before Running a Test*, Yale Economic Growth Center Discussion Paper No. 822, Yale University.
- Cox J., (1975), *Notes on Option Pricing I: Constant Elasticity of Variance Diffusions*, Working Paper, Stanford University.
- Cumby R., Figlewski S., Hasbrouck J., (1993), *Forecasting Volatility and Correlations with EGARCH Models*, *Journal of Derivatives*, Winter, 51–63.
- Cuthbertson K., (1996), *Quantitative Financial Economics. Stocks, Bonds and Foreign Exchange*, John Wiley & Sons.
- Daniel K., Marshall D., (1997), *Consumption Based Modelling of Long-Horizon Returns*, *Macroeconomic Dynamics*, 1, 452–484.
- Danielsson J., (2002), *The Emperor Has No Clothes: Limits to Risk Modelling*, *Journal of Banking and Finance*, 26, 1273–1296.
- David A., Veronesi P., (2008), *Inflation and Earnings Uncertainty and Volatility Forecasts: A Structural Form Approach*, University of Calgary – Haskayne School of Business Working Paper.
- Davidson J., (2004), *Moment and Memory Properties of Linear Conditional Heteroscedasticity Models, and a New Model*, *Journal of Business and Economic Statistics*, 22, 1, 16–29.
- Davidson R., MacKinnon J. G., (1981), *Several Tests for Model Specification in the Presence of Alternative Hypotheses*, *Econometrica*, 49, 781–793.
- Day T. E., Lewis C. M., (1992), *Stock Market Volatility and the Information Content of Stock Index Options*, *Journal of Econometrics*, 52, 267–287.
- De Santis G., Gerard B., (1997), *International Asset Pricing and Portfolio Diversification with Time-Varying Risk*, *The Journal of Finance*, 52, 1881–1912.
- De Santis G., Gerard B., (1998), *How Big Is the Premium for Currency Risk?*, *Journal of Financial Economics*, 49, 375–412.

- Demos A., Sentana E., (1998), *Testing for GARCH Effects: A One-Sided Approach*, Journal of Econometrics, 86, 97–127.
- Dębski W., (2007), *Rynek finansowy i jego mechanizmy. Podstawy teorii i praktyki*, PWN, Warszawa.
- Diebold F. X., (1986), *Modelling the Persistence of Conditional Variances: A Comment*, Econometric Reviews, 5, 51–56.
- Diebold F. X., Gunther T. A., Tay A. S., (1998), *Evaluating Density Forecasts with Applications to Financial Risk Management*, International Economic Review, 39, 863–883.
- Diebold F. X., Hahn J., Tay A. S., (1999), *Multivariate Density Forecast Evaluation and Calibration in Financial Risk Management: High-Frequency Returns on Foreign Exchange*, Review of Economics and Statistics, 81, 661–673.
- Diebold F. X., Mariano R. S., (1995), *Comparing Predictive Accuracy*, Journal of Business and Economic Statistics, 13, 253–263.
- Diebold F. X., Nerlove M., (1989), *The Dynamics of Exchange Rate Volatility: A Multivariate Latent Factor ARCH Model*, Journal of Applied Econometrics, 4, 1–21.
- Diebold F. X., Yilmaz K., (2008), *Macroeconomic Volatility and Stock Market Volatility*, NBER Working Paper No. W14269.
- Dimson E., Marsh P., (1990), *Volatility Forecasting Without Data – Snooping*, Journal of Banking and Finance, 14, 399–421.
- Ding Z., Engle R. F., (2001), *Large Scale Conditional Covariance Matrix Modeling, Estimation and Testing*, Academia Economic Papers, 29, 2, 157–184.
- Ding Z., Granger C. W. J., (1996), *Modeling Volatility Persistence of Speculative Returns: A New Approach*, Journal of Econometrics, 73, 185–215.
- Ding Z., Granger C. W. J., Engle R. F., (1993), *A Long Memory Property of Stock Market Returns and a New Model*, Journal of Empirical Finance, 1, 83–106.
- Doman M., (2004), *Prognozowanie zmienności polskich indeksów giełdowych za pomocą modeli GARCH przy użyciu danych wysokiej częstotliwości, Ryunki finansowe – prognozy a decyzje*, Acta Universitatis Lodziensis, Folia Oeconomica, 177, Uniwersytet Łódzki, Łódź.
- Doman R. (2006), *Measuring Conditional Dependence of Polish Financial Returns, Dynamic Econometric Models*, Vol. 7, UMK, Toruń.
- Doman, M., Doman, R., (2004), *Ekonometryczne modelowanie dynamiki polskiego rynku finansowego*, AE w Poznaniu, Poznań.
- Domowitz I., Hakkio C., (1985), *Conditional Variance and the Risk Premium*



- in the Foreign Exchange Market*, Journal of International Economics, 19, 47–66.
- Drazen A., (1999), *Political Contagion in Currency Crisis*, NBER Working Paper, No. 7211.
- Drost F. C., Klaassen C., (1997), *Efficient Estimation in Semiparametric GARCH Models*, Journal of Econometrics, 81, 193–221.
- Duan J. C., (1995), *The GARCH Option Pricing Model*, Mathematical Finance, 5, 13–32.
- Duan J. C., (1999), *Conditionally Fat-Tailed Distributions and the Volatility Smile in Options*, Working Paper, Hong Kong University of Science and Technology, Hong Kong.
- Duan J. C., Gauthier G., Simonato J., (1999), *An Analytical Approximation for the GARCH Option Pricing Model*, Journal of Computational Finance, 2, 75–116.
- Duan J. C., Zhang H., (2001), *Pricing Hang Seng Index Options around the Asian Financial Crisis – A GARCH Approach*, Journal of Banking and Finance, 25, 1989–2014.
- Duchesne P., Lalancette S., (2003), *On Testing for Multivariate ARCH Effects in Vector Time Series Models*, The Canadian Journal of Statistics, 31, 275–292.
- Dziawgo D., (1998), *Credit-rating. Ryzyko i obligacje na międzynarodowym rynku finansowym*, PWN, Warszawa.
- Elie L., Jeantheau T., (1995), *Estimation in Conditionally Heteroskedastic Models*, C. R. Acad. Sci. Paris, Serie I 320, 1255–1258.
- Elton E. J., Gruber M. J., (1997), *Modern Portfolio Theory, 1950 to Date*, Journal of Banking and Finance, 21, 1743–1759.
- Elton E. J., Gruber M. J., (1998), *Nowoczesna teoria portfelowa i analiza papierów wartościowych*, WIG-Press, Warszawa.
- Engel C., Frankel J. A., Froot K. A., Rodrigues A. P., (1995), *Tests of Conditional Mean-Variance Efficiency of the U.S. Stock Market*, Journal of Empirical Finance, 2, 3–18.
- Engle R. F., (1982), *Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimates of the Variance of the United Kingdom Inflation*, Econometrica, 50, 987–1008.
- Engle R. F., (1987), *Multivariate ARCH with Factor Structures-Cointegration in Variance. Discussion Paper 87*, University of California, San Diego.
- Engle R. F., (2000), *The Econometrics of Ultra – High – Frequency Data*, Econometrica, 68, 1–22.

- Engle R. F., (2002), *Dynamic Conditional Correlation – A Simple Class of Multivariate GARCH Models*, Journal of Business and Economic Statistics, 20, 339–350.
- Engle R. F., (2007), *High Dimension Dynamic Correlations, Prepared for a Festschrift for David Hendry*, Oxford University.
- Engle R. F., Bollerslev T., (1986), *Modelling the Persistence of Conditional Variances*, Econometric Reviews, 5, 1–87.
- Engle R. F., Colacito R., (2006), *Testing and Valuing Dynamic Correlations for Asset Allocation*, Journal of Business and Economic Statistics, 24, 2, 238–253.
- Engle R. F., González-Rivera G., (1991), *Semiparametric ARCH Model*, Journal of Business and Economic Statistics, 9, 345–360.
- Engle R. F., Hong C-H., Kane A., Noh J., (1993), *Arbitrage Valuation of Variance Forecasts with Simulated Options*, [w:] Chance D. M., Trippi R. R. (red.), *Advances in Futures and Options Research JAI Press*: Greenwich, Connecticut.
- Engle R. F., Kelly B., (2008), *Dynamic Equicorrelation, Working Paper*, Stern School of Business, New York.
- Engle R. F., Kozicki S., (1993), *Testing for Common Features*, Journal of Business and Economic Statistics, 11, 369–380.
- Engle R. F., Kroner K. F., (1995), *Multivariate Simultaneous Generalized ARCH*, Econometric Theory, 11, 122–150.
- Engle R. F., Lee G. G. J., (1999), *A Long-run and Short-run Component Model of Stock Return Volatility*, [w:] Engle R. F., White H., (red.), *Cointegration, Causality, and Forecasting: A Festschrift in Honor of Clive W. J. Granger*, Oxford University Press, Oxford.
- Engle R. F., Lilien D. M., Robins R. P., (1987), *Estimating Time Varying Risk Premia in the Term Structure: The ARCH-M Model*, Econometrica, 55, 391–407.
- Engle R. F., Manganelli S., (2004), *CAViaR: Conditional Autoregressive Value at Risk by Regression Quantiles*, Journal of Business & Economic Statistics, 22, 367–381.
- Engle R. F., Mezrich J., (1996), *GARCH for Groups*, Risk, 9, No. 8, 36–40.
- Engle R. F., Mustafa C., (1992), *Implied ARCH Models from Options Prices*, Journal of Econometrics, 52, 289–311.
- Engle R. F., Ng V. K., (1993), *Measuring and Testing the Impact of News on Volatility*, Journal of Finance, 48, 1749–1778.
- Engle R. F., Ng V., Rothschild M., (1990), *Asset Pricing with a Factor ARCH*

- Covariance Structure: Empirical Estimates for Treasury Bills*, Journal of Econometrics, 45, 213–238.
- Engle R. F., Rangel J. G. (2008), *The Spline–GARCH Model for Low-Frequency Volatility and Its Global Macroeconomic Causes*, Review of Financial Studies, 21, 1187–1222.
- Engle R. F., Russell J. R., (1998), *Autoregressive Conditional Duration: A New Model for Irregularly Spaced Transaction Data*, Econometrica, 66, 5, 1127–1162.
- Engle R. F., Sheppard K., (2001), *Theoretical and Empirical Properties of Dynamic Conditional Correlation Multivariate GARCH*, NBER Working Paper, No. 8554.
- Engle R. F., Susmel, R., (1993), *Common Volatility in International Equity Markets*, Journal of Business & Economic Statistics, 11, 167–176.
- Fabozzi F. J., Francis J. C., (1978), *Beta as a Random Coefficient*, Journal of Financial and Quantitative Analysis, 13, 101–116.
- Fama E. F., (1965), *The Behaviour of Stock Market Prices*, Journal of Business, 38, 34–105.
- Fama E. F., MacBeth J., (1973), *Risk, Return, and Equilibrium: Empirical Tests*, Journal of Political Economy, 81, 607–636.
- Fama E. F., Schwert G. W., (1977), *Asset Returns and Inflation*, Journal of Financial Economics, 5, 115–146.
- Fang H., Lai T-Y., (1997), *Co-kurtosis and Capital Asset Pricing*, The Financial Review, 32, 293–307.
- Feinstein S. (1988), *The Black-Scholes Formula is Nearly Linear in Sigma for At-the-Money Options; Therefore Implied Volatilities from At-the-Money Options are Virtually Unbiased*, Federal Reserve Bank of Atlanta Working Paper 88–9.
- Figlewski S., (1994), *Forecasting Volatility Using Historical Data*, Department of Finance, New York University, Working Paper.
- Figlewski S., (1997), *Forecasting Volatility, Financial Markets, Institutions and Instruments*, New York University Salomon Center, 6, 1, 1–88.
- Fiorentini G., Calzolari G., Panattoni L., (1996), *Analytic Derivatives and the Computation of GARCH Estimates*, Journal of Applied Econometrics, 11, 399–417.
- Fiszeder P., (1999), *Modele podstawowe procesów na Warszawskiej Gieldzie Papierów Wartościowych, Dynamiczne Modele Ekonometryczne*, Materiały na VI Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, UMK, Toruń.
- Fiszeder P., (2000), *Statyczne i dynamiczne własności stóp zwrotu na przy-*

- kładzie światowych indeksów giełdowych*, Nasz Rynek Kapitałowy, 109, 43–46.
- Fiszeder P., (2001a), *Zastosowanie modeli GARCH w ekonometrycznej analizie procesów giełdowych*, rozprawa doktorska, UMK, Toruń.
- Fiszeder P., (2001b), *Zastosowanie modeli GARCH w analizie krótkookresowych zależności pomiędzy Warszawską Giełdą Papierów Wartościowych a międzynarodowymi rynkami akcji*, Przegląd Statystyczny, 48, 345–364.
- Fiszeder P., (2001c), *Jednorównaniowe modele GARCH – analiza procesów zachodzących na GPW w Warszawie*, *Dynamiczne Modele Ekonometryczne*, Materiały na VII Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, UMK, Toruń.
- Fiszeder P., (2003a), *Testy stałości współczynników korelacji w wielorównaniowym modelu GARCH – analiza korelacji między indeksami giełdowymi: WIG, DJIA i Nasdaq Composite*, Przegląd Statystyczny, 50, 2, 53–71.
- Fiszeder P., (2003b), *Dynamiczne zabezpieczanie portfela przed ryzykiem – zastosowanie wielorównaniowych modeli GARCH*, *Dynamiczne Modele Ekonometryczne*, Materiały na VIII Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, UMK, Toruń.
- Fiszeder P., (2004a), *Dynamiczna alokacja aktywów – Model Markowitza, Rynki finansowe – prognozy a decyzje*, Acta Universitatis Lodziensis, Folia Oeconomica, 177, Uniwersytet Łódzki, Łódź.
- Fiszeder P., (2004b), *Dynamiczna teoria portfela*, Acta Universitatis Nicolai Copernici, Ekonomia XXXIV, UMK, Toruń.
- Fiszeder P., (2004c), *Prognozowanie zmienności na podstawie modeli GARCH*, Rynek Terminowy, 25, 121–128.
- Fiszeder P., (2004d), *Forecasting Volatility with GARCH Models*, MACRO-MODELS'2003 – Conference Proceedings, Uniwersytet Łódzki, Łódź.
- Fiszeder P., (2005a), *Estymacja współczynników beta na podstawie wielorównaniowego modelu GARCH*, Acta Universitatis Nicolai Copernici, Ekonomia XXXVI, UMK, Toruń.
- Fiszeder P., (2005b), *Forecasting the Volatility of the Polish Stock Index – WIG20*, [w:] *Forecasting Financial Markets. Theory and Applications*, Uniwersytet Łódzki, Łódź.
- Fiszeder P., (2005c), *Modelowanie procesów finansowych z długą pamięcią w średniej i wariancji*, *Dynamiczne Modele Ekonometryczne*, Materiały na IX Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, UMK, Toruń.
- Fiszeder P., (2006a), *Testy modelu CAPM z zastosowaniem wielorównanio-*

- wych modeli GARCH – analiza dla GPW w Warszawie, *Przegląd Statystyczny*, 53, 3, 36–56.
- Fiszeder P., (2006b), *Test of the CAPM Model with Time-Varying Covariances for the Polish Stock Market*, [w:] *Financial Markets. Principles of Modelling, Forecasting and Decision-Making, FindEcon Monograph Series*, Advances in Financial Market Analysis, Number 2, Uniwersytet Łódzki, Łódź.
- Fiszeder P., (2006c), *Consequences of Congruence for GARCH Modelling, Dynamic Econometric Models*, Vol. 7, UMK, Toruń.
- Fiszeder P., (2007a), *Ocena skuteczności strategii zabezpieczającej – zastosowanie danych o wysokiej częstotliwości, Rynek Kapitałowy, Skuteczne inwestowanie*, cz. I, Uniwersytet Szczeciński, Szczecin.
- Fiszeder P., (2007b), *Jak zwiększyć trafność prognoz zmienności, konstruowanych na podstawie modeli GARCH?*, *Dynamiczne Modele Ekonometryczne*, UMK, Toruń.
- Fiszeder P., (2007c), *Weryfikacja modelu CAPM na podstawie jednoczynnikowego modelu GARCH dla GPW w Warszawie, Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a polski rynek*, *Prace naukowe AE w Wrocławiu*, nr 1176, Wrocław.
- Fiszeder P., (2007d), *Weryfikacja modelu APT dla GPW w Warszawie z zastosowaniem wielorównaniowego modelu GARCH*, *Matematyczne i ekonometryczne metody oceny ryzyka finansowego*, AE w Katowicach, Katowice.
- Fiszeder P., (2007e), *Konstrukcja portfeli efektywnych z zastosowaniem wielorównaniowych modeli GARCH*, *Folia Oeconomica Cracoviensia* 48, 47–68.
- Fiszeder P., (2007f), *Prognozowanie VaR – zastosowanie wielorównaniowych modeli GARCH*, *Modelowanie i prognozowanie gospodarki narodowej*, Wydział Zarządzania Uniwersytetu Gdańskiego, Sopot.
- Fiszeder P., (2007g), *Testing the Arbitrage Pricing Model with a Factor GARCH Model for the Polish Stock Market*, [w:] *Financial Markets: Principles of Modelling, Forecasting, and Decision-Making*, FindEcon Monograph Series, Advances in Financial Market Analysis, Number 5, Uniwersytet Łódzki, Łódź.
- Fiszeder P., (2008a), *Model APT z czynnikiem modelem GARCH – analiza dla GPW w Warszawie*, *Przegląd Statystyczny*, 55, 1, 45–66.
- Fiszeder P., (2008b), *Analiza zależności między indeksem WIG a wybranymi indeksami rynków akcji na świecie*, *Współczesne finanse. Stan i perspektywy rozwoju rynku finansowego*, UMK w Toruniu, Toruń.
- Fiszeder P., Kwiatkowski J., (2005a), *Model GARCH-M ze zmiennym para-*

- metrem – Analiza wybranych spółek i indeksów notowanych na GPW w Warszawie*, Przegląd Statystyczny, 52, 3, 73–88.
- Fiszeder P., Kwiatkowski J., (2005b), *Porównanie wybranych metod estymacji współczynnika zabezpieczenia dla kontraktów futures na indeks WIG20*, Rynek Terminowy, 30, 78–87.
- Fiszeder P., Kwiatkowski J., (2005c), *Dynamiczna analiza zależności pomiędzy oczekiwaną stopą zwrotu a warunkową wariancją*, Acta Universitatis Nicolai Copernici, Ekonomia XXXVI, UMK, Toruń.
- Fiszeder P., Razik W., (2003), *Analiza efektu zarażania na przykładzie zależności pomiędzy indeksem WIG a indeksami wybranych rynków akcji na świecie*, Acta Universitatis Nicolai Copernici, Ekonomia XXXIII, UMK, Toruń.
- Fiszeder P., Razik W., (2004), *Testowanie efektu contagion – Zastosowanie wielorównaniowego modelu GARCH*, Rynek Kapitałowy, Skuteczne inwestowanie, cz. I, Uniwersytet Szczeciński, Szczecin.
- Fiszeder P., Romański J., (2002), *Looking for the Pattern of GARCH Type Models in Polish Stock Returns. Comparison with Indices of the EU and the East European Stock Markets*, [w:] *East European Transition and EU Enlargement, A Quantitative Approach*, Physica-Verlag, A Springer-Verlag Company, Heidelberg.
- Flavin T. J., Wickens M. R., (2006), *Optimal International Asset Allocation with Time-Varying Risk*, Scottish Journal of Political Economy, 53, 5, 543–564.
- Fleming J. (1998), *The Quality of Market Volatility Forecasts Implied by S&P 100 Index Option Prices*, Journal of Empirical Finance, 5, 317–345.
- Fleming J., Kirby C., Ostdiek B., (2001), *The Economic Value of Volatility Timing*, Journal of Finance, 56, 329–352.
- Forbes K., Rigobon R., (2002), *No Contagion, Only Interdependence: Measuring Stock Market Co-movements*, Journal of Finance, 57, 2223–2261.
- French K. R., Roll R., (1986), *Stock Return Variances: The Arrival of Information and the Reaction of Traders*, Journal of Financial Economics, 17, 5–26.
- French K. R., Schwert G. W., Stambaugh R., (1987), *Expected Stock Return and Volatility*, Journal of Financial Economics, 19, 3–29.
- Frey R., Michaud P., (1997), *The Effect of GARCH-Type Volatilities on Prices and Payoff-Distributions of Derivative Assets – A Simulation Study*, ETH Zürich, Working Paper.
- Gagnon L., Lypny G. J., (1995), *Hedging Short-Term Interest Risk under Time-Varying Distributions*, Journal of Futures Markets, 15, 767–783.

- Gagnon L., Lypny G. J., McCurdy T. H., (1998), *Hedging Foreign Currency Portfolios*, *Journal of Empirical Finance*, 5, 197–220.
- Gajdka J., Wolski R., (1998), *Test CAPM w warunkach polskiego rynku kapitałowego*, *Nowe Życie Gospodarcze*, 5.
- Galagedera D., (2007), *A Review of Capital Asset Pricing Models*, *Managerial Finance*, 33, 821–832.
- Gallant R. A., Rossi P. E., Tauchen G., (1992), *Stock Prices and Volume*, *Review of Financial Studies*, 5, 199–242.
- Gencay R., Selcuk F., Ulugülyağci A., (2003), *High Volatility, Thick Tails and Extreme Value Theory in Value-at-Risk Estimation*, *Insurance: Mathematics & Economics*, 33(2), 337–356.
- Ganczarek A., (2007), *Analiza niezależności przekroczeń VaR na wybranym segmencie rynku energii*, *Dynamiczne Modele Ekonometryczne*, UMK, Toruń.
- Gannon G., Chng T. S., (2000), *Dynamic Hedging in the Presence of Volatility Transmission and Time Varying Basic Risk*, Chicago Board of Trade Research Symposium Proceedings, Chicago.
- Geske R., (1979), *The Valuation of Compound Options*, *Journal of Financial Economics*, 7, 63–81.
- Ghose D., Kroner K. F., (1995), *Components of Volatility in Foreign Exchange Markets: An Empirical Analysis of High Frequency Data*, University of Arizona, Working Paper.
- Ghysels E., Harvey A. C., Renault E., (1996), *Stochastic Volatility*, [w:] Madala G., Rao C. (red.), *Handbook of Statistics*, Elsevier Science, Amsterdam.
- Giacomini R., White H., (2006), *Tests of Conditional Predictive Ability*, *Econometrica*, 74, 1545–1578.
- Giovannini A., Jorion P., (1989), *The Time Variation of Risk and Return in the Foreign Exchange and Stock Markets*, *Journal of Finance*, 44, 307–325.
- Glosten L. R., Jagannathan R., Runkle D. E., (1993), *On the Relation Between the Expected Value and the Volatility of the Nominal Excess Return on Stocks*, *Journal of Finance*, 48, 1779–1801.
- Goodhart C. A. E., Hall S. G., Henry S. G. B., Pesaran B., (1993), *News Effects in A High – Frequency Model of The Sterling – Dollar Exchange Rate*, [w:] Pesaran M. H., Potter S. M. (red.), *Nonlinear Dynamics, Chaos and Econometrics*, John Wiley & Sons Ltd.
- Goorbergh R., Vlaar P., (1999), *Value at Risk Analysis of Stock Returns. Historical Simulation, Variance Techniques or Tail Index Estimation?*, Re-

- search Memorandum WO&E nr 579/9912, DeNederlandsche Bank NV, Amsterdam.
- Górka J., Osińska M., (2001), *Efekty agregacji czasowej szeregów finansowych w świetle analizy spektralnej*, *Dynamiczne Modele Ekonometryczne*, Materiały na VII Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, UMK, Toruń.
- Gourieroux C., (1997), *ARCH Models and Financial Applications*, Springer – Verlag, New York.
- Granger, C. W. J., (1980), *Long Memory Relationships and the Aggregation of Dynamic Models*, *Journal of Econometrics*, 14, 227–238
- Granger, C. W. J., Joyeux, R. (1980), *An Introduction to Long Memory Time Series Models and Fractional Differencing*, *Journal of Time Series Analysis*, 1, 15–29.
- Granger, C. W. J., Robins R. P., Engle R. F., (1984), *Wholesale and Retail Prices: Bivariate Time Series Modelling with Forecastable Error Variances*, [w:] Belsley D., Kuh E. (red.), *Model Reliability*, MIT Press, Cambridge, MA.
- Hafner C. M., Herwartz H., (1998), *Time-Varying Market Price of Risk in the CAPM – Approaches*, *Empirical Evidence and Implications*, *Finance*, 19, 93–112.
- Hafner C. M., Herwartz H., (2001), *Option Pricing under Linear Autoregressive Dynamics, Heteroskedasticity, and Conditional Leptokurtosis*, *Journal of Empirical Finance*, 8, 1–34.
- Hafner C. M., Herwartz H., (2004), *Testing for Causality in Variance using Multivariate GARCH Models*, *Economics Working Paper No. 2004,03*, Christian-Albrechts-University of Kiel.
- Hafner C. M., Herwartz H., (2008), *Analytical Quasi-Maximum Likelihood Inference in Multivariate Volatility Models*, *Metrika*, 67, 219–239.
- Hafner C. M., Rombouts J., (2007), *Semiparametric Multivariate Volatility Models*, *Econometric Theory*, 23, 251–280.
- Hamao Y., Masulis R. W., Ng V., (1990), *Correlations in Price Changes and Volatility across International Stock Markets*, *Review of Financial Studies*, 3, 281–307.
- Hamilton J. D., (1994), *Time Series Analysis*, Princeton University Press.
- Hansen P. R., Lunde A., (2005), *A Forecast Comparison of Volatility Models: Does Anything Beat a GARCH(1,1)*, *Journal of Applied Econometrics*, 20, 873–889.
- Hansen P. R., Lunde A., (2006), *Consistent Ranking of Volatility Models*, *Journal of Econometrics*, 131, 97–121.



- Hansen P. R., Lunde A., Nason J. M., (2003), *Choosing the Best Volatility Models: A Model Confidence Set Approach*, Oxford Bulletin of Economics and Statistics, 65, 839–861.
- Hansen P. R., Lunde A., Nason J. M., (2005), *Model Confidence Sets for Forecasting Models*, Atlanta Fed Working Papers 2005–07.
- Hansson B., Hordahl P., (1998), *Testing the Conditional CAPM Using Multivariate GARCH-M*, Applied Financial Economics, 8, 377–388.
- Harrison P., Zhang H. H., (1999), *An Investigation of The Risk and Return Relation at Long Horizons*, Review of Economics and Statistics, 81, 399–408.
- Harvey A. C., (1989), *Forecasting, Structural Time Series Models and the Kalman Filter*, Cambridge University Press.
- Harvey A. C., Ruiz E., Sentana E., (1992), *Unobserved Component Time Series Models with ARCH Disturbances*, Journal of Econometrics, 52, 129–157.
- Harvey A. C., Ruiz E., Shephard N., (1994), *Multivariate Stochastic Volatility Models*, Review of Economic Studies, 61, 247–264.
- Harvey C., (1989), *Time-Varying Conditional Covariances in Tests of Asset Pricing Models*, Journal of Financial Economics, 24, 289–317.
- Harvey C., Siddique A., (2000), *Conditional Skewness in Asset Pricing Tests*, Journal of Finance, 55, 1263–1295.
- Haugen R. A., (1996), *Teoria nowoczesnego inwestowania*, WIG-Press, Warszawa.
- He C., Teräsvirta T., (2004), *An extended Constant Conditional Correlation GARCH Model and its Fourth-Moment Structure*, Econometric Theory, 20, 904–926.
- Hendricks D., (1996), *Evaluation of Value-at-Risk Models Using Historical Data*, Federal Reserve Bank of New York Economic Policy Review, 2, 39–69.
- Heston S. L., (1993), *A Closed-Form Solution for Options with Stochastic Volatility with Applications to Bond and Currency Options*, Review of Financial Studies, 6, 327–343.
- Heston S. L., Nandi S., (2000), *A Closed-Form GARCH Option Pricing Model*, Review of Financial Studies, 13, 585–626.
- Hiemstra C., Kramer C., (1997), *Nonlinearity and Endogeneity in Macro-Asset Pricing*, Studies in Nonlinear Dynamics and Econometrics, 2(3), 61–76.
- Hol E., Koopman S. J., (2002), *Stock Index Volatility Forecasting with High Frequency Data*, Tinbergen Institute Discussion Paper, No. 2002–068/4.
- Hong Y., (2001), *A Test for Volatility Spillover with Applications to Exchange Rates*, Journal of Econometrics, 103, 183–224.

- Hong Y., Shehadeh R. D., (1999), *A New Test for ARCH Effects and Its Finite-Sample Performance*, Journal of Business and Economic Statistics, 17, 91–108.
- Hosking J., (1980), *The Multivariate Portmanteau Statistic*, Journal of American Statistical Association, 75, 602–608.
- Hsieh D. A., (1989a), *Modeling Heteroskedasticity in Daily Foreign Exchange Rates*, Journal of Business and Economic Statistics, 7, 307–317.
- Hsieh D. A., (1989b), *Testing for Nonlinear Dependence in Daily Foreign Exchange Rate Changes*, Journal of Business, 62, 339–368.
- Hull J., (1998), *Kontrakty terminowe i opcje. Wprowadzenie*, WIG-Press, Warszawa.
- Hull J., White A., (1987), *The Pricing of Options on Assets with Stochastic Volatilities*, Journal of Finance, 42, 281–300.
- Humeńczuk P. (2006), *Efektywność zabezpieczenia przed ryzykiem rynkowym za pomocą kontraktów terminowych*, Rozprawa doktorska, AE we Wrocławiu, Wrocław.
- Hurst, H. E., (1951), *Long Term Storage Capacity of Reservoirs*, Transactions of American Society of Civil Engineers, 116, 770–799.
- Jagannathan R., Wang Z. (1998), *An Asymptotic Theory for Estimating Beta-Pricing Models Using Cross-Sectional Regression*, Journal of Finance, 53, 1285–1309.
- Jajuga K., (1993), *Statystyczna analiza wielowymiarowa*, PWN, Warszawa.
- Jajuga K., (1999), *Miary ryzyka rynkowego – cz. 1*, Rynek Terminowy, 6, 67–69.
- Jajuga K., (2000a) (red.), *Metody ekonometryczne i statystyczne w analizie rynku kapitałowego*, AE we Wrocławiu, Wrocław.
- Jajuga K., (2000b), *Miary ryzyka rynkowego – cz. 3*, Rynek Terminowy, 8, 112–117.
- Jajuga K., (2000c), *Value at Risk*, Rynek Terminowy, 9, 18–20.
- Jajuga K., (2002), *50 lat teorii portfela*, Rynek Kapitałowy, Skuteczne inwestowanie, cz. II, Uniwersytet Szczeciński, Szczecin.
- Jajuga K., (2004), *Trzydzieści lat nowoczesnej teorii wyceny instrumentów pochodnych*, Rynek Kapitałowy, Skuteczne inwestowanie, cz. I, Uniwersytet Szczeciński, Szczecin.
- Jajuga K., (2007a), *25 lat ekonometrii finansowej*, Rynek Kapitałowy, Skuteczne inwestowanie, cz. I, Uniwersytet Szczeciński, Szczecin.
- Jajuga K., (2007b), *Zarządzanie ryzykiem*, PWN, Warszawa.
- Jajuga K., Jajuga T., (1996), *Inwestycje. Instrumenty finansowe, ryzyko finan-*

- sowe, *inżynieria finansowa*, PWN, Warszawa.
- Jeantheau T., (1998), *Strong Consistency of Estimators for Multivariate ARCH Models*, *Econometric Theory*, 14, 70–86.
- Jobson J. D., Korkie B., (1980), *Estimation for Markowitz Efficient Portfolios*, *Journal of American Statistical Association*, 75, 544–554.
- Johannes M., Polson N., Stroud J., (2002), *Sequential Optimal Portfolio Performance: Market and Volatility Timing*, Columbia University, Working Paper.
- Johnson H., Shanno D., (1987), *Option Pricing when the Variance is Changing*, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22, 143–151.
- Jondeau E., Rockinger M., (2006), *The Copula-GARCH Model of Conditional Dependencies: An International Stock-Market Application*, *Journal of International Money and Finance*, 25, 827–853.
- Jones C. S., (2001), *Extracting Factors from Heteroskedastic Asset Returns*, *Journal of Financial Economics*, 62, 293–325.
- Jorion P., (1991), *Bayesian and CAPM Estimators of the Means: Implications for Portfolio Selection*, *Journal of Banking and Finance*, 15, 717–727.
- Jorion P., (1995), *Predicting Volatility in the Foreign Exchange Market*, *The Journal of Finance*, 50, 507–528.
- Jorion P., (1997), *Value at Risk: The New Benchmark for Controlling Market Risk*, McGraw-Hill.
- Kan R., Zhang C., (1999a), *GMM Tests of Stochastic Discount Factor Models with Useless Factors*, *Journal of Financial Economics*, 54, 103–127.
- Kan R., Zhang, C., (1999b), *Two-Pass Test of Asset Pricing Models with Useless Factors*, *Journal of Finance*, 54, 203–35.
- Kaplanis E. C., (1988), *Stability and Forecasting of the Co-movement Measures of International Stock Market Return*, *Journal of International Money and Finance*, 8, 63–95.
- Kawakatsu H., (2003), *Cholesky Factor GARCH*, California, Irvine, Working Paper.
- Kawakatsu H., (2006), *Matrix Exponential GARCH*, *Journal of Econometrics*, 134, 95–128.
- Kho B-C., (1996), *Time-Varying Risk Premia, Volatility, and Technical Trading Rule Profits: Evidence from Foreign Currency Futures Markets*, *Journal of Financial Economics*, 41, 249–290.
- Kim Ch-J., Nelson C. R., (1999), *State-Space Models with Regime Switching: Classical and Gibbs-Sampling Approaches with Applications*, The MIT Press.

- Kim J., (2000), *The Relationship Between the Monetary Regime and Output Volatility: a Multivariate GARCH-M Model of the Japanese Experience, 1919–1996*, *Japan and the World Economy*, 12, 49–69.
- Kim K., Schmidt P., (1993), *Unit Root Tests with Conditional Heteroskedasticity*, *Journal of Econometrics*, 59, 287–300.
- Kim M. K., Zumwalt J. K., (1979), *An Analysis of Risk in Bull and Bear Markets*, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 14, 1015–1025.
- King M. A., Sentana E., Wadhvani S., (1994), *Volatility and Links Between National Stock Markets*, *Econometrica*, 62, 901–933.
- King M. A., Wadhvani S., (1990), *Transmission of Volatility between Stock Markets*, *Review of Financial Studies*, 3, 5–33.
- Klaassen F., (1999), *Have Exchange Rates Become More Closely Tied? Evidence from a New Multivariate GARCH Model*, CentER Discussion Paper Series No. 1999–10, Tilburg University.
- Kluth K., (2007), *Analiza efektów sezonowych na Gieldzie Papierów Wartościowych w Warszawie, Metody ilościowe w badaniach ekonomicznych, nr VIII*, SGGW, Warszawa.
- Knight F. H. (1921), *Risk, Uncertainty and Profit*, Houghton Mifflin and Co., New York.
- Koch P. D., Koch T. W., (1991), *Evolution in Dynamic Linkages across National Stock Indexes*, *Journal of International Money and Finance*, 10, 231–251.
- Koutmos G., Knif J., Philippatos G. C., (2002), *Modelling Common Volatility and Dynamic Risk Premia in European Equity Markets*, EFMA 2002 London Meetings, maszynopis.
- Kraft D. F., Engle R. F., (1983), *Autoregressive Conditional Heteroskedasticity in Multiple Time Series*, Department of Economics, UCSD, Working Paper.
- Kroner K. F., Claessens S., (1991), *Optimal Dynamic Hedging Portfolios and the Currency Composition of External Debt*, *Journal of International Money and Finance*, 10, 131–148.
- Kroner K. F., Ng V. K., (1998), *Modeling Asymmetric Comovements of Asset Returns*, *Review of Financial Studies*, 11, 817–844.
- Kroner K. F., Sultan J., (1993), *Time-Varying Distributions and Dynamic Hedging with Foreign Currency Futures*, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 28, 535–551.
- Kuester K., Mittnik S., Paolella M. S., (2006), *Value-at-Risk Prediction: A Comparison of Alternative Strategies*, *Journal of Financial Econometrics*, 4 (1), 53–89.

- Kupiec P., (1995), *Techniques for Verifying the Accuracy of Risk Measurement Models*, Journal of Derivatives, 2, 73–84.
- Kuziak K., (1999), *Model wyceny arbitrażowej (APM) – ujęcie dynamiczne, Dynamiczne Modele Ekonometryczne*, Materiały na VI Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, UMK Toruń.
- Kuziak K., (2005), *Ryzyko modelu w wycenie opcji indeksowych, Dynamiczne Modele Ekonometryczne*, Materiały na IX Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, UMK, Toruń.
- Kwiatkowski, J., Osiewalski, J., (2002), *Modele ARFIMA: podstawowe własności i analiza bayesowska*, Przegląd Statystyczny, 50, 2, 105–122.
- Lakatos I., (1995), *Pisma z filozofii nauk empirycznych*, PWN, Warszawa.
- Lamoureux C. G., Lastrapes W. D., (1990), *Persistence in Variance, Structural Change and the GARCH Model*, Journal of Business and Economic Statistics, 8, 225–234.
- Lamoureux C. G., Lastrapes W. D., (1993), *Forecasting Stock Return Variance: Toward an Understanding of Stochastic Implied Volatilities*, Review of Financial Studies, 6, 293–326.
- Landmesser J., (2006), *Efekt dnia tygodnia na Gieldzie Papierów Wartościowych w Warszawie*, Zeszyty Naukowe Ekonomika i Organizacja Gospodarki Żywnościowej, 60, SGGW, Warszawa.
- Lange O., (1967), *Optymalne decyzje*, PWN, Warszawa.
- Lanne M., Saikkonen P., (2007), *A Multivariate Generalized Orthogonal Factor GARCH Model*, Journal of Business and Economic Statistics, 25, 61–75.
- Ledoit O., Santa-Clara P., Wolf M., (2003), *Flexible Multivariate GARCH Modeling with an Application to International Stock Markets*, Review of Economics and Statistics, 85, 735–747.
- Lee J. H. H., (1991), *A Lagrange Multiplier Test for GARCH Models*, Economics Letters, 37, 265–271.
- Lee J. H. H., King M. L., (1993), *A Locally Most Mean Powerful Based Score Test for ARCH and GARCH Regression Disturbances*, Journal of Business and Economic Statistics, 11, 17–27.
- Lee S. B., Kim K. J., (1993), *Does the October 1987 Crash Strengthen the Co-movements Among National Stock Markets?*, Review of Financial Economics, 3, 89–102.
- Lee S. W., Hansen B. E., (1994), *Asymptotic Theory for the GARCH(1,1) Quasi-Maximum Likelihood Estimator*, Econometric Theory, 10, 29–52.
- Lehar A., Scheicher M., Schittenkopf C., (2002), *GARCH vs. Stochastic Vol-*

- tility: Option Pricing and Risk Management*, Journal of Banking and Finance, 26, 323–345.
- Leusner J., Akhavein J. D., Swamy P. A. V. B., (1996), *Solving an Empirical Puzzle in the Capital Asset Pricing Model*, Board of Governors of the Federal Reserve System, Finance and Economics Discussion Series 96–14.
- Li W. K., Mak T. K., (1994), *On the Squared Residual Autocorrelations in Non-linear Time Series with Conditional Heteroscedasticity*, Journal of Time Series Analysis, 15, 627–636.
- Lien D., Tse Y. K., (2002), *Physical Delivery Versus Cash Settlement: An Empirical Study on the Feeder Cattle Contract*, Journal of Empirical Finance, 9, 361–371.
- Lin W-L., (1992), *Alternative Estimators for Factor GARCH Models – A Monte Carlo Comparison*, Journal of Applied Econometrics, 7, 259–279.
- Ling S., Li W., (1997), *Diagnostic Checking of Nonlinear Multivariate Time Series with Multivariate ARCH Errors*, Journal of Time Series Analysis, 18, 447–464.
- Ling S., McAleer M., (2003), *Asymptotic Theory for a Vector ARMA-GARCH Model*, Econometric Theory, 19, 280–310.
- Lintner J., (1965), *Security Prices, Risk and Maximal Gains from Diversification*, Journal of Finance, 20, 587–615.
- Linton O. B., Steigerwald D. G., (2000), *Adaptive Testing in ARCH Models*, Econometric Reviews, 19, 145–174.
- Litterman R., Winkelmann K., (1998), *Estimating Covariance Matrices*, Risk Management Series, Goldman Sachs.
- Liu S. M., Brorsen B. W., (1995), *Maximum Likelihood Estimation of a GARCH-Stable Model*, Journal of Applied Econometrics, 10, 273–285.
- Lo A. W., MacKinlay A. C., (1988), *Stock Market Prices Do Not Follow Random Walks: Evidence from a Simple Specification Test*, Review of Financial Studies, 1, 41–66.
- Lo A. W., MacKinlay A. C., (1990), *When Are Contrarian Profits Due to Stock Market Overreaction?*, Review of Financial Studies, 3, 175–205.
- Longerstaey J., More L., (1995), *Introduction to RiskMetrics™*, 4th edition, Morgan Guaranty Trust Company, New York.
- Longin F., Solnik B., (1995), *Is the Correlation in International Equity Returns Constant: 1960–1990?*, Journal of International Money and Finance, 14, 3–26.
- Lopez J. A., (1998), *Methods for Evaluating Value-at-Risk Estimates*, Economic Policy Review, 4, 3, 119–124.

- Lopez J. A., Walter C. A., (2000), *Evaluating Covariance Matrix Forecasts in a Value-at-Risk Framework*, Federal Reserve Bank of San Francisco, Working Papers in Applied Economic Theory 2000–21.
- Lumsdaine R. L., (1995), *Finite-Sample Properties of the Maximum Likelihood Estimator in GARCH(1,1) and IGARCH(1,1) Models: A Monte Carlo Investigation*, Journal of Business and Economic Statistics, 13, 1–10.
- Lumsdaine R. L., (1996), *Consistency and Asymptotic Normality of the Quasi-Maximum Likelihood Estimator in GARCH(1,1) and Covariance Stationary GARCH(1,1) Models*, Econometrica, 64, 575–596.
- Lumsdaine R. L., Ng S., (1999), *Testing for ARCH in the Presence of a Possibly Misspecified Conditional Mean*, Journal of Econometrics, 93, 257–279.
- Łach M., Weron A., (2000), *Skuteczność wybranych metod obliczania VaR dla danych finansowych z polskiego rynku*, Rynek Terminowy, 9, 133–137.
- MacKinlay A. C., (1987), *On Multivariate tests of the CAPM*, Journal of Financial Economics, 18, 341–371.
- Majewska A., (2004), *Ocena metod ilościowych w wycenie instrumentów pochodnych*, Uniwersytet Szczeciński, Szczecin.
- Markowitz H. M., (1952), *Portfolio Selection*, Journal of Finance, 7, 77–91.
- Markowitz H. M., (1959), *Portfolio Selection: Efficient Diversification of Investments*, Yale University Press, New Haven, CT.
- Martens M., (2001), *Forecasting Daily Exchange Rate Volatility Using Intraday Returns*, Journal of International Money and Finance, 20, 1–23.
- Martens M., (2002), *Measuring and Forecasting S&P 500 Index–Futures Volatility Using High Frequency Data*, Journal of Futures Markets, 22, 497–518.
- Masson P., (1999), *Contagion: Monsoonal Effects, Spillovers and Jumps Between Multiple Equilibria*, [w:] Agenor P., Miller M., Vines D., Weber A., (red.), *The Asian Financial Crisis: Causes, Contagion and Consequences*, Cambridge University Press, Cambridge.
- McCullough B., Vinod H., (1999), *The Numerical Reliability of Econometric Software*, Journal of Economic Literature, 37, 633–665.
- McCurdy T., Morgan I., (1987), *Tests of the Martingale Hypothesis for Foreign Currency Futures with Volatility*, International Journal of Forecasting, 3, 131–148.
- McCurdy T., Morgan I., (1988), *Testing the Martingale Hypothesis in Deutschemark Futures with Models Specifying the Form of Heteroskedasticity*, Journal of Applied Econometrics, 3, 187–202.
- McLeod A. I., Li W. K., (1983), *Diagnostic checking ARMA time series mo-*

- dels using squared-residual autocorrelations*, *Journal of Time Series Analysis*, 4, 269–273.
- McNeil A. J., Frey R., (2000), *Estimation of Tail-Related Risk Measures for Heteroscedastic Financial Time Series: An Extreme Value Approach*, *Journal of Empirical Finance*, 7, 271–300.
- McQueen G., Vorkink K., (2004), *Whence GARCH? A Preference-Based Explanation for Conditional Volatility*, *Review of Financial Studies*, 17, 4, 915–949.
- Mencia J., Sentana E., (2005), *Estimation and Testing of Dynamic Models with Generalized Hyperbolic Innovations*, Centre for Economic Policy Research Discussion Paper No. 5177.
- Merrill A., (1982), *The Behavior of Prices on Wall Street*, Analysis Press, Chappaqua.
- Merton R. C., (1973), *Theory of Rational Option Pricing*, *Bell Journal of Economics and Management Science*, 4, 141–183.
- Merton R. C., (1976), *Options Pricing When Underlying Stock Returns are Discontinuous*, *Journal of Financial Economics*, 3, 125–144.
- Merton R. C., (1980), *On Estimating the Expected Return on the Market: An Exploratory Investigation*, *Journal of Financial Economics*, 8, 323–361.
- Michaud R. O., (1989), *The Markowitz Optimization Enigma: Is 'Optimized' Optimal?*, *Financial Analysts Journal*, 45, 31–42.
- Mills, T. C., (1993), *The Econometric Modelling of Financial Time Series*, Cambridge University Press.
- Mossin J., (1966), *Equilibrium in a Capital Asset Market*, *Econometrica*, 34, 768–783.
- Mullainathan S., (2002). *A Memory Based Model of Bounded Rationality*, *The Quarterly Journal of Economics*, 117, 735–774.
- Myers R. J., (1991), *Estimating Time-Varying Optimal Hedge Ratios on Futures Markets*, *Journal of Futures Markets*, 11, 39–53.
- Nardari F., Scruggs J. T., (2008), *Bayesian Analysis of Linear Factor Models with Latent Factors, Multivariate Stochastic Volatility, and APT Pricing Restrictions*, *Journal of Financial and Quantitative Analysis* (w druku).
- Nelken I., (red.), (2007), *Volatility as an Asset Class*, Risk Books, Londyn.
- Nelson D. B., (1990), *Stationarity and Persistence in the GARCH(1,1) Model*, *Econometric Theory*, 6, 318–334.
- Nelson D. B., (1991), *Conditional Heteroskedasticity in Asset Returns: A New Approach*, *Econometrica*, 59, 347–370.



- Nelson D. B., (1992), *Filtering and Forecasting with Misspecified ARCH Models I. Getting the Right Variance with the Wrong Model*, *Journal of Econometrics*, 52, 61–90.
- Nelson D. B., Cao C. Q., (1992), *Inequality Constraints in the Univariate GARCH Model*, *Journal of Business and Economic Statistics*, 10, 229–235.
- Newey W., (1985), *Maximum Likelihood Specification Testing and Conditional Moment Tests*, *Econometrica*, 6, 1047–1070.
- Newey W., West K. D., (1987), *A Simple, Positive, Heteroskedasticity and Autocorrelation Consistent Covariance Matrix*, *Econometrica*, 55, 703–705.
- Ng A., (2000), *Volatility Spillover Effects from Japan and the US to the Pacific-Basin*, *Journal of International Money and Finance*, 19, 207–233.
- Ng L., (1991), *Tests of the CAPM with Time-Varying Covariances: A Multivariate GARCH Approach*, *Journal of Finance*, 46, 1507–1521.
- Ng V., Engle R. F., Rothschild M., (1992), *A Multi-Dynamic-Factor Model for Stock Returns*, *Journal of Econometrics*, 52, 245–266.
- Noh J., Engle R. F., Kane A., (1993), *A Test of Efficiency for the S&P Index Option Market Using Variance Forecasts*, NBER Working Paper No. 4520.
- Oczadły T., (2007), *Wycena opcji barierowych w modelu GARCH*, *Matematyczne i ekonometryczne metody oceny ryzyka finansowego*, AE w Katowicach, Katowice.
- Oomen R., (2001), *Using High Frequency Stock Market Index Data to Calculate, Model and Forecast Realized Return Variance*, European University Institute, Working Paper ECO No. 6, Florence.
- Osborne M. F. M., (1959), *Brownian Motion in the Stock Market*, *Operations Research*, 7, 145–173.
- Osiewalski J., (2001), *Ekonometria bayesowska w zastosowaniach*, AE w Krakowie, Kraków.
- Osiewalski J., Pajor A., (2007), *Flexibility and Parsimony in Multivariate Financial Modelling: A Hybrid Bivariate DCC–SV Model*, [w:] *Financial Markets. Principles of Modeling Forecasting and Decision Making*, *FindEcon Monograph Series, Advances in Financial Market Analysis*, Number 3, Uniwersytet Łódzki, Łódź.
- Osiewalski J., Pajor A., Pipień M., (2004), *Bayesowskie modelowanie i prognozowanie indeksu WIG z wykorzystaniem procesów GARCH i SV*, XX Seminarium Ekonometryczne im. Profesora Zbigniewa Pawłowskiego, AE w Krakowie, Kraków.
- Osiewalski J., Pajor A., Pipień M., (2006a), *Bayes Factors for Multivariate GARCH and SV Models*, [w:] *Financial Markets. Principles of Modelling*

- Forecasting and Decision Making*, FindEcon Monograph Series, Advances in Financial Market Analysis, Number 2, Uniwersytet Łódzki, Łódź.
- Osiewalski J., Pajor A., Pipień M., (2006b), *Bayesian Analysis of Main Bivariate GARCH and SV models for PLN/USD and PLN/DEM (1996–2001)*, *Dynamic Econometric Models*, Vol. 7, UMK, Toruń.
- Osiewalski J., Pajor A., Pipień M., (2007), *Bayesian comparison of bivariate GARCH, SV and hybrid models*, MACROMODELS'2006, Conference Proceedings, Absolwent, Łódź.
- Osiewalski J., Pipień M., (1999a), *Bayesian Forecasting of Exchange Rates Using GARCH Models with Skewed  $t$  Conditional Distributions*, MACROMODELS'98 – Conference Proceedings, Absolwent, Łódź.
- Osiewalski J., Pipień M., (1999b), *Bayesowskie wnioskowanie o stacjonarności procesów GARCH (1,1)*, *Dynamiczne Modele Ekonometryczne*, Materiały na VI Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, UMK, Toruń.
- Osiewalski J., Pipień M., (2000), *GARCH-In-Mean through Skewed  $t$  Conditional Distributions: Bayesian Inference for Exchange Rates*, MACROMODELS'99 – Conference Proceedings, Absolwent, Łódź.
- Osiewalski J., Pipień M., (2001), *Multivariate ARCH – Type Models: A Bayesian Comparison*, *Dynamiczne Modele Ekonometryczne*, Materiały na VII Ogólnopolskie Seminarium Naukowe, UMK, Toruń.
- Osiewalski J., Pipień M., (2002), *Multivariate  $t$ -GARCH Models – Bayesian Analysis for Exchange Rates*, *Modelling Economies in Transition*. Proceedings of the Sixth AMFET Conference, Łódź.
- Osiewalski J., Pipień M., (2003), *Bayesian Analysis and Option Pricing in Univariate GARCH Models with Asymmetries and GARCH-In-Mean Effects*, *Przegląd Statystyczny*, 50, 3, 5–29.
- Osiewalski J., Pipień M., (2004a), *Bayesian Comparison of Bivariate ARCH-Type Models for the Main Exchange Rates in Poland*, *Journal of Econometrics*, 123, 371–391.
- Osiewalski J., Pipień M., (2004b), *Bayesian Comparison of Bivariate GARCH Processes. The role of the Conditional Mean Specification*, [w:] *New Directions in Macromodelling*, Elsevier, Amsterdam.
- Osiewalski J., Pipień M., (2005), *Bayesian Analysis of Dynamic Conditional Correlation Using Bivariate GARCH Models*, *Forecasting of Financial Markets and Economic Decision Making*, *Acta Universitatis Lodzianis – Folia Oeconomica* 192, Uniwersytet Łódzki, Łódź.
- Osińska M., (2000), *Ekonometryczne modelowanie oczekiwań gospodarczych*, UMK, Toruń.

- Osińska M., (2004), *Analiza zależności przyczynowych w zakresie wariancji, przykłady z rynków finansowych, Rynek Kapitałowy, Skuteczne inwestowanie*, cz. I, Uniwersytet Szczeciński, Szczecin.
- Osińska M., (2006), *Ekonometria finansowa*, PWE, Warszawa.
- Osińska M., (2008), *Ekonometryczna analiza zależności przyczynowych*, UMK, Toruń.
- Osińska M., Fałdziński M., (2007), *Modele GARCH i SV z zastosowaniem teorii wartości ekstremalnych, Dynamiczne Modele Ekonometryczne*, UMK, Toruń.
- Pagan A. R., Hong Y., (1991), *Nonparametric Estimation and the Risk Premium*, [w:] Barnett W., Powell J., Tauchen G., (red.), *Nonparametric and Semiparametric Methods in Econometrics and Statistics*, Cambridge University Press, Cambridge.
- Pagan A. R., Schwert G. W., (1990), *Alternative Models for Conditional Stock Volatility*, *Journal of Econometrics*, 45, 267–290.
- Pagan A. R., Ullah A., (1988), *The Econometric Analysis of Models with Risk Terms*, *Journal of Applied Econometrics*, 3, 87–105.
- Pajor A., (2003), *Procesy zmienności stochastycznej SV w bayesowskiej analizie finansowych szeregów czasowych*, AE w Krakowie, Kraków.
- Pajor A., (2007), *Bayesian Analysis and Forecasting of the Conditional Correlations Between Stock Index Returns with Multivariate SV Models*, [w:] *Financial Markets: Principles of Modelling, Forecasting, and Decision-Making*, FindEcon Monograph Series, Advances in Financial Market Analysis, Number 3, Uniwersytet Łódzki, Łódź.
- Park T. H., Switzer L. N., (1995), *Bivariate GARCH Estimation of the Optimal Hedge Ratios for Stock Index Futures: A Note*, *Journal of Futures Markets*, 15, 61–67.
- Patton A. J., (2006a), *Modelling Asymmetric Exchange Rate Dependence*, *International Economic Review*, 47, 2, 527–556.
- Patton A. J., (2006b), *Volatility Forecast Comparison Using Imperfect Volatility Proxies*, Quantitative Finance Research Centre, Research Paper 175, University of Technology, Sydney.
- Pelletier D., (2006), *Regime Switching for Dynamic Correlations*, *Journal of Econometrics*, 131, 445–473.
- Pettengill G. N., Sundaram S., Mathur L., (1995), *The Conditional Relation Between Beta and Returns*, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 30, 101–116.
- Pierre E. F. St., (1998), *Estimating EGARCH-M Models: Science or Art.?*

- The Quartly Review of Economics and Finance, 38, 167–180.
- Piontek K., (1999), *Zmienność historyczna i implikowana jako prognozy zmienności instrumentów finansowych*, Materiały konferencyjne: Modelowanie preferencji a ryzyko, cz. I, AE w Katowicach, Katowice.
- Piontek K., (2000), *Efekt dni tygodnia i jego wpływ na wycenę opcji*, *Finanse, Banki i Ubezpieczenia w Polsce u progu XXI wieku*, Materiały konferencyjne, Poznań.
- Piontek K., (2002a), *Modelowanie i prognozowanie zmienności instrumentów finansowych, rozprawa doktorska*, Akademia Ekonomiczna we Wrocławiu, Wrocław.
- Piontek K., (2002b), *Pomiar ryzyka metodą VaR a modele AR–GARCH ze składnikiem losowym o warunkowym rozkładzie z grubymi ogonami*, *Rynek Kapitałowy. Skuteczne inwestowanie*, cz. II, Uniwersytet Szczeciński, Szczecin.
- Piontek K., (2003a), *Weryfikacja wybranych technik prognozowania zmienności – Analiza szeregów czasowych*, *Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a polski rynek*, Prace naukowe AE we Wrocławiu, nr 991.
- Piontek K., (2003b), *Wycena opcji w modelu uwzględniającym efekt AR–GARCH*, *Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a rynek polski*, Prace Naukowe Akademii Ekonomicznej we Wrocławiu, nr 990.
- Piontek K., (2004), *Modelowanie „długotrwałej pamięci” szeregów zmienności*, *Modelowanie Preferencji a Ryzyko '03*, AE w Katowicach, Katowice.
- Piontek K., (2007), *Weryfikacja modeli Blacka–Scholesa oraz AR–GARCH dla opcji na WIG20*, referat wygłoszony na Ogólnopolskim Seminarium Naukowym Dynamiczne Modele Ekonometryczne, Toruń.
- Piontek K., Papla D., (2005), *Wykorzystanie wielorównaniowych modeli AR–GARCH w pomiarze ryzyka metodą VaR*, *Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a polski rynek*, Prace Naukowe AE we Wrocławiu, nr 1088, Wrocław.
- Pipień M., (2004), *Zastosowanie wnioskowania bayesowskiego do określania współczynnika zabezpieczenia w terminowym kontrakcie walutowym*, *Przegląd Statystyczny* 51, 2.
- Pipień M., (2006), *Wnioskowanie bayesowskie w ekonometrii finansowej*, AE w Krakowie, Kraków.
- Pipień M., (2007), *Wykorzystanie warunkowej asymetrii w badaniu zależno-*

- ści pomiędzy oczekiwaną stopą zwrotu a poziomem ryzyka. *Bayesowska analiza dla indeksu WIG, Dynamiczne Modele Ekonometryczne*, UMK, Toruń.
- Pipiń M., Pajor A., (2005), *Bayesowska analiza europejskiej opcji kupna i strategii delta neutralnej z wykorzystaniem procesów GARCH i CSV*, Przegląd Statystyczny, 52, 3, 37–63.
- Pluciennik P., Buszkowska E., (2008), *Modelling and Forecasting the Implied Volatility of the WIG20 Index*, [w:] *Financial Markets: Principles of Modelling, Forecasting, and Decision-Making*, FindEcon Monograph Series: Advances in Financial Market Analysis, Uniwersytet Łódzki, Łódź (w druku).
- Pojarliev M., Polasek W., (2000), *Portfolio Construction Using Multivariate Time Series Forecasts, Working Paper*, University of Basel, Basel.
- Pong S., Shackleton M. B., Taylor S. J., Xu X., (2004), *Forecasting Currency Volatility: A Comparison of Implied Volatilities and AR(FI)MA Models*, Journal of Banking and Finance, 28, 2541–2563.
- Poomimars P., Cadle J., Theobald M., (2002), *Dynamic Asset Allocation with Time-Varying Variance/Covariance Structures*, The International Quarterly Journal of Finance, 49–68.
- Poon S-H., Granger C., (2003), *Forecasting Volatility in Financial Markets: A Review*, Journal of Economic Literature, 41, 478–539.
- Rabemananjara R., Zakoian J. M., (1993), *Threshold ARCH Models and Asymmetries in Volatility*, Journal of Applied Econometrics, 8, 31–49.
- Ragunathan V., Mitchell H., (1997), *Modelling the Time – Varying correlation Between National Stock Market Returns*, Melbourne – Centre in Finance Working Paper No. 97–7.
- Ramchand L., Susmel R., (1998), *Volatility and Cross Correlation across Major Stock Markets*, Journal of Empirical Finance, 5, 397–416.
- Ratner M., (1992), *Portfolio Diversification and Inter-temporal Stability of International Indices*, Global Finance Journal, 3, 67–78.
- Ritchken P., Trevor R., (1999), *Pricing Options Under Generalized GARCH and Stochastic Volatility Processes*, Journal of Finance, 54, 377–402.
- Rockinger M., Urga G., (2000), *Evolution of Stock Markets in Transition Economies*, Journal of Comparative Economics, 28, 456–472.
- Rokita P., (2003), *Porównywanie podejść do szacowania wartości zagrożonej (VaR) na przykładzie pozycji walutowej*, *Inwestycje finansowe i ubezpieczenia – tendencje światowe a polski rynek*, Prace naukowe AE we Wrocławiu, nr 991, Wrocław.

- Roll R., (1977), *A Critique of Asset Pricing Theory's Tests*, Part I, *Journal of Financial Economics*, 4, 129–176.
- Ross S. A., (1976), *The Arbitrage Theory of Capital Asset Pricing*, *Journal of Economic Theory*, 13, 341–360.
- Rossi E., Zucca C., (2002), *Hedging Interest Rate Risk with Multivariate GARCH*, *Applied Financial Economics*, 12, 241–251.
- Rubaszek M., (2002), *Teoria arbitrażu cenowego dla spółek notowanych na Gieldzie Papierów Wartościowych w Warszawie*, *Bank i Kredyt*, 8, 47–57.
- Rubinstein M., (1985), *Nonparametric Tests of Alternative Option Pricing Models Using All Reported Trades and Quotes on the 30 Most Active CBOE Option Classes from August 23, 1976 through August 31, 1978*, *Journal of Finance*, 40, 455–480.
- Samuelson P., (1965), *Rational Theory of Warrant Pricing*, *Industrial Management Review*, 10, 17–46.
- Schwert G. W., (1989), *Why Does Stock Market Volatility Change Over Time?*, *The Journal of Finance*, 44, 1115–1153.
- Schwert G. W., (1990), *Stock Volatility and the Crash*, *Review of Financial Studies*, 3, 77–102.
- Scott L. O., (1987), *Option Pricing when the Variance Changes Randomly: Theory, Estimation and an Application*, *Journal of Financial and Quantitative Analysis*, 22, 419–438.
- Sentana E., Fiorentini G., (2001), *Identification, Estimation and Testing of Conditionally Heteroskedastic Factor Models*, *Journal of Econometrics*, 102, 143–164.
- Serwa D., Bohl M. T. (2005), *Financial Contagion Vulnerability: A Comparison of European Stock Markets*, *Economic Systems*, 29, 344–362.
- Sharpe W. F., (1963), *A Simplified Model for Portfolio Analysis*, *Management Science*, vol. 19, 277–293.
- Sharpe W. F., (1964), *Capital Asset Prices: A Theory of Market Equilibrium under Conditions of Risk*, *Journal of Finance*, 19, 425–442.
- Sheedy E., Trevor R., Wood J., (1999), *Asset–Allocation Decisions When Risk Is Changing*, *Journal of Financial Research*, 22, 3, 301–315.
- Shephard N., (1996), *Statistical Aspects of ARCH and Stochastic Volatility*, [w:] Cox D. R., Hinkley, D. V., Barndorff-Nielsen O. E. (red.), *Time Series Models: In Econometrics, Finance and Other Fields*, Chapman and Hall, London.
- Silvennoinen A., Teräsvirta T., (2005), *Multivariate Autoregressive Condi-*

- tional Heteroskedasticity with Smooth Transitions in Conditional Correlations*, SSE/EFI Working Paper Series in Economics and Finance, No. 577.
- Silvennoinen A., Teräsvirta T., (2008), *Multivariate GARCH Models*, [w:] Andersen T. G., Davis R. A., Kreiss J. P., Mikosch T., (red.), *Handbook of Financial Time Series*, Springer, New York (w druku).
- Sklar A., (1959), *Fonctions de Répartition à n Dimensions et leurs Marges*, Publications de l'Institut Statistique de l'Université de Paris, 8, 229–231.
- Sklinda S., (2004), *Model wyceny arbitrażowej na rynku polskim, weryfikacja empiryczna podstawowych czynników makroekonomicznych*, *Rynek Kapitałowy, Skuteczne inwestowanie*, cz. II, Uniwersytet Szczeciński, Szczecin.
- Skrodzka W. M., Włodarczyk A., (2004), *Anomalie kalendarzowe na polskim rynku finansowym*, *Wiadomości Statystyczne*, 516, 37–53.
- So M. K. P., Yu P. L. H., (2006), *Empirical Analysis of GARCH Models in Value at Risk Estimation*, *Journal of International Financial Markets, Institutions and Money*, 16, 2, 180–197.
- Sobczak M., (2005), *Modele ARCH jako podstawa do analizy portfelowej*, *Nasz Rynek Kapitałowy*, 177, 80–84.
- Sprenkle C., (1961), *Warrant Prices as Indications of Expectations*, *Yale Economic Essays*, 1, 179–232.
- Stein E. M., Stein J. C., (1991), *Stock Price Distribution with Stochastic Volatility: An Analytic Approach*, *Review of Financial Studies*, 4, 727–752.
- Straumann D., (2005), *Estimation in Conditionally Heteroscedastic Time Series Models*, *Lectures Notes in Statistics*, 181, Springer, Berlin.
- Susmel R., Engle R. F., (1994), *Hourly Volatility Spillovers Between International Equity Markets*, *Journal of International Money and Finance*, 13, 3–25.
- Szyszka A., (1999), *Efektywność rynku a anomalie w rozkładzie stóp zwrotu w czasie*, *Nasz Rynek Kapitałowy*, 108, 55–61.
- Tai C-S., (2001), *A Multivariate GARCH in Mean Approach to Testing Uncovered Interest Parity: Evidence from Asia-Pacific Foreign Exchange Markets*, *The Quarterly Review of Economics and Finance*, 41, 441–460.
- Talaga L., Zieliński Z., (1986), *Analiza spektralna w modelowaniu ekonometrycznym*, PWN, Warszawa.
- Talar P., (2007), *A New GARCH Process with Hyperbolic Noise*, *Przegląd Statystyczny*, 54, 2, 28–46.
- Tarczyński W., (1997a), *Rynki kapitałowe. Metody ilościowe*, vol. II, Agencja Wydawnicza Placet, Warszawa.

- Tarczyński W., (1997b), *Efektywność działania Giełdy Papierów Wartościowych w Warszawie*, *Ekonomista*, 4, 521–538.
- Tarczyński W., Łuniewska M., (2004), *Dywersyfikacja ryzyka na polskim rynku kapitałowym*, Wydawnictwo Placet, Warszawa.
- Tarczyński W., Mojsiewicz M., (2001), *Zarządzanie ryzykiem*, PWE, Warszawa.
- Tauchen G., (1985), *Diagnostic Testing and Evaluation of Maximum Likelihood Models*, *Journal of Econometrics*, 30, 415–443.
- Taylor J. W., (1999), *Evaluating Volatility and Interval Forecasts*, *Journal of Forecasting*, 18, 111–128.
- Taylor S. J., (1986), *Modelling Financial Time Series*, Wiley, Chichester.
- Taylor S. J., (1994), *Modelling Stochastic Volatility: A Review and Comparative Study*, *Mathematical Finance*, 4, 183–204.
- Tobin J. (1958), *Liquidity Preference as Behavior Towards Risk*, *Review of Economic Studies*, 25, 65–86.
- Tong W. H. S., (1996), *An Examination of Dynamic Hedging*, *Journal of International Money and Finance*, 15, 19–35.
- Trzpiot G., Krężolek D., (2006), *Statystyczna weryfikacja modelu CAPM na przykładzie polskiego rynku kapitałowego*, *Ekonomika i Organizacja Gospodarki Żywnościowej*, 60, Zeszyty Naukowe SGGW, Warszawa.
- Tsay R. S., (2005), *Analysis of Financial Time Series*, John Wiley & Sons, Inc.
- Tse Y. K., (2000), *A Test for Constant Correlations in A Multivariate GARCH Model*, *Journal of Econometrics*, 98, 107–127.
- Tse Y. K., (2002), *Residual-Based Diagnostics for Conditional Heteroscedasticity Models*, *The Econometrics Journal*, 5, 358–373.
- Tse Y. K., Tsui A. K. C., (2002), *A Multivariate GARCH Model with Time-Varying Correlations*, *Journal of Business & Economic Statistics*, 20, 351–362.
- Valdes R., (1997), *Emerging Market Contagion: Evidence and Theory*, Central Bank of Chile Working Paper No. 7.
- Van der Weide R., (2002), *GO-GARCH: A Multivariate Generalized Orthogonal GARCH Model*, *Journal of Applied Econometrics*, 17, 549–564.
- Vilasuso J., (2001), *Causality Tests and Conditional Heteroskedasticity: Monte Carlo Evidence*, *Journal of Econometrics*, 101, 25–35.
- Vlaar P., (2000), *Value at Risk Models for Dutch Bond Portfolios*, *Journal of Banking and Finance*, 24, 1131–1154.
- Vlaar P., Palm F., (1993), *The Message in Weekly Exchange Rates in the European Monetary System: Mean Reversion, Conditional Heteroskedasticity and Jumps*, *Journal of Business and Economic Statistics*, 11, 351–360.



- Vrontos I. D., Dellaportas P., Politis D. N., (2003), *A Full-factor Multivariate GARCH Model*, *Econometrics Journal*, 6, 312–334.
- Walter C. A., Lopez J. A., (2000), *Is Implied Correlation Worth Calculating? Evidence from Foreign Exchange Options*, *The Journal of Derivatives*, Vol. 7, No. 3, 65–81.
- Weiss A. A., (1986), *Asymptotic Theory for ARCH Models: Estimation and Testing*, *Econometric Theory*, 2, 107–131.
- Weron A., Weron R., (1998), *Inżynieria finansowa. Wycena instrumentów pochodnych. Symulacje komputerowe. Statystyka rynku*, WNT, Warszawa 1998.
- West K. D., (1996), *Asymptotic Inference About Predictive Ability*, *Econometrica*, 64, 1067–1084.
- West K. D., Cho D., (1995), *The Predictive Ability of Several Models of Exchange Rate Volatility*, *Journal of Econometrics*, 69, 367–391.
- West K. D., Edison H. J., Chou D., (1993), *A Utility Based Comparison of Some Models of Exchange Rate Volatility*, *Journal of International Economics*, 35, 23–45.
- Whaley R. E., (1993), *Derivatives on Market Volatility: Hedging Tools Long Overdue*, *Journal of Derivatives*, 1, 71–84.
- White H., (2000), *A Reality Check for Data Snooping*, *Econometrica*, 68, 1097–1126.
- Whitelaw R. F., (1994), *Time Variations and Covariations in the Expectation and Volatility of Stock Market Returns*, *Journal of Finance*, 49, 515–541.
- Wiggins J. B., (1987), *Option Values under Stochastic Volatility. Theory and Empirical Estimates*, *Journal of Financial Economics*, 19, 351–372.
- Wilder W. (1978), *New Concepts in Technical Trading Systems*, Greensboro, NC: Trend Research.
- Willett A. H., (1951), *The Economic Theory of Risk Insurance*, University of Pennsylvania Press, Philadelphia.
- Witkowska D., Kompa K., (2007), *Analiza własności stóp zwrotu akcji wybranych spółek*, *Rynek Kapitałowy, Skuteczne inwestowanie, cz. I*, Uniwersytet Szczeciński, Szczecin, 2007.
- Xu X., Taylor S. J., (1995), *Conditional Volatility and the Informational Efficiency of the PHLX Currency Options Market*, *Journal of Banking and Finance*, 19, 803–821.
- Yu J., (2002), *Forecasting Volatility in the New Zealand Stock Market*, *Applied Financial Economics*, 12, 193–202.
- Zangari P., (1996), *RiskMetrics – Technical Documents*, J. P. Morgan, New York.

- Zangari P., (1997), *Streamlining the Market Risk Measurement Process*, Risk Metrics Monitor, 1, 29–35.
- Zieliński Z., (1979), *Analiza dynamiki i rytmiczności zjawisk gospodarczych*, PWN, Warszawa.

# **THE CLASS OF GARCH MODELS IN EMPIRICAL FINANCE RESEARCH**

## **SUMMARY**

The introduction of the ARCH model was a milestone in a development of financial econometrics. The GARCH model is one of the most often used models in analysis of financial time series. Despite numerous papers which have been written on both the theoretical aspects and financial applications, we do not know in which applications the GARCH models have the advantage over the other models, which parameterisations of the GARCH models are the most useful in specific applications and it is not clear for which statistical properties of financial time series the GARCH models are more effective than other models. I tried to answer these questions in this book.

In Chapter One, all the univariate specifications of the GARCH models used in the book are presented. Estimation of the parameters, diagnostic tests and examples of the long memory and the calendar effects modelling are also included in this section. In Chapter Two, review and systematisations of the multivariate GARCH models are given. Estimation of the parameters and diagnostic tests are presented as well. This section contains also the results of the investigation of contagion effect and the relations between stock market indices. Chapter Three is about volatility and covariance matrix forecasting. Successive three chapters deal with applications of the GARCH models in specific financial issues. In Chapter Four, value at risk forecasting, estimation of beta parameters and relations between expected return and conditional variance are presented. Chapter Five describes a construction of efficient portfolios and testing the CAPM and APT models. In chapter Six, evaluation of options and portfolio hedging with futures contracts are considered.

It has been shown in the book, that selection of the proper GARCH parameterisation depends first of all on the kind of financial application, measures used for evaluation and properties of the analysed financial time series. It is not possible to unequivocally recommend parameterisations of models for the

specific applications. Naturally, one can indicate specifications, which according to analysis of statistical properties can be potentially more useful.

In the successive sections concerning: volatility forecasting, VaR forecasting, construction of efficient portfolios and risk hedging it has been shown that according to the in-sample investigation for the same measure, which is used out-of-sample, one can point out specifications of models which will be more useful in particular application. Such an in-sample investigation is more likely to choose the best parameterisations than an analysis of statistical properties of time series and information criteria.

Different measures select different models as the most accurate in volatility forecasting. The GARCH forecasts are significantly more precise than forecasts from the models with constant variance. Further extensions of the GARCH models should be targeted at usage of information commonly available in the market, rather than formulation of another parameterisation, which will describe the empirical data better in-sample. Introduction of additional information in construction of the GARCH model or in parameter estimation not always increases accuracy of volatility forecasts. The results depend on the kind of information but also on the way this information is used.

None of the considered methods of VaR estimation give satisfactory results for all confidence levels and positions taken by an investor. Application of the approach with the univariate GARCH model for VaR forecasting of portfolio gives no worse and often even better results than application of the multivariate GARCH models. This result is important from practical point of view, because estimation of parameters for most of specifications of multivariate GARCH models is very difficult or even impossible for a large number of assets.

Estimates of the GARCH-M model with time-varying parameter and the GARCH model with threshold GARCH-M effect can differently explain discrepant empirical results in the literature concerning the relation between the expected return and conditional variance analysed with the GARCH-M model with constant parameter.

Taking into consideration time varying conditional variances and covariances of stock returns in portfolio selection increases, with some exceptions, efficiency of asset allocation process. From economic point of view, the observed differences between the models are not significant, however, results of other author's analyses suggest, that application of the GARCH models for description of variances and covariances of returns in portfolio selection is by all means advisable. Simplification of conditional covariance matrix specification leads most often to reduction of standard deviations of minimum variance port-

folios, frequently opposite to the results of tests. This conclusion is important from practical point of view, because estimation of simplified specifications of the multivariate GARCH models is considerably easier. The results of investigations indicate very limited abilities of applications of the GARCH models in construction and testing the CAPM and APT models. The advantage of usage the GARCH models is capability to test different specifications and restrictions of the CAPM and APT models with taking into consideration time varying conditional variances and covariances of asset returns. However, owing to complicated estimation of the GARCH parameters, the existing parameterisations of models have limited application in the CAPM and APT tests so far. Research has to be conducted for a small number of portfolios. Weakness of the APT and CAPM testing procedures with usage of factor GARCH models is estimation of risk premium on the basis of the univariate GARCH-M model. The results of the investigation show that analysed in such a way relation between expected return and conditional variance is not significant.

Valuations of options based on the GARCH models are more accurate than valuations based on the Black-Scholes model. Moreover, application of the GARCH models enables analysts to explain most pricing biases of the Black-Scholes model.

Not all dynamic hedging strategies with changing conditional variances, covariances or beta parameters are more effective than traditional OLS hedging. The results depend to a great degree on the statistical properties of the underlying and futures contract. Simplification of the GARCH model specification leads most often to increased effectiveness of hedging strategies. In hedging underlying for which futures contract is quoted, taking into consideration during estimation of beta parameters changing conditional variances and covariances does not increase, significantly from economic point of view, the effectiveness of hedging strategy.

Usage of the GARCH models in such applications like volatility forecasting, VaR forecasting, construction of efficient portfolios, valuation of options gives better results than models which assume constant conditional variances and covariances. Exception is hedging, when portfolio is secured by futures contract for which the underlying is the hedged portfolio. The reasons of different performance are concurrent properties and similar behaviour of such a portfolio and futures contract, that is why the beta coefficient used in hedging is stable and close to unity.

Specifications of the GARCH models, which can be recommended as one of most useful, are indicated in the study: in forecasting – the GARCH model

estimated on scaled true range data, in VaR forecasting for portfolio of stocks for 0.99 confidence level – the univariate GARCH model, in construction of efficient portfolios for higher number of assets – the scalar-diagonal and integrated models, in valuation of options – the GJR-GARCH model, in risk hedging - the integrated DCC model. It has to be emphasised, however, that for different evaluation measures or time series with different properties, these specifications may have no more advantage over the other parameterisations.

New specifications of GARCH models: the univariate and multivariate model with threshold GARCH-M effect, the multivariate GARCH-M model with the price of market risk evolving over time according to the random walk process, the extended specification of the APT model with the factor GARCH model which describes unexplained volatility of conditional variances and covariances of asset returns are introduced. The new procedures of estimation: the GARCH model estimated on scaled true range data, risk premia and conditional variances of factors estimated on the basis of the model with threshold GARCH-M effect instead of applying the traditional GARCH-M model in the first stage of estimation of the APT with factor GARCH model are presented. Several new classifications of the multivariate GARCH models are also proposed in the book.

In some applications relatively simple methods, which give better results than usage of the GARCH models are also pointed out. For example, in option valuation – the approach used by practitioners of the financial market, which consists in application of implied volatility constructed from the previous period from the Black-Scholes model, in risk hedging – the moving covariance matrix method with the moving average estimation period chosen for each forecasting period in the pre-sample.

Some of the considered subjects were pondered firstly for the Polish market, like for instance testing the CAPM and APT models with application of the multivariate GARCH models. The others were significantly extended by usage of wider class of models. The number of analyses with different specifications of the multivariate GARCH models for a large amount of assets in such applications like portfolio selection or VaR forecasting is very limited even in the world literature. Large emphasis was laid on the relationship between received results and analysis of conditional variances properties of analysed processes. This aspect of investigation is most often neglected in the literature but it gives possibility to formulate wider conclusions concerning validity and effectiveness of considered models.



