

zgodności rozkładów. Z rozkładem stanowiącym prognozę (f_{it}^p) porównano oddzielnie rozkład empiryczny płac (f_{it}) oraz oddzielnie rozkład teoretyczny ($\hat{f}_{it}$) dopasowany do danych empirycznych. Wartości mierników zamieszczone w tabl. 9.10 wskazują na wysoką dokładność skonstruowanej prognozy rozkładu płac. Częstości rozkładu-prognozy niewiele odbiegają od częstości zaobserwowanych.

Jak wynika z tabl. 9.10, rozkład stanowiący prognozę jest bardziej zbliżony do rozkładu logarytmiczno-normalnego aniżeli empirycznego. Wynika to przypuszczalnie, z faktu, że prognoza otrzymana przy stosowanej tu metodzie prognozowania jest rozkładem wyrównanym o tej samej postaci analitycznej co rozkład teoretyczny.

Podstawowym wnioskiem, jaki należy wyciągnąć z przeprowadzonych rozważań, jest stwierdzenie, że krótkookresowe prognozowanie rozkładów wysokości płac jest w pełni możliwe. Świadczy o tym wysoka dokładność skonstruowanej prognozy.

W omówionej metodzie prognozowania rozkładów płac należy szczególnie uwagę zwrócić na prawidłowe określenie parametrów μ i σ rozkładu logarytmiczno-normalnego w okresie prognozowanym T , gdyż dokładność prognozy rozkładu płac zależy od poprawnego wyznaczenia wartości tych parametrów.

Stawusław
Aleksander

10

"Metody prognozowania
rozkładu płac -
gospodarczych"

PRG 1983

Prognozowanie na podstawie łańcuchów Markowa

10.1. Uwagi wprowadzające

Teoria łańcuchów Markowa, stanowiąca ważny dział rachunku prawdopodobieństwa, znajduje praktyczne zastosowanie w fizyce, genetyce, meteorologii oraz wielu dyscyplinach technicznych. Ogólnie biorąc, przydatność łańcuchów Markowa uwidacznia się w przypadku, gdy nie można przyjąć założenia o niezależności zdarzeń i zmiennych losowych. Także w zagadnieniach ekonomicznych coraz częściej zwraca się uwagę na możliwość praktycznego wykorzystania łańcuchów Markowa, w tym również i do prognozowania zjawisk społeczno-gospodarczych.

Do zalet prognozowania na podstawie łańcuchów Markowa zalicza się (por. prace [76; 86]):

- możliwość predykcji w przypadku, gdy nie są znane przyczyny występowania badanego zjawiska lub gdy jest ich zbyt wiele, aby można je było wszystkie uwzględnić w analizie,
- możliwość konstruowania prognoz dla zjawisk mierzalnych i niemierzalnych (jakościowych),
- możliwość budowy prognoz krótko-, średnio-, a nawet długoterminowych,
- możliwość prognozowania strukturalnych zjawisk ekonomicznych o wzajemnie zależnych w czasie elementach składowych,

— możliwość użycia otrzymanych prognoz do przekształcania przyszłości zgodnie z zaplanowanymi potrzebami¹.

Metoda łańcuchów Markowa jest obecnie szeroko wykorzystywana w praktyce, np. do prognozowania rozkładu dochodów ludności [84, 159], struktury rodzin [28], procesu kształcenia [12], zmian w strukturze produkcji przemysłowej [64], zapotrzebowania na nowe samochody [87], migracji wewnętrznych [15] itd.

Przed przystąpieniem do dalszych rozważań wyjaśnimy kilka podstawowych pojęć².

Przez łańcuch Markowa rozumiemy układ zupełny zdarzeń losowych (stanów) $E_1, \dots, E_s$, w którym przyjmuje się, że prawdopodobieństwo $p_{ij}(t)$ tego, że w doświadczeniu (momencie) t nastąpi zdarzenie E_j pod warunkiem, że w doświadczeniu (momencie) $t-1$ nastąpiło zdarzenie E_i , nie zależy od tego, jakie zdarzenia zachodziły w poprzednich doświadczeniach (momentach). Parametr t przyjmuje tu wartości z pewnego co najwyżej przeliczalnego zbioru. Jeżeli parametr t traktujemy w sposób ciągły, to mówimy o tzw. procesach Markowa, którymi zajmuje się teoria procesów stochastycznych³.

Łańcuch Markowa jest skończony, jeżeli liczba stanów jest ograniczona, nieprzywiedlny — jeżeli każdy stan jest osiągalny z każdego innego stanu, okresowy o okresie k — jeżeli powrót do dowolnego stanu może nastąpić tylko w liczbie kroków będącej wielokrotnością liczby k , jednorodny — jeżeli prawdopodobieństwa $p_{ij}(t)$ nie zależą od t , tzn. $p_{ij}(t) = p_{ij}$ ($i, j = 1, \dots, s$), pochłaniający — jeżeli występuje w nim co najmniej jeden stan, dla którego $p_{ii} = 1$.

¹ Są to tzw. prognozy aktywne pozwalające na określenie decyzji powodujących otrzymanie pożądanego poziomu danego zjawiska w przyszłości, w odróżnieniu od prognoz pasywnych, w których stan przyszłości wynika z analizy zmian w czasie przeszłym, przy założeniu, że nie zmieniają się istniejące uwarunkowania.

² Szczegółowy wykład teorii łańcuchów Markowa można znaleźć w wielu podręcznikach rachunku prawdopodobieństwa, np. [41; 45] względnie w specjalnych monografiach, np. [35; 78].

³ Predykcja przy zastosowaniu metod wchodzących w zakres tej teorii nie jest rozpatrywana w niniejszym rozdziale.

10.2. Prognozowanie na podstawie jednorodnych łańcuchów Markowa

Załóżmy, że rozpatrujemy zjawisko, które w ustalonych momentach $t = 1, 2, \dots$ może znajdować się w jednym z s możliwych stanów, oznaczonych kolejnymi liczbami naturalnymi $1, 2, \dots, s$. Rozwój badanego zjawiska można opisać za pomocą następujących elementów:

1. Macierz prawdopodobieństw przejść:

$$P = [p_{ij}] \quad (i, j = 1, \dots, s), \quad (10.1)$$

gdzie p_{ij} to prawdopodobieństwo warunkowe tego, że zjawisko w okresie t będzie zaliczone do stanu j , jeżeli wiadomo, że w okresie poprzednim $t-1$ znajdowało się w stanie i . Symbol p_{ii} ($i = 1, \dots, s$) oznacza prawdopodobieństwo tego, że zjawisko w momencie t pozostanie w tym samym i -tym stanie, w jakim znajdowało się w momencie $t-1$. Równość $p_{ij} = 0$ określa sytuację, w której przejście zjawiska ze stanu i do stanu j jest niemożliwe, natomiast $p_{ij} = 1$ oznacza, że przejście to jest zdarzeniem pewnym. Elementy macierzy (10.1) spełniają warunki stochastyczności, tzn. $p_{ij} \in \langle 0, 1 \rangle$

dla $i, j = 1, \dots, s$ oraz $\sum_{j=1}^s p_{ij} = 1$ dla $i = 1, \dots, s$. Ten ostatni warunek oznacza, że przejście zjawiska ze stanu i w okresie $t-1$ do jakiegokolwiek innego stanu w okresie t jest zdarzeniem pewnym.

2. Wektor położenia początkowego

$$D_0 = [d_{0j}] \quad (j = 1, \dots, s), \quad (10.2)$$

gdzie d_{0j} jest prawdopodobieństwem absolutnym tego, że zjawisko w okresie wyjściowym znajduje się w stanie j , przy czym $d_{0j} \in \langle 0, 1 \rangle$ oraz

$$\sum_{j=1}^s d_{0j} = 1.$$

Przyjmując, że prawdopodobieństwo przejścia danego zjawiska do i -tego stanu zależy tylko od tego, w jakim stanie znajdowało się to zjawisko w okresie poprzednim, natomiast nie zależy od stanów w okresach wcześniejszych, otrzymujemy następujący wzór:

$$D_t = D_{t-1} P \quad (t = 1, 2, \dots), \quad (10.3)$$

pozwalający na określenie prognozy krótkoterminowej D_t na okres t , przy czym elementy d_{ij} wektora D_t określają prawdopodobieństwa absolutne tego, że zjawisko w okresie prognozowanym t znajdzie się w stanie j .

Rozwiązując rekurencyjne równanie macierzowe (10.3), otrzymujemy równoważny wzór:

$$D_t = D_0 P^t \quad (t = 1, 2, \dots), \quad (10.4)$$

który zazwyczaj jest stosowany do wyznaczania prognoz średniookresowych.

Uzyskanie prognoz długoterminowych $D = \lim_{t \rightarrow \infty} D_t$ zależy od klasy macierzy P , przy czym wyróżnia się tu cztery rodzaje macierzy stochastycznych w zależności od postaci pierwiastków charakterystycznych λ_i oraz

Tablica 10.1

Klasyfikacja macierzy stochastycznych*

Krotności Pierwiastki	$a_1 = 1$	$a_1 > 1$
$ \lambda_i \neq 1$ dla $i \neq 1$	niecykliczne — nierozkładalne	rozkładalne — niecykliczne
$ \lambda_i = 1$ dla $i > 1$	cykliczne — nierozkładalne	cykliczne — rozkładalne

* Macierz P ma zawsze pierwiastek charakterystyczny równy 1 (por. [120]).
Źródło: opracowanie własne.

ich odpowiednich krotności a_i ($i = 1, \dots, k$), gdzie k jest liczbą różnych między sobą pierwiastków oraz $\sum_{i=1}^k a_i = s$ (por. tabl. 10.1):

1. Dla niecyklicznych-nierozkładalnych łańcuchów Markowa (zwanych także łańcuchami regularnymi) istnieje $\lim_{t \rightarrow \infty} D_t = \lim_{t \rightarrow \infty} D_0 P^t = D$, przy czym wektor D nie zależy od wektora początkowego D_0 i jest wyznaczany z następujących zależności:

$$DP = D, \quad (10.5)$$

$$\sum_{j=1}^s d_j = 1. \quad (10.6)$$

2. Dla cyklicznych-nierozkładalnych oraz rozkładalnych-cyklicznych łańcuchów Markowa⁴ nie istnieje $\lim_{t \rightarrow \infty} D_t$. Można w tym przypadku wyznaczyć⁵:

$$D = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \sum_{t=1}^n D_t, \quad (10.7)$$

przy czym wektor D także nie zależy od wektora początkowego D_0 . Składowe d_j ($j = 1, \dots, s$) wektora D można interpretować jako średnie prawdopodobieństwo znajdowania się zjawiska w stanie j w nieograniczonym czasie (przeciętny udział czasu przebywania zjawiska w stanie j). Tak więc dla stanu, któremu odpowiada największe prawdopodobieństwo, można się spodziewać największej liczby pojawień analizowanego zjawiska w tym stanie.

3. Dla rozkładalnych-niecyklicznych łańcuchów Markowa istnieje granica $\lim_{t \rightarrow \infty} D_t$, przy czym jest ona zależna od wektora położenia początkowego D_0 . Długoterminową prognozę D określa się w takim przypadku poprzez podział macierzy P na bloki regularnych macierzy stochastycznych i wyznaczenie dla każdego bloku X_i macierzy ergodycznych $\lim_{t \rightarrow \infty} X_i^t$, przy czym i jest numerem bloku. Z kolei wstawiając do macierzy P w miejsce wydzielonych bloków uzyskane macierze ergodyczne, otrzymujemy macierz P' , która służy do budowy prognozy zgodnie z wzorem:

$$D = D_0 P'. \quad (10.8)$$

10.3. Szacowanie macierzy prawdopodobieństw przejść

Podstawowym problemem przy prognozowaniu na podstawie modelu łańcuchów Markowa jest możliwość oszacowania elementów macierzy przejść P . Metoda estymacji zależy od charakteru posiadanych informacji empirycznych, przy czym wyróżnia się tu dwa rodzaje danych: 1) kompletne (indywidualne, mikroekonomiczne) oraz 2) niekompletne (zbiorowe, makroekonomiczne).

⁴ W praktyce ten typ łańcuchów spotyka się bardzo rzadko.

⁵ Odbywa się to poprzez rozwiązanie układu równań (10.5)—(10.6) oddzielnie w ramach każdego bloku.

W pierwszym przypadku należy dysponować następującymi informacjami:

- liczba obiektów w stanie i w okresie t oznaczana symbolem n_i^t , gdzie $i = 1, \dots, s$ oraz $t = 1, \dots, m$;
- liczba zaobserwowanych przejść obiektów ze stanu i do stanu j w czasie od $t-1$ do t oznaczana symbolem n_{ij}^t , gdzie $i, j = 1, \dots, s$ oraz $t = 1, \dots, m$.

Estymatorem $\hat{p}_{ij}$ prawdopodobieństwa p_{ij} wyznaczonym według zasady największej wiarygodności⁶ jest:

$$\hat{p}_{ij} = \frac{\sum_{t=1}^m n_{ij}^t}{\sum_{t=1}^m n_i^{t-1}} \quad (i, j = 1, \dots, s), \quad (10.9)$$

przy czym:

$$n_i^{t-1} = \sum_{j=1}^s n_{ij}^t \quad (i = 1, \dots, s; \quad t = 1, \dots, s). \quad (10.10)$$

W szczególnym przypadku, gdy $m = 1$, wzory powyższe redukują się do:

$$\hat{p}_{ij} = \frac{n_{ij}}{\sum_{j=1}^s n_{ij}} \quad (i, j = 1, \dots, s). \quad (10.11)$$

Jeżeli dysponujemy danymi niekompletnymi (wyłącznie informacjami o parametrach n_i^t), to oszacowanie macierzy prawdopodobieństw przejść jest znacznie trudniejsze i wymaga zastosowania złożonych metod numerycznych przy użyciu maszyn cyfrowych⁷.

Jedną z najczęściej stosowanych metod szacowania macierzy P w przypadku danych niekompletnych jest metoda minimalizacji bezwzględnych odchyień. Konieczne są tu informacje o prawdopodobieństwach absolutnych położenia danego procesu w poszczególnych stanach $j = 1, \dots, s$ dla kolejnych momentów $t = 1, \dots, m$:

$$D_t = [d_{ij}]. \quad (10.12)$$

⁶ Estymator ten ma takie własności, jak: zgodność, asymptotyczna nieobciążoność, asymptotyczna efektywność, rozkład asymptotycznie normalny, dostateczność i niezmienniczość.

⁷ Omówienie wielu procedur z tego zakresu można znaleźć w monografii [93].

Elementy macierzy P wyznaczamy w ten sposób, aby wyrażenie

$$F = \sum_{i=1}^{m-1} \sum_{j=1}^s w_{ij} \quad (10.13)$$

osiągało minimum, przy czym w_{ij} to składowe wektorów określonych następującymi wzorami:

$$W_t = D_t P - D_{t+1} \quad (t = 1, \dots, m-1). \quad (10.14)$$

Zadanie powyższe można rozwiązać za pomocą standardowych metod programowania liniowego, stosując przekształcenie:

$$|w_{ij}| = \max(0; w_{ij}) + \max(0; -w_{ij}), \quad (10.15)$$

przy warunkach, że p_{ij} , $\max(0; w_{ij})$, $\max(0; -w_{ij}) \geq 0$ oraz $\sum_{j=1}^s p_{ij} = 1$ dla $i, j = 1, \dots, s$.

10.4. Problem predykcji na podstawie niejednorodnych łańcuchów Markowa

Zasadniczą cechą niejednorodnych łańcuchów Markowa jest wprowadzenie do modelu zmiennych w czasie prawdopodobieństw przejść p_{ij} . Model ten ma więc bardziej realne założenia teoretyczne, zwłaszcza w przypadku konstruowania prognoz na dłuższe okresy. Predykcja na podstawie niejednorodnych łańcuchów Markowa jest jednak o wiele trudniejsza, głównie z powodu konieczności oszacowania nie jednej, lecz kilku macierzy prawdopodobieństw przejść P_t .

Rozwój zjawiska przebiegającego według niejednorodnego łańcucha Markowa jest opisany przez ciąg macierzy prawdopodobieństw przejść P_t ($t = 1, 2, \dots$) oraz wektor położenia początkowego D_0 , które to elementy mają identyczną budowę, jak (10.1) oraz (10.2). Prognozy budowane są na analogicznej zasadzie do jednorodnych łańcuchów Markowa, przy czym w związku ze zmieniającymi się w czasie macierzami P_t odpowiednie wzory przyjmują następującą postać:

$$D_t = D_{t-1} P_t \quad (t = 1, 2, \dots) \quad (10.16)$$

względnie:

$$D_t = D_0 P_1 P_2 \dots P_t \quad (t = 1, 2, \dots). \quad (10.17)$$

W celu wyznaczenia elementów macierzy prawdopodobieństw przejść P , dla kolejnych okresów prognozowanych proponuje się zazwyczaj (por. prace [64; 76]) następującą procedurę.

1. Szacuje się macierze przejść dla kilku okresów, z których dysponuje się informacjami empirycznymi, korzystając w przypadku danych kompletnych z wzoru (10.11), zaś w przypadku danych niekompletnych — z metody przedstawionej w poprzednim podrozdziale.

2. Z odpowiadających sobie elementów macierzy przejść (z wyjątkiem elementów pierwszej kolumny) konstruuje się szeregi czasowe, dla których szacuje się następnie modele obrazujące ich tendencję rozwojową. Można w tym celu wykorzystać funkcje trendu o dowolnych postaciach analitycznych, modele adaptacyjne, metodę wag harmonicznych itp.

3. Opierając się na oszacowanych modelach tendencji rozwojowej, wyznacza się dla poszczególnych elementów p_{ij} wartości prognoz dla kolejnych okresów prognozowanych $t = 1, 2, \dots$

4. Szukane elementy macierzy przejść P , równe są odpowiednim prognozom wyznaczonym w poprzednim punkcie, przy czym dla zachowania

warunku, że $\sum_{j=1}^s p_{ij} = 1$, elementy pierwszych kolumn tych macierzy wyznaczane są z wzoru:

$$p'_{i1} = 1 - \sum_{j=2}^s p'_{ij} \quad (i = 1, 2, \dots). \quad (10.18)$$

10.5. Statystyczna weryfikacja wybranych własności łańcuchów Markowa

Obecnie przedstawimy 2 testy statystyczne przydatne w trakcie prognozowania za pomocą modeli łańcuchów Markowa (por. prace [2; 76]). Pierwszy test służy do sprawdzenia hipotezy o możliwości opisanego rozwoju badanego zjawiska za pomocą łańcuchów Markowa, co można wyrazić $H_0: p_{1j} = p_{2j} = \dots = p_{sj} = p_j$, dla $j = 1, \dots, s$. Weryfikacji prawdziwości powyższych hipotez dokonuje się za pomocą ciągu statystyk określonych wzorami:

$$\lambda_j = \prod_{i=1}^s \left(\frac{\tilde{p}_j}{\tilde{p}_{ij}} \right)^{n_{ij}}, \quad (10.19)$$

$$\chi_j^2 = \frac{\sum_{i=1}^s n_i (\tilde{p}_{ij} - \tilde{p}_j)^2}{\tilde{p}_j}, \quad (10.20)$$

gdzie:

$$\tilde{p}_j = \frac{\sum_{i=1}^s n_i}{m \sum_{i=1}^s \sum_{j=1}^s n'_{ij}}, \quad (10.21)$$

$$\tilde{p}_{ij} = \frac{\sum_{t=2}^m n'_{it}}{\sum_{t=2}^m \sum_{j=1}^s n'_{it}}, \quad (10.22)$$

$$n_{ij} = \sum_{t=2}^m n'_{it}, \quad (10.23)$$

$$n_i = \sum_{j=1}^{m-1} n'_i, \quad (10.24)$$

przy czym znaczenie symboli n'_{ij} oraz n'_i wyjaśnione jest w podrozdz. 10.3. Hipoteza H_0 jest prawdziwa, jeżeli — $2\lambda_j$ oraz χ_j^2 są asymptotycznie równoważne i mają asymptotyczny rozkład χ^2 z $(s-1)^2$ stopniami swobody.

Drugi test jest przeznaczony do weryfikowania hipotezy, że łańcuch Markowa jest łańcuchem jednorodnym — $H_0: p'_{ij} = p_{ij}$ ($i, j = 1, \dots, s$). W celu sprawdzenia powyższej hipotezy można skorzystać ze statystyki:

$$\chi^2 = \sum_{i=1}^s \left[\frac{\sum_{j=1}^s \sum_{t=1}^m n'_{it}^{-1} (\tilde{p}'_{ij} - \tilde{p}_{ij})^2}{\tilde{p}_{ij}} \right] \quad (10.25)$$

lub:

$$\lambda = \prod_{i=1}^s \prod_{t=2}^m \prod_{j=1}^s \left(\frac{\tilde{p}_{ij}}{\tilde{p}'_{ij}} \right)^{n'_{it}}, \quad (10.26)$$

gdzie symbol $\tilde{p}_{ij}$ jest określony wzorem (10.22), natomiast:

$$\tilde{p}'_{ij} = \frac{n'_{it}}{n'_{i-1}}, \quad (10.27)$$

Hipoteza H_0 jest prawdziwa, jeżeli statystyka (10.25) względnie zmienna $-2 \log \lambda$ ma asymptotyczny rozkład χ^2 z $s(s-1)$ ($m-1$) stopniami swobody.

Jak można zauważyć, stosowanie przedstawionych powyżej testów jest ograniczone do przypadków, w których dysponujemy danymi kompletnymi.

10.6. Ekonometryczne szacowanie macierzy przejść

Podstawowy warunek wyróżniający łańcuchy Markowa można sformułować w postaci przypominającej zapis autoregresyjnych modeli ekonometrycznych ze zmiennymi opóźnionymi:

$$Y_{jt} = f(Y_{t,t-1}, u_{jt}) \quad (i, j = 1, \dots, s), \quad (10.28)$$

co oznacza, że stan j zjawiska w okresie t zależy od stanów tego zjawiska w okresie poprzednim z dokładnością do składnika losowego u_{jt} .

Przyjmując liniowy charakter funkcji (10.28), otrzymujemy⁸:

$$Y_{jt} = \sum_{i=1}^s p_{ij} Y_{i,t-1} + u_{jt} \quad (j = 1, \dots, s), \quad (10.29)$$

gdzie p_{ij} to współczynniki określające wielkość wpływu znajdowania się zjawiska w okresie $t-1$ w stanie i na fakt znalezienia się go w okresie t w stanie j . Są to więc parametry równoważne elementom macierzy prawdopodobieństwa przejść P , jeżeli zostaną narzucone na nie ograniczenia, że $p_{ij} \geq 0$ oraz $\sum_{j=1}^s p_{ij} = 1$.

Z postaci zależności (10.29) wynika, że można ją traktować jako wielorównaniowy prosty model ekonometryczny składający się z s równań typu:

$$Y_j = X_j p_j + u_j \quad (j = 1, \dots, s), \quad (10.30)$$

gdzie:

$$Y_j = \begin{bmatrix} y_{j2} \\ y_{j3} \\ \vdots \\ y_{jt} \end{bmatrix}, \quad X_j = \begin{bmatrix} y_{11} & y_{21} & \dots & y_{s1} \\ y_{12} & y_{22} & \dots & y_{s2} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_{1,t-1} & y_{2,t-1} & \dots & y_{s,t-1} \end{bmatrix},$$

⁸ Model (10.29) stanowi zapis jednorodnego łańcucha Markowa, gdzie wartości parametrów p_{ij} są stałe w czasie.

$$p_j = \begin{bmatrix} p_{1j} \\ p_{2j} \\ \vdots \\ p_{sj} \end{bmatrix}, \quad u_j = \begin{bmatrix} u_{j2} \\ u_{j3} \\ \vdots \\ u_{jt} \end{bmatrix}.$$

Zapis tego modelu w bardziej zwartej formie jest następujący:

$$y = Xp + u, \quad (10.31)$$

gdzie:

$$y = \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_s \end{bmatrix}, \quad X = \begin{bmatrix} X_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & X_2 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & \dots & X_s \end{bmatrix},$$

$$p = \begin{bmatrix} p_1 \\ p_2 \\ \vdots \\ p_s \end{bmatrix}, \quad u = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ \vdots \\ u_s \end{bmatrix},$$

przy czym X jest macierzą blokowo-diagonalną o jednakowych blokach X_j .

Parametry modelu (10.31) można oszacować za pomocą klasycznej metody najmniejszych kwadratów, korzystając z wzoru:

$$\hat{p} = (X'X)^{-1}X'y \quad (10.32)$$

Jednakże, jak wykazano w pracy [93], metoda ta zapewnia tylko spełnienie warunku, że $\sum_{j=1}^s \hat{p}_{ij} = 1$, natomiast nie zawsze dostarcza ocen nieujemnych.

Dlatego też do estymacji modelu (10.31) celowe jest wykorzystanie klasycznej metody najmniejszych kwadratów przy warunkach pobocznych względnie zrezygnowanie z idei najmniejszych kwadratów i stosowanie np. metody programowania kwadratowego.

Konstrukcja prognoz na podstawie modelu (10.31) przebiega podobnie, jak w przypadku predykcji na podstawie jednorównaniowych lub wielorównaniowych prostych modeli ekonometrycznych, przy czym prognozowanie jest tu znacznie ułatwione z uwagi na fakt dysponowania realizacjami zmiennych z góry ustalonych dla okresu prognozowanego⁹. Ponadto

⁹ Dla pierwszego okresu prognozowanego są one równe zaobserwowanym wartościom tych zmiennych z okresu poprzedniego, natomiast dla okresów następnych można je przyjąć na poziomie prognoz uzyskiwanych w poprzednim kroku.

istnieje tu możliwość oceny stopnia poprawności odwzorowania przebiegu rozwoju analizowanego zjawiska przez oszacowany model oraz określenia rzędu spodziewanego błędu predykcji *ex ante*¹⁰.

Model niejednorodnego łańcucha Markowa można, analogicznie do (10.25), zapisać w następującej postaci:

$$Y_{jt} = \sum_{i=1}^s p_{ij} Y_{i,t-1} + u_{jt} \quad (j = 1, \dots, s; t = 1, 2, \dots), \quad (10.33)$$

przy czym zasadnicza różnica w stosunku do modelu łańcuchów jednorodnych polega na wprowadzeniu zmiennych w czasie parametrów p_{ij} . Parametry modelu (10.33) oraz wyniki predykcji na podstawie tego modelu proponuje się zazwyczaj szacować za pomocą regresji segmentowej¹¹.

10.7. Przykłady empiryczne

Przykład 1 (por. pracę [116, s. 131 i nast.]. Produkowany wyrób może nie mieć znaku jakości (stan „0”), może mieć znak jakości „1” lub „Q”. Dana jest następująca macierz przejścia P:

Stan	„0”	„1”	„Q”
„0”	0,500	0,500	0,000
„1”	0,250	0,500	0,250
„Q”	0,125	0,250	0,625

oraz wektor położenia początkowego:

$$D_0 = [0 \ 1 \ 0],$$

co oznacza, że w okresie wyjściowym wyrób ma znak jakości „1”. Korzystając ze wzoru (10.3) lub (10.4), otrzymujemy następujące prognozy dla dwóch pierwszych okresów posiadania poszczególnych znaków jakości przez rozpatrywany wyrób:

¹⁰ Bliższe uwagi w tym zakresie można znaleźć w monografiach na temat ekonomicznych metod predykcji (por. np. prace [59; 157]).

¹¹ Szeroki przegląd teorii funkcji segmentowych oraz zastosowań ich do celów predykcji można znaleźć m.in. w pracach [9; 130].

$$D_1 = D_0 P = [0 \ 1 \ 0] \begin{bmatrix} 0,500 & 0,500 & 0,000 \\ 0,250 & 0,500 & 0,250 \\ 0,125 & 0,250 & 0,625 \end{bmatrix} = [0,25 \ 0,50 \ 0,25],$$

$$D_2 = D_1 P = [0,25 \ 0,50 \ 0,25] \begin{bmatrix} 0,500 & 0,500 & 0,000 \\ 0,250 & 0,500 & 0,250 \\ 0,125 & 0,250 & 0,625 \end{bmatrix} = [0,28 \ 0,44 \ 0,28].$$

W celu wyznaczenia prognozy długoterminowej stosujemy wzory (10.5) — (10.6), zgodnie z którymi należy rozwiązać następujący układ równań:

$$0,5d_1 + 0,25d_2 + 0,125d_3 = d_1,$$

$$0,5d_1 + 0,5d_2 + 0,25d_3 = d_2,$$

$$0,25d_2 + 0,625d_3 = d_3,$$

przy czym:

$$d_1 + d_2 + d_3 = 1,$$

co prowadzi do wyniku:

$$D = [0,29 \ 0,42 \ 0,29].$$

Interpretując otrzymany rezultat, można stwierdzić, że po długim okresie wytwarzania wyrobu najprawdopodobniej będzie on miał znak jakości „1”, natomiast prawdopodobieństwa, że będzie on miał znak „Q” lub nie będzie w ogóle miał znaku jakości, są jednakowe i nieco mniejsze. Można też stwierdzić, że na każde 100 jednostek czasowych przez 42 jednostki wyrób ten będzie miał znak „1”, przez 29 jednostek znak „Q”, a przez 29 jednostek nie będzie miał żadnego znaku jakości. Wyniki te nie zależą od tego, jaki znak jakości ma wyrób w momencie wyjściowym.

Przykład 2 (por. pracę [88, s. 144—5]). Analizowane jest zjawisko starzenia się w czasie autobusów, które mogą być zaliczone do jednej z czterech klas wieku: 0 (nowe), 1 (o rocznym okresie eksploatacji), 2 (o dwuletnim okresie eksploatacji), 3 (o trzyletnim okresie eksploatacji). Na podstawie informacji zamieszczonych w tabl. 10.2 należy oszacować macierz prawdopodobieństw przejść P.

W celu zastosowania wzoru (10.9) należy najpierw wyznaczyć liczebności n'_{ij} ($i = 1, 2$) zaobserwowanych przejść autobusów ze stanu i do stanu j ($i, j = 0, 1, 2, 3$) w okresach od 1964 do 1965 (por. tabl. 10.3) oraz od 1965 do 1964 (por. tabl. 10.4).

Jak można zauważyć, liczebności zerowe $n'_{ij} = 0$ występują wszędzie tam, gdzie $|i-j| > 1$ dla $i, j = 1, 2, 3$, co oznacza, że w ciągu jednego roku

Tablica 10.2

Liczba autobusów zarejestrowanych
w latach 1963—1965 według wieku
(liczebności n_i^t)

Wiek (i)	Lata (t)		
	1963	1964	1965
	0	1	2
0	500	600	700
1	300	400	500
2	100	300	350
3	100	50	250

Źródło: opracowanie własne.

Tablica 10.3

Liczebności przejść ze stanu i do j
w pierwszym okresie (n_{ij}^1)

i \ j	0	1	2	3
	0	100	400	0
1	0	0	300	0
2	50	0	0	50
3	100	0	0	0

Źródło: opracowanie własne.

Tablica 10.4

Liczebności przejść ze stanu i do j
w drugim okresie (n_{ij}^2)

i \ j	0	1	2	3
	0	100	500	0
1	50	0	350	0
2	50	0	0	250
3	50	0	0	0

Źródło: opracowanie własne.

wiek autobusu nie może zmienić się więcej niż o 1 rok. Podobnie w przypadku, gdy $i = j$ dla $i, j = 1, 2, 3$, liczebność $n_{ij}^t = 0$, ponieważ upływ 1 roku musi „postarzeć” autobusy o 1 rok. Liczebności n_{01}^t , n_{12}^t oraz n_{23}^t równe są liczbie autobusów w wieku 1, 2, 3 lat w danym roku n_i^t ($i = 1, 2, 3$), ponieważ w roku poprzednim były one o 1 rok „młodsze”. Liczebności znajdujące się w pierwszych kolumnach n_{i0}^t ($i = 0, \dots, 3$) oznaczają autobusy w wieku i wymienione na nowe wskutek np. awarii. Wyznaczamy je z wzoru:

$$n_{i0}^t = n_i^{t-1} - n_{i+1}^t \quad (i = 0, \dots, s), \quad (10.34)$$

przy czym $s = 3$, $t = 1, 2$, natomiast $n_4^t = 0$.

Z kolei wykorzystując wzór (10.9), otrzymujemy szukaną macierz przejść P (por. tabl. 10.5).

Tablica 10.5

Macierz prawdopodobieństw przejść P autobusów ze stanu i do j

i \ j	0	1	2	3
	0	1	2	3
0	$\frac{100+100}{500+600} = 0,18$	$\frac{400+500}{500+600} = 0,82$	0	0
1	$\frac{50+0}{300+400} = 0,07$	0	$\frac{300+350}{300+400} = 0,93$	0
2	$\frac{50+50}{100+300} = 0,25$	0	0	$\frac{50+250}{100+300} = 0,75$
3	$\frac{100+50}{100+50} = 1,00$	0	0	0

Źródło: opracowanie własne.

Przykład 3 (por. pracę [86]). Dane statystyczne dotyczące urodzaju (A) i nieurodza (B) w ciągu 21 lat przedstawiają się następująco:

A BBB A BB AAAA BB AAA B A BBB.

Wynikające z przytoczonego szeregu liczebności przejść n_{ij} ($i, j = 1, 2$) między poszczególnymi stanami podano w poniższym zestawieniu:

Stan	A	B
A	5	5
B	4	6

Korzystając z wzoru (10.11), uzyskujemy elementy macierzy prawdopodobieństw przejść P:

Stan	A	B
A	$\frac{5}{5+5} = 0,5$	$\frac{5}{5+5} = 0,5$
B	$\frac{4}{4+6} = 0,4$	$\frac{6}{4+6} = 0,6$

Ponieważ w ostatnim okresie wystąpił nieurodzaj, więc:

$$D_0 = [0 \ 1].$$

Prognozy dla następnych okresów są równe:

$$D_1 = D_0 P = [0 \ 1] \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{bmatrix} = [0,4 \ 0,6],$$

$$D_2 = D_1 P = [0,4 \ 0,6] \begin{bmatrix} 0,5 & 0,5 \\ 0,4 & 0,6 \end{bmatrix} = [0,44 \ 0,56],$$

co oznacza, że w najbliższym czasie należy się spodziewać nieurodzaju jako stanu bardziej prawdopodobnego.

Prognozę długoterminową konstruujemy, rozwiązując układ równań:

$$0,5d_1 + 0,4d_2 = d_1,$$

$$0,5d_1 + 0,6d_2 = d_1,$$

$$d_1 + d_2 = 1,$$

co prowadzi do wyniku:

$$D = [0,45 \ 0,55].$$

Otrzymany rezultat można zinterpretować w ten sposób, że na przestrzeni długiego okresu, np. 100 lat, przez 45 lat będzie występować urodzaj, natomiast przez 55 lat — nieurodzaj. Warto zwrócić uwagę, że otrzymane prognozy różnią się od prognoz wyznaczonych nasuwającą się metodą opartą na częstości występowania obu stanów:

$$d_1 = \frac{A}{A+B} = \frac{10}{21} = 0,47,$$

$$d_2 = \frac{B}{A+B} = \frac{11}{21} = 0,53.$$

Przeprowadzoną analizę można rozszerzyć poprzez badanie łańcuchów Markowa rzędu¹² wyższego niż 1. Przyjmując jako podstawę rozważań podwójnie wiązany łańcuch, sprowadzamy go do łańcucha rzędu pierwszego, uwzględniając cztery możliwe stany AA, AB, BA, BB.

Liczebności przejść n_{ij} między poszczególnymi stanami przedstawiono w tabl. 10.6.

Tablica 10.6

Liczebności przejść między stanami urodzaju i nieurodzaju

Stany	AA	AB	BA	BB
AA	1	2	1	1
AB	0	1	2	2
BA	2	0	0	2
BB	2	1	1	0

Źródło: opracowanie własne.

Tablica 10.7

Macierz przejść między stanami urodzaju i nieurodzaju

Stany	AA	AB	BA	BB
AA	0,20	0,40	0,20	0,20
AB	0,00	0,20	0,40	0,40
BA	0,50	0,00	0,00	0,50
BB	0,50	0,25	0,25	0,00

Źródło: opracowanie własne.

¹² W łańcuchu Markowa rzędu r przyjmuje się, że prawdopodobieństwo realizacji danego zdarzenia zależy od realizacji w r poprzednich okresach. Każdy łańcuch Markowa rzędu $r > 1$ można przekształcić w równoważny mu łańcuch pojedynczo wiązany, zwiększając odpowiednio liczbę stanów.

Macierz przejść wyznaczona z wzoru (10.11) przyjmuje postać podaną w tabl. 10.7.

Ponieważ w ciągu ostatnich dwóch lat zaobserwowano stan BB, więc wektor położenia początkowego jest równy:

$$D_0 = [0 \ 0 \ 0 \ 1],$$

natomiast prognozy na „okresy” następne wynoszą:

$$D_1 = D_0 P = [0 \ 0 \ 0 \ 1] \begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,2 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,25 & 0,25 & 0 \end{bmatrix} = [0,50 \ 0,25 \ 0,25 \ 0],$$

$$D_2 = D_0 P^2 = [0,5 \ 0,25 \ 0,25 \ 0] \begin{bmatrix} 0,2 & 0,4 & 0,2 & 0,2 \\ 0 & 0,2 & 0,4 & 0,4 \\ 0,5 & 0 & 0 & 0,5 \\ 0,5 & 0,25 & 0,25 & 0 \end{bmatrix} = [0,22 \ 0,25 \ 0,20 \ 0,32].$$

Tak więc w najbliższych dwóch latach najprawdopodobniej będzie miał miejsce stan AA (kolejne dwa lata urodzaju), natomiast znikome szanse ma pojawienie się stanu BB (dwóch kolejnych lat nieurodzaju). Jeżeli chodzi o dalsze dwa lata, to sytuacja jest tu bardziej nieokreślona, jako że prawdopodobieństwa poszczególnych stanów są tu stosunkowo wyrównane.

Podobnie można rozważyć w powyższym przykładzie łańcuch potrójnie wiązany, sprowadzając go do łańcucha pojedynczego o 8 stanach: AAA, AAB, ABA, ABB, BAA, BAB, BBA oraz BBB. Warto tu zwrócić uwagę, że otrzymane rezultaty mogą się znacznie różnić między sobą. Decyzja o tym, jakiego rzędu łańcuch Markowa najlepiej odzwierciedla rozwój danego zjawiska, powinna wynikać z przesłanek merytorycznych związanych z charakterem zależności występujących w prognozowanym procesie.

11

Zastosowanie modeli Leontiefa do celów prognozowania ekonomicznego

11.1. Uwagi ogólne

Liniowe modele przepływów międzygałęziowych¹ są szeroko stosowanym narzędziem badawczym na różnych szczeblach planowania, zwłaszcza tam, gdzie istnieje wewnętrzna wymiana dóbr materialnych w postaci współzależnych strumieni przepływów rzeczowych lub finansowych. Modele Leontiefa mogą być stosowane do różnych celów, przy czym najczęściej do:

- sprawozdawczości społecznej, zarówno w krajach kapitalistycznych, jak i socjalistycznych, będącej „fotografią” współzależności między wyróżnionymi podukładami ekonomicznymi,
- koordynacji planów gospodarczych, zarówno na etapie ich sporządzania, jak i w trakcie realizacji,
- sporządzenia krótko- i średniookresowych prognoz równowagi ekonomicznej,
- opisu prognozowania wzrostu gospodarczego wyróżnionych układów i produktów ekonomicznych,
- budowy modeli optymalizacyjnych opartych na programowaniu matematycznym,
- konstrukcji modeli ekonometryczno-decyzyjnych oraz decyzyjno-symulacyjnych.

¹ W literaturze spotyka się także i inne określenia, jak np. analiza nakładów i wyników produkcji, analiza input-output, analiza zależności (powiązań) międzygałęziowych.