

Literatura:

- Henryk Głowacki *Mechanika techniczna, statyka i kinematyka*
- Jan Misiak *Mechanika techniczna, tom 1,2*
- R.Feynman *Feynmana wykłady z fizyki*
- Janusz Araminowicz *Zbiór zadań z fizyki*
- Ferdinand P. Beer, E. Russell Johnston, David F. Mazurek, Phillip J. Cornwell, Elliot R. Eisenberg *Vector Mechanics For Engineers*
- I.W. Mieszczerski *Zbiór zadań z mechaniki*

Część I

Ruch punktów

Ruch punktu we współrzędnych kartezjańskich

1. Ciało zawieszone na sprężystej linie drga zgodnie z równaniem $x = a \sin\left(kt + \frac{3\pi}{2}\right)$, gdzie a wyrażone jest w cm, a k w s^{-1} . Obliczyć amplitudę drgań i częstość kołową, czyli pulsację drgań ciała, jeżeli okres drgań wynosi 0.4 s, a w chwili początkowej $x_0 = 4$ cm. Narysować wykres współrzędnej x w zależności od czasu t .

2. Z podanych równań ruchu punktu wyprowadzić równania toru.

1. $x = 20t^2 + 5, y = 15t^2 + 3$

2. $x = 4t - 2t^2, y = 3t - 1, 5t^2$

3. $x = 5 + 3 \cos t, y = 4 \sin t$

4. $x = at^2, y = bt$

5. $x = t \sin \frac{\pi}{2}t, y = 4 \cos \frac{\pi}{2}t$

6. $x = 5 \cos t, y = 3 - 5 \sin t$

7. $x = 3 \cos\left(\frac{\pi}{8} + \pi t\right), y = 4 \sin\left(\frac{\pi}{4} + \pi t\right)$

3. Z danych równań ruchu punktu wyprowadzić równanie toru oraz podać równanie ruchu punktu po torze (równanie drogi), licząc drogę od początkowego położenia punktu.

1. $x = 3t^2, y = 4t^2$

2. $x = 3 \sin t, y = 3 \cos t$

3. $x = a \cos^2 t, y = a \sin^2 t$

4. $x = 5 \cos 5t^2, y = 5 \sin 5t^2$

4. Suwnica porusza się wzdłuż hali zgodnie z równaniem $x = t$; po suwnicy toczy się wózek w kierunku prostopadłym do jej ruchu według równania $y = 1,5t$ (gdzie x i y w metrach, t – w sekundach). Łańcuch nawija się z prędkością $v = 0.5$ m/s. Wyznaczyć tor środka ciężkości podnoszonego ciała. W chwili początkowej środek ten znajduje się w poziomej płaszczyźnie Oxy, oś Oz jest pionowa.
5. Równanie ruchu punktu materialnego ma postać: $\vec{r} = A \cos(\omega t)\vec{i} + A \sin(\omega t)\vec{j}$. Jak wygląda tor punktu? Jak zależy od czasu wektor prędkości i przyspieszenia tego punktu?
6. Znaleźć równanie toru punktu, którego ruch jest złożony z wzajemnie prostopadłych drgań o różnej częstotliwości:
1. $x = a \sin 2\omega t, y = a \sin \omega t$
 2. $x = a \cos 2\omega t, y = a \cos \omega t$
7. Znaleźć tor punktu wykonującego jednocześnie dwa harmoniczne drgania o równej częstotliwości, lecz o różnych amplitudach i fazach, jeżeli drgania te odbywają się w kierunkach wzajemnie prostopadłych osi x i y : $x = a \sin(kt + \alpha), y = b \sin(kt + \beta)$.
8. Równanie ruchu punktu materialnego ma postać: $\vec{r} = A \cos(\omega t)\vec{i} + B \sin(\omega t)\vec{j}$. Jak wygląda tor punktu? Jak zależy od czasu wektor prędkości i przyspieszenia tego punktu? Wyznacz promień krzywizny toru dla $\omega t = 0, \omega t = \frac{\pi}{2}, \omega t = \frac{\pi}{4}$.
9. Równanie ruchu punktu materialnego ma postać: $\vec{r} = A \cos(\omega t^2)\vec{i} + A \sin(\omega t^2)\vec{j}$. Jak wygląda tor punktu? Jak zależy od czasu wektor prędkości i przyspieszenia tego punktu? Znajdź zależność od czasu przyspieszenia stycznego i normalnego. Wyznacz promień krzywizny toru w dowolnym punkcie.
10. Równanie ruchu punktu materialnego ma postać: $\vec{r} = A \cos^2(\omega t)\vec{i} + B \sin^2(\omega t)\vec{j}$. Jak wygląda tor punktu? Jak zależy od czasu wektor prędkości i przyspieszenia tego punktu?
11. Ruch punktu zakreślającego figurę Lissajous określony jest równaniami $x = 3 \sin t, y = 2 \cos 2t$ (gdzie t – w sekundach). Znaleźć równanie toru, wykreślić go, pokazać kierunek ruchu punktu w różnych chwilach oraz znaleźć czas od chwili początku ruchu, w którym punkt przejdzie po raz pierwszy przez oś Ox.
12. Równanie ruchu punktu materialnego ma postać: $\vec{r} = A \sin(\omega t)\vec{i} + A \sin(2\omega t)\vec{j}$. Jak wygląda tor punktu? Jak zależy od czasu wektor prędkości i przyspieszenia tego punktu? Wyznacz promień krzywizny toru dla $\omega t = 0, \omega t = \frac{\pi}{2}, \omega t = \frac{\pi}{4}$.
13. Równanie ruchu punktu materialnego ma postać: $\vec{r} = A \cos(\omega t)\vec{i} + A \sin(\omega t)\vec{j} + vt\vec{k}$. Jak wygląda tor punktu? Jak zależy od czasu wektor prędkości i przyspieszenia tego punktu? Znajdź zależność od czasu przyspieszenia stycznego i normalnego. Wyznacz krzywiznę toru w danym punkcie.
14. Równanie ruchu punktu materialnego ma postać: $\vec{r} = A \sin(\omega t)\vec{i} + A \sin(2\omega t)\vec{j} + \epsilon \cos(\omega t)\vec{k}$. Jak wygląda tor punktu? Jak zależy od czasu wektor prędkości i przyspieszenia tego punktu? Wyznacz promień krzywizny toru dla $\omega t = 0, \omega t = \frac{\pi}{2}, \omega t = \frac{\pi}{4}$.

Ruch punktu we współrzędnych biegunowych

Współrzędne biegunowe to r (odległość od środka UW) i ϕ kąt od osi OX do wektora wodzącego punktu. Punkt o współrzędnych biegunowych (r, ϕ) ma współrzędne kartezjańskie $(r \cos \phi, r \sin \phi)$.

Kolejne wektory bazy przestrzeni stycznej w punkcie $(r \cos \phi, r \sin \phi)$ uzyskujemy biorąc pochodne punktu po kolejnych współrzędnych, które następnie normujemy do jedności.

15. Znajdź bazę wektorów jednostkowych w punkcie (r, ϕ)
16. Ile wynoszą pochodne wektorów bazowych po kącie ϕ ?
17. Współrzędne biegunowe punktu są znanymi funkcjami czasu. Jaki jest wzór na wektor prędkości i przyspieszenia.
18. Mucha idzie ruchem jednostajnym z prędkością v po średnicy płyty gramofonowej obracającej się z prędkością kątową ω . Jaki jest tor muchy? Jakie siły działają na muchę?
19. Ramię robota o zmiennej długości wykonuje ruch opisany równaniami:

$$r(t) = r_0 - A \cos(\omega t), \quad \phi(t) = \phi_0 - a \sin(\omega t),$$

Gdzie $r_0 = 1.5\text{m}$, $A = 0.5\text{m}$, $\phi = 0.7\text{rad}$, $a=0.3\text{rad}$, $\omega = 2\pi\text{Hz}$. Obliczyć prędkość końca ramienia we współrzędnych biegunowych i kartezjańskich w chwili $t = 0.6\text{s}$.

20. Dane są równania ruchu punktu: $r(t) = vt$, $\phi(t) = e^{\Omega t}$. Wyznacz składowe prędkości i przyspieszenia.
21. Dane są równania ruchu punktu: $r(t) = Re^{\lambda t}$, $\phi(t) = \Omega t$. Wyznacz składowe prędkości i przyspieszenia. Co jest torem punktu? Wyznacz promień krzywizny toru w funkcji czasu.

22. Punkt porusza się po krzywej, której długość s dana jest wzorem $s = s_0 \exp(ct)$, gdzie $s_0, c = \text{const} > 0$. Wiedząc, że wektor przyspieszenia tworzy stały kąt φ ze styczną do toru w każdym punkcie, wyznacz wartości:

- prędkości
- przyspieszenia stycznego
- przyspieszenia normalnego
- promienia krzywizny toru w funkcji długości łuku krzywej

23. Ruch punktu materialnego dany jest w układzie kartezjańskim równaniami:

$$x = ct \cos(\omega t), \quad y = ct \sin(\omega t), \quad \text{gdzie } c = \text{const}, \quad \omega = \text{const}, \quad t\text{-czas.}$$

Wyznacz w biegunowym układzie współrzędnych:

- równanie toru $r(\varphi)$
- wartość wektora prędkości i przyspieszenia punktu
- składowe wektora przyspieszenia styczną i normalną
- promień krzywizny toru w funkcji czasu

24. Dane są równania ruchu punktu: $r(t) = \frac{A}{1+e \cos \phi}$, $\phi(t) = \Omega t$. Wyznacz składowe prędkości i przyspieszenia (dla $e < 1$ torem jest elipsa, dla $e = 1$ parabola, dla $e > 1$ hiperbola).

Współrzędne biegunowe - rozwiązywanie równań ruchu

25. Zadanie Hugona Steinhausa W rogach kwadratowej łąki siedzą cztery psy. W chwili $t = 0$ każdy z psów zaczyna gonić swojego sąsiada po prawej stronie ze stałą prędkością v .

- Wyznacz zależność czasową współrzędnej radialnej
- Po jakim czasie psy się spotkają, jaką drogę przebiegną?
- Wyznacz zależność czasową współrzędnej transwersalnej
- Wyznacz kształt toru psa

26. Ćma porusza się tak, by widzieć światło cały czas pod tym samym kątem. To dostosowanie ewolucyjne pozwala latać po linii prostej korygując tor na podstawie światła księżyca. Co się dzieje, jeżeli źródłem światła jest lampa?

- Wyznacz równanie toru lotu ćmy
- Wyznacz zależność współrzędnej kątowej ćmy od czasu

Niech α oznacza kąt pod jakim ćma widzi źródło światła. W chwili $t = 0$ ćma ma współrzędne $r = r_0, \phi = 0$. Prędkość ćmy jest stałą i wynosi v .

27. W kasecie magnetofonowej pierwsza szpula kręci się ze stałą prędkością ω . W chwili początkowej promienie nawojów są równe odpowiednio r_{01} i r_{02} . Grubość taśmy wynosi a .

- Jak się zmienia prędkość przesuwu taśmy?
- Jak się zmienia prędkość kątowa drugiej szpuli?

28. * Wyznacz równanie toru $r(\phi)$ dla cząstki w polu grawitacyjnym masy punktowej. Wykorzystaj zasadę zachowania energii: $\frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + (\omega r)^2) - \frac{GMm}{r} = E$ i zasadę zachowania momentu pędu $mr^2\omega = L = \text{const}$. Dokonaj separacji zmiennych w równaniu.

29. * Rozwiąż powyższe równanie. W całce dokonaj podstawienia $u = \frac{1}{r}$ i doprowadź wyrażenie w mianowniku do postaci stała minus kwadrat wyrażenia liniowego.

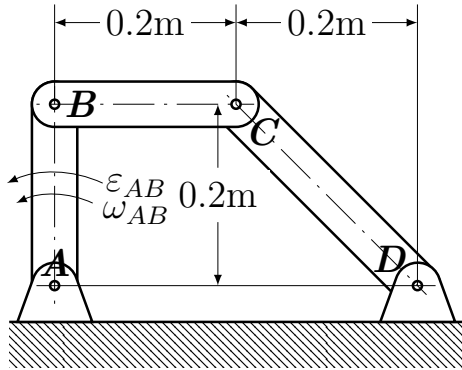
Przyspieszenia w ruchu złożonym

30. Mechanizm płaski na rysunku 1 składa się z trzech prętów połączonych przegubami B, C i jest przymocowany do podłoża przegubami A i D . Prędkość i przyspieszenie kątowe elementu AB wynosi $\omega_A = 10\text{rad/s}, \epsilon_A = 300\text{rad/s}^2$. Wyznacz:

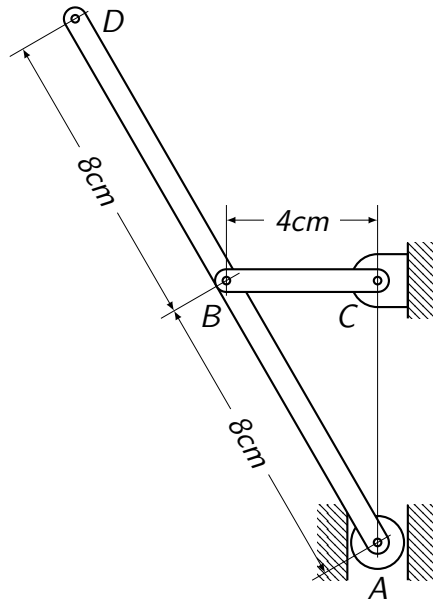
- Prędkości kątowe elementów BC i DC
- Chwilowy środek obrotu (stąd alternatywnie prędkości kątowe)
- Przyspieszenia kątowe elementów BC i DC

31. Znając prędkość i przyspieszenie kątowe elementu BC na rysunku 2 określ prędkości i przyspieszenia punktów A i D

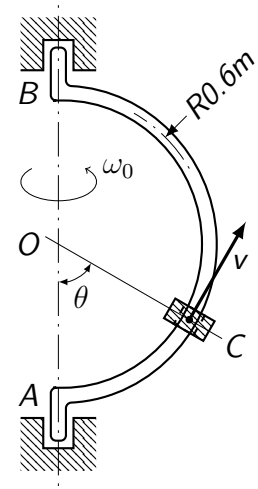
32. Półokrąg na rysunku na rysunku 3 obraca się z prędkością kątową ω_0 . Na nim ślizga się koralik z prędkością v względem półokręgu skierowaną w górę. Kąt θ wynosi 60° . Oblicz składowe prędkości i przyspieszenia koralika w układzie nieruchomym.



Rys. 1: Rysunek do zadania 30



Rys. 2: Rysunek do zadania 31



Rys. 3: Rysunek do zadania 32

Ruch bryły

Ruch płaski bryły sztywnej

Twierdzenie Eulera mówi, że dowolne infinitesimalnie małe przemieszczenie bryły sztywnej w jej płaszczyźnie ruchu może być dokonane przez obrót wokół punktu zwanego *chwilowym środkiem obrotu*.

Dzieląc odległość dowolne wybranego punktu bryły przez odległość od jej chwilowego środka obrotu uzyskamy *chwilową prędkość kątową*.

33. Prędkości środków tylnych kół samochodu na skrajnie poziomej drogi są prostopadłe do osi wynoszą $v_1 = 9 \text{ m/s}$ i $v_2 = 12 \text{ m/s}$. Obliczyć promień ρ skreślenia drogi środkowego punktu osi, jeżeli rozstaw kół wynosi $l = 2 \text{ m}$.

34. Końce belki mają współrzędne \vec{r}_1, \vec{r}_2 i prędkości \vec{v}_1 i \vec{v}_2 . Wyznacz chwilowy środek obrotu belki. Wyznacz chwilową prędkość kątową:

1. $\vec{r}_1 = [0, -1], \quad \vec{r}_2 = [4, -1], \quad \vec{v}_1 = [1, -1], \quad \vec{v}_2 = [1, 1]$

2. $\vec{r}_1 = [-2, 6], \quad \vec{r}_2 = [-2, 3], \quad \vec{v}_1 = [6, 8], \quad \vec{v}_2 = [0, 8]$

3. $\vec{r}_1 = [2, 3], \quad \vec{r}_2 = [5, -2], \quad \vec{v}_1 = [1, 1], \quad \vec{v}_2 = [-\frac{3}{7}, \frac{1}{7}]$

4. $\vec{r}_1 = [5, 5], \quad \vec{r}_2 = [-2, -1], \quad \vec{v}_1 = [1, -\frac{2}{3}], \quad \vec{v}_2 = [-1, \frac{5}{3}]$

35. Dla powyższych sytuacji znaleźć wektor położenia i prędkości dla środka belki.

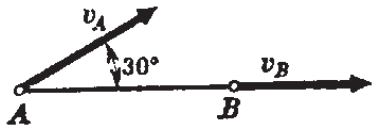
36. Prosta AB porusza się w płaszczyźnie rysunku 4. W pewnej chwili prędkość v_A punktu A tworzy z prostą AB kąt 30° i wynosi 1.8 m/s ; kierunek prędkości punktu B w tej chwili pokrywa się z kierunkiem prostej AB. Obliczyć prędkość v_B punktu B.

37. Chwilowe położenie wierzchołków trójkąta dane jest wektorami $\vec{r}_1, \vec{r}_2, \vec{r}_3$. Prędkości chwilowe dwóch pierwszych wierzchołków wynoszą \vec{v}_1 i \vec{v}_2 . Znaleźć prędkość chwilową trzeciego wierzchołka.

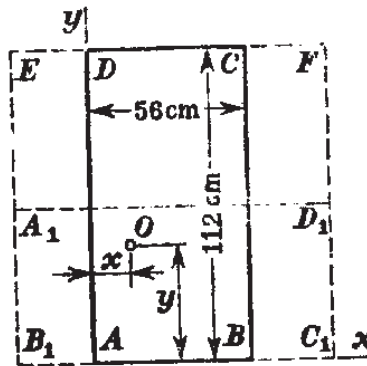
1. $\vec{r}_1 = [-2, 3]$, $\vec{r}_2 = [2, 0]$, $\vec{r}_3 = [3, 4]$, $\vec{v}_1 = [3, \frac{3}{4}]$, $\vec{v}_2 = [\frac{3}{4}, -\frac{9}{4}]$
2. $\vec{r}_1 = [-2, 4]$, $\vec{r}_2 = [0, 0]$, $\vec{r}_3 = [6, 0]$, $\vec{v}_1 = [0, -3]$, $\vec{v}_2 = [2, -2]$
3. $\vec{r}_1 = [4, 3]$, $\vec{r}_2 = [5, -1]$, $\vec{r}_3 = [1, 5]$, $\vec{v}_1 = [-1, 1]$, $\vec{v}_2 = [1, \frac{3}{2}]$
4. $\vec{r}_1 = [-1, 4]$, $\vec{r}_2 = [2, 0]$, $\vec{r}_3 = [5, 6]$, $\vec{v}_1 = [-\frac{5}{9}, \frac{1}{3}]$, $\vec{v}_2 = [-1, 0]$

38. Blat stołu składanego mający kształt prostokąta $ABCD$ o bokach $AB = 560$ mm i $AD = 1120$ mm obraca się dokoła osi czopa O tak, że zajmuje położenie $A_1B_1C_1D_1$, gdzie $AB_1 = BC_1$, jak na rysunku 5. Przy rozłożeniu stołu otrzymujemy kwadrat B_1EFC_1 . Znaleźć położenie osi czopa.

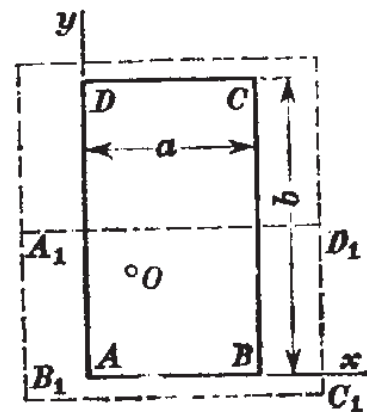
39. Blat stołu składanego mający kształt prostokąta o bokach a i b przechodzi z położenia $ABCD$ przez obrót w położenie $A_1B_1C_1D_1$, a po rozłożeniu stołu tworzy prostokąt o bokach $2a$ i b , jak na rysunku 6. Znaleźć położenie czopa O osi obrotu blatu w odniesieniu do boków AB i AD .



Rys. 4: Rysunek do zadania 36



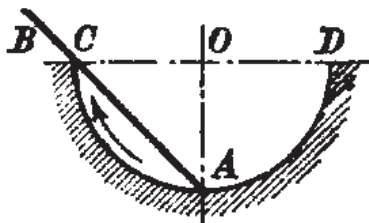
Rys. 5: Rysunek do zadania 38



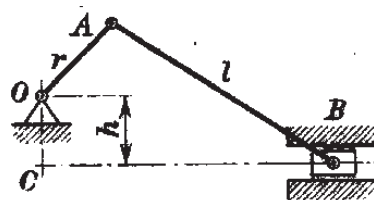
Rys. 6: Rysunek do zadania 39

40. Prosta AB porusza się w płaszczyźnie rysunku 7, przy czym jej koniec A przez cały czas ruchu znajduje się na półokręgu CAD , a sama prosta przechodzi przez stały punkt C . Wyznaczyć prędkość v_C punktu prostej pokrywającego się z punktem C w chwili, gdy promień OA jest prostopadły do CD , jeżeli wiadomo, że prędkość punktu A w tej chwili wynosi 4 m/s.

41. Obliczyć prędkość suwaka B mimoosiowego mechanizmu korbowego z rysunku 8 dla dwóch poziomych i dwóch pionowych położenia korby obracającej się dokoła wału O z prędkością kątową $\omega = 1.5$ s⁻¹, jeśli $OA = 400$ mm, $AB = 2000$ mm, $OC = 200$ mm.

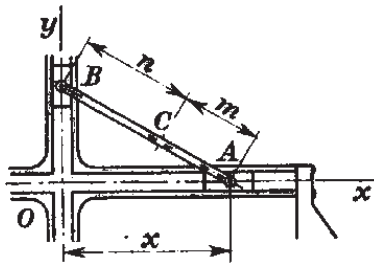


Rys. 7: Rysunek do zadania 40

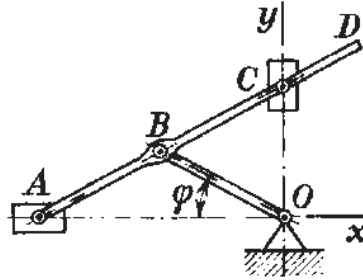


Rys. 8: Rysunek do zadania 41

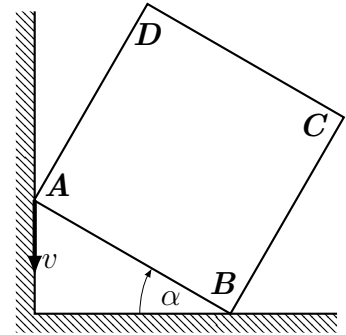
42. Koniec A linijki elipsografu o długości l porusza się po osi Ox , a koniec B po osi Oy , jak na rysunku 9. Koniec A linijki porusza się ruchem harmonicznym o równaniu $x = a \sin \omega t$, gdzie $a < l$. Obliczyć prędkość v punktu C wiedząc, że $CA = m$, $BC = n$, $\omega = \text{const}$.



Rys. 9: Rysunek do zadania 42

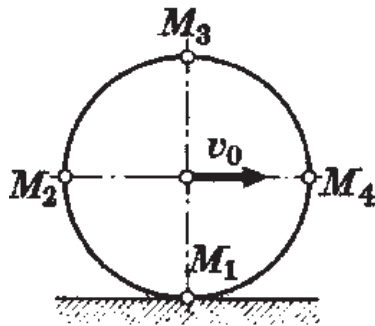


Rys. 10: Rysunek do zadania 43

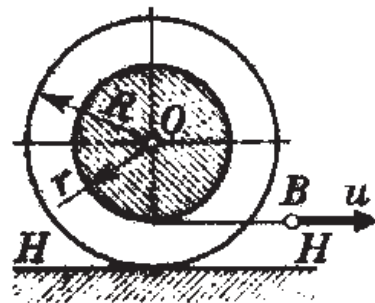


Rys. 11: Rysunek do zadania 44

45. Koło o promieniu $r = 0.5$ m z rysunku 12 toczy się bez poślizgu po prostoliniowej części drogi; prędkość środka koła jest stała i wynosi 10 m/s. Wyznaczyć prędkość końców średnicy pionowej i poziomej koła, tzn. punktów M_1 , M_2 , M_3 , M_4 , oraz jego prędkość kątową.



Rys. 12: Rysunek do zadania 45



Rys. 13: Rysunek do zadania 46

47. * Jeżeli siła z jaką jest ciągnięta nić w poprzednim zadaniu wynosi F , a moment bezwładności szpulki wynosi $I = mr^2/2$, to ile wynosi siła tarcia pomiędzy szpulką a podłożem?

48. * W zadaniu 46 rozważ sytuację, gdy nić odwija się ze szpulki pod kątem α do poziomu. Jaki jest kąt graniczny pomiędzy ruchem szpulki w lewo i w prawo przy odwijaniu nici?

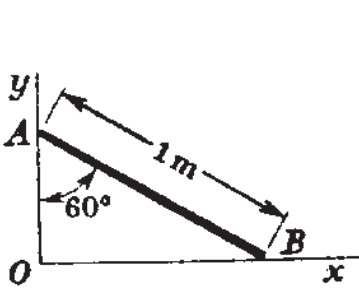
Centroidy

Zbiór chwilowych środków obrotu tworzy krzywą zwaną *centroidą*

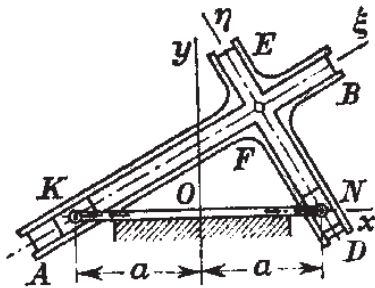
49. Belka ślizga się w płaskim narożu, jak na rysunku 14. Wyznacz równanie centroidy w układzie naroża i w układzie belki.

50. Dwa pręty AB i DE z rysunku 15 połączone na stałe pod kątem prostym w punkcie F poruszają się w taki sposób, że jeden z nich – AB zawsze przechodzi przez nieruchomy punkt K , a drugi – DE przez nieruchomy punkt N ; odległość $KN = 2a$. Znaleźć równania centroid w tym ruchu. Osie współrzędnych pokazano na rysunku.

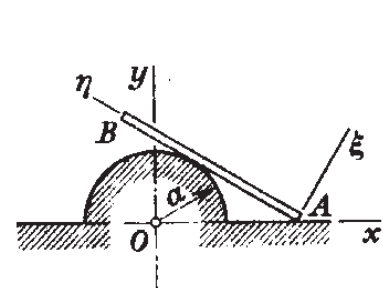
51. Znaleźć równania nieruchomej i ruchomej centroidy pręta AB z rysunku 16, który opierając się na okręgu o promieniu a końcem A ślizga się wzdłuż prostej Ox przechodzącej przez środek tego okręgu. Osie współrzędnych pokazano na rysunku.



Rys. 14: Rysunek do zadania 49



Rys. 15: Rysunek do zadania 50



Rys. 16: Rysunek do zadania 51

52. Kąt prosty ABC porusza się w ten sposób, że punkt A ślizga się po osi x , a bok BC przechodzi przez nieruchomy punkt D na osi y . Znaleźć równania nieruchomej i ruchomej centroidy, jeżeli wiadomo, że $AB = OD = a$.

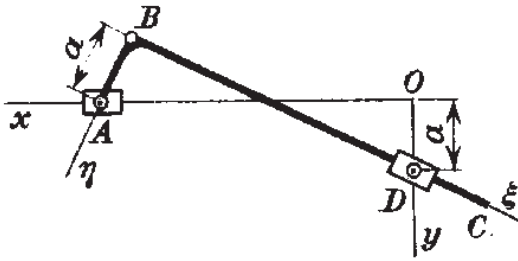
53. Podać równania toru i ruchu punktu znajdującego się na obwodzie koła parowozu o promieniu $R = 1$ m, jeżeli parowóz porusza się po prostoliniowym odcinku toru ze stałą prędkością 20 m/s, a koło toczy się bez poślizgu. Za początek układu współrzędnych przyjąć początkowe położenie punktu na szynie przyjętej za oś Ox .

54. Dwie równoległe listwy poruszają się w jednym kierunku ze stałymi prędkościami $v_1 = 6$ m/s i $v_2 = 2$ m/s. Między listwami zaciśnięte jest koło o promieniu $r = 0.5$ m, toczące się bez poślizgu po listwach. Obliczyć prędkość kątową koła oraz prędkość jego środka. Znaleźć równania centroid w układzie współrzędnych ustalonym na rysunku 18.

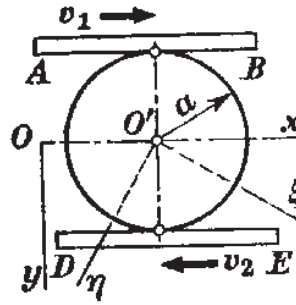
55. Jednorodny pręt spada w płaszczyźnie pionowej pod wpływem siły ciężkości, jak na rysunku 8, obracając się ze stałą prędkością kątową $\omega = 2.75$ s⁻¹ dookoła osi prostopadłej do płaszczyzny spadania. W chwili początkowej prędkość środka ciężkości równa się zero, a pręt ma położenie pionowe. Wyznaczyć prędkość punktów A i B w chwili, gdy pręt obrócił się o kąt $\varphi = \frac{\pi}{4}$ rad, jeśli $AB = 660$ mm. Wyznaczyć centroidę ruchomą i nieruchomą pręta.

Wskazówka. Środek ciężkości pręta porusza się z przyspieszeniem $g = 9.81$ m/s².

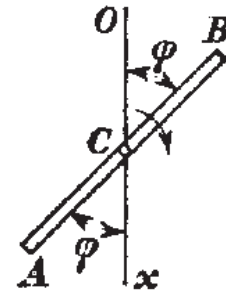
56. Wyznaczyć ruchome i nieruchome centroidy bloków A i B wielokrażka z rysunku 20, o promieniach kółek r_A i r_B , zakładając, że ciężarek C porusza się ruchem postępowym.



Rys. 17: Rysunek do zadania 52



Rys. 18: Rysunek do zadania 54



Rys. 19: Rysunek do zadania 55

57. Do połączenia dwóch równoległych wałów o nieznanym przesunięciu osi stosuje się sprzęgło Oldhama, którego schemat przedstawiono na rysunku 21. Na obu wałach I i II osadzone są sztywno dwie tarcze A i B mające wzdłuż swych średnic rowki a-a i b-b. Między tarcze A i B wstawiona jest tarcza C mająca z każdej strony wzdłuż średnic wzajemnie prostopadłe występy a' i b'. Występy te wchodziły w rowki tarcz i mogą się w nich przesuwają. Dowieść, że prędkości kątowe obydwóch wałów są jednakowe i znaleźć centroidy ruchomą i nieruchomą tarczy C.

58. Korba OA o długości r obraca się ze stałą prędkością kątową ω . Długość korbowodu AB wynosi l . Znaleźć równania ruchu i toru środka M korbowodu AB oraz równanie ruchu wozika B, jeśli w chwili początkowej wozik znajduje się w skrajnym prawym położeniu. Osie współrzędnych pokazano na rysunku. Wyznaczyć równania centroidy nieruchomej i ruchomej (położenie chwilowego środka obrotu w funkcji czasu w nieruchomym i ruchomym układzie odniesienia) dla korbowodu. Kiedy chwilowy środek obrotu jest w nieskończoności?



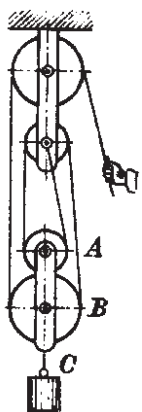
59. Pręt AB na rysunku 22 porusza się w ten sposób, że jeden z jego punktów A opisuje okrąg o promieniu r ze środkiem w punkcie O, a sam pręt przechodzi stale przez punkt N leżący na tym okręgu. Znaleźć obie centroidy.

60. Znaleźć ruchomą i nieruchomą centroidę pręta CD wieloboku ABCD z rysunku 23 ustawionego na dłuższym przecie AB, jeśli $AB = CD = b$, $AD = BC = a$, przy czym $a < b$.

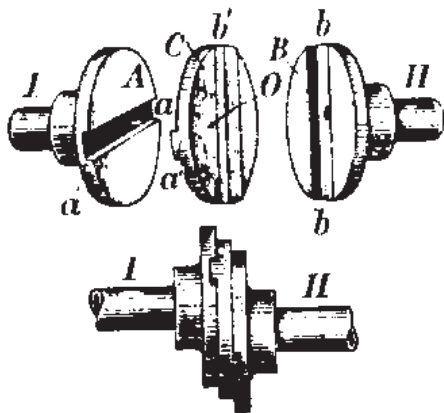
61. Znaleźć ruchomą i nieruchomą centroidę pręta BC wieloboku ABCD na rysunku 24 ustawionego na krótszym boku AD, jeśli $AB = CD = b$, $AD = CB = a$ oraz $a < b$.

Mechanizmy przegubowe

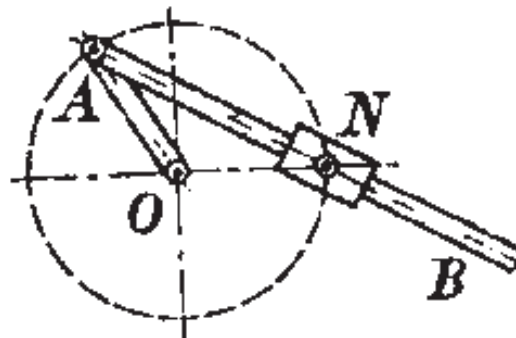
62. Znaleźć położenie chwilowych środków obrotu dla części I i II trójprzegubowego mostu łukowego z rysunku 25, jeżeli w następstwie odkształcenia podpora A otrzymuje bardzo małe przesunięcie (1) poziome, (2) pionowe. Wymiary i osie współrzędnych pokazano na rysunku.



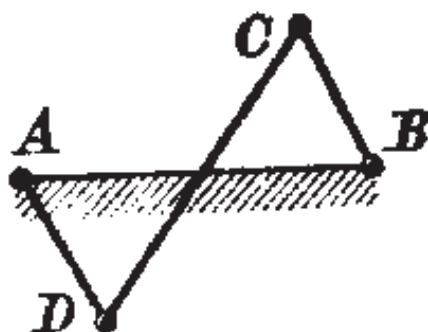
Rys. 20: Rysunek do zadania 56



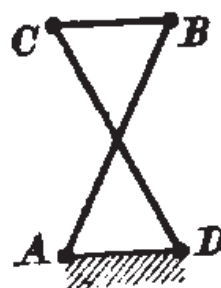
Rys. 21: Rysunek do zadania 57



Rys. 22: Rysunek do zadania 59



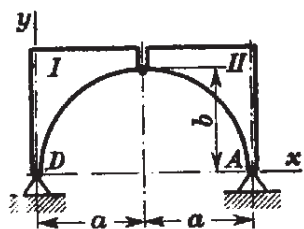
Rys. 23: Rysunek do zadania 60



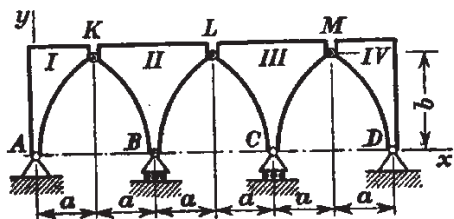
Rys. 24: Rysunek do zadania 61

63. Most składa się z czterech części połączonych przegubami K, L i M, jak na rysunku 26. Podpory A i D są stałe, a B i C ruchome. Znaleźć położenie chwilowych środków obrotu wszystkich części mostu, jeżeli na początku odkształcenia podpora D otrzymuje przesunięcie poziome. Wymiary mostu i położenie osi pokazano na rysunku.

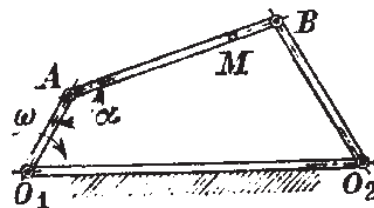
64. Pręty O_1A i O_1B złączone z prętem AB przegubami A i B mogą obracać się dokoła nieruchomych punktów O_1 i O_2 tworząc płaski przegubowy czworobok, jak na rysunku 27. Długość pręta $O_1A = a$, jego prędkość kątową wynosi ω . Wyznaczyć graficznie położenie na pręcie AB punktu M, którego prędkość jest skierowana wzdłuż tego pręta, oraz prędkość v punktu M w chwili, gdy kąt O_1AB wynosi α .



Rys. 25: Rysunek do zadania 62

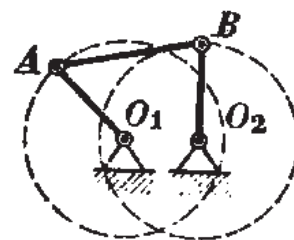
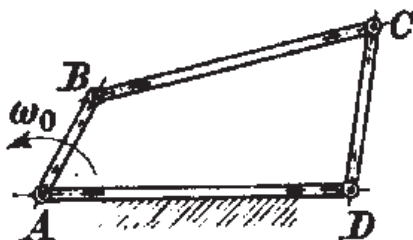
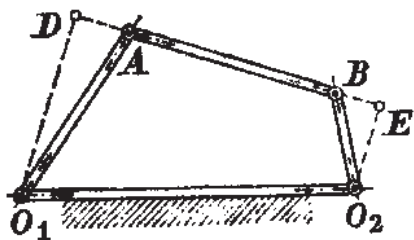


Rys. 26: Rysunek do zadania 63



Rys. 27: Rysunek do zadania 64

65. Prędkość kątowna pręta O_1A czworoboku przegubowego z rysunku 28 wynosi ω_1 . Wyrazić prędkość kątowną ω_2 pręta O_2B przez ω_1 oraz przez odległości O_1D i O_2E pręta AB od osi obrotu O_1 i O_2 .
66. W czworoboku przegubowym $ABCD$ na rysunku 29 pręt napędowy AB obraca się ze stałą prędkością kątowną $\omega_0 = 6\pi \text{ s}^{-1}$. Wyznaczyć chwilowe prędkości kątowne korby CD i pręta BC w chwili, gdy pręty AB i BC tworzą jedną prostą, jeżeli $BC = AD = 3AB$.
67. W sicie służącym do sortowania rudy na rysunku 30 korba O_1A obraca się dokoła osi O_1 i wykonuje 60 obr/min. Za pośrednictwem pręta AB uruchamia ona korbę O_2B obracającą się dokoła osi O_2 . Dane: $O_1A = O_2B = AB = 100 \text{ mm}$, $O_1O_2 = 40 \text{ mm}$. Wyznaczyć liniową prędkość punktu B dla trzech położenia mechanizmu: (1) gdy punkt A znajduje się na przedłużeniu linii O_1O_2 na lewo; (2) gdy pręt AB jest równoległy do linii O_1O_2 ; (3) gdy punkt B znajduje się na przedłużeniu linii O_1O_2 na prawo.

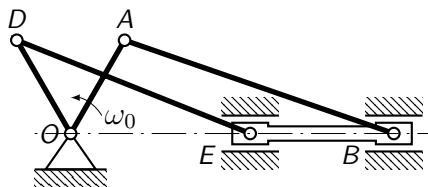


Rys. 28: Rysunek do zadania 65

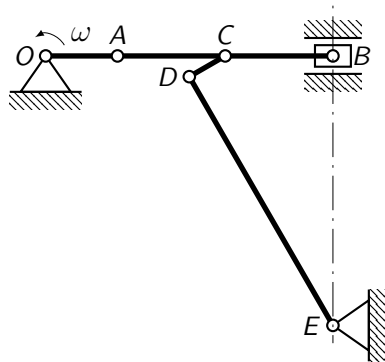
Rys. 29: Rysunek do zadania 66

Rys. 30: Rysunek do zadania 67

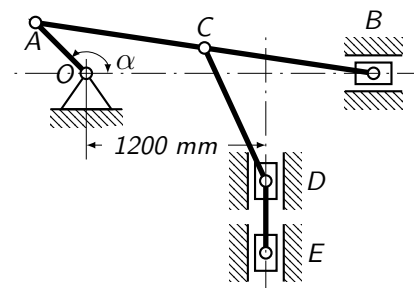
68. Suwaki B i E podwójnego mechanizmu korboprzegubowego z rysunku 31 są połączone prętem BE . Korby – napędowa OA i napędzana OD – obracają się dokoła wspólnej osi O prostopadłej do płaszczyzny rysunku. Wyznaczyć chwilowe prędkości kątowne korby napędzanej OD i pręta DE w chwili, gdy korba napędowa OA obracająca się ze stałą prędkością kątowną $\omega_0 = 12 \text{ s}^{-1}$ jest prostopadła do prostej OB . Dane: $OA = 100 \text{ mm}$, $OD = 120 \text{ mm}$, $AB = 260 \text{ mm}$, $EB = 120 \text{ mm}$, $DE = 120\sqrt{3} \text{ mm}$.
69. Mechanizm korbowy z rysunku 32 połączono przegubowo w środku korbowodu z prętem CD , a ten połączony jest z prętem DE , który może obracać się dokoła punktu E . Wyznaczyć prędkość kątowną pręta DE w położeniu pokazanym na rysunku, jeżeli punkty B i E leżą na prostej pionowej, prędkość kątowna korby OA wynosi $\omega = 8 \text{ s}^{-1}$, $OA = 250 \text{ mm}$, $DE = 1000 \text{ mm}$, $\angle CDE = 90^\circ$, $\angle BED = 30^\circ$.
70. Obliczyć prędkość pręta DE mechanizmu stawidłowego z rysunku 33 dla czterech położenia korby OA : dwóch pionowych i dwóch poziomych, jeśli prędkość kątowna korby $\omega = \text{const} = 20 \text{ s}^{-1}$ oraz $OA = 400 \text{ mm}$, $AC = 200\sqrt{37} \text{ mm}$, $CB = 200\sqrt{37} \text{ mm}$.
71. Pompa powietrzna na rysunku 34 napędzana jest przez maszynę parową za pośrednictwem mechanizmu, którego schemat pokazano na rysunku. Kąt $CDE = 90^\circ$ Wyznaczyć prędkość punktu F w chwili, gdy kąt $\varphi = 30^\circ$, $\angle DEF = 90^\circ$ i $\angle EDF = 30^\circ$. Punkty B , D i F znajdują się w danej chwili na jednej prostej pionowej. Dane: $OA = 100 \text{ mm}$, $BD = 244 \text{ mm}$, $AB = 400 \text{ mm}$, $DE = 200 \text{ mm}$, prędkość kątowna korby OA wynosi $\omega = 4 \text{ s}^{-1}$.
72. Obracająca się dokoła punktu A szczęka łamacza o długości $AB = 600 \text{ mm}$ z rysunku 35 jest uruchamiana korbą OE o długości 100 mm za pośrednictwem systemu dźwigni BC i CD o długości 400 mm każda oraz łącznika CE . Korba OE wykonuje 100 obr/min. Obliczyć prędkość kątowną szczęki AB przy położeniu mechanizmu pokazanym na rysunku.



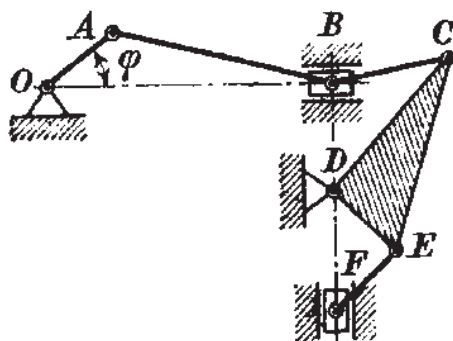
Rys. 31: Rysunek do zadania 68



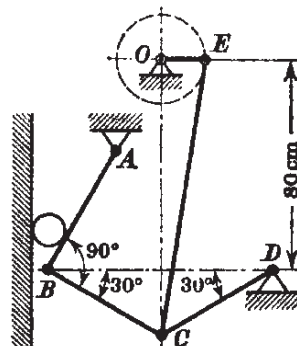
Rys. 32: Rysunek do zadania 69



Rys. 33: Rysunek do zadania 70



Rys. 34: Rysunek do zadania 71



Rys. 35: Rysunek do zadania 72

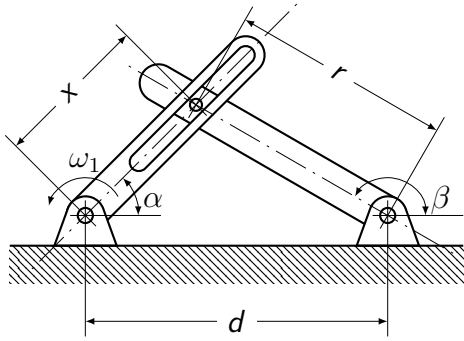
73. Mechanizm płaski z rysunku 36 składa się z dwóch ramion zamocowanych do podłoża w przegubach w odległości d . Drugie ramię ma długość r i jest zakończone trzpieniem, który porusza się w prowadnicy w ramieniu pierwszym. Odległość trzpienia od punktu zaczepienia ramienia pierwszego oznaczamy jako x . Kąty jakie pierwsze i drugie ramię tworzą z podłożem wynoszą odpowiednio α i β . Zakładając że znamy $\dot{\alpha}$, oblicz:

1. x i \dot{x} z tw. cosinusów
2. $\sin \beta$ i $\dot{\beta}$ z tw. sinusów
3. x i \dot{x} z (2) i ze wzoru na prędkość trzpienia w ruchu względnym

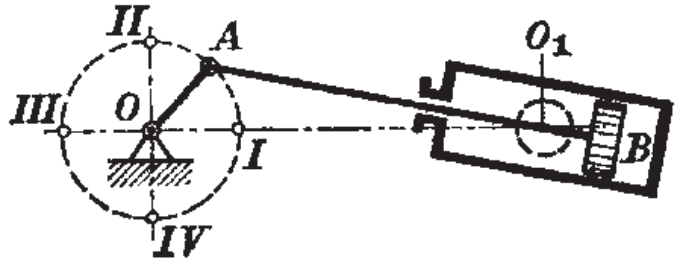
74. W maszynie parowej z wahliwym cylindrem z rysunku 37 długość korbki $OA = 120$ mm. Odległość między osią wału a osią czopa cylindra $OO_1 = 600$ mm, a długość korbowodu $AB = 600$ mm. Wyznaczyć położenie i prędkość tłoka względem cylindra oraz chwilową prędkość kątową cylindra w funkcji czasu, jeśli prędkość kątowa korbki $\omega = 5 \text{ s}^{-1} = \text{const}$.

Przekładnie zębate

75. Napęd łańcuchowy w rowerze składa się z łańcucha opasującego koło zębate A o 26 zębach i koło zębate B o 9 zębach, jak na rysunku 38. Koło zębate B jest sztywno połączone z tylnym kołem C o średnicy 700 mm. Obliczyć prędkość roweru, gdy koło A robi 1 obr/s, a koło C toczy się bez poślizgu po prostoliniowej drodze.



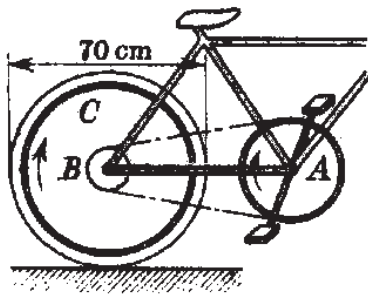
Rys. 36: Rysunek do zadania 73



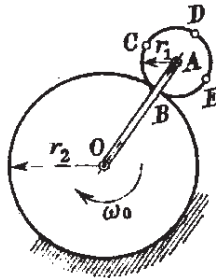
Rys. 37: Rysunek do zadania 74

76. Korba OA na rysunku 39, obraca się z prędkością kątową $\omega_0 = 2.5 \text{ s}^{-1}$ dookoła osi O nieruchomej tarczy o promieniu $r_2 = 150 \text{ mm}$, uruchamia tarczę o promieniu $r_1 = 50 \text{ mm}$ umocowaną na końcu A. Obliczyć wartość i kierunek prędkości punktów A, B, C, D i E ruchomej tarczy, jeśli średnica CD jest prostopadła do średnicy BD.

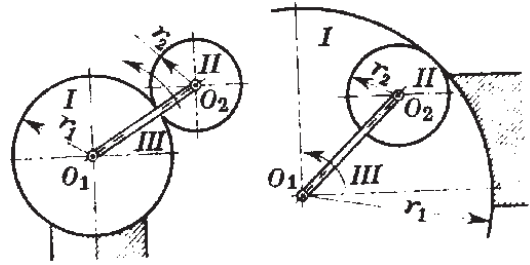
77. Korba III na rysunku 40 łączy osie O_1 i O_2 dwóch kół zębatych I i II, przy czym zazębienie może być albo zewnętrzne, albo wewnętrzne, jak pokazano na rysunku. Koło I jest nieruchome, a korba III obraca się dookoła osi O_1 z prędkością kątową ω_3 . Znając promienie kół r_1 i r_2 znaleźć bezwzględną prędkość kątową ω_2 koła II oraz jego względną prędkość kątową ω_{23} w odniesieniu do korby.



Rys. 38: Rysunek do zadania 75



Rys. 39: Rysunek do zadania 76

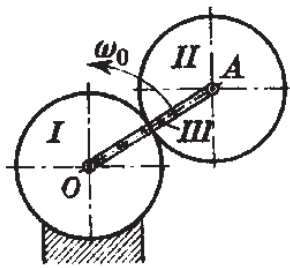


Rys. 40: Rysunek do zadania 77

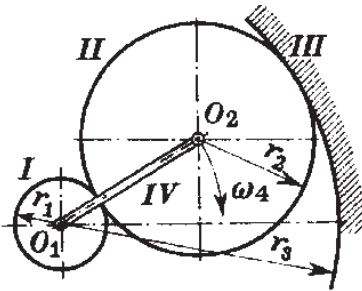
78. Znaleźć względną i bezwzględną prędkość kątową koła zębatego II o promieniu r toczącego się po nieruchomym kole zębatym I o tym samym promieniu i uruchamianego korba III, obracającą się dookoła osi O nieruchomego koła z prędkością kątową ω_0 , jak na rysunku 41. Przyjąć, że ruch korby OA jest ruchem unoszenia.

79. Urządzenie przedstawione na rysunku 42, wprawiające w szybki ruch obrotowy toczydło, jest napędzane prętem IV obracany dookoła osi O_1 z prędkością kątową ω_4 za pomocą specjalnej rączki. Na końcu O_2 pręta znajduje się sworzeń, na którym jest luźno nasadzone koło II o promieniu r_2 . Przy obrocie rączki sworzeń powoduje obrót koła II bez poślizgu po zewnętrznym kole III o promieniu r_3 . Wskutek tarcia koło II obraca bez poślizgu koło I o promieniu r_1 luźno nasadzone na osi O_1 i na stałe połączone z osią toczydła. Mając dany promień r_3 zewnętrznego nieruchomego koła znaleźć taką wartość r_1 , aby $\frac{\omega_1}{\omega_4} = 12$, tj. aby toczydło obracało się dwanaście razy szybciej od wprawiającej je w ruch rączki.

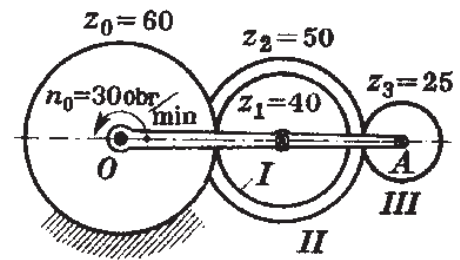
80. Znaleźć liczbę obrotów na minutę koła o ilości zębów $z_3 = 25$ z rysunku 43, jeżeli korba OA obraca się dookoła osi O nieruchomego koła o ilości zębów $z_0 = 60$ z prędkością kątową odpowiadającą $n_0 = 30 \text{ obr/min}$. Do korby przytwierdzona jest oś dwu kół pośrednich o ilości zębów $z_1 = 40$ i $z_2 = 50$.



Rys. 41: Rysunek do zadania 78



Rys. 42: Rysunek do zadania 79

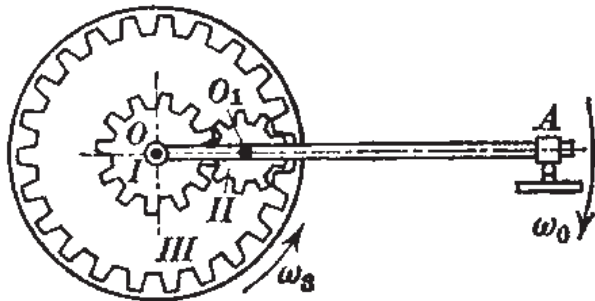


Rys. 43: Rysunek do zadania 80

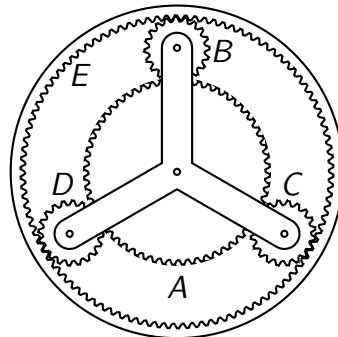
81. W przekładni zębatej kieratu na rysunku 44 dyszel OA i koło I o promieniu r_1 są luźno osadzone na wale O. Oś O_1 koła II jest przymocowana do dyszla, a koło III o promieniu r_3 może się swobodnie obracać dokoła osi O. Wyznaczyć prędkość kątową ω_1 koła I, jeśli dyszel OA ma prędkość kątową ω_0 , a koło III prędkość kątową ω_3 skierowaną przeciwnym kierunku.

82. W przekładni planetarnej na rysunku 45 promienie kół wynoszą: $r_A, r_B = r_C = r_D, r_E$. Jaka jest zależność pomiędzy prędkościami kątowymi jarzma, koła A i koła E? Jaką zależność między promieniami wymusza płaska konfiguracja przekładni?

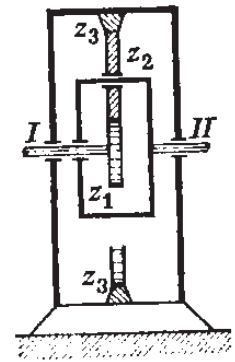
83. Przekładnia zębata na rysunku 46 składa się z trzech kół zębatych. Pierwsze koło (ilość zębów $z_1 = 20$) osadzone jest na wale I wykonującym $n_I = 4500$ obr/min, drugie koło ($z_2 = 25$) jest luźno osadzone na ramie sztywno połączonej z wałem II, trzecie koło zaś, o zazębieniu wewnętrznym, jest nieruchome. Obliczyć liczbę obrotów na minutę wału II i drugiego koła.



Rys. 44: Rysunek do zadania 81



Rys. 45: Rysunek do zadania 82

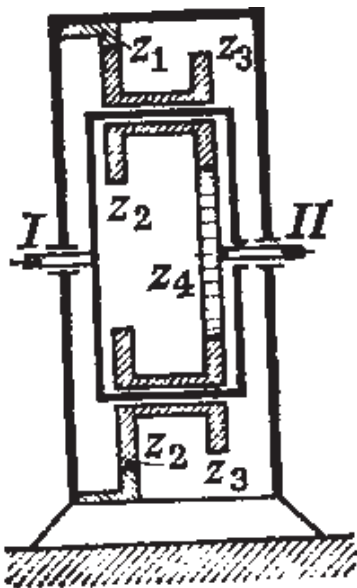


Rys. 46: Rysunek do zadania 83

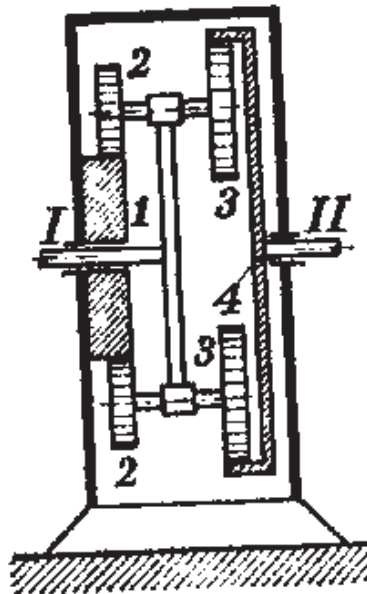
84. Wał I przekładni zębatej z rysunku 47 wykonuje $n_I = 1200$ obr/min. Obliczyć liczbę obrotów wału II, jeśli nieruchome koło zębata o zazębieniu wewnętrznym ma $z_1 = 180$ zębów, wzajemnie połączone koła ruchome mają $z_2 = 60$ i $z_3 = 40$ zębów, a koło zaklinowane na wale II ma $z_4 = 80$ zębów.

85. Przekładnia zębata na rysunku 48 składa się z nieruchomego koła o promieniu $r_1 = 400$ mm, dwu wzajemnie połączonych kół ruchomych o promieniach $r_2 = 200$ mm i $r_3 = 300$ mm oraz koła o zazębieniu wewnętrznym o promieniu $r_4 = 900$ mm osadzonego na wale II. Wał I i ramię prowadzące osie kół ruchomych wykonują $n_I = 1800$ obr/min. Obliczyć liczbę obrotów na minutę wału II.

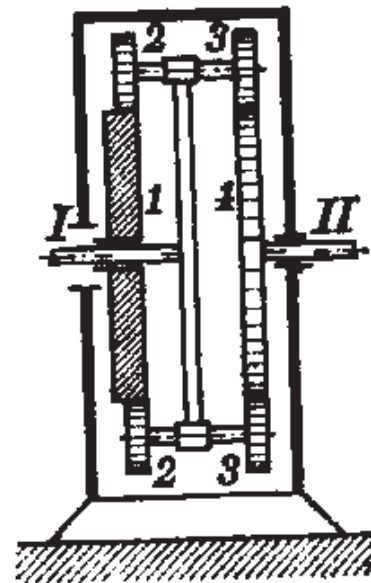
86. Obliczyć prędkość kątową ω_{II} wału II przekładni różnicowej z rysunku 49, jeśli wał I wraz z ramieniem prowadzącym osie kół bliźniaczych obraca się z prędkością kątową $\omega_I = 120 \text{ s}^{-1}$. Koło 1 obraca się z prędkością kątową $\omega_1 = 180 \text{ s}^{-1}$ i ma $z_1 = 80$ zębów, koła bliźniacze mają $z_2 = 20$ i $z_3 = 40$ zębów. Koło 4 osadzone na wale II ma $z_4 = 60$ zębów. Koło 1 i wał I obracają się w tym samym kierunku.



Rys. 47: Rysunek do zadania 84



Rys. 48: Rysunek do zadania 85



Rys. 49: Rysunek do zadania 86

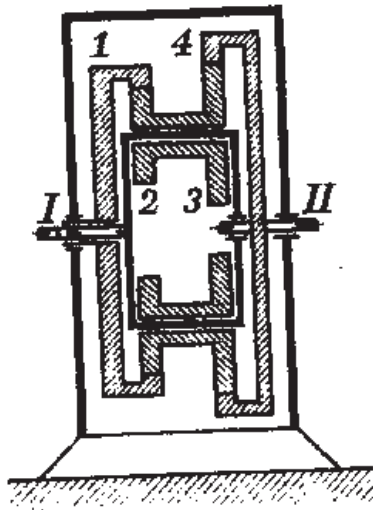
87. Przekładnia różnicowa na rysunku 50 składa się z czterech kół zębatych, z których pierwsze o zazębieniu wewnętrznym wykonuje $n_1 = 160 \text{ obr/min}$ i ma $z_1 = 70$ zębów; koła drugie i trzecie są wzajemnie połączone i osadzone na osiach obracających się wraz z wałem I wykonującym $n_I = 1200 \text{ obr/min}$; liczby zębów kół wynoszą: $z_2 = 20$, $z_3 = 30$. Czwarte koło o zazębieniu wewnętrznym ma $z_4 = 80$ zębów i zaklinowane jest na wale II. Wyznaczyć liczbę obrotów na minutę wału II, jeśli wał I i koło 1 obracają się w przeciwnych kierunkach.

88. Przekładnia zębata na rysunku 51 ma nieruchome koło 1, bliźniacze koła ruchome 2 i 3 o zazębieniu wewnętrznym i koło 4 zaklinowane na wale II. Obliczyć prędkość kątową wału II, jeśli liczby zębów wynoszą $z_1 = 30$, $z_2 = 80$, $z_3 = 70$, $z_4 = 20$, a wał I wykonuje 1200 obr/min .

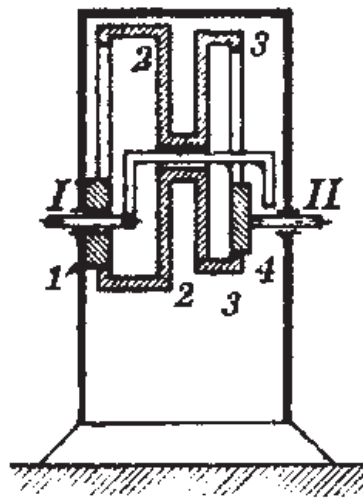
89. W przekładni różnicowej na rysunku 52 koło zębate A o promieniu R jest luźno osadzone na wale I-I. Wraz z kołem A obraca się oś kół o promieniach r_2 i r_3 , wzajemnie połączonych. Koło A jest napędzane kołem o promieniu r_0 . Kółka o promieniach r_2 i r_3 zazębiają się z kółkami o promieniach r_1 i r_4 , które są zaklinowane na wale I-I i tulei II. Znaleźć prędkość kątową tulei II, jeśli znane są prędkościątowe wałów I-I i O-O wynoszące n_I i n_0 . Wały te obracają się w jednym kierunku.

Mechanizmy przegubowo-planetarne

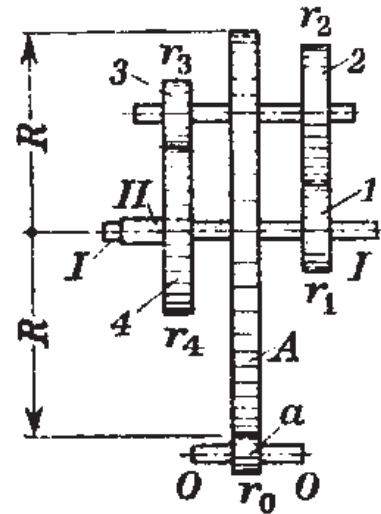
90. Koło o promieniu 90 mm toczy się bez poślizgu po nieruchomym kole o promieniu $r_1 = 180 \text{ mm}$, jak na rysunku 53. Z kołem ruchomym połączony jest przegubowo sworzeń AB poruszający się w oddzielnej prowadnicy. Obliczyć prędkość sworznia AB, gdy kąt $\varphi = 45^\circ$, jeśli pręt O_1O_2 wykonuje $n = 180 \text{ obr/min}$ (kąt φ jest kątem BO_1O_2).



Rys. 50: Rysunek do zadania 87



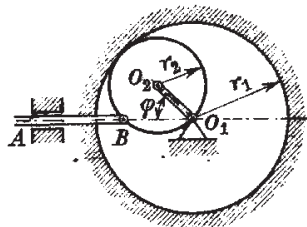
Rys. 51: Rysunek do zadania 88



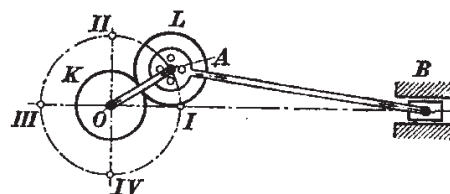
Rys. 52: Rysunek do zadania 89

91. Na rysunku 54 na osi O osadzone są: koło zębate K o średnicy 200 mm i korba OA o długości 200 mm nie złączone ze sobą. Z prętem AB o długości 1000 mm połączone jest na stałe koło zębate L o średnicy 200 mm. Koło K wykonuje 60 obr/min i zazębiając się z kołem L uruchamia pręt AB i korbę OA . Cały mechanizm leży w płaszczyźnie pionowej. Obliczyć prędkość kątową ω korby OA dla dwóch pionowych i dwóch poziomych jej położeń.

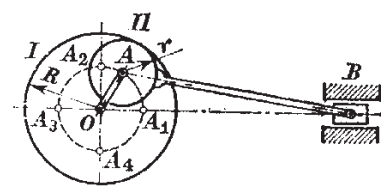
92. W mechanizmie planetarnym Watta na rysunku 55 korba jest luźno nasadzona na oś koła zębatego o promieniu $R = 250$ mm, obracającego się dokoła tej osi z prędkością kątową $\omega_0 = 10$ s⁻¹ = const. Z korbą OA jest połączony łącznik $AB = 1500$ mm, na którego końcu A osadzono na stałe koło zębate o promieniu 10 mm. Znaleźć prędkość kątową korby dla jej dwóch pionowych i dwóch poziomych położeń.



Rys. 53: Rysunek do zadania 90



Rys. 54: Rysunek do zadania 91

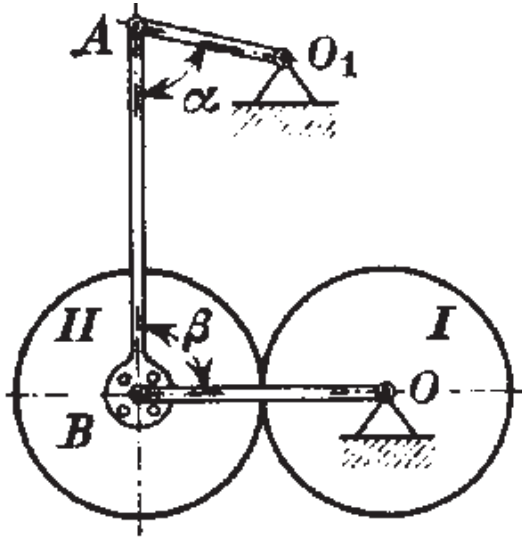


Rys. 55: Rysunek do zadania 92

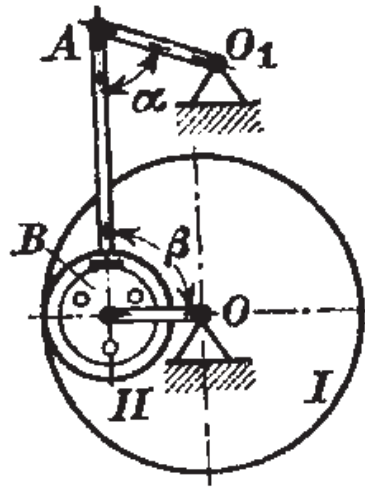
93. Mechanizm Watta z rysunku 56 składa się z pręta O_1A , który obracając się dokoła osi O_1 przenosi za pomocą pręta AB ruch na korbę OB luźno nasadzoną na oś O . Na osi O znajduje się koło I , a pręt AB zakończony jest kołem II połączonym z nim na stałe. Obliczyć prędkości kątowe korby OB i koła I w chwili, gdy $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 90^\circ$, promienie kół $r_1 = r_2 = 30\sqrt{3}$ mm, $O_1A = 750$ mm, $AB = 1500$ mm, a prędkość kątowna pręta O_1A wynosi $\omega_0 = 6$ s⁻¹.

94. Mechanizm planetarny z rysunku 57 składa się z pręta O_1A uruchamiającego pręt AB , korbę OB oraz koło I o promieniu $R = 250$ mm. Pręt AB zakończony jest kołem II o promieniu $r = 100$ mm, które jest z nim połączone na stałe. Wyznaczyć prędkość kątową pręta O_1A i koła I w chwili, gdy $\alpha = 45^\circ$, $\beta = 90^\circ$, jeśli $O_1A = 300\sqrt{2}$ mm, $AB = 1500$ mm, a prędkość kątowna korby OB $\omega = 8$ s⁻¹.

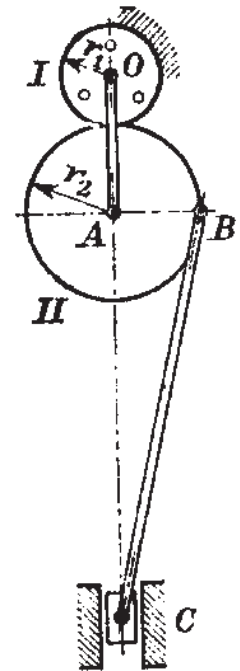
95. Korba o długości $OA = 300$ mm obraca się dookoła osi O z prędkością kątową $\omega_0 = 0,5$ s⁻¹, jak na rysunku 58. Koło zębate o promieniu $r_2 = 200$ mm zazębia się z nieruchomym kołem o promieniu $r_1 = 100$ mm i uruchamia łącznik $BC = 200\sqrt{26}$ mm. Obliczyć prędkość kątową łącznika i prędkości punktów B i C w chwili, gdy korba OA jest prostopadła do promienia AB .



Rys. 56: Rysunek do zadania 93



Rys. 57: Rysunek do zadania 94



Rys. 58: Rysunek do zadania 95

Przegub Cardana

Rozważać będziemy przegub krzyżakowy (Cardana). Łącznik przegubu (krzyżak) wykonuje ruch kulisty. Łącznik jest połączony parą antypodycznych sworzni do wału czynnego i drugą parą antypodycznych sworzni do wału biernego. Pomiedzy parami sworzni jest kąt prosty.

Zakładamy, że wał czynny tworzy z wałem biernym kąt γ . Zauważmy, że sworznie każdej z par pozostają na ustalonych okręgach, utrzymywane przez widelki swoich wałów.

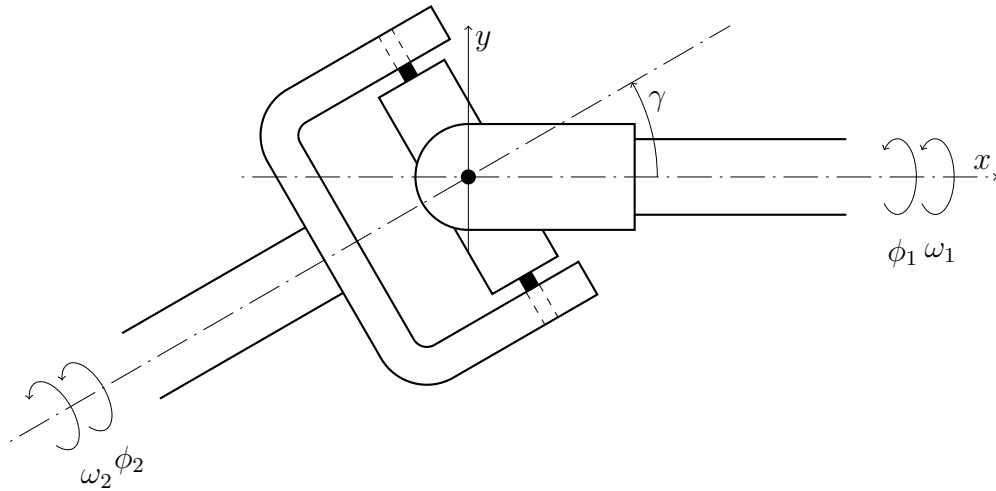
96. Jakie są równania parametryczne ruchu punktu po okręgach o promieniu R :

1. o płaszczyźnie prostopadłej do wektora \vec{i} , w chwili zero punkt na osi OZ
2. o płaszczyźnie prostopadłej do wektora $\cos \gamma \vec{i} + \sin \gamma \vec{j}$, w chwili zero punkt w płaszczyźnie XY .

97. Na ruchy z poprzedniego zadania nakładamy warunek, że kąt pomiędzy punktami na obu okręgach w danej chwili czasu jest prosty. Jaki to daje warunek wiążący kąty obrotu obu wałów?

98. Jaka jest zależność pomiędzy prędkościami kątowymi obu wałów?

99. Dwa wały połączone są przy pomocy przegubu dwukrzyżakowego (dwa przeguby krzyżakowe połączone wałkiem pośrednim). Kąty pomiędzy wałami na obu przegubach są takie same, a ruch przegubu drugiego jest przesunięty w fazie względem ruchu przegubu pierwszego o $\pi/2$ (czyli cztery sworznie na przegubie leżą w tej samej płaszczyźnie). Jaka jest zależność prędkości kątowych wału czynnego i biernego?



Rys. 59: Przegub krzyżakowy (Cardana)

100. Dwa wały połączone są przy pomocy dwóch przegubów krzyżakowych połączonych długim wałkiem pośrednim. Wał wyjściowy i wejściowy pozostają równoległe, a zastosowanie wałka pośredniego zapewnia możliwość przesuwania się względem siebie wałów. Ruch przegubu drugiego jest przesunięty w fazie względem ruchu przegubu pierwszego o $\pi/2$ (czyli cztery sworznie na przegubie leżą w tej samej płaszczyźnie). Jaka jest zależność pomiędzy prędkościami obu wałów?

101. Jak zmienia się wektor chwilowej prędkości obrotowej krzyżaka w przegubie krzyżakowym?

Wskazówka: Chwilowa prędkość kątowna jest prostopadła do prędkości liniowych obu sworzni, a $\vec{r}_1 \times \omega = r_1 \omega_1$.

Koniec wektora chwilowej prędkości obrotowej krzyżaka w przegubie krzyżakowym zakreśla elipsę w płaszczyźnie YZ . Powierzchnia stożkowa na której leżą te wektory jest aksoidą nieruchomą krzyżaka.

Precesja

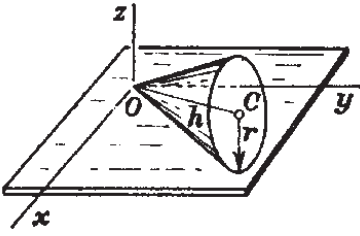
102. Stożek, którego wysokość wynosi $h = 4$ cm, a promień podstawy $r = 3$ cm, toczy się po płaszczyźnie bez poślizgu mając wierzchołek nieruchomy w punkcie O , jak na rysunku 60. Obliczyć prędkość kątową stożka, współrzędne punktu zakreślającego hodograf prędkości kątowej oraz przyspieszenie kątowe stożka, jeśli prędkość środka jego podstawy wynosi $v_C = 48$ cm/s = const.

103. Stożek o nieruchomym wierzchołku O toczy się po płaszczyźnie bez poślizgu, jak na rysunku 61. Wysokość stożka $CO = 18$ cm, a kąt wierzchołkowy $AOB = 90^\circ$. Środek C podstawy stożka porusza się jednostajnie wykonując 1 obr/s. Wyznaczyć prędkość końca B średnicy AB , przyspieszenie kątowe stożka oraz przyspieszenia punktów A i B .

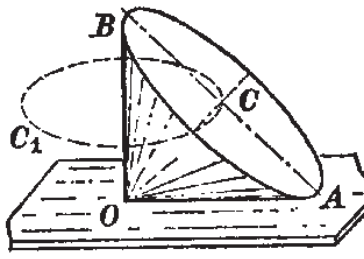
104. Stożek A obiega 120 razy na minutę nieruchomy stożek B , jak na rysunku 62. Wysokość stożka $OO_1 = 10$ cm. Wyznaczyć prędkość kątową unoszenia ω_u stożka dokoła osi z , względną prędkość kątową stożka ω_w dokoła osi OO_1 , bezwzględną prędkość kątową ω i bezwzględne przyspieszenie kątowe ε .

105. Zachowując warunki poprzedniego zadania wyznaczyć prędkość i przyspieszenie punktów C i D stożka ruchomego.

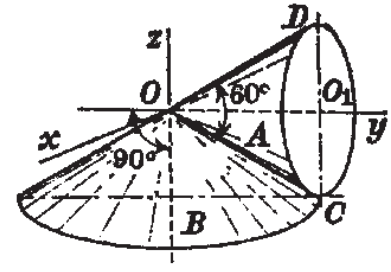
106. Stożek II o kącie wierzchołkowym $\alpha_2 = 45^\circ$ toczy się bez poślizgu po wewnętrznej stronie nieruchomego stożka I o kącie wierzchołkowym $\alpha_1 = 90^\circ$, jak na rysunku 63. Wysokość stożka



Rys. 60: Rysunek do zadania 102



Rys. 61: Rysunek do zadania 103



Rys. 62: Rysunek do zadania 104

ruchomego $OO_1 = 100$ cm. środek podstawy stożka ruchomego O_1 opisuje okrąg w ciągu 0.5 s. Wyznaczyć prędkość kątową unoszenia (dokoła osi z), prędkość kątową względną (dokoła osi O_1), prędkość kątową bezwzględną oraz przyspieszenie kątowe bezwzględne stożka II.

107. Zachowując warunki poprzedniego zadania wyznaczyć prędkości i przyspieszenia punktów O_1 , M_1 i M_2 stożka ruchomego.

108. Tarcza OA o promieniu $R = 4\sqrt{3}$ cm obraca się dokoła nieruchomego punktu O obiegając nieruchomy stożek o kącie wierzchołkowym wynoszącym 60° , jak na rysunku 64. Znaleźć prędkość kątową obrotu tarczy dokoła jej osi symetrii, jeśli stałe przyspieszenie jej punktu A wynosi $a_A = 48$ cm/s^2 .

109. Kula o promieniu R_2 toczy się jednocześnie po poziomej powierzchni i wokół pionowego walca o promieniu R_1 .

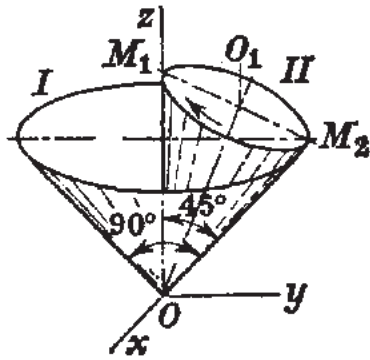
1. Co jest chwilową osią obrotu? Gdzie leży środek ruchu kulistego?
2. Co jest osią obrotu własnego? Jaki jest kąt nutacji?
3. Umieszczając początek UW w środku ruchu kulistego tak by środek kuli miał współrzędną $y = 0$, wyznacz wektory prędkości kątowych: $\vec{\omega}_1$ (obrotu własnego) i $\vec{\omega}$ (chwilową) przez ω_2 (wartość prędkości kątowej precesji).
4. Wyznacz wektor przyspieszenia kątowego kuli
5. Wyznacz prędkość i przyspieszenie najwyższego punktu kuli
6. Wyznacz prędkość i przyspieszenie punktu kuli: $[-R_1 - R_2, -R_2, -R_1]$

110. Ciało porusza się dokoła nieruchomego punktu. W pewnej chwili jego prędkość kątową przedstawia wektor, którego rzuty na osie współrzędnych mają wielkości: $\sqrt{3}$, $\sqrt{5}$, $\sqrt{7}$. Znaleźć dla tej chwili prędkość v punktu ciała o współrzędnych $\sqrt{12}$, $\sqrt{20}$, $\sqrt{28}$.

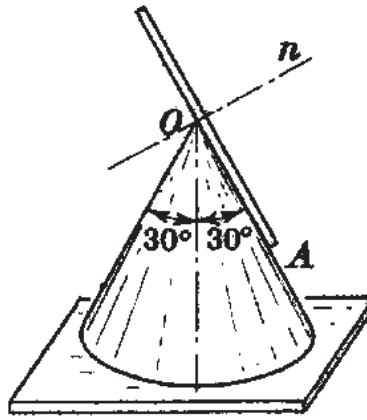
111. Ruch ciała dokoła stałego punktu określono kątami Eulera: $\varphi = 4t$, $\psi = \frac{\pi}{2} - 2t$, $\vartheta = \frac{\pi}{3}$. Wyznaczyć współrzędne punktu zakreślającego hodograf prędkości kątowej, prędkość oraz przyspieszenie kątowe ciała w odniesieniu do nieruchomych osi x, y, z.

112. Znaleźć ruchomą i nieruchomą aksoidę zewnętrznego koła wagonu toczącego się po poziomym torze, jeżeli średni promień krzywizny toru wynosi 5 m, promień koła wagonu 0.25 m, a rozstaw szyn 0,8 m, jak na rysunku 65.

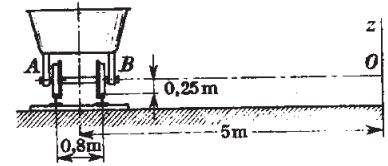
Wskazówka: Koło obraca się wraz z wagonem dokoła pionowej osi Oz przechodzącej przez środek krzywizny toru, a w stosunku do wagonu dokoła osi AB, tj. obraca się dokoła nieruchomego punktu O.



Rys. 63: Rysunek do zadania 106



Rys. 64: Rysunek do zadania 108



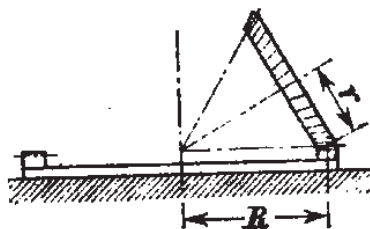
Rys. 65: Rysunek do zadania 112

113. Stożkowe koło zębate, którego oś przecina się z osią geometryczną koła oporowego w jego środku, obiega koło oporowe 5 razy na minutę, jak na rysunku 66. Wyznaczyć prędkość kątową względną ω_w koła stożkowego dokoła jego osi oraz prędkość kątową ω dokoła osi chwilowej, jeśli promień koła oporowego jest dwa razy większy od promienia koła stożkowego: $R = 2r$.

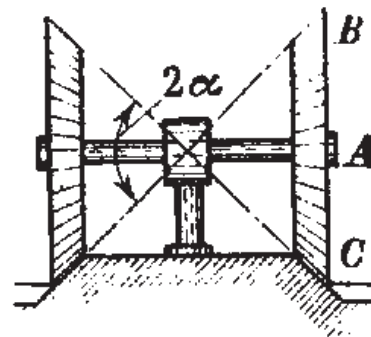
114. Znaleźć prędkość i przyspieszenie punktów B i C stożkowego koła zębatego tocącego się po kole oporowym, jak na rysunku 67, jeśli promień podstawy stożkowego koła zębatego $R = 10\sqrt{2}$ cm, kąt wierzchołkowy $2\alpha = 90^\circ$, a prędkość ruchu środka A po jego torze $v_A = 20$ cm/s.

115. Prędkość kątowna ciała wynosi $\omega = 7 \text{ s}^{-1}$, a chwilowa oś jego obrotu tworzy w danej chwili z nieruchomymi osiami współrzędnych kąty ostre α , β i γ . Znaleźć prędkość v i wartości jej rzutów v_x , v_y , v_z na osie współrzędnych dla punktu ciała, którego współrzędne wyrażone w metrach wynoszą w danej chwili: 0, 2, 0; obliczyć także odległość d tego punktu od osi chwilowej, jeśli $\cos \alpha = \frac{2}{7}$, a $\cos \gamma = \frac{6}{7}$.

116. Znaleźć równania osi chwilowej i wartość prędkości kątowej ω ciała, jeżeli wiadomo, że rzuty prędkości punktu $M_1(0, 0, 2)$ na osie współrzędnych związane z ciałem wynoszą $v_{1x} = 1$ m/s, $v_{2x} = 2$ m/s, $v_{1z} = 0$, a kierunek prędkości punktu $M_2(0, 1, 2)$ określony jest cosinusami kątów z osiami współrzędnych: $-\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, -\frac{1}{3}$.



Rys. 66: Rysunek do zadania 113



Rys. 67: Rysunek do zadania 114

Odpowiedzi

1. $a = 4\text{cm}$, $\omega = 5\pi$. 2. 1. $y = \frac{3}{4}x - \frac{3}{4}$, 2. $y = \frac{3}{4}x$, 3. $\frac{1}{9}(x-5)^2 + \frac{1}{16}y^2 = 1$, 4. $x = \frac{a}{b^2}y^2$, 5. $x = \frac{2}{\pi} \arccos \frac{y}{4} \sqrt{1 - \frac{y^2}{16}}$, 6. $x^2 + (3-y)^2 = 25$, 7. $\frac{x^2}{9} + \frac{y^2}{16} - \frac{xy}{6} \sin \frac{\pi}{8} = \cos^2 \frac{\pi}{8}$. 3. 1. $y = \frac{4}{3}x$, $s = 5t^2$; 2. $x^2 + y^2 = 9$, $s = 3t$; 3. $y = a - x$, $s = a\sqrt{2}(\sin^2 t + \frac{1}{2})$; 4. $x^2 + y^2 = 5$, $s = 25t^2$. 4. $y = 1.5x$, $z = 0.5x$. 5. okrąg o promieniu A , $\vec{v} = -A\omega \sin(\omega t)\vec{i} + A\omega \cos(\omega t)\vec{j}$, $\vec{a} = -\omega^2\vec{r}$. 6. 1. $x = 2\frac{y}{a}\sqrt{a^2 - y^2}$, 2. $x = 2\frac{y^2}{a} - a$. 7. $(\frac{x}{a})^2 + (\frac{y}{b})^2 - 2\cos(\alpha - \beta)\frac{xy}{ab} = \sin(\alpha - \beta)^2$. 8. $\frac{x^2}{A^2} + \frac{y^2}{B^2} = 1$, $\vec{v} = -A\omega \sin(\omega t)\vec{i} + B\omega \cos(\omega t)\vec{j}$, $\vec{a} = -\omega^2\vec{r}$, $R(0) = \frac{B^2}{A}$, $R(\frac{\pi}{2}) = \frac{A^2}{B}$, $R(\frac{\pi}{4}) = \frac{AB\sqrt{8}}{\sqrt{A^2+B^2}}$. 9. $x^2 + y^2 = A^2$, $R = A$, $\vec{v} = 2A\omega t(-\sin(\omega t^2)\vec{i} + \cos(\omega t^2)\vec{j})$, $\vec{a}_t = \vec{v}/t$, $\vec{a}_n = -4\omega^2 t^2\vec{r}$, $R = A$. 10. $\frac{x}{A} + \frac{y}{B} = 1$, $\vec{v} = \omega \sin(2\omega t)(B\vec{j} - A\vec{i})$, $\vec{a} = 2\omega^2 \cos(2\omega t)(B\vec{j} - A\vec{i})$. 11. $y = 2 - \frac{4}{9}x^2$, $t = \frac{\pi}{4}$. 12. $\vec{v} = A\omega[\cos \omega t, 2 \cos 2\omega t]$, $\vec{a} = -A\omega^2[\sin \omega t, 4 \sin 2\omega t]$, $R(0) = \infty$, $R(\frac{\pi}{2}) = 4A$, $R(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{8}A$. 13. Tor: linia śrubowa (helisa), $\vec{v} = -A\omega \sin(\omega t)\vec{i} + A\omega \cos(\omega t)\vec{j} + v\vec{k}$, $\vec{a} = \vec{a}_n = -A\omega^2(\cos(\omega t)\vec{i} + \sin(\omega t)\vec{j})$, $R = A + \frac{v^2}{A\omega^2}$. 14. $\vec{v} = \omega[A \cos(\omega t), 2A \cos(2\omega t), -\epsilon \sin(\omega t)]$, $\vec{a} = \omega^2[-A \sin(\omega t), -4A \sin(2\omega t), -\epsilon \cos(\omega t)]$, $R(0) = 5A^2/\epsilon$, $R(\frac{\pi}{2}) = 4A + \epsilon^2/A$, $R(\frac{\pi}{4}) = \frac{1}{8}(A + \epsilon^2/A)$.

15. $\vec{e}_r = \cos \phi \vec{i} + \sin \phi \vec{j}$, $\vec{e}_\phi = -\sin \phi \vec{i} + \cos \phi \vec{j}$. 16. $\dot{\vec{e}}_r = \dot{\phi} \vec{e}_\phi$, $\dot{\vec{e}}_\phi = -\dot{\phi} \vec{e}_r$. 17. $\vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\phi} \vec{e}_\phi$, $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\phi}^2)\vec{e}_r + (2\dot{r}\dot{\phi} + r\ddot{\phi})\vec{e}_\phi$. 18. $r(\phi) = \frac{v}{\omega} \phi$, $F_r = -mr\omega^2$, $F_\phi = 2mv\omega$. 19. $\vec{v}(0.6\text{s}) \approx -1.85\vec{e}_r + 2.90\vec{e}_\phi \approx 3.20\vec{i} - 1.26\vec{j}$. 20. $v_r = v$, $v_\phi = v + \Omega e^{\Omega t}$, $a_r = -vt(\Omega e^{\Omega t})^2$, $a_\phi = (vt\Omega^2 + 2v\Omega)e^{\Omega t}$. 21. Spirala logarytmiczna $r = R \exp(\frac{\lambda}{\Omega} \phi)$. 22. $v = s_0 c e^{ct}$, $a_t = s_0 c^2 e^{ct}$, $a_n = \text{tg } \phi s_0 c^2 e^{ct}$, $R = s_0 e^{ct} / \text{tg } \phi$. 23. $r(\phi) = \frac{c\phi}{\omega}$ (spirala Archimedes), $v_r = c$, $v_\phi = c\omega t$, $v = c\sqrt{1 + \omega^2 t^2}$, $a_r = -c\omega^2 t$. 24. $\vec{v} = \frac{A\Omega}{1+e \cos \phi} \left(\frac{e \sin \phi}{1+e \cos \phi} \vec{e}_r + \vec{e}_\phi \right)$, $\vec{a} = \frac{A\Omega}{(1+e \cos \phi)^2} \left((2e^2 \sin^2 \phi - (1+e \cos \phi)) \vec{e}_r + 2e \sin \phi \right)$. 25. $r(\phi) = a\sqrt{2}/2e^{-\phi}$, $s = a$, $t_s = a/v_0$. 26. $r(\phi) = r_0 \exp(-\phi / \text{tg } \alpha)$, $\phi(t) = -\text{tg } \alpha \ln(1 - vt \cos \alpha / r_0)$. 27. $v = r_0 \omega + \frac{a}{2\pi} \omega^2 t$, $r_1 = r_{01} + \frac{a\phi}{2\pi}$, $r_2 = r_{01} - \frac{a\phi}{2\pi}$, $\omega_2 = \frac{r_1}{r_2} \omega$. 28. $\int \frac{\pm \frac{dr}{r^2}}{\sqrt{\frac{2Em}{L^2} + \frac{2GMm^2}{L^2} \frac{1}{r} - \frac{1}{r^2}}} = \phi + C$. 29.

$r = \frac{\frac{L^2}{GMm^2}}{1 + \sqrt{1 + 2\frac{E}{m} \left(\frac{L}{GMm} \right)^2 \sin(\phi - \phi_0)}}$. Jeżeli $E < 0$ pierwiastek jest mniejszy od 1 i ruch odbywa się po elipsie.

Jeżeli $E > 0$ pierwiastek jest większy od 1 i ruch odbywa się po hiperboli. W przypadku granicznym ruch odbywa się po paraboli.

30. $\omega_{BC} = -10\text{s}^{-1}$, $\omega_{DC} = 10\text{s}^{-1}$, chwilowy środek obrotu w punkcie przecięcia przedłużeń odcinków AB i CD , $\varepsilon_{BC} = -2\omega^2 - \varepsilon = -500\text{s}^{-1}$, $\varepsilon_{DC} = 2\omega^2 + \varepsilon = 500\text{s}^{-2}$. 31. $v_A = 4\text{cm} \cdot \omega$, $v_D = 4\text{cm} \cdot \omega$, $a_A = 4\text{cm} \cdot \varepsilon + \frac{4\sqrt{3}}{3}\text{cm} \cdot \omega^2$, $a_D = (8\text{cm} \cdot \omega^2; 4\text{cm} \cdot \varepsilon - \frac{4\sqrt{3}}{3}\text{cm} \cdot \omega^2)$. 32. $v_r = \frac{v}{2}$, $v_\phi = \frac{\sqrt{3}}{2} r \omega_0$, $v_z = \frac{\sqrt{3}}{2} v$, $a_r = -\frac{\sqrt{3}}{2} \left(\frac{v}{r} + r\omega_0^2 \right)$, $a_\phi = \omega_0 v$, $a_z = \frac{v^2}{2r}$. 33. $\rho = 7\text{m}$. 34. 1. $\vec{r}_0 = [2, 1]$, $\omega = \frac{1}{2}$, 2. $\vec{r}_0 = [2, 3]$, $\omega = -2$, 3. $\vec{r}_0 = [\frac{11}{2}, -\frac{1}{2}]$, $\omega = -\frac{2}{7}$, 4. $\vec{r}_0 = [3, 2]$, $\omega = -\frac{1}{3}$. 35. 1. $\vec{r}_c = [2, -1]$, $v_c = [1, 0]$, 2. $\vec{r}_c = [-2, \frac{9}{2}]$, $v_c = [3, 8]$, 3. $\vec{r}_c = [\frac{7}{2}, \frac{1}{2}]$, $v_c = [\frac{2}{7}, \frac{4}{7}]$, 4. $\vec{r}_c = [\frac{3}{2}, 2]$, $v_c = [0, \frac{1}{2}]$. 36. $v_B = 0.9\sqrt{3} \text{ m/s}$. 37. 1. $\vec{v}_3 = \frac{3}{4}[5, -4]$, 2. $\vec{v}_3 = [-2, 5]$, 3. $\vec{v}_3 = [-2, -\frac{1}{2}]$, 4. $\vec{v}_3 = [-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}]$. 38. $x = 14\text{cm}$, $y = 42\text{cm}$. 39. $x = \frac{a}{4}$, $y = \frac{2b-a}{4}$. 40. $v_c \approx 2.83\text{m/s}$. 41. poziome: $v_B = \omega h r / \sqrt{l^2 - h^2}$, pionowe: $v_B = \omega r$. 42. $v_C = \frac{a\omega \cos(\omega t)}{n+m} \left[n, m \frac{a \sin(\omega t)}{\sqrt{(n+m)^2 - a^2 \sin^2(\omega t)}} \right]$. 43. $\vec{v}_D = 240 \frac{\text{mm}}{\text{s}} [-\sin \phi, 3 \cos \phi]$, $x_D^2 + \left(\frac{1}{3} y_D \right)^2 = 120(\text{mm})^2$.

44. $\vec{v}_B = v[\text{tg } \alpha, 0]$, $\vec{v}_C = v[\text{tg } \alpha - 1, -\text{tg } \alpha]$, $\vec{v}_D = v[-1, \text{tg } \alpha - 1]$. 45. $\omega = 20\text{s}^{-1}$, $\vec{v}_1 = \vec{0}$, $\vec{v}_2 = [v_0, v_0]$, $\vec{v}_3 = [2v_0, 0]$, $\vec{v}_4 = [v_0, -v_0]$. 46. $v' = \frac{R}{r} v$. 47. $T = \frac{F}{3R}(2r - R)$. 48. $\alpha = \arccos \frac{r}{R}$.

49. Centroida nieruchoma: $x^2 + y^2 = 1\text{m}^2$, centroida ruchoma: $x^2 + y^2 = 0.25\text{m}^2$ (dla UW w środku belki o osi x wzdłuż niej). 50. Centroida nieruchoma: $x^2 + y^2 = a^2$, centroida ruchoma: $\eta^2 + \xi^2 = 4a^2$. 51. Centroida nieruchoma: $x^4 = r^2(x^2 + y^2)$, centroida ruchoma: $\eta^2 = r\xi$. 52. Centroida nieruchoma: $y = \frac{x^2 + a^2}{2}$, centroida ruchoma: $\xi = \frac{\eta^2 + a^2}{2a}$ (ξ wzdłuż BA, η wzdłuż BC). 53. $x = 20t - \sin(20t) \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$, $y = 1 - \cos(20t) \left[\frac{\text{m}}{\text{s}} \right]$, $x = \arccos(1 - y) - \sqrt{2y - y^2}$. 54. Centroida nieruchoma: $y = -a/2$, centroida ruchoma: $\xi^2 + \eta^2 = a^2/4$. 55. $v_A \approx [-0.64, -2.16] \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_B \approx [0.64, -3.44] \frac{\text{m}}{\text{s}}$. Centroida nieruchoma:

$y = \frac{\omega^2 x^2}{2g}$, centroida ruchoma: $\frac{\eta}{\xi} = \operatorname{tg} \left(\frac{\omega^2}{g} \sqrt{\xi^2 + \eta^2} \right)$ (UW w środku pręta, η wzdłuż niego). **56.** Kształtek A: centroida nieruchoma: $y = r_A$, centroida ruchoma: $\eta^2 + \xi^2 = r_A^2$, kształtek B: centroida nieruchoma: $y = \frac{1}{3}r_B$, centroida ruchoma: $\xi^2 + \eta^2 = \left(\frac{1}{3}r_B\right)^2$. **57.** Centroida nieruchoma: $x^2 + y^2 = \epsilon^2/4$ (dla UW o środku równoodległym od osi wałów), centroida ruchoma: $\xi^2 + \eta^2 = \epsilon^2$ (osie UW wzdłuż występów tarczy). **58.** $x_B(t) = r \cos(\omega t) + \sqrt{l^2 - r^2 \sin^2(\omega t)}$, $x_M(t) = r \cos(\omega t) + \frac{1}{2}\sqrt{l^2 - r^2 \sin^2(\omega t)}$, $y_M(t) = \frac{1}{2}r \sin(\omega t)$, $x_M(y_M) = \sqrt{r^2 - 4y_M^2} + \frac{1}{2}\sqrt{l^2 - 4y_M^2}$. Centroida nieruchoma: $x\sqrt{x^2 + y^2} = rx + \sqrt{l^2 x^2 + l^2 y^2 - r^2 y^2}$, centroida ruchoma: $(\eta^2 + \xi^2)\sqrt{r^2(\eta^2 + \xi^2) - l^2 \eta^2} = l\eta(l\xi + \sqrt{r^2(\eta^2 + \xi^2) - l^2 \eta^2})$ (dla UW o środku w punkcie B i osi η wzdłuż \vec{AB}). Środek obrotu w nieskończoności dla $\omega t = \pm \frac{\pi}{2}$. **59.** Centroida nieruchoma: $x^2 + y^2 = r^2$, centroida ruchoma: $\eta^2 + \xi^2 = 4r^2$ (UW o środku w trzpieniu korby i osi η wzdłuż korbowodu). **60.** Centroida nieruchoma: $4a^2(x^2 + y^2) = (b^2 - a^2 + 2bx)^2$ (dla UW o środku w punkcie B i osi OX skierowanej jak \vec{AB}), centroida ruchoma: $[\eta, \xi] = \frac{b^2 - a^2}{2(a - b \cos \alpha)(b^2 + a^2 - 2ab \cos \alpha)} [(b^2 + a^2) \cos \alpha - 2ab, (b^2 - a^2) \sin \alpha]$ (równanie parametryczne). **61.** Centroida nieruchoma: elipsa o ogniskach w A, D: $\frac{x^2}{(b-a)^2} + \frac{y^2}{a^2 + b^2} = \frac{1}{4}$ (UW o środku w środku AD, oś OX wzdłuż \vec{AD}), centroida ruchoma: elipsa o ogniskach w B, C: $\frac{\eta^2}{(b-a)^2} + \frac{\xi^2}{a^2 + b^2} = \frac{1}{4}$ (UW o środku w środku BC, oś O η wzdłuż \vec{BC}). **62.** 1) $[0, 0]$, $[2a, 2b]$, 2) $[0, 0]$, $[0, 0]$. **63.** $[0, 0]$, $[2a, 2b]$, $[4a, 0]$, $[6a, 2b]$. **64.** $v_M = a\omega \sin \alpha$. **65.** $\omega_B = O_1 D / O_2 E \omega_A$. **66.** $\omega_{CD} = 0$, $\omega_{BC} = \omega_0 / 3$. **67.** 1) $v_B = 100 \frac{\text{cm}}{\text{min}}$, 2) $v_B = 600 \frac{\text{cm}}{\text{min}}$, 3) $v_B = 36 \frac{\text{cm}}{\text{min}}$. **68.** $\omega_{DE} = 5.77 \text{ s}^{-1}$, $\omega_{OD} = 17.32 \text{ s}^{-1}$. **69.** $\omega_{DE} = 0.5 \text{ s}^{-1}$. **70.** położenia pionowe: $v_{DE} = 0$, położenia poziome: $\pm 400 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$. **71.** $v_F = 39.94 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$. **72.** $\omega_{AB} = 2.36 \frac{\text{obr}}{\text{min}}$. **73.** 1) $x = d \cos \alpha - \sqrt{r^2 - d^2 \sin^2 \alpha}$, $\dot{x} = d \sin \alpha \dot{\alpha} \left(\frac{d \cos \alpha}{\sqrt{r^2 - d^2 \sin^2 \alpha}} - 1 \right)$, 2) $\sin \beta = \sin \alpha (d \cos \alpha - \sqrt{r^2 - d^2 \sin^2 \alpha}) / r$, $\dot{\beta} = \left(\frac{d \cos \alpha}{\sqrt{r^2 - d^2 \sin^2 \alpha}} + 1 \right) \dot{\alpha}$. **74.** $x = 12\sqrt{26 - 10 \cos \omega t} - 60$, $\omega_c = \frac{25 \cos \omega t - 5}{26 - 10 \cos \omega t}$. **75.** $v \approx 6.35 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. **76.** $v_A = 50 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$, $v_B = 0 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$, $v_C \approx 70.71 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$, $v_D = 100 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$, $v_E \approx 70.71 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$. **77.** $\omega_2 = \frac{r_1 \pm r_2}{r_2} \omega_3$, $\omega_{23} = \frac{r_1}{r_2} \omega_3$. **78.** $\omega_{II} = 2\omega_0$, $\omega_{II|III} = \omega_0$. **79.** $r_1 = \frac{1}{11}r_3$. **80.** $2n_0$. **81.** $\frac{1}{2r_1}(2r_3\omega_3 + r_3\omega_0 - r_1\omega_0)$. **82.** $\omega_J(r_A + r_B) = \frac{1}{2}\omega_A r_A + \frac{1}{2}\omega_E r_E$, $r_E = r_A + 2r_B$. **83.** $\omega_{II} = 1000 \text{ obr/min}$, $\omega_2 = 3600 \text{ obr/min}$. **84.** $n_{II} = 3000 \text{ obr/min}$. **85.** $n_{II} = 4800 \text{ obr/min}$. **86.** $\omega_{II} = 280 \text{ s}^{-1}$. **87.** 585 obr/min . **88.** 1040 obr/min . **89.** $n_{II} = n_I \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} + n_0 \frac{r_0}{R} \left(1 - \frac{r_1 r_3}{r_2 r_4} \right)$. **90.** $v_B \approx 2.40 \frac{\text{m}}{\text{s}}$. **91.** $\omega_{II} = \omega_{IV} \approx 188.5 \text{ rad/min}$, $\omega_I \approx 171.36 \text{ rad/min}$, $\omega_{III} \approx 209.44 \text{ rad/min}$. **92.** $\omega_2 = \omega_4 \approx 16.67 \text{ rad/s}$, $\omega_1 \approx 20 \text{ rad/s}$, $\omega_3 \approx 14.29 \text{ rad/s}$. **93.** $\omega_{OB} \approx 6.5 \text{ rad/s}$, $\omega_I = 6 \text{ rad/s}$. **94.** $\omega_{O_1 A} = 4 \text{ rad/s}$, $\omega_I = 5.12 \text{ cm/s}$. **95.** $v_C = 15 \text{ cm/s}$, $v_B \approx 21.21 \text{ cm/s}$, $\omega_{BC} \approx 0.12 \text{ rad/s}$. **96.** $\vec{r}_1 = [0, \sin \phi_1, \cos \phi_1]$, $\vec{r}_2 = [\sin \gamma \cdot \cos \phi_2, -\cos \gamma \cdot \cos \phi_2, \sin \phi_2]$. **97.** $\operatorname{tg} \phi_2 = \operatorname{tg} \phi_1 \cdot \cos \gamma$. **98.** $\omega_2 = \omega_1 \cdot \cos \gamma / (1 - \sin^2(\phi_1) \cdot \sin^2 \gamma)$. Jeżeli wał czynny obraca się ze stałą prędkością kątową, to $\omega_2 = \omega_1 \cdot \cos \gamma / (1 - \sin^2(\omega_1 t) \cdot \sin^2 \gamma)$. **99.** Są zawsze równe. **100.** Są zawsze równe. **101.** $\omega = -\omega_1 \vec{t} - \omega_1 \sin \gamma \cos \gamma \frac{\sin \phi_1}{\cos^2(\phi_1) + \cos^2 \gamma \sin^2(\phi_1)} (\sin(\phi_1) \vec{j} + \cos(\phi_1) \vec{k})$. **102.** $\omega = 20 \text{ s}^{-1}$, $\epsilon = 300 \text{ s}^{-2}$, $x_1 = 20 \cos 15t$, $y_1 = 20 \sin 15t$, $z_1 = 0$. **103.** $v_B = 36\pi\sqrt{2} \frac{\text{cm}}{\text{s}} \approx 160 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$, $\epsilon = 39.5 \text{ s}^{-2}$ prostopadle do AB, $a_A = 1000 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$ równoległe do OB, $a_B = 1000\sqrt{2} \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$ w płaszczyźnie AOB pod kątem 45° do OB. **104.** $\omega_u = 4\pi \text{ s}^{-1}$, $\omega_w = 6,92\pi \text{ s}^{-1}$, $\omega = 8\pi \text{ s}^{-1}$, $\epsilon = 27,68\pi^2 \text{ s}^{-2}$, ω wzdłuż OC, ϵ równoległe do osi x. **105.** $v_C = 0$, $v_D = 80\pi \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ równoległe do osi x, $a_C = 320\pi^2 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$ prostopadle do OC w płaszczyźnie Oxy, $a_{Dy} = -480\pi^2 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$, $a_{Dz} = -160\sqrt{3}\pi^2 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$. **106.** $\omega_u = 4\pi \text{ s}^{-1}$ wzdłuż osi z, $\omega_w = 7,39\pi \text{ s}^{-1}$ wzdłuż OO₁, $\omega = 4\pi \text{ s}^{-1}$ wzdłuż OM₂, $\epsilon = 11,3\pi^2 \text{ s}^{-2}$ wzdłuż osi x. **107.** $v_0 = 153, 2\pi \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ antyrównoległe do Ox, $v_1 = 306, 4\pi \frac{\text{cm}}{\text{s}}$ antyrównoległe do Ox, $v_2 = 0$, $a_0 = 612, 8\pi^2 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$ do O₁ prostopadle do Oz, $a_{1y} = -357, 4\pi^2 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$, $a_{1z} = -865\pi^2 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$, $a_2 = 1225\pi^2 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$ w płaszczyźnie OO₁M₂ prostopadle do OM₂. **108.** $\omega = 2 \text{ s}^{-1}$. **109.** 1. Chwilowa oś obrotu jest nachylona pod kątem 45° do pionu i przechodzi przez środek ruchu kulistego w punkcie $[0, 0, R_1 + R_2]$. 2. Oś obrotu własnego przechodzi przez środek ruchu kulistego i środek kuli, $\theta = \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{R_1 + R_2}{R_1}$. 3. $\omega_1 = \frac{\sqrt{2R_1^2 + R_2^2}}{R_2} \omega_2$, $\omega = \sqrt{2} \frac{R_1 + R_2}{R_2} \omega_2$. 4. $\vec{\epsilon} = [0, \omega_2^2 \frac{R_1 + R_2}{R_2}, 0]$. 5. $\vec{v}_{top} = [0, 2\omega_2 R_1 \frac{R_1 + R_2}{R_2}, 0]$, $\vec{a}_{top} = \frac{\omega_2^2}{R_2^2} [-R_2^3 - 2R_1^3 - 3R_1^2 R_2 - 2R_1 R_2^2, 0, -R_2^3 - 2R_1^3 - 5R_1^2 R_2 - 4R_1 R_2^2]$. 6. $\vec{v} = \omega_2 [R_1 + R_2, -R_1 - R_2, -R_1 -$

$R_2]$, $\vec{a} = \frac{\omega_2^2}{R_2} [R_1 R_2 + R_2^2, 2(R_1 + R_2)^2, -2(R_1 + R_2)^2]$ **110.** $v = 0$. **111.** $x = \omega_x = 2\sqrt{3} \cos 2t$,
 $y = \omega_y = -2\sqrt{3} \sin 2t$, $z = \omega_z = 0$, $\omega = 2\sqrt{3} \text{s}^{-1}$, $\varepsilon = 4\sqrt{3} \text{s}^{-2}$. **112.** Aksoida nieruchoma: stożek o kącie wierzchołkowym $\alpha = 2 \arctg 21,6 = 174^\circ 42'$ i osi Oz ; aksoida ruchoma: stożek o kącie
wierzchołkowym $\alpha = 2 \arctg 0,0463 = 5^\circ 18'$ i osi OB . **113.** $\omega_w = 1,047 \text{s}^{-1}$, $\omega = 0,907 \text{s}^{-1}$. **114.**
 $v_B = 40 \frac{\text{cm}}{\text{s}}$, $v_C = 0$, $a_B = 40\sqrt{5} \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$, $a_C = 40 \frac{\text{cm}}{\text{s}^2}$. **115.** $v_x = -12 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v_y = 0$, $v_z = 4 \frac{\text{m}}{\text{s}}$, $v = 12,65 \frac{\text{m}}{\text{s}}$,
 $d = 1,807 \text{m}$. **116.** $x + 2y = 0$, $3x + z = 0$, $\omega = 3,2 \text{s}^{-1}$.

Część II

Statyka punktu i bryły

Obliczanie środków ciężkości i momentów bezwładności

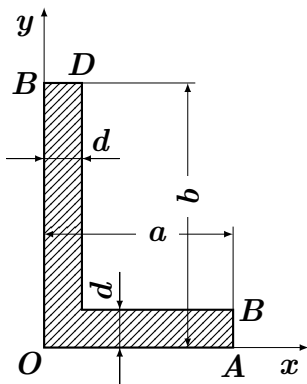
117. Kadłub lekkiego krążownika waży 19 MN, jego środek ciężkości zaś znajduje się w płaszczyźnie pionowej kilu na wysokości $y_1 = 6$ m nad kilem. Wewnątrz kadłuba ustawiono maszyny i kotły. Maszyny mają ciężar 4,5 MN, rzędna ich środka ciężkości $y_2 = 3$ m, ciężar kotłów wynosi 5 MN, a rzędna ich środka ciężkości $y_3 = 4.6$ m. Obliczyć rzędną y_c wspólnego środka ciężkości kadłuba, maszyn i kotłów.

118. Na statku o wyporności 4500 T przeniesiono ciężar 30 T z komory przedniej na rufę, tj. na odległość 60 m. O ile przesunie się wspólny środek ciężkości statku i ciężaru?

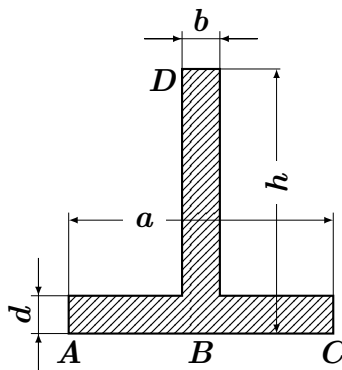
119. Znaleźć współrzędne środka ciężkości przekroju poprzecznego kątownika nierównoramiennego z rysunku 68, którego półki mają szerokość $OA = a$, $OB = b$, a grubość $AC = BD = d$

120. Znaleźć odległość środka ciężkości przekroju teownika ABCD od jego boku AC z rysunku 69, jeżeli wysokość srodnika $DB = h$, szerokość półki $AC = a$, grubość półki wynosi d , a grubość srodnika b .

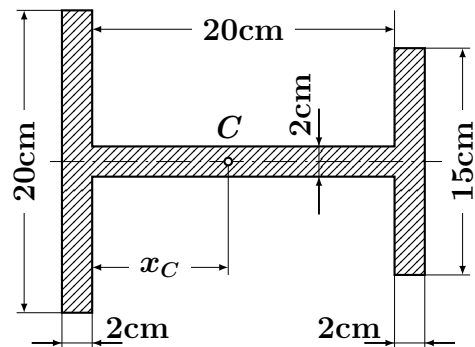
121. Dla profilu dwuteowego z rysunku 70, którego wymiary podano na rysunku, znaleźć współrzędną x_3 środka ciężkości C.



Rys. 68: Rysunek do zadania 119



Rys. 69: Rysunek do zadania 120

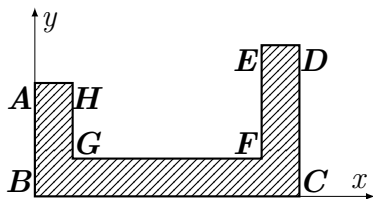


Rys. 70: Rysunek do zadania 121

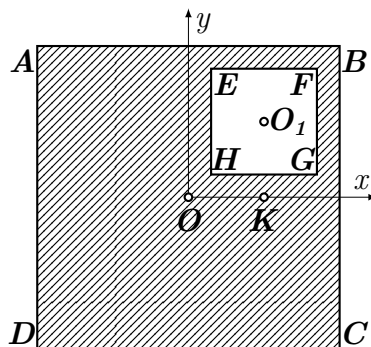
122. Znaleźć współrzędne środka ciężkości jednorodnej płytki przedstawionej na rysunku 71 wiedząc, że $AH = 2$ cm, $HG = 1.5$ cm, $AB = 3$ cm, $BC = 10$ cm, $EF = 4$ cm, $ED = 2$ cm.

123. Wyznaczyć środek ciężkości kwadratu o boku a z wyciętym otworem o promieniu r w $2/3$ przekątnej.

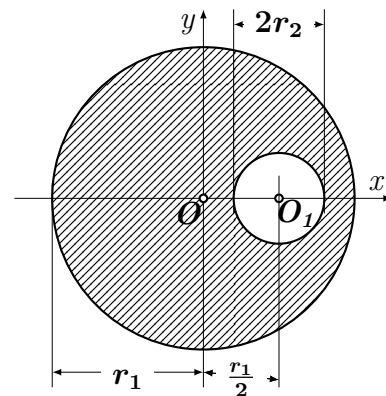
124. W jednorodnej kwadratowej płycie ABCD o boku $AB = 2$ m wycięto kwadratowy otwór EFGH, którego boki są odpowiednio równoległe do boków płyty ABCD i wynoszą 0,7 m każdy, jak na rysunku 72. Obliczyć współrzędne x, y środka ciężkości pozostałej części płyty wiedząc, że $OK = O_1K = 0.5$ m, gdzie O i O_1 są środkami kwadratów, przy czym odcinki OK i O_1K są odpowiednio równoległe do boków kwadratów.



Rys. 71: Rysunek do zadania 122



Rys. 72: Rysunek do zadania 124



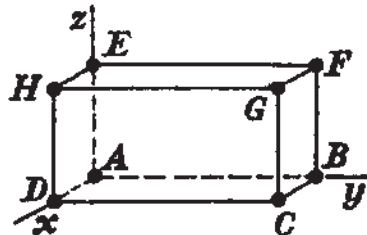
Rys. 73: Rysunek do zadania 125

125. Wyznaczyć położenie środka ciężkości C jednorodnego krążka z okrągłym otworem z rysunku 73 zakładając, że promień krążka wynosi r_1 , promień otworu r_2 , a środek otworu znajduje się w odległości $\frac{r_1}{2}$ od środka krążka.

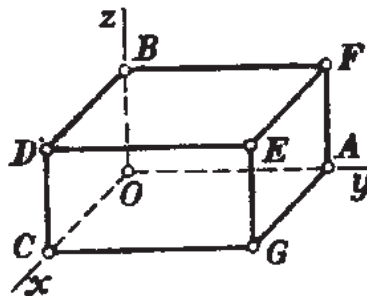
126. Wyznaczyć współrzędne środka ciężkości układu ciężarów rozmieszczonych w wierzchołkach prostopadłościanu z rysunku 74, którego krawędzie wynoszą $AB = 20 \text{ cm}$, $AE = 10 \text{ cm}$, $AD = 5 \text{ cm}$. Ciężary w wierzchołkach A, B, C, D, E, F, G i H wynoszą odpowiednio 1 kN , 2 kN , 3 kN , 4 kN , 3 kN , 3 kN , 4 kN i 5 kN .

127. Obliczyć współrzędne środka ciężkości konturu prostopadłościanu z rysunku 75, który jest utworzony z listew o długościach $OA = 8 \text{ dm}$, $OB = 4 \text{ dm}$, $OC = 6 \text{ dm}$ i o ciężarach $OA - 2,5 \text{ N}$; $OB, OC, \text{ i } CD - \text{po } 0,75 \text{ N}$, $CG - 2 \text{ N}$, $AF - 1,25 \text{ N}$, $AG \text{ i } GE - \text{po } 0,5 \text{ N}$ oraz $BD, BF, DE \text{ i } EF - \text{po } 0,25 \text{ N}$.

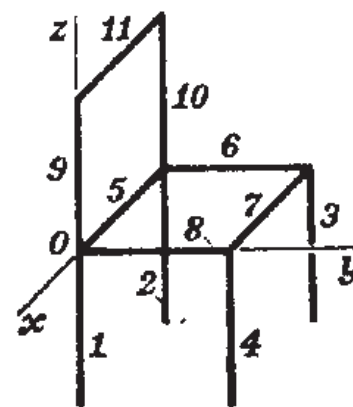
128. Znaleźć współrzędne środka ciężkości ramy krzesła z rysunku 76 składającej się z prętów o jednakowej długości i ciężarze. Długość pręta wynosi 44 cm .



Rys. 74: Rysunek do zadania 126



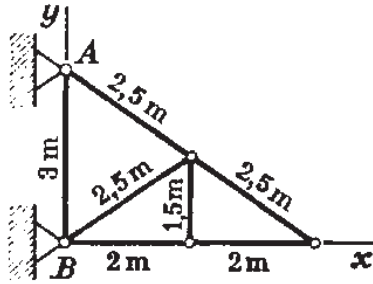
Rys. 75: Rysunek do zadania 127



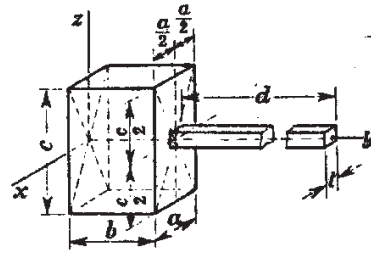
Rys. 76: Rysunek do zadania 128

129. Znaleźć współrzędne środka ciężkości płaskiej kratownicy złożonej z siedmiu prętów, przedstawionej na rysunku 77, których długości podano na rysunku, jeżeli ciężar 1 m każdego pręta jest ten sam.

130. Znaleźć współrzędne środka ciężkości drewnianego młotka składającego się z prostopadłościanu i trzonka o kwadratowym przekroju przedstawionego na rysunku 78. Dane są: $a = 10 \text{ cm}$, $b = 8 \text{ cm}$, $c = 18 \text{ cm}$, $d = 40 \text{ cm}$ i $l = 3 \text{ cm}$.



Rys. 77: Rysunek do zadania 129



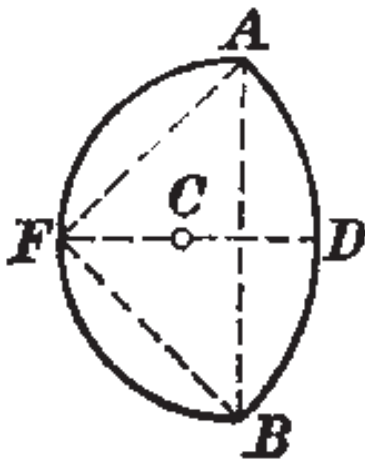
Rys. 78: Rysunek do zadania 130

131. Wyznaczyć środek ciężkości trójkąta prostokątnego o bokach a, b .

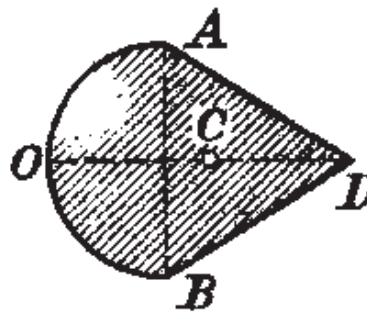
132. Wyznaczyć położenia środka ciężkości C ramki $AFBD$ z rysunku 79 składającej się z łuku ADB będącego ćwiartką okręgu koła o promieniu $FD = R$ i półokręgu AFB zbudowanego na cięciwie AB jako na średnicy. Ciężar jednostki długości obu prętów tworzących ramkę jest jednakowy.

133. Wyznaczyć położenie środka ciężkości C powierzchni z rysunku 80 ograniczonej półokręgiem AOB o promieniu R i dwoma odcinkami równej długości AD i DB , jeśli $OD = 3R$.

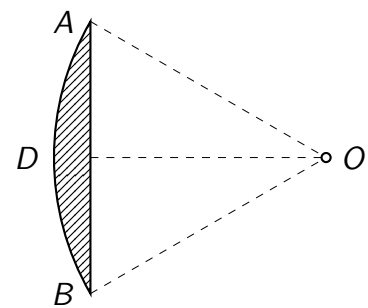
134. Znaleźć środek ciężkości powierzchni odcinka koła ADB o promieniu $AO = 30 \text{ cm}$, jak na rysunku 81, jeżeli kąt $\angle AOB = 60^\circ$.



Rys. 79: Rysunek do zadania 132



Rys. 80: Rysunek do zadania 133



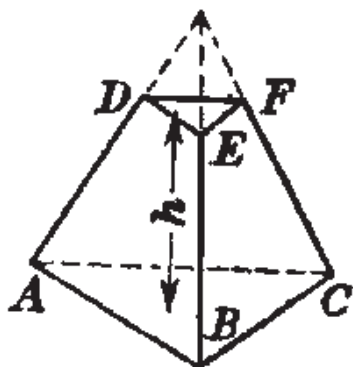
Rys. 81: Rysunek do zadania 134

135. Wyznaczyć środek ciężkości jednorodnego stożka o promieniu podstawy r i wysokości h .

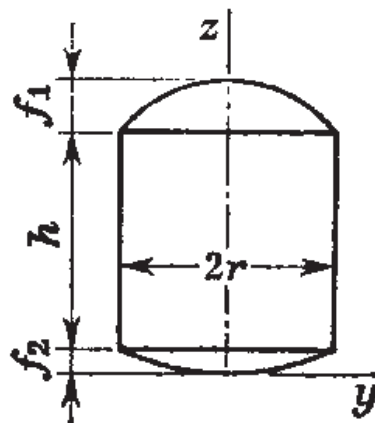
136. Wyznaczyć środek ciężkości jednorodnego walca o promieniu r i wysokości h .

137. Wyznaczyć środek ciężkości jednorodnej półkuli.

138. Jednorodny czworościan na rysunku 82 $ABCDEF$ o uciętym równolegle do podstawy wierzchołku ma pole powierzchni $ABC = a$ i pole $DEF = b$, jego wysokość zaś wynosi h . Wyznaczyć odległość z jego środka ciężkości od podstawy ABC .

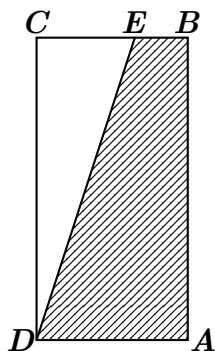


Rys. 82: Rysunek do zadania 138



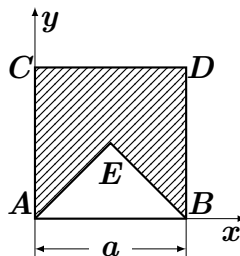
Rys. 83: Rysunek do zadania 139

140. Przeprowadzić przez wierzchołek D jednorodnego prostokąta $ABCD$ przedstawionego na rysunku 84 prostą DE tak, aby po odcięciu części wzdłuż tej prostej i zawieszeniu pozostałego trapezu za wierzchołek E , bok AD o długości a znalazł się w położeniu poziomym.



Rys. 84: Rysunek do zadania 140

141. Na rysunku 85 dany jest kwadrat $ABCD$, którego boki mają długość a . Znaleźć takie położenie punktu E , aby był on środkiem ciężkości powierzchni powstałej po wycięciu z kwadratu równoramiennego trójkąta AEB .



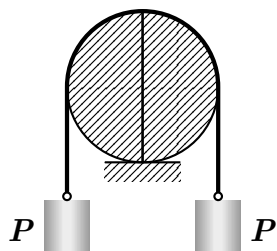
Rys. 85: Rysunek do zadania 141

142. Czterech ludzi niesie jednorodną trójkątną płytę. Dwou z nich wzięło za dwa wierzchołki A, B , pozostali zaś za boki zbiegające się w trzecim wierzchołku C . W jakiej odległości od boku AB powinni oni uchwycić krawędź, aby każdy z czterech niósł czwartą część całkowitego ciężaru płyty?

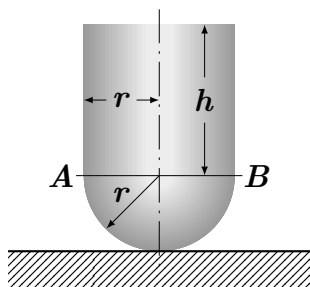
143. Dwie połówki jednorodnego walca kołowego leżącego na poziomej płaszczyźnie utrzymywane są za pomocą linki przerzuconej przez walec, do której końców zaczepiono ciężarki wynoszące P kN każdy, jak na rysunku 86. Ciężar walca wynosi Q kN, płaszczyzna jego przecięcia jest pionowa. Obliczyć najmniejszą wartość ciężarków, przy której połówki walca nie rozchylą się.

144. Wyznaczyć największą wysokość h walca, przy której ciało z rysunku 87 składające się z walca i półkuli, o jednakowej gęstości i o jednakowych promieniach r , złączonych razem, postawione na gładkiej poziomej płaszczyźnie tak, że z płaszczyzną styka się półkula, traci równowagę stałą.

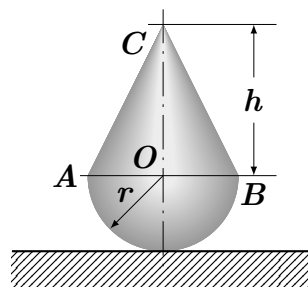
145. Wyznaczyć graniczną wysokość h stożka, przy której ciało z rysunku 88 składające się ze stożka i półkuli o tych samych promieniach i jednakowej gęstości, złączonych podstawami, traci równowagę stałą. Założenia jak w zadaniu poprzednim.



Rys. 86: Rysunek do zadania 143



Rys. 87: Rysunek do zadania 144



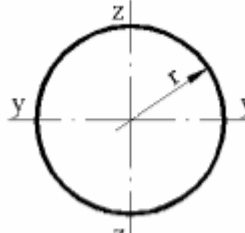
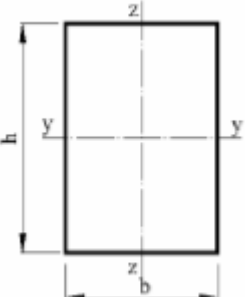
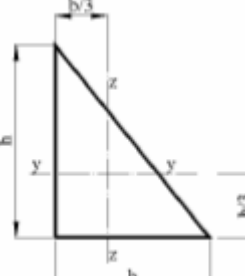
Rys. 88: Rysunek do zadania 145

146. Obliczyć analitycznie moment bezwładności dla następujących przekrojów:

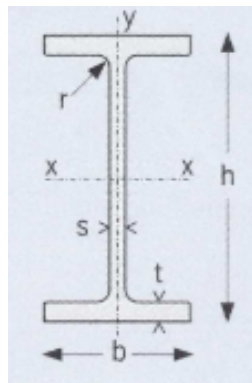
1. Przekrój prostokątny o bokach A i B
2. Przekrój okrągły o promieniu R

147. Obliczyć tensor momentu bezwładności i moment biegunowy dla następujących przekrojów:

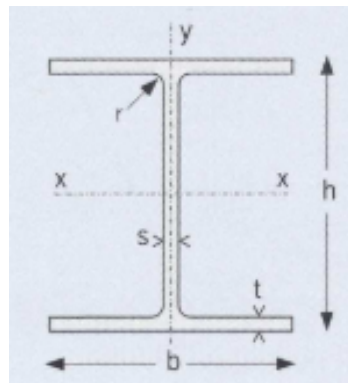
1. profil prostokątny o wymiarach A i B
2. profil okrągły o średnicy D
3. rura prostokątna o wymiarach A i B i grubości d
4. rura okrągła o promieniu R i grubości d
5. dwuteownik I o wymiarach H , B , t , s
6. dwuteownik H o wymiarach H , t , s
7. przekrój trójkątny równoramienny o wymiarach b i h
8. przekrój trójkątny prostokątny o wymiarach b i h

Kształt przekroju	Pole [mm ²]	Moment bezwładności [mm ⁴]	Wskaźnik wytrzymałości [mm ³]
<p>Okrągły</p> 	$A = \pi \cdot d^2/4$	$I = \pi \cdot d^4/64$	$W = \pi \cdot d^3/16$
<p>Prostokątny</p> 	$A = b \cdot h$	$I = b \cdot h^3/12$	$W = b \cdot h^2/6$
<p>Trójkątny</p> 	$A = b \cdot h/2$	$I = b \cdot h^3/36$	$W = b \cdot h^2/24$

148. Wyznaczyć tensor momentu bezwładności dla przekroju trójkąta prostokątnego, którego ramiona są równoległe do osi układu współrzędnych. Wyznaczyć postać tensora bezwładności po obrocie o 45 stopni. Wyznaczyć moment bezwładności względem osi równoległej do przeciwprostokątnej.



Rys. 89: Dwuteownik I



Rys. 90: Dwuteownik H ($h = b$)

149. Korzystając z dodawania momentów bezwładności obliczyć tensor momentu bezwładności dla przekroju dwuteowego o wymiarach $B = 80 \text{ mm}$, $H = 140 \text{ mm}$, szerokość podstawy $t = 7 \text{ mm}$, szerokość środka $s = 5 \text{ mm}$.

150. Korzystając z twierdzenia Steinera obliczyć tensor momentu bezwładności dla następujących przekrojów:

1. Dwuteownika o wymiarach H , B , t , s
2. Przekrój ceowy o wymiarach H , B , t , s
3. Przekrój prostokątny z otworami okrągłymi

151. Wyznaczyć momenty bezwładności dla następujących przekrojów:

1. Rura prostokątna o wymiarach 120×60 i grubości 6 mm
2. Dwuteownik o wymiarach $H = 140$, $B = 82$, $s = 5$, $t = 7,4 \text{ mm}$
3. Dwuteownik o wymiarach $H = 200$, $B = 100$, $s = 5,6$, $t = 8,5 \text{ mm}$

Statyka punktu materialnego

Do rozwiązania zadań w tym rozdziale przydatna będzie znajomość następujących faktów:

- Ciężar ciała jednorodnego (kula, pręt) można traktować jako skupiony w jego geometrycznym środku.
- Jeżeli bloczek jest w równowadze, linki po obu jego stronach napięte są ręką samą siłą.

152. W kierunku krokwi dachowej nachylonej do poziomu pod kątem $\alpha = 45^\circ$ działa siła $Q = 250 \text{ kN}$ jak na rysunku 91. Jaka będzie przy tym siła S w poziomym ściąganiu i jaka siła N działa na ścianę w kierunku pionowym?

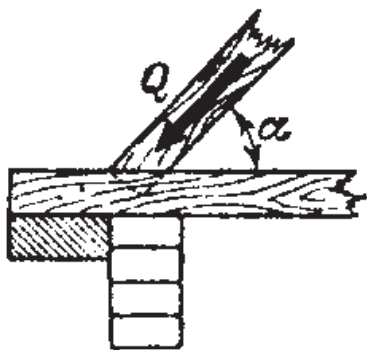
153. Dwa ciągniki jadące ze stałą prędkością wzdłuż brzegów prostego kanału ciągną barkę za pomocą dwóch lin. Siły napinające liny wynoszą 80 i 96 kN , a liny tworzą między sobą kąt 60° . Znaleźć opór wody wywierany na barkę przy jej ruchu oraz kąty α i β , jakie liny tworzą z brzegami, jeżeli barka porusza się równoległe do brzegów.

154. Zaczepy A , B , C trzech wag sprężynowych zamocowano nieruchomo na poziomej desce. Do haków tych wag przywiązano linki, które naciągnięto i związane w jeden węzeł D . Wagi wskazują siły 8 , 7 i 13 kN . Obliczyć kąty α i β zawarte między kierunkami naprężonych linek, jak to pokazano na rysunku 92.

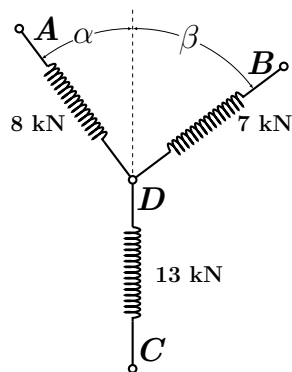
155. Ciężar wisi na dwóch linkach o różnych długościach jak na rysunku 93. Oblicz naprężenia linek.

156. Ciężar Q wisi na dwóch linkach tworzących z poziomem kąt 45° jak na rysunku 94. Oblicz naprężenia linek.

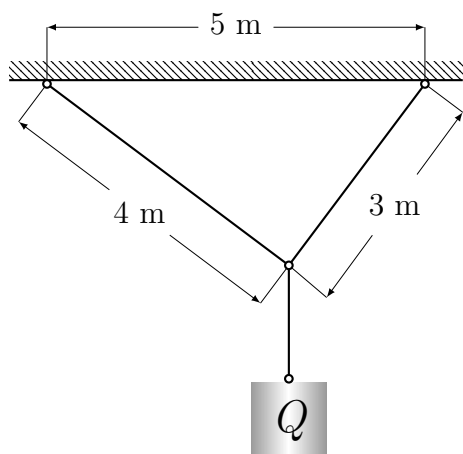
157. Na rysunku 95 pokazano schematycznie układy prętów połączonych przegubowo ze sobą i z sufitem. Na sworzniach przegubów B , F , K zawieszono ciężary $Q = 1000 \text{ kN}$. Obliczyć siły w prętach w przypadkach, gdy: (a) $\alpha = \beta = 45^\circ$; (b) $\alpha = 30^\circ$, $\beta = 60^\circ$; (c) $\alpha = 60^\circ$, $\beta = 30^\circ$. Wskazówka: Przez siłę w pręcie rozumiemy wewnętrzną siłę działającą wzdłuż osi pręta. Siła ta może wywoływać rozciąganie lub ściskanie pręta. Dla rozróżnienia tych przypadków, wartość siły rozciągającej wyrażamy liczbą dodatnią, a wartość siły ścisniającej ujemną.



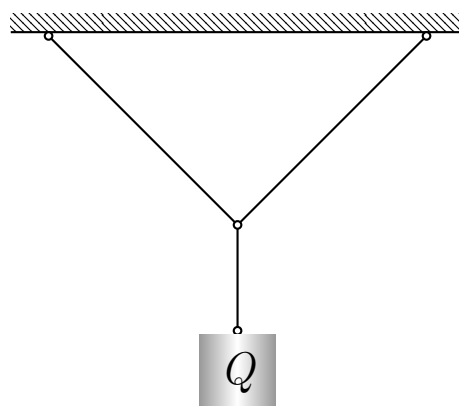
Rys. 91: Rysunek do zadania 152



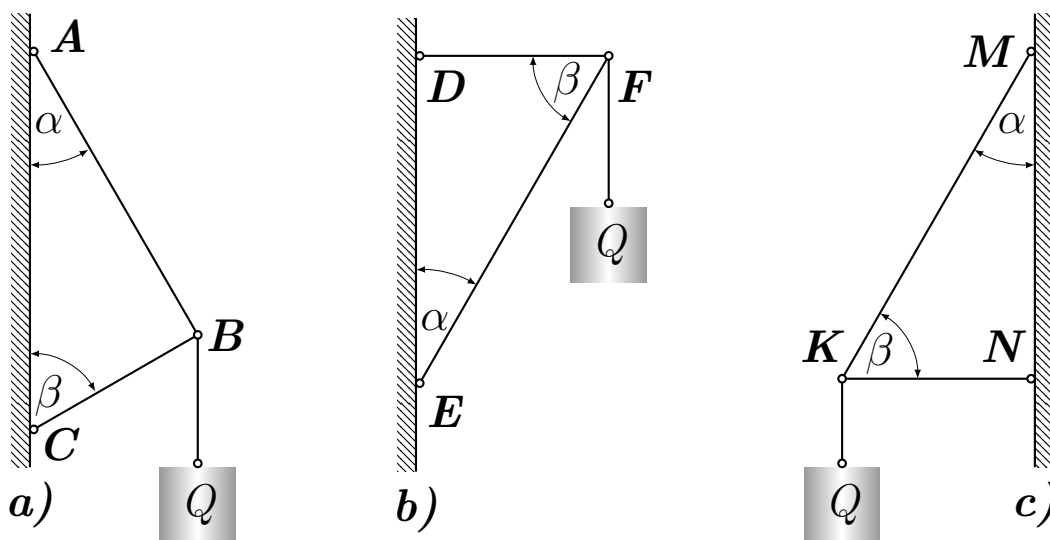
Rys. 92: Rysunek do zadania 154



Rys. 93: Rysunek do zadania 155



Rys. 94: Rysunek do zadania 156



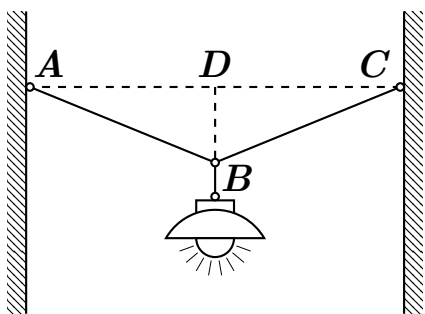
Rys. 95: Rysunek do zadania 157

158. Latarnia uliczna zawieszona jest w punkcie B w środku linki ABC przyczepionej do haków A i C znajdujących się na jednym poziomie. Znaleźć siły T_1 i T_2 rozciągające części linki AB i BC, jeżeli ciężar latarni wynosi 150 N, długość całej linki 20 m, odległość zaś BD punktu zawieszenia B od poziomej AC wynosi 0.1 m. Ciężar linki pominąć.

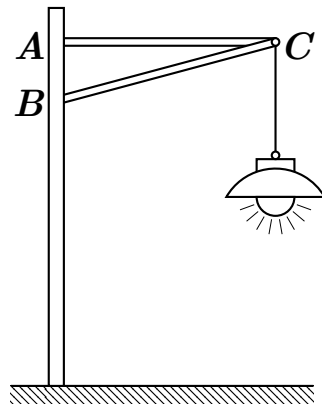
159. Latarnia uliczna o ciężarze 300 N zawieszona jest na pionowym słupie za pomocą poziomej

poprzeczki AC o długości 1.2 m oraz ukośnego pręta BC o długości 1.5 m . Obliczyć siły S_1 i S_2 w prętach AC i BC , jeżeli połączenia w punktach A , B , C są przegubowe.

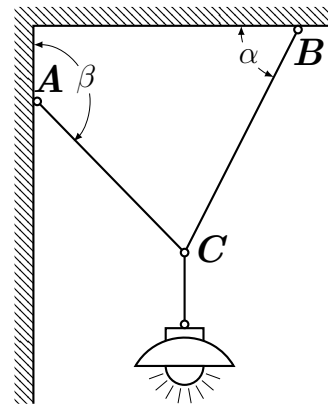
160. Lampa elektryczna o ciężarze 20 N zawieszona jest u sufitu na sznurze AB i przyciągnięta do ściany linką BC . Wyznaczyć siły: T_A w sznurze AC i T_B w linie BC , jeżeli wiadomo, że kąt $\alpha = 60^\circ$, a kąt $\beta = 135^\circ$. Ciężar sznura i linki pominąć.



Rys. 96: Rysunek do zadania 158



Rys. 97: Rysunek do zadania 159



Rys. 98: Rysunek do zadania 160

161. Dźwig słupowy składa się z ramienia AB przyczepionego do słupa przegubem A i łańcuchem CB jak na rysunku 99. Na końcu B ramienia zawieszony jest ciężar $P = 200\text{ kN}$. Kąt $BAC = 15^\circ$, kąt $ACB = 135^\circ$. Wyznaczyć siłę T w łańcuchu CB i siłę Q w ramieniu AB .

162. Pewien odcinek kolei żelaznej, przebiegającej w górach, przeprowadzony jest w wąwozie i zawieszony jak na rysunku 100. Wymiary zaznaczono na rysunku. Zakładając, że podciąg AB obciąża siłą $P = 500\text{ kN}$, znaleźć siły w prętach AC i AD .

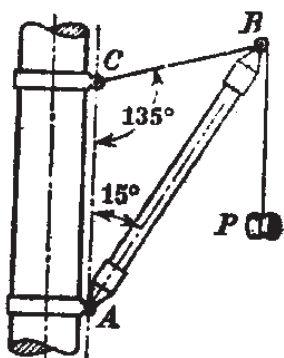
163. Sztywna rama z drutu w kształcie trójkąta jest umieszczona w płaszczyźnie pionowej. Na bokach ramy o kątach nachylenia α i β do poziomu i wspólnym wierzchołku nawleczone są dwa koraliki o masach odpowiednio m_1 i m_2 połączone nierozciągliwą nitką. Koraliki mogą się ślizgać po bokach ramy bez tarcia. Jaki kąt γ tworzy nić z poziomem, gdy układ jest w równowadze?

164. Przez dwa znikomo małe krążki A i B znajdujące się na końcach poziomego odcinka AB przerzucona jest linka $CAEBD$. Końce C i D linki obciążono każdy ciężarem p , a punkt E ciężarem P , jak na rysunku 101. Pomijając tarcie na krążkach obliczyć odległość x punktu E od prostej AB odpowiadającą położeniu równowagi. Ciężar linki pominąć.

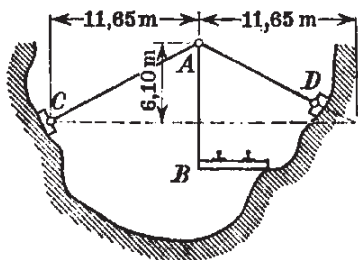
165. Załóżmy, że masy zawieszona w końcach C, D linek wynoszą m_1 i m_2 , a masa obciążająca punkt E jest równa M . Oblicz kąty α i β , które tworzą z pionem odcinki AE i BE .

166. Załóżmy, że kąty, które tworzą odcinki AE i BE z pionem wynoszą α i β , a punkt P obciążony jest masą M . Znajdź masy m_1 i m_2 zawieszona w końcach C i D linek.

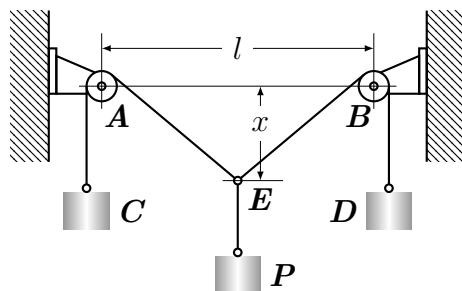
167. Ciało o ciężarze 250 N utrzymywane jest w równowadze przez dwie linki przerzucone przez krążki i obciążone odważnikami. Jeden z tych odważników waży 200 N , sinus kąta utworzonego przez odpowiednią linkę z pionem wynosi 0.6 . Pomijając tarcie na krążkach wyznaczyć ciężar p drugiego odważnika oraz kąt α utworzony przez drugą linkę z pionem. Nie uwzględniać ciężaru linki.



Rys. 99: Rysunek do zadania 161



Rys. 100: Rysunek do zadania 162

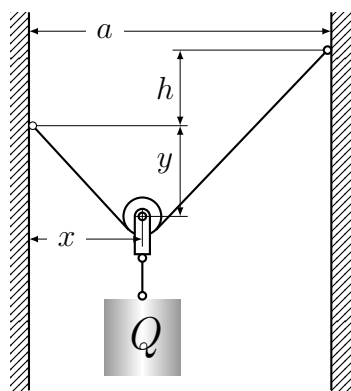


Rys. 101: Rysunek do zadań 164,165,166

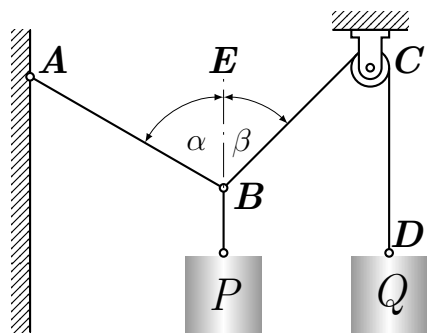
168. W punktach A i B położonych na różnych wysokościach dwóch pionowych ścian znajdujących się w odległości a jedna od drugiej, jak na rysunku 102, zamocowano końce liny, której długość wynosi l . Po linie tej może się poruszać – z pomijalnie małymi oporami tarcia – lekki krążek K o pomijalnie małej średnicy z zawieszonym ciałem o ciężarze Q . Znaleźć siłę napięcia liny S oraz położenie krążka odpowiadające stanowi równowagi, wiedząc, że różnica wysokości punktów zaczepienia A i B liny wynosi h .

169. Do linki AB, której jeden koniec umocowany jest w punkcie A, przywiązano w punkcie B ciężar P i linkę BCD, którą przerzucono przez krążek, jak na rysunku 103. Do końca D linki przywiązano ciężar $Q = 100$ N. Obliczyć siłę T w linie AB i ciężar P , jeżeli w położeniu równowagi kąty utworzone przez linki z pionem BE wynoszą $\alpha = 45^\circ$ i $\beta = 60^\circ$. Tarcie na krążku pominać.

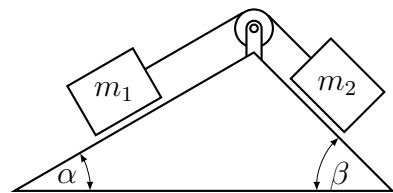
170. Na dwóch zboczach równi obustronnej o kątach α i β leżą klocki o masach m_1 i m_2 , połączone nieważką linką przechodzącą przez nieważki bloczek na szczycie równi, jak na rysunku 104. Jaki musi być minimalny współczynnik tarcia statycznego f , by układ pozostawał w spoczynku?



Rys. 102: Rysunek do zadania 168



Rys. 103: Rysunek do zadania 169

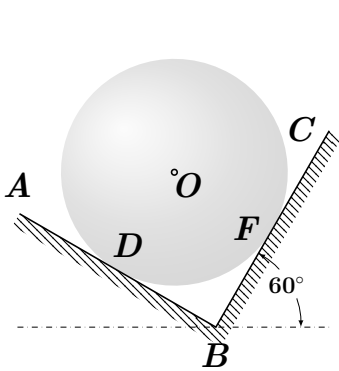


Rys. 104: Rysunek do zadania 169

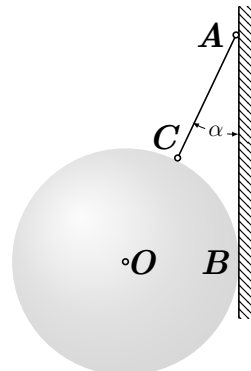
171. Na dwóch wzajemnie prostopadłych gładkich pochyłych płaszczyznach AB i BC spoczywa jednorodna kula o ciężarze 60 N, jak na rysunku 105. Znaleźć oddziaływania kuli na każdą z płaszczyzn wiedząc, że płaszczyzna BC tworzy z poziomem kąt 60° .

172. Przy pionowej gładkiej ścianie AB zawieszono jednorodną kulę O na linie AC, jak na rysunku 106. Linka tworzy ze ścianą kąt α , ciężar kuli wynosi P . Obliczyć siłę T w linie i oddziaływanie Q kuli na ścianę.

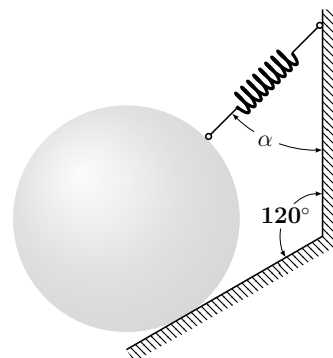
173. Jednorodna kula o ciężarze 200 N utrzymywana jest na gładkiej pochyłej płaszczyźnie przez linkę zaczepioną na wadze sprężynowej, jak na rysunku 107. Waga wskazuje 100 N. Płaszczyzna nachylona jest do poziomu pod kątem 30° . Znaleźć kąt α utworzony przez kierunek linki i pion oraz oddziaływanie Q kuli na płaszczyznę. Ciężar wagi pominąć.



Rys. 105: Rysunek do zadania 171



Rys. 106: Rysunek do zadania 172

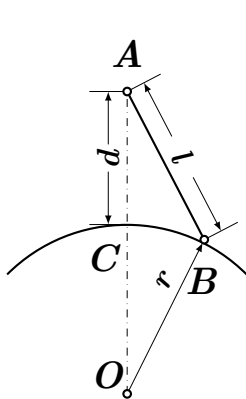


Rys. 107: Rysunek do zadania 173

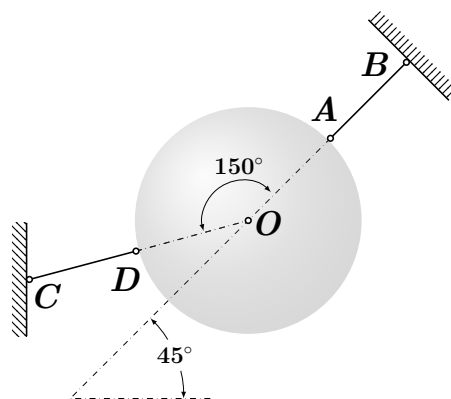
174. Kulka B o ciężarze P , wisząca na nici AB umocowanej nieruchomo w punkcie A , opiera się o powierzchnię gładkiej kuli o promieniu r jak na rysunku 108; odległość punktu A od powierzchni kuli $AC = d$, długość nici $AB = l$, prosta CA jest pionowa. Wyznaczyć siłę T w nici i reakcję Q powierzchni kulistej. Promień kulki pominąć.

175. Jednorodna kula o ciężarze 100 N utrzymywana jest w położeniu równowagi przez dwie linki AB i CD rozpięte w jednej płaszczyźnie pionowej i tworzące kąt 150° jak na rysunku 109. Linka AB tworzy z poziomem kąt, 45° . Obliczyć siły w linkach.

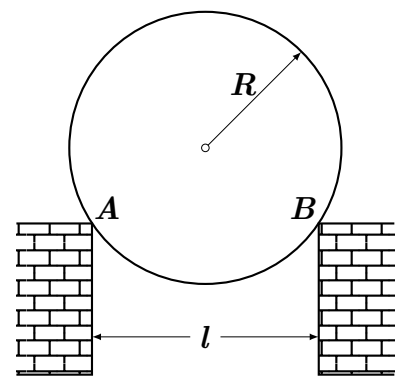
176. Kocioł o promieniu $R = 1\text{ m}$ i ciężarze $P = 4\text{ kN}$ rozłożonym jednostajnie wzdłuż długości oparty jest na krawędziach podmurowania jak na rysunku 110. Rozstęp ścian podmurowania $l = 1.6\text{ m}$. Pomijając tarcie, znaleźć oddziaływanie kotła na podmurowanie w punktach A i B .



Rys. 108: Rysunek do zadania 174



Rys. 109: Rysunek do zadania 175



Rys. 110: Rysunek do zadania 176

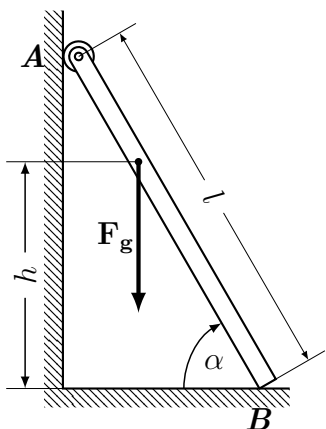
Statyka bryły

177. Drabina AB długości l zakończona kółeczkami stoi oparta o ścianę pod kątem α , jak na rysunku 111. Na wysokości h jest obciążona ciężarem $F_g = 700 \text{ N}$. Ciężar drabiny wynosi 120 N i jest rozłożony równomiernie na całej długości drabiny.

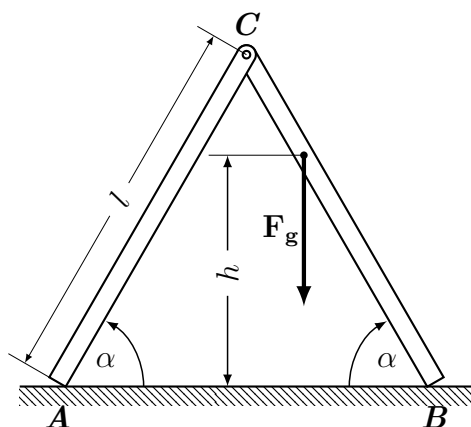
- Jakiego rodzaju podpór występują w tej sytuacji
- Jakimi są siły reakcji w podporach?
- Dla jakiego maksymalnego h drabina nie będzie się ślizgać, jeżeli maksymalny współczynnik tarcia statycznego o podłogę wynosi $\mu = 0.2$, a kąt α jest równy 60° ?

178. Drabina podwójna ACB składa się z ramion o długości l połączonych przegubowo tworzących kąty α z podłożem, jak na rysunku 112. Jedna jej część jest obciążona na wysokości h ciężarem F_g . Jakimi są reakcje podłoża i jakie siły przenosi trzpień przegubu C ?

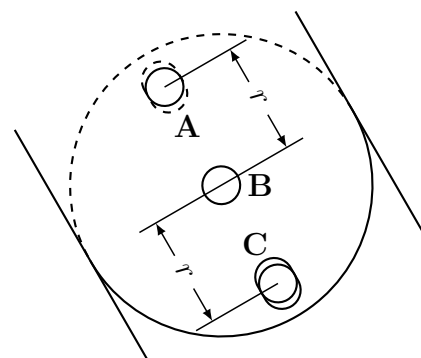
179. Załóżmy że drabina z zadania 177 jest w połowie łączona przegubowo. Przegub jest zablokowany za pomocą trzpieni A i C położonych w równych odległościach r od osi przegubu, jak pokazuje rysunek 113. Trzpień A jest osadzony w górnej części drabiny i przechodzi przez owalny otwór w dolnej części drabiny. Trzpień C jest osadzony w dolnej części drabiny i przechodzi przez owalny otwór w górnej części drabiny. Jakimi siłami przenoszą trzpienie A , B , C ?



Rys. 111: Rysunek do zadania 177



Rys. 112: Rysunek do zadania 178

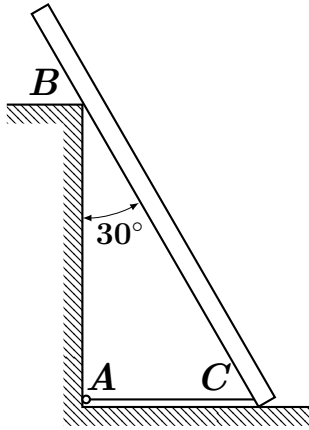


Rys. 113: Rysunek do zadania 179

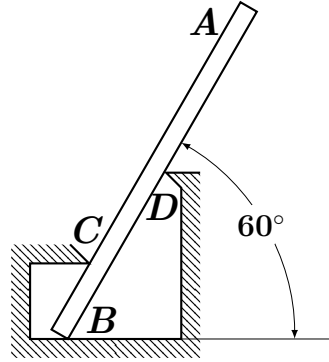
180. Jednorodna belka o ciężarze 600 N i długości 4 m , opierająca się jednym końcem na gładkiej podłodze, a w pośrednim punkcie B – na słupie o wysokości 3 m , tworzy z pionem kąt 30° , jak na rysunku 114. Belka utrzymywana jest w takim położeniu przez linkę AC , przecigniętą wzdłuż podłogi. Wyznaczyć siłę w linie T i reakcje R_B i R_C . Tarcie pominać.

181. Jednorodna belka AB o ciężarze 200 N oparta o gładką poziomą podłogę w punkcie B i tworząca z nią kąt 60° jest podtrzymywana przez podpory C i D , jak na rysunku 115. Wyznaczyć reakcje podpór w punktach B , C i D , jeśli długość $AB = 3 \text{ m}$, $CB = 0.5 \text{ m}$, $BD = 1 \text{ m}$.

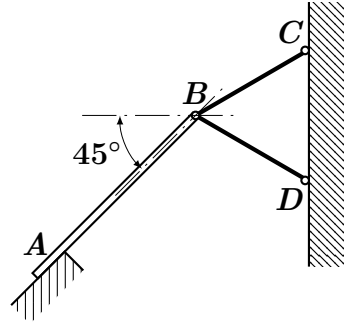
182. Jednorodna belka AB o ciężarze 1000 N opiera się swobodnie w punkcie A , a dwa pręty BC i BD utrzymują ją pod kątem 45° do poziomu, jak na rysunku 116. Trójkąt BCD jest równoboczny. Punkty C i D leżą w jednym pionie. Pomijając ciężar prętów i przyjmując, że połączenia w punktach B , C i D są przegubowe, wyznaczyć reakcję podpory A i siły w prętach.



Rys. 114: Rysunek do zadania 180



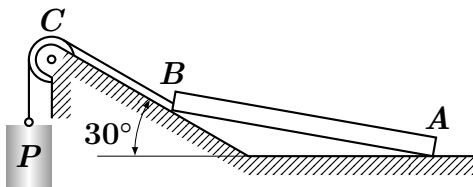
Rys. 115: Rysunek do zadania 181



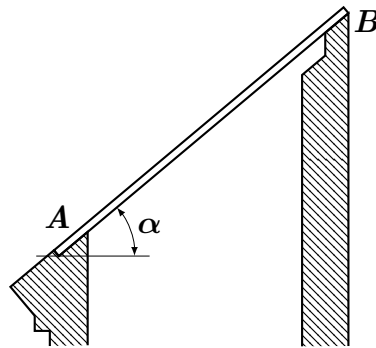
Rys. 116: Rysunek do zadania 182

183. Jednorodny pręt AB o ciężarze 100 kN opiera się jednym końcem na gładkiej poziomej podłodze, drugim zaś na gładkiej płaszczyźnie nachylonej pod kątem 30° do poziomu, jak na rysunku 117. Koniec B pręta podtrzymywany jest przez linkę przerzuconą przez krążek C i obciążoną ciężarem P . Część linki BC jest równoległa do pochyłej płaszczyzny. Pomijając tarcie na krążku wyznaczyć ciężar P i oddziaływania N_A i N_B na podłogę i pochyłą płaszczyznę.

184. Krokiew jednospadowego dachu stanowi belka AB , której górny koniec B leży swobodnie na gładkiej podporze, a dolny koniec A opiera się o ścianę, jak na rysunku 118. Nachylenie dachu $\text{tg } \alpha = 0.5$, na belkę AB działa pionowe obciążenie 900 kN przyłożone w środku belki. Wyznaczyć reakcje podpór w punktach A i B .



Rys. 117: Rysunek do zadania 183

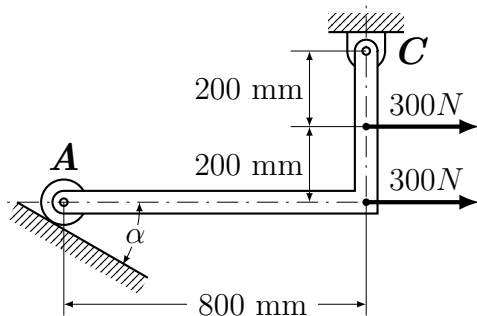


Rys. 118: Rysunek do zadania 184

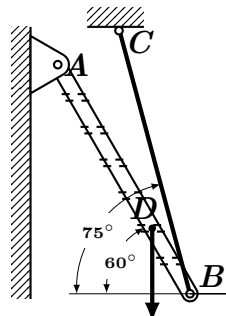
185. Wyznacz reakcje w punktach A i C dla wartości kąta α wynoszących 0° i 30° na rysunku 119.

186. Na jednorodnej drabinie o długości 6 m i ciężarze 2400 N stoi w punkcie D człowiek o ciężarze 800 N , jak na rysunku 120. Drabina zamocowana przegubowo w końcu A tworzy z poziomem kąt 60° i jest utrzymywana w tym położeniu przez linkę CB przymocowaną w punkcie B i tworzącą z poziomem kąt 75° . Punkt D odległy jest od końca B o 2 m . Wyznaczyć siłę T w linie i reakcję przegubu A .

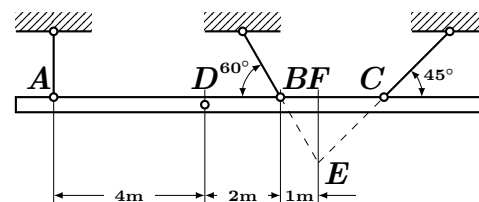
187. Przy montażu mostu zaszła potrzeba podniesienia dźwigara ABC ie za pomocą trzech lin, umocowanych jak pokazano na rysunku 121. Ciężar tego dźwigara wynosi 4200 kN , jego środek ciężkości znajduje się w punkcie D . Odległości wynoszą odpowiednio $AD = 4\text{ m}$, $DB = 2\text{ m}$, $BF = 1\text{ m}$. Znaleźć siły w linach, jeśli prosta AC jest pozioma.



Rys. 119: Rysunek do zadania 185



Rys. 120: Rysunek do zadania 186

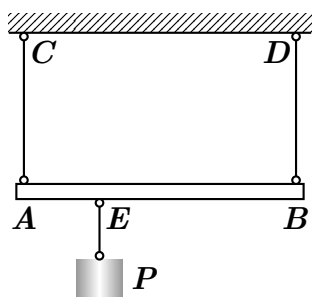


Rys. 121: Rysunek do zadania 187

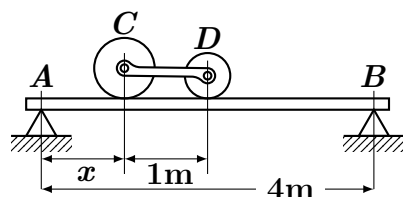
188. Jednorodny pręt AB, o długości 1 m i ciężarze 20 N, zawieszony jest poziomo na dwóch równoległych linkach AC i BD, jak na rysunku 122. Na pręcie w punkcie E, odległym o $AE = \frac{1}{4}m$ od punktu A, zawieszono ciężar $P = 120N$. Obliczyć siły T_C i T_D w linkach.

189. Na poziomej belce leżącej na dwóch podporach odległych o 4m położono dwa ciężary: jeden $C = 2kN$, drugi $D = 1kN$, jak na rysunku 123, tak że reakcja podpory A jest dwa razy większa od reakcji podpory B. Ciężar własny belki pomijamy, odległość CD między ciężarami wynosi 1 m. Jaka jest odległość x ciężaru C od podpory A?

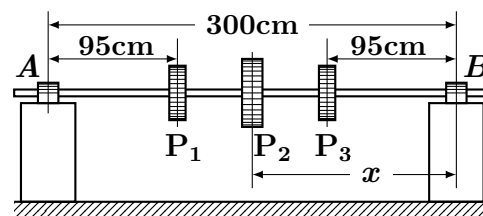
190. Wał transmisyjny AB ma trzy koła pasowe o ciężarach: $P_1 = 300kN$, $P_2 = 500kN$, $P_3 = 200kN$. Wymiary pokazane są na rysunku 124. W jakiej odległości x od łożyska B należy zamocować koło o ciężarze P_2 , aby reakcje łożysk były równe? Ciężar wału pomijamy.



Rys. 122: Rysunek do zadania 188



Rys. 123: Rysunek do zadania 189

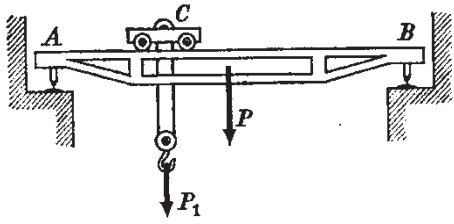


Rys. 124: Rysunek do zadania 190

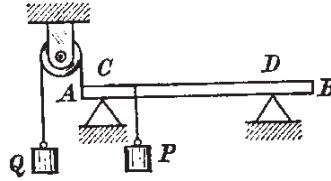
191. Znaleźć siłę wywieraną przez dźwig mostowy na szyny w zależności od położenia wózka C, na którym umocowany jest kołowrót podnoszący, jak na rysunku 125. Położenie wózka określić przez stosunek k odległości jego środka od lewej szyny do całkowitej długości mostu AB. Ciężar mostu $P = 60kN$, ciężar wózka z podnoszonym ciężarem $P_1 = 40kN$.

192. Jednorodna belka AB o długości 10 m i ciężarze 200 kN leży na dwóch podporach C i D, jak na rysunku 126. Podpora C odległa jest od końca A o 2m, podpora D od końca B o 3m. Koniec belki A podciągany jest pionowo ku górze przez ciężar $Q = 300 kN$, przywiązany do liny przerzuconej przez krążek. W odległości 3 m od końca A zawieszony jest na belce ciężar $P = 800 kN$. Wyznaczyć reakcje podpór pomijając tarcie na krążku.

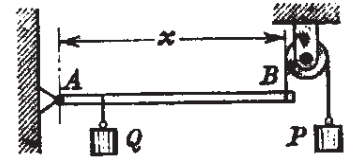
193. Poziomy pręt AB o ciężarze 1 N może obracać się dokoła nieruchomego punktu A , jak na rysunku 127. Koniec B pręta jest podciągany ku górze przerzuconą przez krążek linką z uwiązany na końcu ciężarem $P = 1.5\text{ N}$. W punkcie znajdującym się w odległości 20 cm od końca A zawieszony jest ciężar $Q = 5\text{ N}$. Jaka jest długość x pręta AB , jeśli znajduje się on w równowadze?



Rys. 125: Rysunek do zadania 191



Rys. 126: Rysunek do zadania 192



Rys. 127: Rysunek do zadania 193

194. Koniec A poziomego pręta AB o długości 5 m i ciężarze 20 kN jest podciągany ku górze linką przerzuconą przez krążek i obciążoną ciężarem 10 kN , jak na rysunku 128. W taki sam sposób koniec B jest podciągany ku górze linką z ciężarem 20 kN . W punktach C, D, E i F , odległych jeden od drugiego i od punktów A i B o 1 m , zawieszono są ciężary $5, 10, 15$ i 20 kN . W jakiej odległości od punktu A należy podeprzeć pręt, ażeby był w równowadze?

195. Do jednorodnego pręta, którego długość wynosi 3 m , a ciężar 60 N , przyczepiono w jednakowych odstępach cztery ciężarki, z tego dwa skrajne na końcach pręta. Pierwszy od lewej strony ciężarek waży 20 N , każdy następny o 10 N więcej. W jakiej odległości od lewego końca należy podeprzeć pręt, aby zachował położenie poziome?

196. Jednorodna pozioma belka połączona jest przegubowo ze ścianą i podparta w punkcie odległym od ściany o 160 cm . Długość belki wynosi 400 cm , a jej ciężar 3.2 kN . W odległościach 120 cm i 180 cm od ściany spoczywają na belce dwa ciężary wynoszące odpowiednio 1.6 i 2.4 kN . Wyznaczyć reakcje podpór.

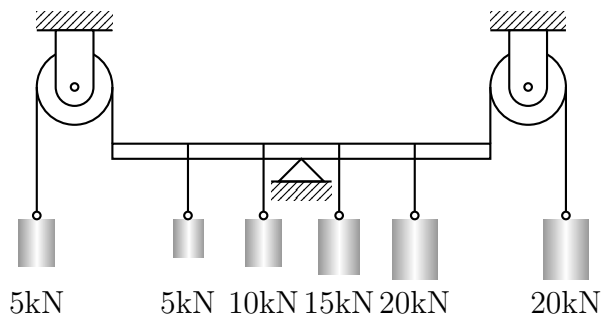
197. Jednorodna pozioma belka o długości 4 m i ciężarze 5 kN zamocowana jest w ścianie o grubości $0,5\text{ m}$ tak, że opiera się na niej w punktach A i B , jak na rysunku 129. Wyznaczyć reakcje w tych punktach, jeśli na swobodnym końcu C belki wisi ciężar P równy 40 kN .

198. Splawik ma długość l , kształt patyczka o stałym przekroju poprzecznym i jest wykonany z balsy o gęstości 9 razy mniejszej niż woda. Splawik jest przytwierdzony do dna za pomocą żyłki z ciężarkiem, a jego dolny koniec jest na głębokości $h < l$ pod powierzchnią (rysunek 130). Jaki kąt tworzy splawik z powierzchnią wody i dla jakiego h splawik będzie stał pionowo?

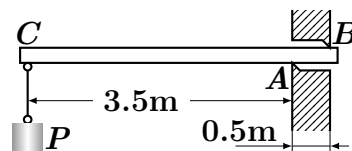
199. Skrzynia o długości l , wysokości h i jednorodnie rozłożonej masie m stoi na równi pochyłej o kącie nachylenia α na czterech nóżkach w rogach podstawy. Jakie są składowe prostopadłe reakcji podłoża działających na nóżki?

200. Drut o masie m wygięto tak, że tworzy trzy boki kwadratu i jego jeden koniec zawieszono. Na drugim końcu powieszono masę M i przekątna kwadratu jest w pionie. Jaka jest wartość masy M ?

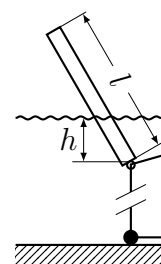
201. Jaki kąt tworzy przekątna z pionem w poprzednim zadaniu, jeżeli drut nie jest obciążony dodatkową masą?



Rys. 128: Rysunek do zadania 194



Rys. 129: Rysunek do zadania 197



Rys. 130:
Rysunek
do zadania
198

Bloczki

202. Ciało o ciężarze Q zawieszono na doskonale wiotkiej linii AEC , przerzuconej przez krążek B , który z kolei zawieszony jest na linii BD , jak na rysunku 131. Wyznaczyć:

1. Wartość siły P , jaką należy przyłożyć do końca A odcinka AE liny, tworzącego z pionem kąt α , dla zrównoważenia ciężaru Q .
2. Napięcie S liny BD dla omówionego w punkcie 1 położenia oraz kąt β nachylenia liny BD do pionu. Opory tarcia na osi krążka oraz ciężary lin pominąć.

203. Dźwigar prętowy jest zamocowany wkrętami do ściany w punktach A , B , a na drugim końcu ma bloczek przez który przerzucona jest lina, jak na rysunku 132. jeden koniec liny jest obciążony ciężarem G , a drugi koniec liny jest trzymany pod kątem β do pionu. Jakie są siły reakcji podpór dźwigara? Jak można regulować rozkład składowej równoległej pomiędzy wkręty?

204. Ciężar $P = 200 \text{ N}$ podnoszony jest za pomocą dźwigu magazynowego BAC łańcuchem przerzuconym przez krążki A i D , jak na rysunku 133. Krążek D umieszczony jest w ścianie tak, że $\angle CAD = 30^\circ$. Kąty między prętami dźwigu wynoszą: $\angle ABC = 60^\circ$ i $\angle ACB = 30^\circ$. Obliczyć siły Q_1 i Q_2 w prętach AB i AC .

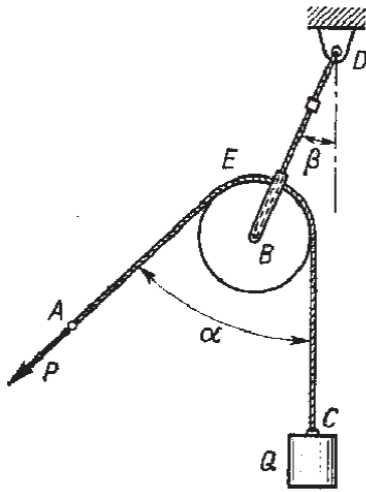
205. Wyznacz naprężenie linki N i reakcję \vec{R}_C w punkcie C dla konstrukcji z rysunku 134.

206. Wiedząc że promień bloczku na rysunku 135 jest równy 0.5m , wyznacz reakcje w punktach A i E oraz reakcję wewnętrzną w punkcie C .

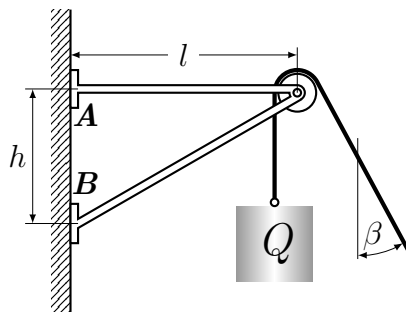
207. Ciało o ciężarze Q podnoszone jest za pomocą różnego rodzaju układów krążków, przedstawionych na rysunku 207. Określić siły S napięcia liny w każdym z podanych przypadków. Opory tarcia na osi krążków pominąć, a liny traktować jako pozbawione ciężaru i idealnie wiotkie.

208. Zblocze to dwa (lub więcej) nieruchome względem siebie współosiowe bloczki. Przez większe koło zblocza przerzucona jest lina. Po jednej stronie do liny przyłożona jest pionowa siła S , po drugiej stronie lina przechodzi przez blok obciążony ciężarem Q i wraca na drugie koło w zbloczu na który jest nawinięta (rysunek 137). Oblicz:

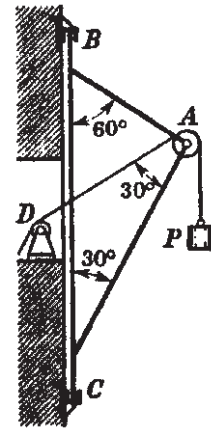
- Zależność między siłą F_1 a siłą F



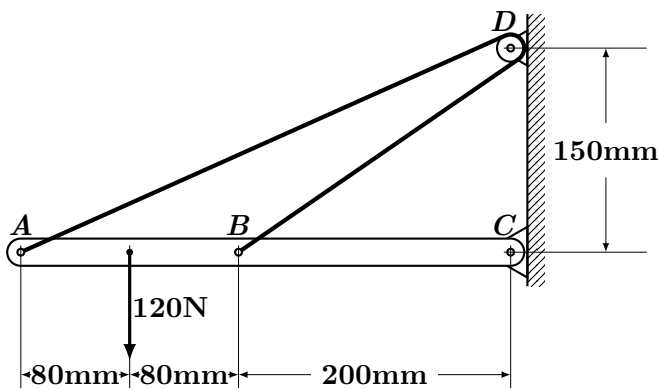
Rys. 131: Rysunek do zadania 202



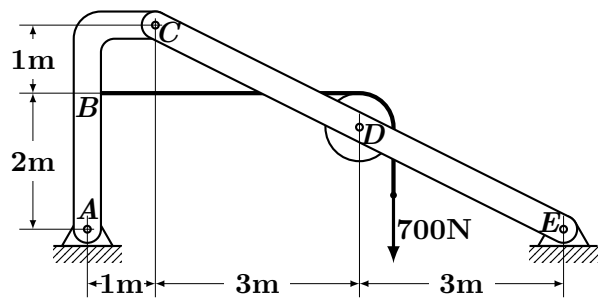
Rys. 132: Rysunek do zadania 203



Rys. 133: Rysunek do zadania 204



Rys. 134: Rysunek do zadania 205



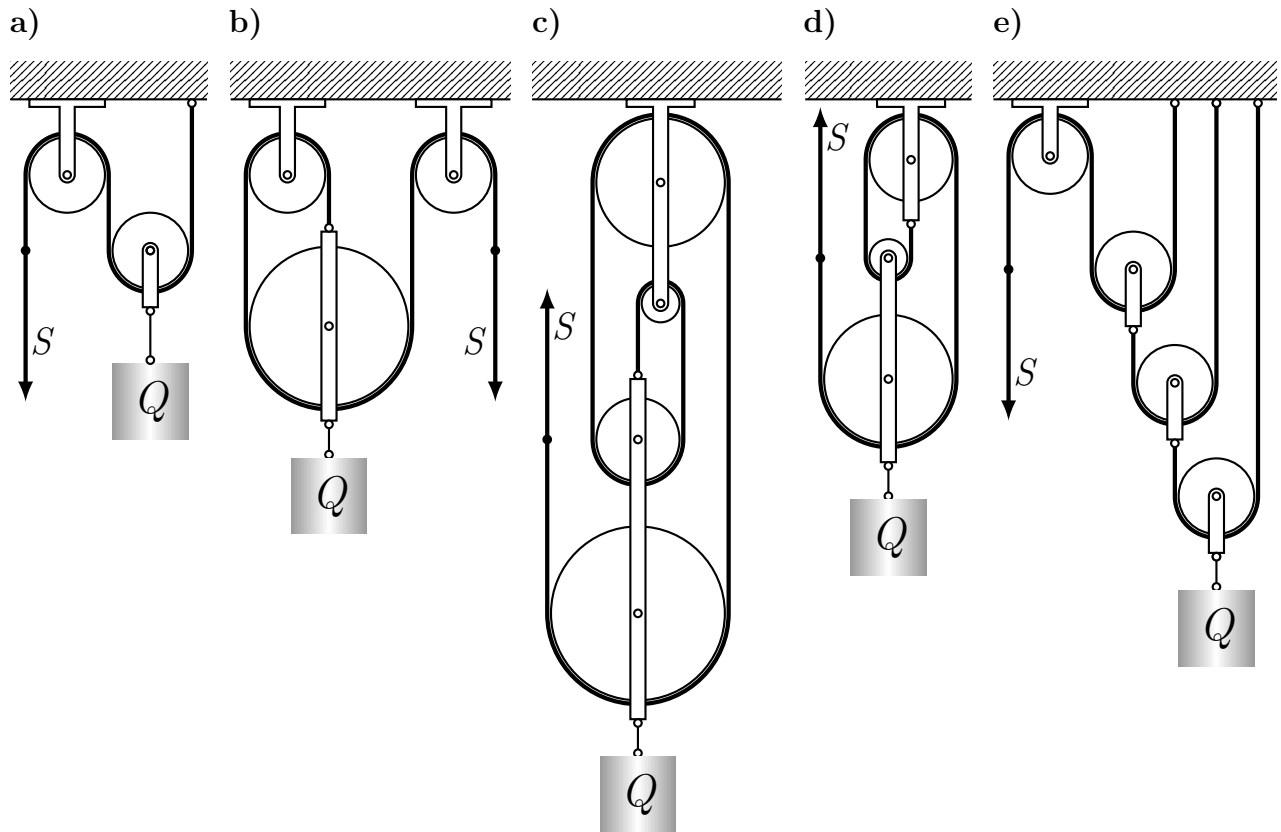
Rys. 135: Rysunek do zadania 206

- Z zasady zachowania energii zależność prędkości wiszącego bloku od prędkości wolnego końca liny

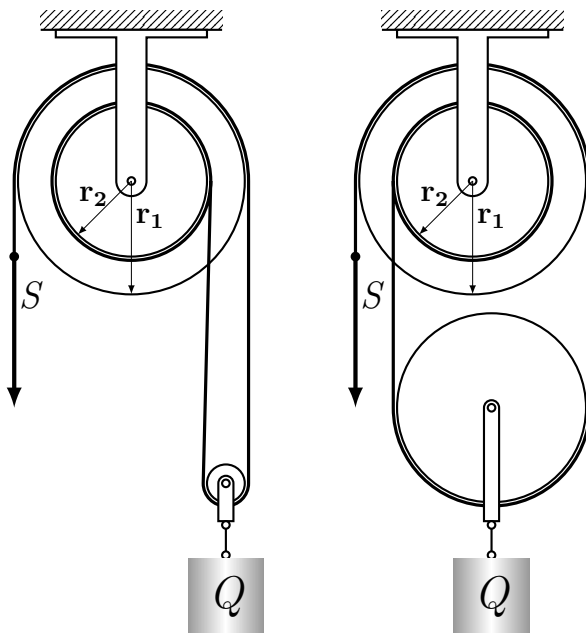
Oblicz to samo w przypadku gdy lina nawinięta jest na koła zblacza w kierunkach zgodnych.

209. Zblocze o masie m i promieniach szpul r_1 i r_2 jest zawieszono na lince nawiniętej na szpulę o mniejszym promieniu. Na szpuli o większym promieniu nawinięta jest linka na których wisi masa M (rysunek 138). Ile wynosi M , jeżeli układ jest w równowadze?

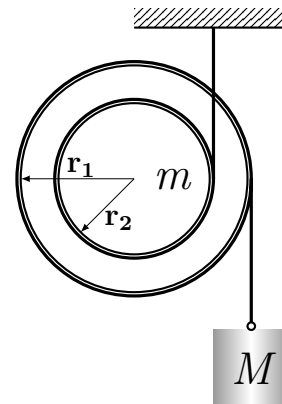
210. Jaki musi być stosunek mas m i M by układ z rysunku 139 pozostał w równowadze? Równia ma kąt nachylenia α .



Rys. 136: Rysunki do zadania 207



Rys. 137: Rysunki do zadania 208

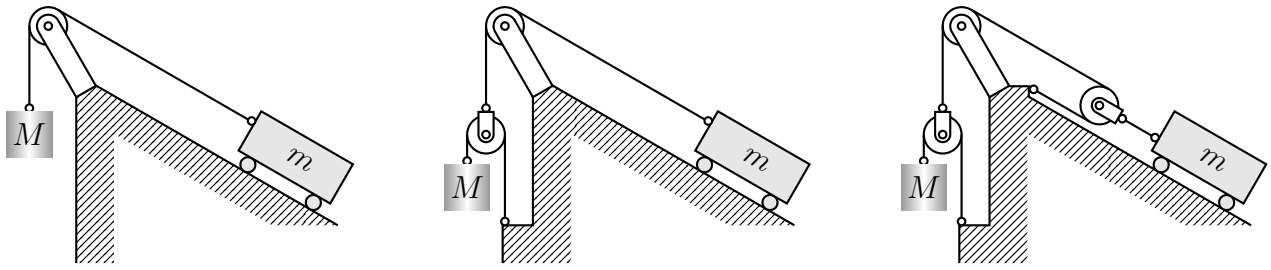


Rys. 138: Rysunek do zadania 209

Siły i momenty rozłożone

Hydrostatyka

211. Dla pionowej zapory na kanale o przekroju prostokątnym o głębokości h i szerokości w oblicz siłę naporu wody na tamę i moment tej siły liczony od punktu przy dnie na środku tamy. W którym



Rys. 139: Rysunki do zadania 210

punkcie należy przyłożyć do tamy tę siłę?

212. Dla pionowej na kanale o przekroju trapezu o głębokości h , szerokości przy dnie a i szerokości przy lustrze wody b oblicz siłę naporu wody na tamę i moment tej siły liczony od punktu przy dnie na środku tamy. W którym punkcie należy przyłożyć do tamy tę siłę?

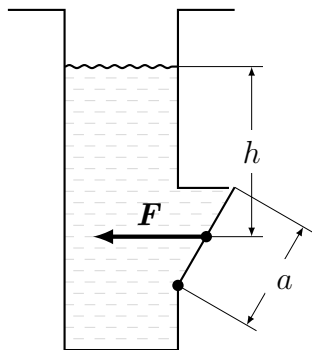
213. Kanał o szerokości $b = 5\text{m}$ i maksymalnej głębokości $h = 0.8\text{m}$ ma przekrój paraboli. Oblicz siłę naporu wody na pionową zapórę i punkt jej przyłożenia.

214. Naczynie płaskodenne w kształcie walca o promieniu R wypełniono wodą do wysokości h , a następnie przechylnono je o kąt 45° . Obliczyć wypadkową siłę działającą na dno tego naczynia. Obliczyć moment tej siły.

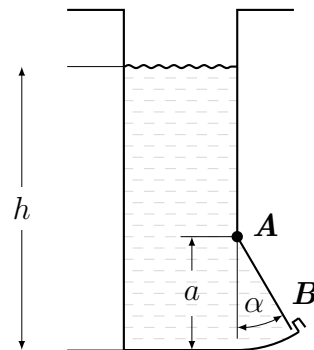
215. Obliczyć wartość siły F niezbędnej do utrzymania obrotowo zamocowanej kłapy kwadratowej o boku $a = 1\text{m}$ pod kątem $\alpha = 60^\circ$ o pomijalnym ciężarze, jak na rysunku 140. Zbiornik jest wypełniony wodą o gęstości $\rho_0 = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Siła F jest przyłożona w środku geometrycznym kłapy zanurzonej na głębokości $h = 1.5\text{m}$.

216. Kwadratowe wrota AB na rysunku 141 są umieszczone na zawiasach w punkcie A i utrzymywane przez trzpień w punkcie B pod kątem 30° w stosunku do pionu. Wyznacz reakcję w punkcie B .

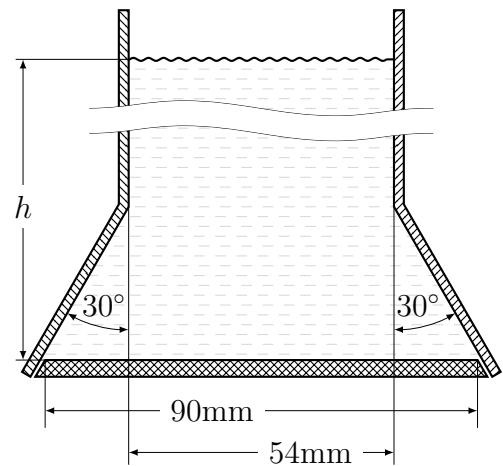
217. Pionowa rura o średnicy $d = 54\text{mm}$ i masie 1kg zakończona jest kołnierzem stożkowym o kącie rozwarcia 60° i dociśnięta własnym ciężarem do gumowego krążka o promieniu $D = 90\text{mm}$, jak na rysunku 142. Dla jakiej wysokości h słupa wody ponad krążkiem układ przestaje być szczelny?



Rys. 140: Rysunek do zadania 215



Rys. 141: Rysunek do zadania 216



Rys. 142: Rysunek do zadania 217

218. Otwór o średnicy $d = 0.15\text{m}$ w dnie zbiornika jest zamknięty aluminiową kulą o średnicy $D = 0.2\text{ m}$ i gęstości $\rho_1 = 2700 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$. Z jaką siłą P kula jest przyciskana do krawędzi otworu, jeżeli wysokość wody w zbiorniku wynosi $h = 0.6\text{m}$, a jej gęstość $\rho_2 = 1000 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$?

219. Wyznacz graniczny stosunek promienia do wysokości dla walca drewnianego o gęstości $\rho = 850 \frac{\text{kg}}{\text{m}^3}$, dla którego unosi się on na wodzie płasko (jego postawa jest w poziomie).

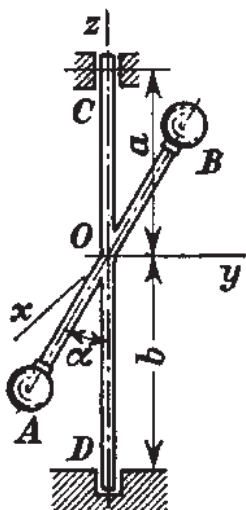
Wskazówka: Rozważ wypadkowy moment sił wyporu i grawitacji oddziałujących na walec lekko odchylony od pionu.

Reakcje dynamiczne łożysk

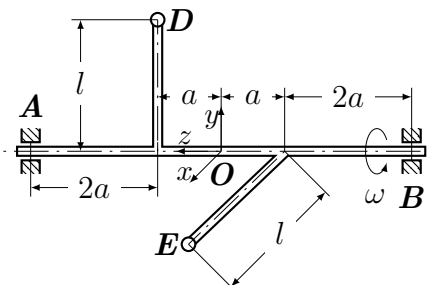
220. Pręt AB o długości $2l$, do którego przymocowano jednakowe ciężarki o masie m , obraca się ze stałą prędkością kątową ω dokoła pionowej osi obrotu Oz przechodzącej przez środek O pręta, jak na rysunku 143. Odległość punktu O od łożyska szynowego C wynosi a , odległość zaś od łożyska stopowego D wynosi b . Kąt między prętem AB a osią Oz jest stały i wynosi α . Pomijając ciężar pręta i wymiary ciężarków obliczyć składowe reakcje w łożyskach C i D w chwili, gdy pręt znajduje się w płaszczyźnie Oyz .

221. Do poziomego wału AB obracającego się ze stałą prędkością kątową ω przymocowano prostopadle dwa równe pręty o długości l leżące w dwu wzajemnie prostopadłych płaszczyznach, jak na rysunku 144. Zakończenia prętów tworzą kule D i E o masie m każda. Wyznaczyć oddziaływania dynamiczne wału na podpory A i B . Kule uważać za punkty materialne, masę prętów pominąć.

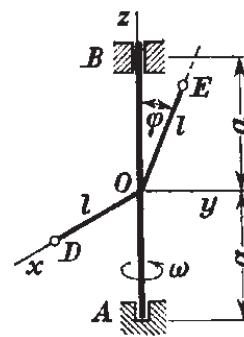
222. Do pionowego wału AB obracającego się ze stałą prędkością kątową ω przymocowano sztywno dwa pręty, jak na rysunku 145. Pręt OE tworzy z wałem kąt φ , a pręt OD jest prostopadły do płaszczyzny przechodzącej przez AB i OE . Dane są wymiary $OE = OD = l$, $AB = 2a$. Na zakończeniach prętów osadzono dwie jednakowe kule E i D , o masie m każda. Wyznaczyć reakcje dynamiczne łożysk A i B . Masy prętów pominąć, kule zaś uważać za punkty materialne.



Rys. 143: Rysunek do zadania 220



Rys. 144: Rysunek do zadania 221



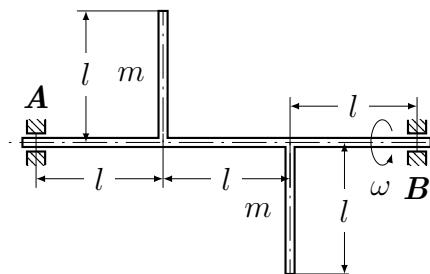
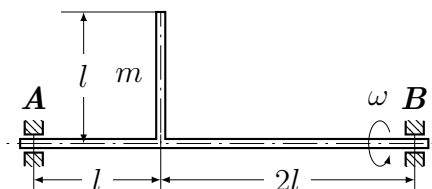
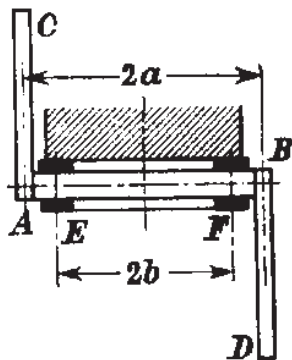
Rys. 145: Rysunek do zadania 222

223. Na końcach osi AB pedałów roweru zaklinowane są pod kątem 180° dwie jednakowe korby AC i BD o długości l i ciężarze Q każda, jak na rysunku 146. Oś AB o długości $2a$ i ciężarze P obraca się ze stałą prędkością kątową ω . Łożyska E i F są symetrycznie położone w odległości $2b$. Obliczyć

siły N_E i N_F działające na łożyska w chwili, gdy korba AC skierowana jest pionowo w górę. Masę każdej korby uważać za równomiernie rozłożoną na całej jej długości.

224. Do wału AB długości $3l$ przyspawano w odległości l od końca wału prostopadły, jednorodny pręt o długości l i masie m , jak na rysunku 147. Oblicz reakcje dynamiczne łożysk A i B przy prędkości kątowej ω .

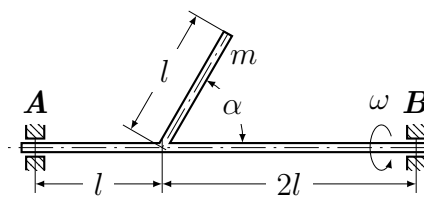
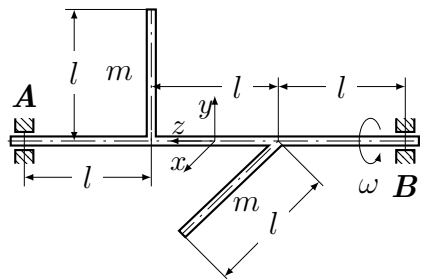
225. Do wału AB długości $3l$ przyspawano w odległościach l od końców wału prostopadłe, jednorodne pręty o długości l i masie m , jak na rysunku 148. Pręty leżą w jednej płaszczyźnie. Oblicz reakcje dynamiczne łożysk A i B przy prędkości kątowej ω .



Rys. 146: Rysunek do zadania 223 Rys. 147: Rysunek do zadania 224 Rys. 148: Rysunek do zadania 225

226. Do poziomego wału AB obracającego się ze stałą prędkością kątową ω przymocowano prostopadłe dwa równe, jednorodne pręty o długości l i masie m leżące w dwu wzajemnie prostopadłych płaszczyznach w odległości l od siebie i od końców wału, jak na rysunku 149. Wyznaczyć oddziaływania dynamiczne wału na podpory A i B.

227. Do poziomego wału AB o długości l obracającego się ze stałą prędkością kątową ω przyspawano w odległości l od końca wału pod kątem α do jego osi jednorodny pręt o długości l i masie m , jak na rysunku 150. Wyznaczyć oddziaływania dynamiczne wału na podpory A i B.



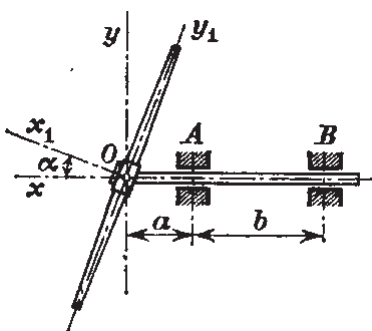
Rys. 149: Rysunek do zadania 226 Rys. 150: Rysunek do zadania 227

228. Środek ciężkości koła zamachowego o ciężarze 30 kN znajduje się w odległości 1 mm od poziomej osi wału. Odległości łożysk od koła są jednakowe. Znaleźć siły działające na łożyska, jeżeli wał wykonuje 1200 obrotów na minutę. Koło ma płaszczyznę symetrii prostopadłą do osi obrotu.

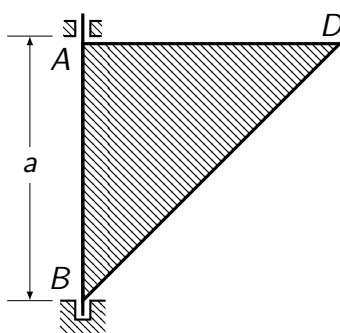
229. Obliczyć reakcje na łożyska A i B wirującego dwuramiennego śmigła z rysunku 151, jeśli wskutek złego nawiercenia otworu w piaście oś symetrii śmigła odchyłona jest od osi obrotu o kąt $\alpha = 0,015$ rad, a jego środek ciężkości leży na osi obrotu. Masa śmigła jest równomiernie rozłożona wzdłuż jego osi podłużnej i wynosi 15 kg, moment bezwładności względem osi symetrii $I = 0.5 \text{ kg m}^2$, obroty stałe 3000 obrotów na minutę, odległość między łożyskami $b = 25 \text{ cm}$, a odległość środka ciężkości śmigła od bliższego łożyska $a = 15 \text{ cm}$.

230. Z jaką prędkością kątową powinna obracać się dokoła krawędzi $AB = a$ płytka jednorodna mająca kształt równoramiennego trójkąta prostokątnego ABD (rysunek 152), ażeby poprzeczna reakcja w łożysku B była równa zero? Odległość między łożyskami uważać za równą krawędzi AB.

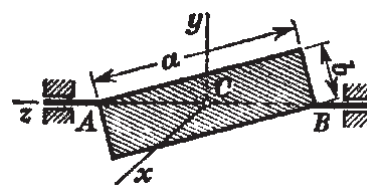
231. Prostokątna płytka jednorodna o ciężarze P obraca się dokoła przekątnej AB ze stałą prędkością kątową ω , jak na rysunku 153. Obliczyć dynamiczne oddziaływania płytki na podpory A i B, jeżeli długości boków płytki wynoszą a i b .



Rys. 151: Rysunek do zadania 229



Rys. 152: Rysunek do zadania 230



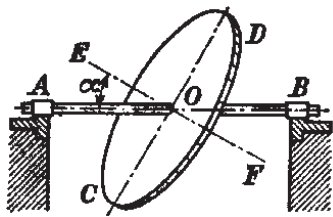
Rys. 153: Rysunek do zadania 231

232. Obliczyć reakcje w łożyskach A i B przy obrocie cienkiej jednorodnej okrągłej tarczy CD turbiny parowej dokoła osi AB. Zakładamy, że oś AB przechodzi przez środek tarczy O, natomiast na skutek wadliwego montażu normalna do płaszczyzny tarczy tworzy z osią obrotu $\angle AOD = \alpha = 0.02 \text{ rad}$. Dane są: masa tarczy 3.27 kg, jej promień $r = 20 \text{ cm}$, obroty $n = 30000$ obrotów na minutę, odległość $AO = 50 \text{ cm}$, $OB = 30 \text{ cm}$. Oś AB uważamy za sztywną i przyjmujemy, że $\sin 2\alpha = 2\alpha$.

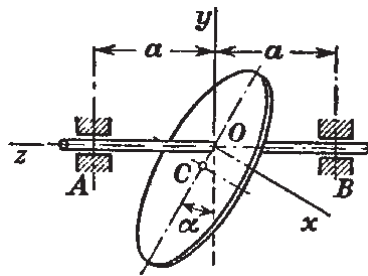
233. Cienka tarcza jednorodna osadzona jest w środku poziomego wału. Mimośrodowość jej osadzenia wynosi $OC = e$, kąt zaś utworzony przez jej płaszczyznę z osią wału wynosi $(90^\circ - \alpha)$. Ciężar tarczy równa się P , a jej promień r . Obliczyć statyczne i dynamiczne reakcje podpór podczas obrotu wału ze stałą prędkością kątową ω . Odległość między podporami wynosi $AB = 2a$.

234. Walec jednorodny o ciężarze P , długości $2l$ i promieniu podstawy r obraca się ze stałą prędkością kątową dokoła pionowej osi Oz, przechodzącej przez jego środek ciężkości O. Kąt α między osią walca Oc a osią obrotu Oz jest stały. Odległość H_1H_2 między łożyskiem stopowym a szyjnym wynosi h . Wyznaczyć reakcje poprzeczne N_1 w łożysku stopowym i N_2 w szyjnym.

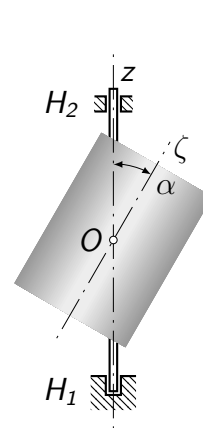
235. Na środku wału pionowego AB o długości L umieszczony jest torus o promieniu R tak, że wał leży w płaszczyźnie torusa (rysunek 157). W torusie porusza się swobodnie kulka o masie m . Oblicz reakcje dynamiczne w łożyskach A i B jeżeli wał obraca się z prędkością kątową ω , a kulka nie porusza się względem torusa.



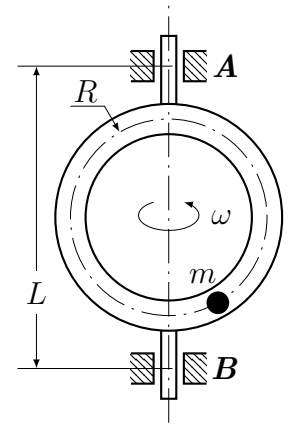
Rys. 154: Rysunek do zadania 232



Rys. 155: Rysunek do zadania 233



Rys. 156: Rysunek do zadania 234



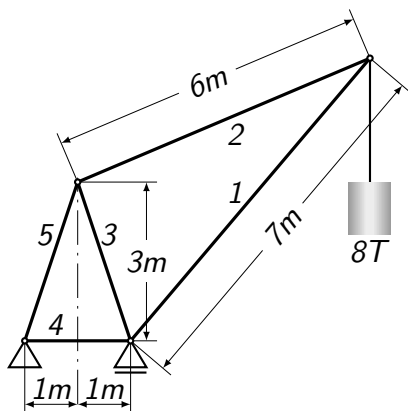
Rys. 157: Rysunek do zadania 235

Kratownice 2d

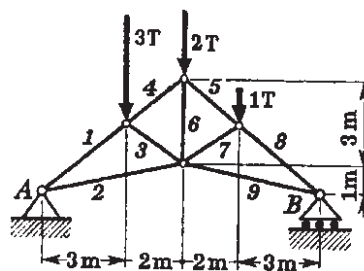
236. Wyznaczyć reakcje podpór i siły w prętach dźwigu przedstawionego na rysunku 158, obciążonego siłą 80 kN. Ciężar prętów pominąć.

237. Wyznaczyć reakcje podpór i siły w prętach wiązania dachowego przedstawionego na rysunku 159 z przyłożonymi doń siłami 30 kN, 20 kN i 10 kN.

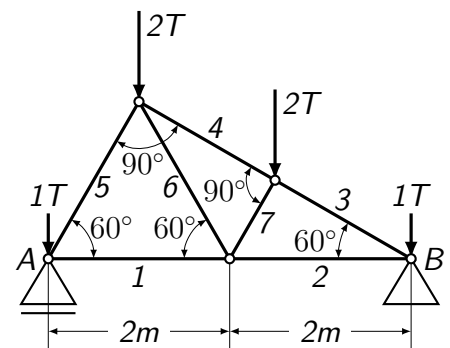
238. Wyznaczyć reakcje i siły w prętach kratownicy, która wraz z działającymi na nią siłami przedstawiona jest na rysunku 160.



Rys. 158: Rysunek do zadania 236



Rys. 159: Rysunek do zadania 237

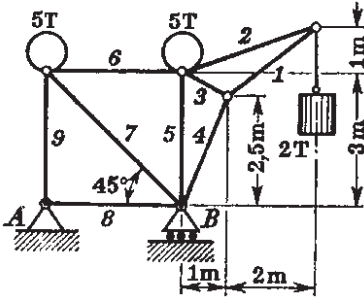


Rys. 160: Rysunek do zadania 238

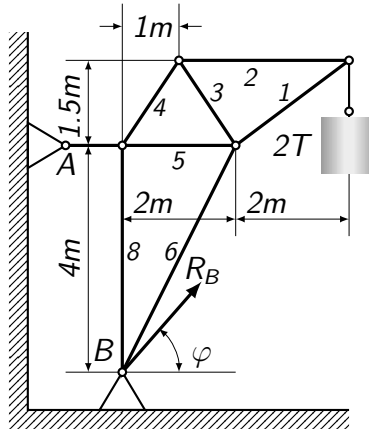
239. Wyznaczyć reakcje podpór i siły w prętach dźwigu, przedstawionego na rysunku 161 wraz z działającymi na niego siłami.

240. Wyznaczyć reakcje podpór i siły w prętach dźwigu z rysunku 162.

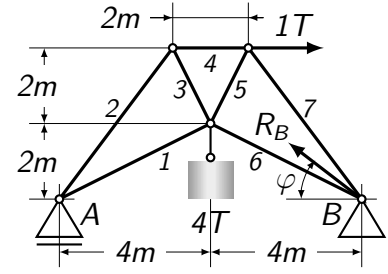
241. Wyznaczyć reakcje podpór i siły w prętach kratownicy przedstawionej, razem z obciążeniami, na rysunku 163.



Rys. 161: Rysunek do zadania 239



Rys. 162: Rysunek do zadania 240

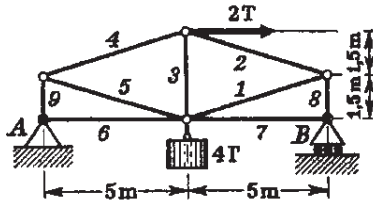


Rys. 163: Rysunek do zadania 241

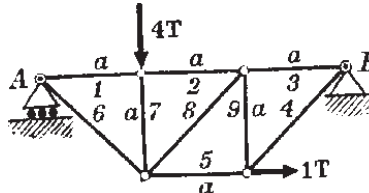
242. Wyznaczyć reakcje podpór i siły w prętach kratownicy na rysunku 164.

243. Wyznaczyć reakcje podpór i siły w prętach kratownicy na rysunku 165.

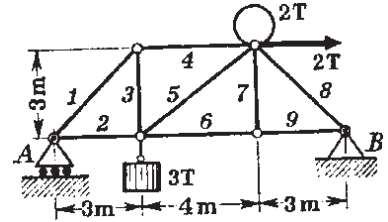
244. Wyznaczyć reakcje podpór i siły w prętach kratownicy mostowej, która razem z przyłożonymi do niej siłami przedstawiona jest na rysunku 166.



Rys. 164: Rysunek do zadania 242



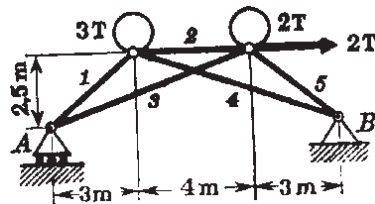
Rys. 165: Rysunek do zadania 243



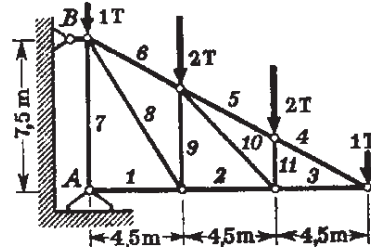
Rys. 166: Rysunek do zadania 244

245. Wyznaczyć reakcje podpór i siły w prętach kratownicy przedstawionej, razem z obciążeniami, na rysunku 167. Pręty 3 i 4 nie są połączone przegubem w punkcie ich przecięcia.

246. Wyznaczyć reakcje i siły w prętach kratownicy wiszącej, przedstawionej, wraz z działającymi na nią siłami, na rysunku 168.



Rys. 167: Rysunek do zadania 245



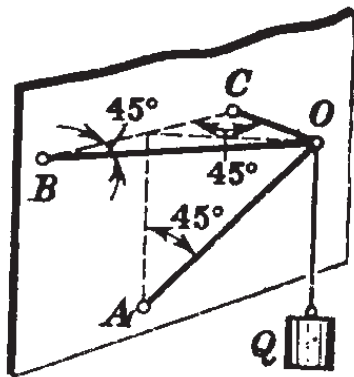
Rys. 168: Rysunek do zadania 246

Kratownice 3d

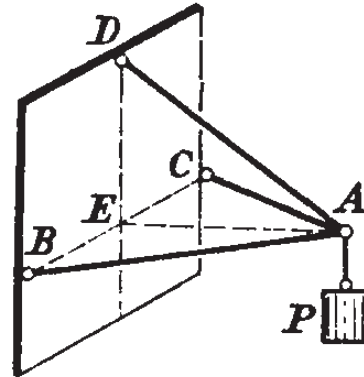
247. Na balon kulisty, podtrzymywany dwiema linami jednakowej długości, działa parcie wiatru. Liny tworzą kąt prosty, a wyznaczona przez nie płaszczyzna tworzy z płaszczyzną poziomą kąt 60° . Kierunek parcia wiatru jest poziomy i prostopadły do prostej przecięcia się tych dwu płaszczyzn. Ciężar balonu i zawartego w nim gazu wynosi $2,5 \text{ kN}$, objętość balonu $215,4 \text{ m}^3$ ciężar 1 m^3 powietrza 13 N . Obliczyć siły T_1 i T_2 w linach oraz siłę P parcia wiatru na balon zakładając, że linie działania wszystkich sił przyłożonych do balonu przecinają się w jego środku.

248. Ciało o ciężarze $Q = 1 \text{ kN}$ jest podtrzymywane belką AO o przegubowym zamocowaniu w punkcie A , nachyloną pod kątem 45° do poziomu, oraz dwoma poziomymi łańcuchami BO i CO , przy czym $BO = CO = AO$, $\angle CBO = \angle BCO = 45^\circ$. Wyznaczyć siłę S w belce i siły T w łańcuchach.

249. Wyznaczyć siły S_1 i S_2 w prętach AB i AC oraz napięcie T w linie żurawia, jeśli $\angle CBA = \angle BCA = 60^\circ$, $\angle EAD = 30^\circ$. Ciężar $P = 3 \text{ kN}$. Płaszczyzna ABC jest pozioma. Zamocowania prętów w punktach A , B i C są przegubowe. $BE = EC$.



Rys. 169: Rysunek do zadania 248



Rys. 170: Rysunek do zadania 249

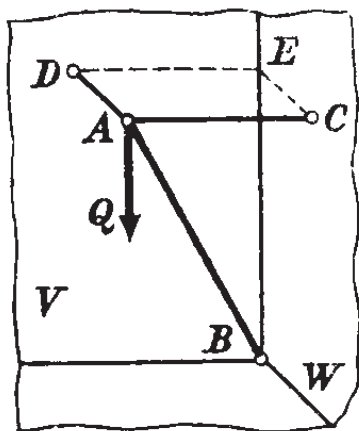
250. Wyznaczyć siły w pręcie AB i łańcuchach AC i AD podtrzymujących ciało o ciężarze $Q = 420 \text{ N}$, jeśli $AB = 145 \text{ cm}$, $AC = 80 \text{ cm}$, $AD = 60 \text{ cm}$. Płaszczyzna prostokąta $CADE$ jest pozioma, a płaszczyzny V i W są pionowe. Zamocowanie w punkcie B jest przegubowe.

251. Wyznaczyć siłę w linie AB oraz siły w prętach AC i AD podtrzymujących ciało o ciężarze $Q = 1800 \text{ N}$, jeśli $AB = 170 \text{ cm}$, $AC = AD = 100 \text{ cm}$, $CD = 120 \text{ cm}$, $CK = KD$, płaszczyzna CDA jest pozioma. Zamocowania prętów w punktach A , C i D są przegubowe.

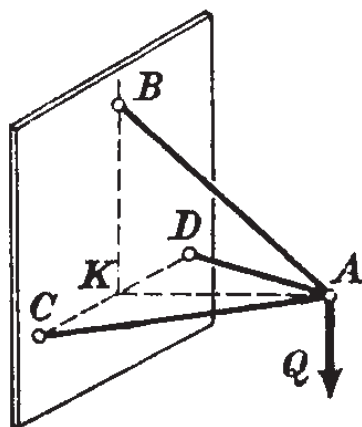
252. Żuraw przenośny („Derricka”), podnoszący ciężar $Q = 20 \text{ kN}$, jest zbudowany, jak pokazano na rysunku; $AB = AE = AF = 2 \text{ m}$, kąt $EAF = 90^\circ$. Płaszczyzna wysięgnika ABC dzieli na połowy kąt dwuścienny $EABF$. Wyznaczyć siłę P_1 ściskającą pionowy słup AB , a także siły P_2 , P_3 i P_4 , rozciągające liny BC , BE i BF . Ciężary części składowych żurawia pominąć.

253. Ciężar $Q = 10 \text{ kN}$ jest zawieszony w punkcie D , jak pokazano na rysunku. Pręty w punktach A , B i D zamocowane są przegubowo. Wyznaczyć reakcje w punktach A , B i C .

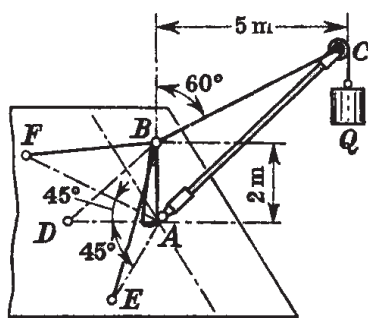
254. Na rysunku przedstawiono kratownicę przestrzenną złożoną z sześciu prętów 1, 2, 3, 4, 5 i 6. Siła P działa na węzeł A w płaszczyźnie prostokąta $ABDC$, przy czym jej prosta działania tworzy z prostą pionową CA kąt 45° . $\triangle EAK = \triangle FBM$. Kąty trójkątów równoramiennych: EAK , FBM i NDB przy wierzchołkach A , B i D są proste. Obliczyć siły w prętach, jeżeli $P = 1 \text{ kN}$.



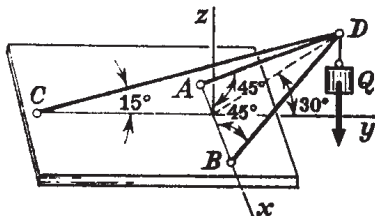
Rys. 171: Rysunek do zadania 250



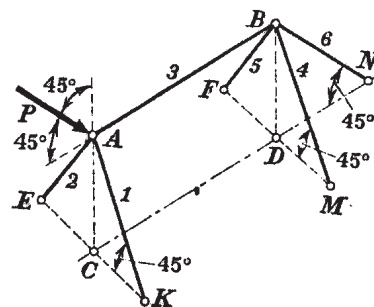
Rys. 172: Rysunek do zadania 251



Rys. 173: Rysunek do zadania 252



Rys. 174: Rysunek do zadania 253



Rys. 175: Rysunek do zadania 254

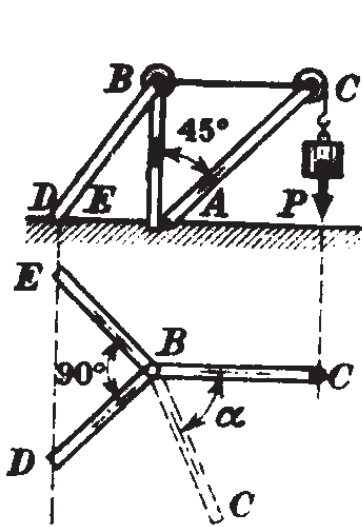
255. Wyznaczyć, w zależności od kąta α , siły w pionowym stojaku i w nogach żurawia przedstawionego na rysunku, jeśli $AB = BC = AD = AE$. Zamocowania w punktach A, B, D i E są przegubowe.

256. Słup AB podtrzymujący przewód powietrzny jest przytrzymywany dwiema linami AC i AD, przy czym kąt $CBD = 90^\circ$. Wyznaczyć siły w słupie i linach przytrzymujących w zależności od kąta φ utworzonego przez jedno z dwu rozgałęzień przewodu z płaszczyzną CBA. Rozgałęzienia przewodu są poziome i wzajemnie prostopadłe, siły w nich są jednakowe i wynoszą T.

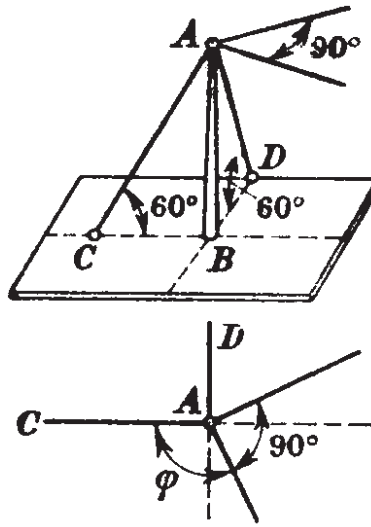
257. Poziome przewody linii telegraficznej zawieszane są na słupie telegraficznym AB ze wspornikiem AC i tworzą kąt $\angle DAE = 90^\circ$. Siły rozciągające w przewodach AD i AD wynoszą 120 i 160 kN. Belki są w punkcie A połączone przegubowo. Znaleźć kąt α między płaszczyznami BAC i BAD, przy którym głup nie będzie narażony na wyginanie w bok, oraz obliczyć siłę S we wsporniku, jeżeli jest on ustawiony pod kątem 60° do poziomu. Ciężary słupa i wspornika pominać.

258. Maszt AB utrzymuje się w pionowym położeniu dzięki czterem symetrycznie rozmieszczonym linom odciągającym; kąt między każdymi dwiema zbiegającymi się linami wynosi 60° . Wyznaczyć reakcję ziemi w punkcie A, jeśli siła w każdej linie wynosi 1 kN, a ciężar masztu 2 kN.

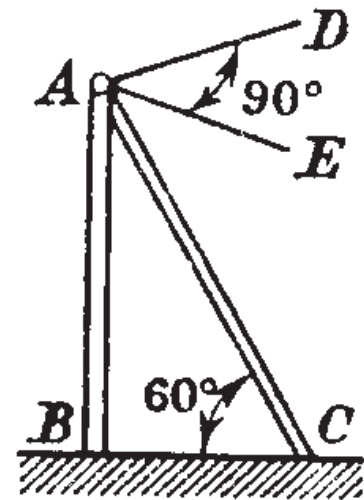
259. Maszt antenowy o masie m ma 4 odciągi na północ, południe, wschód i zachód. Odciągi odchodzą w $3/4$ wysokości masztu i tworzą z pionem kąt 30° . Gdy nie ma wiatru, każdy odciąg napina ta sama siła N. Jaka jest wtedy siła nacisku masztu na fundament na którym stoi?



Rys. 176: Rysunek do zadania 255



Rys. 177: Rysunek do zadania 256



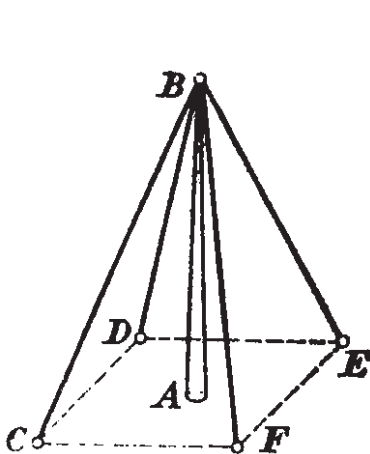
Rys. 178: Rysunek do zadania 257

260. Jak zmieniają się siły naprężenia odciągów i nacisku na fundament masztu z poprzedniego zadania, gdy będzie wiał wiatr z kierunku α względem północy? Za punkt przyłożenia siły naporu wiatru bierzemy środek masztu.

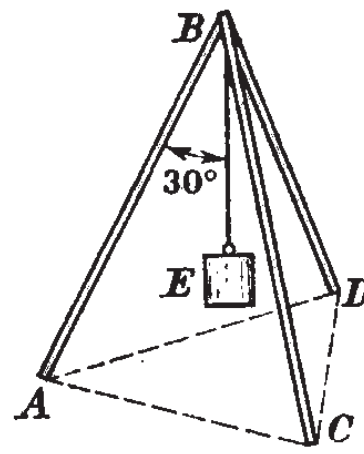
Zadanie stanowi przykład problemu *statycznie niewyznaczalnego* - żeby je rozwiązać trzeba wykorzystać symetrię odciągów - maszt pod naporem wiatru dozna małego odchylenia, które spowoduje w parze przeciwległych odciągów małe skrócenie jednego z nich i małe wydłużenie jednego z nich. Zmiany długości mają tę samą wartość, a ponieważ odciągi wykonane są z takich samych lin, wiatr zmieni siły w nich działające o tę samą wartość.

261. W wierzchołku B trójkąta ABCD zawieszono ciało E, którego ciężar wynosi 100 N. Nogi trójkąta mają jednakową długość i są wsparte na poziomej płaszczyźnie tworząc między sobą równe kąty. Wyznaczyć siły w nogach, jeśli tworzą one z linką BE kąty 30° .

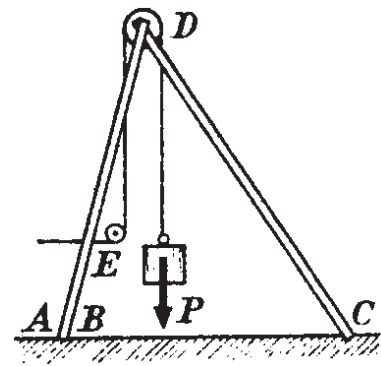
262. Znaleźć siły S w nogach AD, BD i CD trójkąta tworzących kąty 60° z płaszczyzną poziomą, jeżeli ciało o ciężarze $P = 30$ kN jest podnoszone ze stałą prędkością oraz $AB = BC = AC$.



Rys. 179: Rysunek do zadania 258

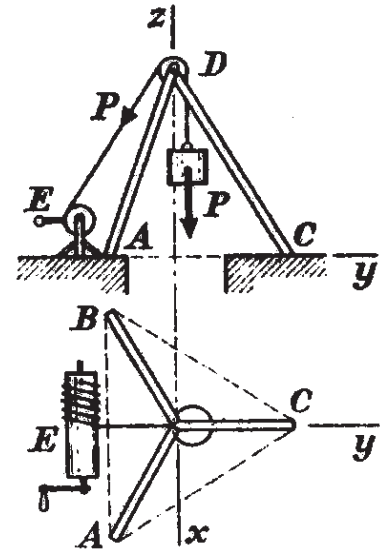


Rys. 180: Rysunek do zadania 261



Rys. 181: Rysunek do zadania 262

263. W celu wydobywania z szybu ciała P o ciężarze 30 kN ustawiono trójnog $ABCD$ i kołowrót E . Wyznaczyć siły w nogach trójnoga przy równomiernym podnoszeniu ciała, jeśli trójkąt ABC jest równoboczny, a kąty utworzone przez nogi i linię DD z płaszczyzną poziomą wynoszą 60° . Położenie kołowrotu względem trójnoga podane jest na rysunku 182.



264. Na idealnie gładkiej płycie stoi trójnożny statyw; dolne końce jego nóżek związano linką tak, że nóżki i linka tworzą czworościan foremny. W wierzchołku statywu zawieszono ciało o ciężarze P . Wyznaczyć reakcję płyty w punktach podparcia statywu i napięcie T w linie wyrażając szukane wielkości przez P .

265. Rozwiązać poprzednie zadanie dla przypadku, gdy nóżki statywu są związane nie w końcach, lecz w środku, przyjmując przy tym, że ciężar każdej nóżki wynoszący p jest skupiony w jej środku.

Rys. 182: Rysunek do zadania 263

266. Kratownicę w kształcie czworościanu foremnego o wysokości pokrywającej się z osią z i wierzchołku na ujemnej części osi x , przymocowano do płaszczyzny poziomej w wierzchołkach podstawy i obciążono w górnym wierzchołku siłą F o dowolnym kierunku. Wyznacz siły przenoszone przez pręty i pionowe składowe siły reakcji podstawy.

267. Załóżmy, że na wierzchołku kratownicy z poprzedniego zadania umieszczony jest ciężarek na nitce poruszający się po okręgu. Nitka tworzy z pionem kąt α . Jak zmieniają się w czasie pionowe składowe siły reakcji podstawy?

268. Zbiornik gazu ma kształt kuli o promieniu $R = 10 \text{ m}$, a jego ciężar łącznie z gazem $Q = 2000 \text{ kN}$. Zbiornik spoczywa na trzech podporach, a punkty podparcia A , B i C rozmieszczone są w poziomej płaszczyźnie, leżąc równocześnie na powierzchni kuli. Punkty podparcia tworzą trójkąt równoboczny o boku $a = 10 \text{ m}$. Podpora A jest nieruchoma (przegub kulisty), a podpory B i C ruchome (rolki toczne), o płaszczyznach oporowych prostopadłych do promieni OB i OC . Obliczyć reakcje podporowe, jeżeli prostopadle do płaszczyzny pionowej przechodzącej przez linię BC w kierunku od BC do A wieje wiatr z siłą $p = 1200 \text{ N}$ na każdy metr kwadratowy powierzchni rzutu kuli na podaną płaszczyznę.

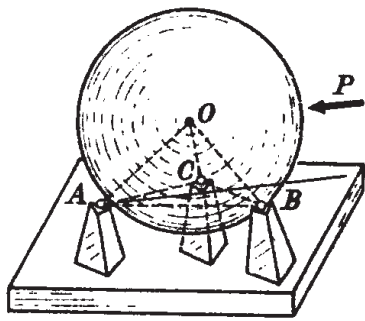
269. Trzy jednorodne kule A , B i C o jednakowych promieniach położono na gładkiej poziomej płaszczyźnie obwiązując je linką w płaszczyźnie równikowej. Czwartą jednorodną kulę O o tym samym promieniu i o ciężarze 100 N położono na trzech poprzednich. Wyznaczyć napięcie T w linie wywołane naciskiem górnej kuli. Tarcie kuli o kulę i o płaszczyznę pominąć.

270. W punktach A , B i C leżących na osiach prostokątnego układu współrzędnych w jednakowej odległości l od początku układu O zaczepiono linki związane w punkcie D , przy czym $AD = BD = CD = L$. Współrzędne punktu D wynoszą $x = y = z = \frac{1}{3}(l - \sqrt{3L^2 - 2l^2})$. W punkcie D zawieszono ciężarek Q . Obliczyć siły T_A , T_B i T_C w linkach zakładając, że $\sqrt{\frac{2}{3}}l < L < l$.

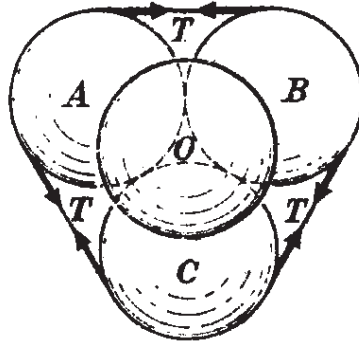
Belki

W poniższych zadaniach zakładamy, że: $P = 40 \text{ kN}$, $q = 10 \text{ kN/m}$, $M = 15 \text{ kNm}$, $l = 1 \text{ m}$.

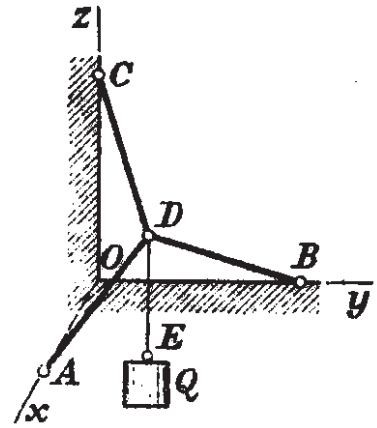
271. Dla belki przedstawionej na poniższym rysunku wyprowadź wzory na siły poprzeczne i momenty gnące oraz wykonaj ich wykresy.



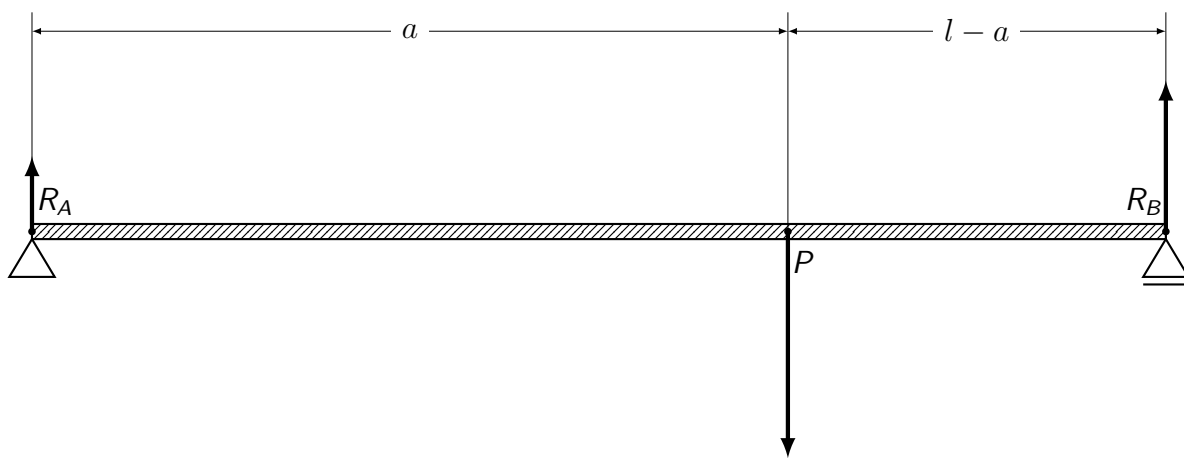
Rys. 183: Rysunek do zadania 268



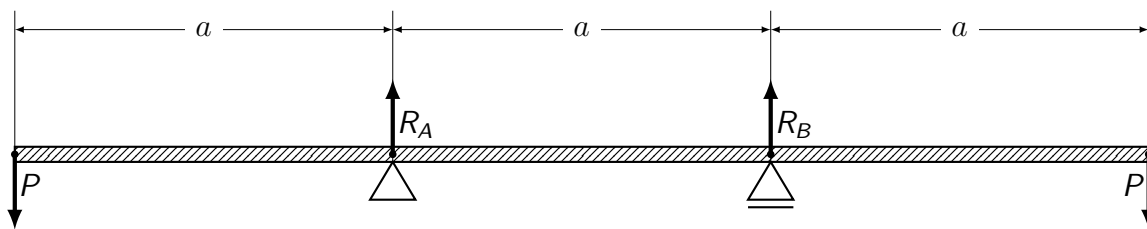
Rys. 184: Rysunek do zadania 269



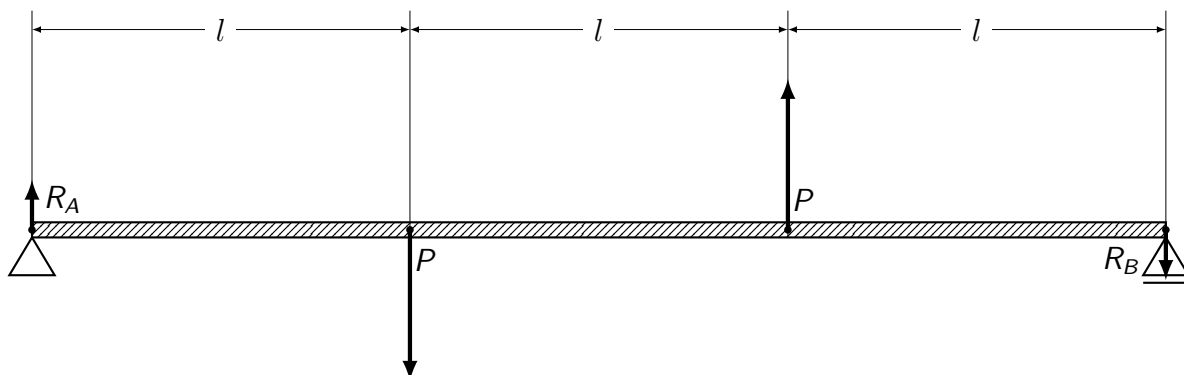
Rys. 185: Rysunek do zadania 270



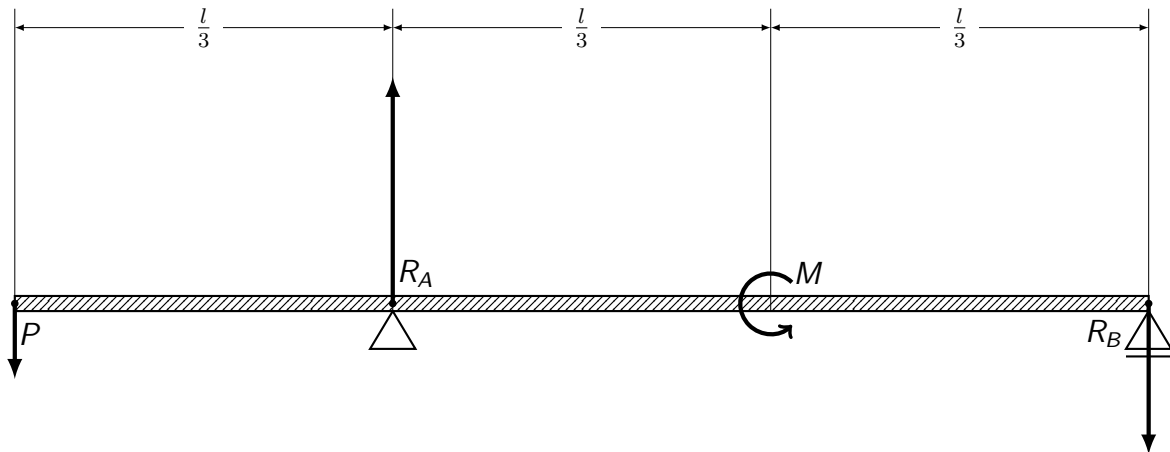
272. Dla belki przedstawionej na poniższym rysunku wyprowadź wzory na siły poprzeczne i momenty gnące oraz wykonaj ich wykresy.



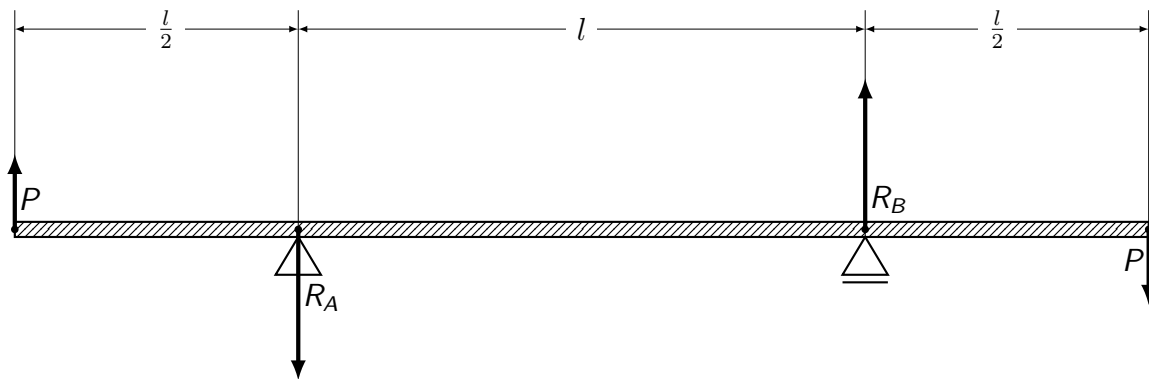
273. Dla belki przedstawionej na poniższym rysunku wyprowadź wzory na siły poprzeczne i momenty gnące oraz wykonaj ich wykresy.



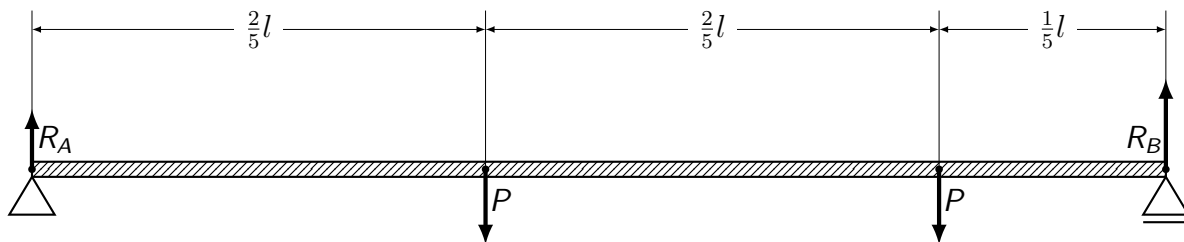
274. Dla belki przedstawionej na poniższym rysunku wyprowadź wzory na siły poprzeczne i momenty gnące oraz wykonaj ich wykresy.



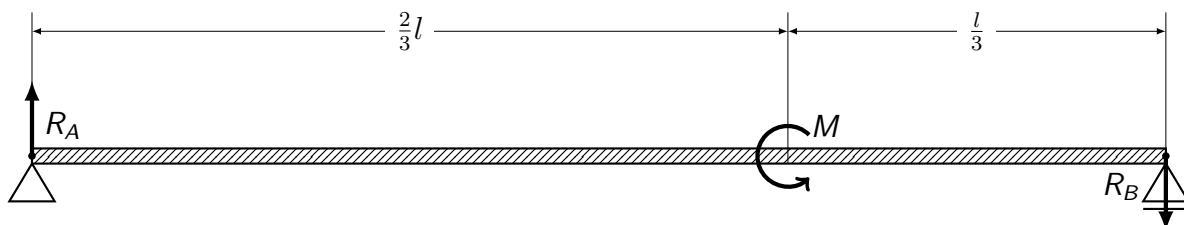
275. Dla belki przedstawionej na poniższym rysunku wyprowadź wzory na siły poprzeczne i momenty gnące oraz wykonaj ich wykresy.



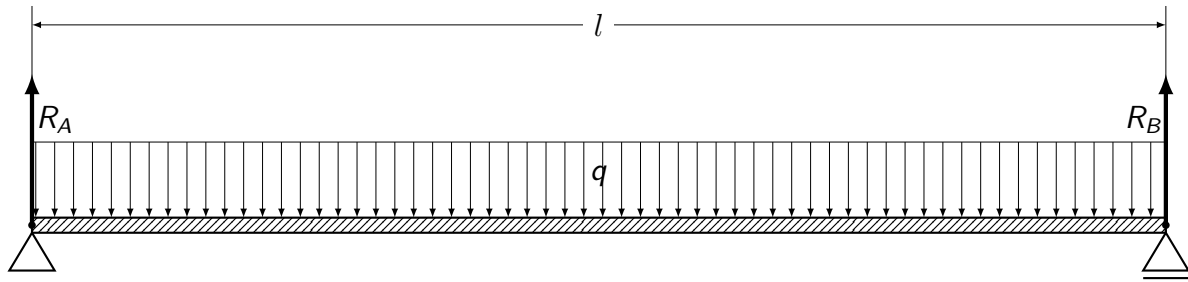
276. Dla belki przedstawionej na poniższym rysunku wyprowadź wzory na siły poprzeczne i momenty gnące oraz wykonaj ich wykresy.



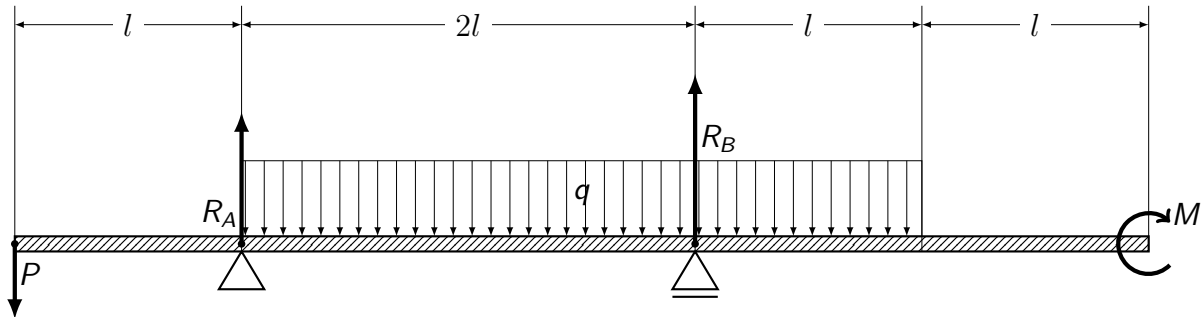
277. Dla belki przedstawionej na poniższym rysunku wyprowadź wzory na siły poprzeczne i momenty gnące oraz wykonaj ich wykresy.



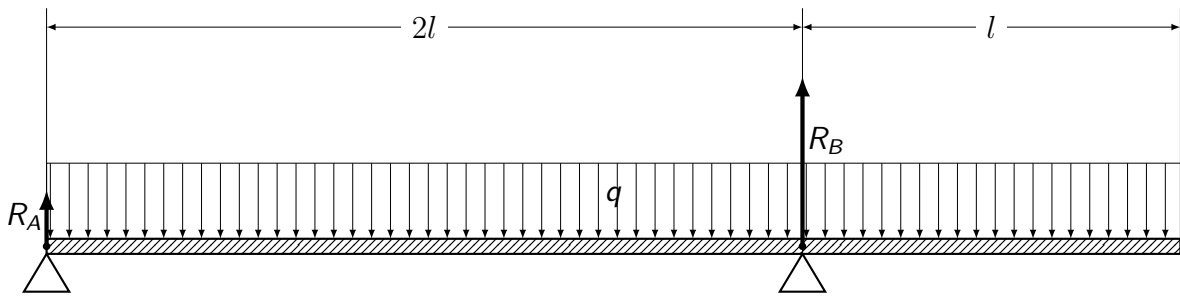
278. Dla belki przedstawionej na poniższym rysunku wyprowadź wzory na siły poprzeczne i momenty gnące oraz wykonaj ich wykresy.



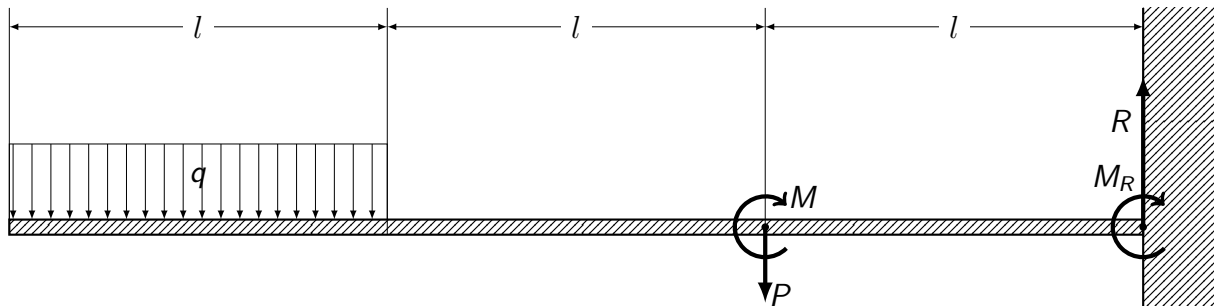
279. Dla belki przedstawionej na poniższym rysunku wyprowadź wzory na siły poprzeczne i momenty gnące oraz wykonaj ich wykresy.



280. Dla belki przedstawionej na poniższym rysunku wyprowadź wzory na siły poprzeczne i momenty gnące oraz wykonaj ich wykresy.



281. Dla belki przedstawionej na poniższym rysunku wyprowadź wzory na siły poprzeczne i momenty gnące oraz wykonaj ich wykresy.



Obliczenia wytrzymałościowe

Materiał	Gęstość [kg/m ³]	Moduł Younga [GPa]
Stale	7 860	210
Miedź	8 930	117
Mosiądze	8 600	113
Stopy aluminium	2 800	70
Stopy magnezu	7 860	210

282. Do pionowego wspornika o polu przekroju A i długości l podwieszona jest masa M . Obliczyć naprężenia rozciągające oraz wydłużenie wspornika wykonanego z materiału o module sprężystości E .

283. Do pionowego wspornika o przekroju $10,3 \text{ cm}^2$ i długości 1 m podwieszono masę 2000 kg . Obliczyć naprężenia rozciągające oraz wydłużenie wspornika wykonanego ze stali S235.

Gatunek stali	Granica plastyczności R_e [MPa]	Wytrzymałość na rozciąganie R_m [MPa]	Wydłużenie przy zerwaniu [%]
S235	235	340	26
S275	275	410	22
S355	355	490	22

284. Jaka jest maksymalna masa, którą można bezpiecznie podwiesić na wsporniku z poprzedniego zadania, wykonanym ze stali S235?

285. Belka utwierdzona długości 3 m o przekroju prostokątnym $60 \text{ mm} \times 100 \text{ mm}$ obciążona jest siłą rozciągającą $N = 50 \text{ kN}$ i momentem zginającym $M = 15 \text{ kNm}$. Wyznaczyć naprężenia normalne. Sprawdzić nośność dla profilu wykonanego ze stali S235.

286. Belka swobodnie podparta o długości 2 m została w połowie długości dociążona obiektem o masie 450 kg , który został przytwierdzony od dołu za pomocą czterech śrub M8 klasy 8.8. Zweryfikuj, czy połączenie wytrzyma to obciążenie.

287. Oblicz ugięcie, naprężenia zginające i masę dla belki stalowej z poprzedniego punktu dla profili

- Przekrój pełen prostokątny $180 \times 90 \text{ mm}$
- przekrój prostokątny pusty 180×90 , $d = 5 \text{ mm}$
- przekrój dwuteowy $H = 180$, $B = 90$, $s = 5$, $t = 8 \text{ mm}$

288. Sprawdź, czy belkę z punktu 3 poprzedniego zadania można dociążyć obciążeniem równomiernie rozłożonym 18 kN/m .

289. Belka o szerokości $B = 80 \text{ mm}$, swobodnie podparta, długości $4,5 \text{ m}$ obciążona jest równomiernie 14 kN/m . Dobierz bezpieczną wysokość przekroju. Uwzględnij ciężar własny belki w wykonanej ze stali S355.

290. Belka długości 2 m jest swobodnie podparta na jednym z końców i w połowie długości. Na drugim końcu obciążona jest siłą $P = 25 \text{ kN}$ i momentem rozciągającym górne włókna $M = 40 \text{ kNm}$. Belka wykonana jest ze stali S235 z dwuteownika IPE 120. Sprawdź nośność belki. Jaki powinien być przekrój, gdyby belka była wykonana ze stali S355?

291. Belka długości 4,5 m swobodnie podparta na końcach obciążona jest równomiernie $q = 12$ kN/m, a w połowie długości przyłożony jest moment zginający $M = 30$ kNm. Zaproponuj przekrój prostokątny dla tej belki.

292. Wspornik stalowy długości L obciążony jest pionowo ciężarem P . Obliczyć naprężenia styczne dla przekroju prostokątnego o wymiarach B i H .

293. Na wspornik działa siła poprzeczna $P = 50$ kN. Wyznacz naprężenia styczne dla przekrojów:

1. Prostokątnego $H = 80$ mm, $B = 40$ mm
2. Prostokątnego pustego $H = 80$ mm, $B = 40$ mm, $d = 5$ mm.
3. Dwuteowego $H = 80$ mm, $B = 40$ mm, $s = 5$ mm, $t = 8$ mm.

294. Belka o przekroju prostokątnym $H = 100$ mm, $B = 40$ mm rozciągana jest siłą $P = 130$ kN działającą na ramieniu $l = 0,5$ m. Sprawdź wytrzymałość belki uwzględniając naprężenia rozciągające i zginające.

295. Belka utwierdzona o długości $L = 1,5$ m obciążona jest na końcu siłą pionową $P = 10$ kN. Wyznacz naprężenia pochodzące od ścinania i zginania dla przekroju 80 mm x 120 mm.

296. Belka wykonana ze stali S355, utwierdzona, o długości $L = 0,5$ m obciążona jest na końcu siłą $P = 15$ kN. Zweryfikuj jej nośność uwzględniając naprężenia pochodzące od zginania i ścinania dla przekroju dwuteowego o wymiarach $H = 100$ mm, $B = 50$ mm, $s = 4$ mm, $t = 5$ mm

Odpowiedzi

117. $y_c \approx 5,28$ N. **118.** $o \approx 0,39$ m. **119.** $x_c = \frac{1}{2} \frac{a^2+d(b-d)}{a+b-d}$, $y_c = \frac{1}{2} \frac{b^2+d(a-d)}{a+b-d}$. **120.** $x_c = \frac{1}{2}a$, $y_c = \frac{1}{2} \frac{d^2(a-b)+bh^2}{d(a-b)+bh}$. **121.** $x_C = 9$ cm. **122.** $x_c = 7,9$ cm, $y_c = 1,6$ cm. **123.** $x_c = y_c = \frac{1}{6} \frac{3a^3-4\pi r^2 a}{a^2-\pi r^2}$ (w układzie współrzędnych zaczepionym w lewym dolnym narożniku kwadratu i o osiach równoległych do jego boków). **124.** $x_c = y_c \approx 0,07$ m. **125.** $x_c = -\frac{1}{2} \frac{r_1 r_2^2}{r_1^2 - r_2^2}$. **126.** $x_c = 3,2$ cm, $y_c = 9,6$ cm, $z_c = 6$ cm. **127.** $x_c = 2,625$ dm, $y_c = 4$ dm, $z_c = 1,05$ dm. **128.** $x_c = -20$ cm, $y_c = 16$ cm, $z_c = 0$ cm. **129.** $x_c 1,47$ m, $y_c 0,94$ m. **130.** $x_c = 0$ cm, $y_c = 8,8$ cm, $z_c = 0$ cm. **131.** $x_c = \frac{a}{3}$, $y_c = \frac{b}{3}$. **132.** $x_c \approx 0,52R$. **133.** $x_c \approx 1,19R$. **134.** $x_c \approx 27,6$ cm. **135.** Na osi symetrii w $\frac{3}{4}$ wysokości. **136.** Na osi symetrii w $\frac{1}{2}$ wysokości. **137.** Na osi symetrii w odległości $\frac{3}{8}R$ od podstawy. **138.** $\frac{a+2\sqrt{ab+3b}}{a+\sqrt{ab+b}} \frac{h}{4}$. **139.** $z_c \approx 1,3r$.

152. $N = S \approx 177$ N. **153.** $\text{tg } \alpha = \frac{8}{9}\sqrt{3}$, $\text{tg } \beta = \frac{17}{15}\sqrt{3}$, $\alpha \approx 57^\circ$, $\beta \approx 63^\circ$. **154.** $\text{tg } \alpha = \frac{7}{23}\sqrt{3}$, $\text{tg } \beta = \frac{4}{11}\sqrt{3}$, $\alpha \approx 27,8^\circ$, $\beta \approx 32,2^\circ$. **155.** $F_L = \frac{3}{5}Q$, $F_P = \frac{4}{5}Q$. **156.** $F_L = F_P = Q/\sqrt{2}$. **157. a)** $F_{AB} = Q/\sqrt{2}$, $F_{BC} = -Q/\sqrt{2}$, $F_{DF} = Q$, $F_{FE} = -\sqrt{2}Q$, $F_{MK} = \sqrt{2}Q$, $F_{KN} = -Q$. **b)** $F_{AB} = \sqrt{3}Q/2$, $F_{BC} = -Q/2$, $F_{DF} = Q/\sqrt{3}$, $F_{FE} = -2Q/\sqrt{3}$, $F_{MK} = 2Q/\sqrt{3}$, $F_{KN} = -Q/\sqrt{3}$. **c)** $F_{AB} = Q/2$, $F_{BC} = -\sqrt{3}Q/2$, $F_{DF} = \sqrt{3}Q$, $F_{FE} = -2Q$, $F_{MK} = 2Q$, $F_{KN} = \sqrt{3}Q$. **158.** $T_1 = T_2 = 7,5$ kN. **159.** $S_1 = 400$ N, $S_2 = 500$ N. **160.** $T_A \approx 10,35$ N, $T_B \approx 14,64$ N. **161.** $T \approx 104$ N, $Q \approx 283$ N. **162.** $F_{AC} = F_{AD} \approx 539$ N. **163.** $\text{tg } \gamma = m_1 \text{ctg } \beta - m_2 \text{ctg } \alpha$. **164.** $h = lP/\sqrt{4p^2 - P^2}$. **165.** $\cos \beta = (M^2 + m_2^2 - m_1^2)/(2Mm_2)$, $\cos \alpha = (M^2 + m_1^2 - m_2^2)/(2Mm_1)$. **166.** $m_1 = M \sin \beta / \sin(\alpha + \beta)$, $m_2 = M \sin \alpha / \sin(\alpha + \beta)$. **167.** $p = 150$ N, $\sin \alpha = 0,8$, $\alpha \approx 53^\circ$. **168.** $S = \frac{1}{2} \frac{l}{a} Q$, $x = \frac{1}{2} a (1 - h/\sqrt{l^2 - a^2})$, $y = \frac{1}{2} (\sqrt{l^2 - a^2} - h)$. **169.** $T \approx 122$ N, $P \approx 137$ N. **170.** $f = |m_1 \sin \alpha - m_2 \sin \beta| / (m_1 \cos \alpha + m_2 \cos \beta)$. **171.** $F_{AB} = 30$ N, $F_{BC} = 52$ N. **172.** $T = 2P/\sqrt{3}$, $Q = P/\sqrt{3}$. **173.** $Q \approx 173$ N, $\alpha = 60^\circ$. **174.** $Q = Pr/(d+r)$, $T = Pl/(d+r)$. **175.** $F_{AB} \approx 193$ N, $F_{CD} \approx 141$ N. **176.** $F_A = F_B \approx 3,33$ kN.

177. A-podpora przesuwna, B-podpora nieprzesuwna, $F_A = \frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \frac{h}{l}$, $\vec{F}_B = [-\frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \frac{h}{l}, F_g]$. **178.** $\vec{F}_A = F_g \left[\frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \frac{h}{l}, \frac{h}{2l \sin \alpha} \right]$, $\vec{F}_B = F_g \left[-\frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \frac{h}{l}, \frac{2l \sin \alpha - h}{2l \sin \alpha} \right]$, $\vec{F}_C = F_g \left[\frac{\cos \alpha}{\sin^2 \alpha} \frac{h}{l}, \frac{h}{2l \sin \alpha} \right]$. **179.** $F_A = F_C =$

$F_g \frac{\cos \alpha}{2r} \left(l - \frac{h}{\sin \alpha} \right)$, $F_B = F_g \sqrt{h^2 \cos^2 \alpha + \sin^4 \alpha l^2} / (l \sin^2 \alpha)$. **180.** $R_B \approx 173\text{N}$, $R_C \approx 513\text{N}$, $T = 150\text{N}$. **181.** $F_B = 200\text{N}$, $F_C = F_D = 300\text{N}$. **182.** $F_A \approx 353.5\text{N}$, $F_{BC} \approx 591.5\text{N}$, $F_{BD} \approx -158.5\text{N}$. **183.** $N_A = 50\text{N}$, $N_B \approx 43.3\text{N}$, $P = 25\text{N}$. **184.** $N_B = N_A^\perp = N_A^\parallel \approx 402.5\text{N}$. **185.** $N_A \approx 365.2\text{N}$, $N_C^\perp \approx 316.3\text{N}$, $N_C^\parallel \approx 782.6\text{N}$. **186.** $T \approx 1.288\text{kN}$, $R_A^\parallel \approx 1.244\text{kN}$, $R_A^\perp \approx 312\text{N}$. **187.** $R_A = 1.8\text{kN}$, $R_B \approx 1.757\text{kN}$, $R_C \approx 1.242\text{kN}$. **188.** $T_C = 90\text{N}$, $T_D = 30\text{N}$. **189.** $x = 1\text{m}$. **190.** 1.39m . **191.** $N_A = 70 - 40k[\text{kN}]$, $N_B = 30 + 40k[\text{kN}]$. **192.** $N_D = 400\text{kN}$, $N_C = 300\text{kN}$. **193.** $x = 1\text{m}$. **194.** $x = 2\text{m}$. **195.** $x = 1.75\text{m}$. **196.** $R_A = 0.7\text{N}$, $R_B = 7.9\text{N}$. **197.** $R_A = 340\text{kN}$, $R_B = 295\text{kN}$. **198.** $\sin \alpha = 3\frac{h}{l}$, $h = \frac{1}{3}l$. **199.** $R_1 = R_2 = \frac{1}{4}mg(\cos \alpha + \frac{h}{l} \sin \alpha)$, $R_3 = R_4 = \frac{1}{4}mg(\cos \alpha - \frac{h}{l} \sin \alpha)$. **200.** $M = \frac{1}{6}m$. **201.** $\text{tg} \alpha = \frac{1}{7}$. **202.** $|CE| = (3\sqrt{6})a \approx 0.55a$. **203.** $E = \left[\frac{a}{2}, \frac{3-\sqrt{3}}{2}a \right]$. **204.** Każdy łapie w połowie swojego boku. **205.** $P = \frac{2Q}{3\pi}$. **206.** $h_{\max} = r/\sqrt{2}$. **207.** $h_{\max} = \sqrt{3}r$.

202. $P = Q$, $\beta = \frac{\alpha}{2}$, $S = 2 \cos \beta Q$. **203.** $R_A = \sin \beta Q + \frac{l}{h} 2 \cos^2 \frac{\beta}{2} Q$. **204.** $F_{AC} \approx 346.4\text{N}$, $F_{AB} = 0$. **205.** $N = 130\text{N}$, $R_C^\parallel = 224\text{N}$, $R_C^\perp = 8\text{N}$. **206.** $R_A = 250\text{N}$, $R_E = 450\text{N}$, $R_C = [-700, -250][\text{N}]$. **207.** a) $S = \frac{1}{2}Q$, b) $S = \frac{1}{3}Q$, c) $S = \frac{1}{5}Q$, d) $S = \frac{1}{4}Q$, e) $S = \frac{1}{8}Q$. **208.** $S = \frac{r_1+r_2}{2r_1}Q$, $S = \frac{r_1-r_2}{2r_1}Q$. **209.** $M = \frac{r_2}{r_1-r_2}m$. **210.** $\frac{M}{m} = \sin \alpha$, $\frac{M}{m} = \frac{1}{2} \sin \alpha$, $\frac{M}{m} = \frac{1}{4} \sin \alpha$.

211. $F = \frac{1}{2}\rho g w h^2$, $M = \frac{1}{6}\rho g w h^3$, efektywny punkt przyłożenia siły - w środku zapory w $\frac{1}{3}h$ nad dnem. **212.** $F = \frac{1}{6}\rho g h^2(a + 2b)$, $M = \frac{1}{12}\rho g h^3(b + a)$, efektywny punkt przyłożenia siły - w środku zapory w $\frac{a+b}{2a+4b}h$ nad dnem. **213.** $F \approx 8371\text{N}$, $M \approx 2870\text{Nm}$, efektywny punkt przyłożenia siły - w środku zapory w $\approx 0.34\text{m}$ nad dnem. **214.** $F = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho g h \pi r^2$, $M = \frac{\sqrt{2}}{2}\rho g \frac{1}{4}\pi r^4$. **215.** $F \approx 15.4\text{kN}$. **216.** $F_B = \rho g \left((h - a) \frac{a^2}{2} + \cos \alpha \frac{a^3}{3} \right)$. **217.** $\approx 75.7\text{mm}$. **218.** $\approx 230\text{N}$. **219.** $r/h > \sqrt{2\frac{\rho}{\rho_0}(1 - \frac{\rho}{\rho_0})}$.

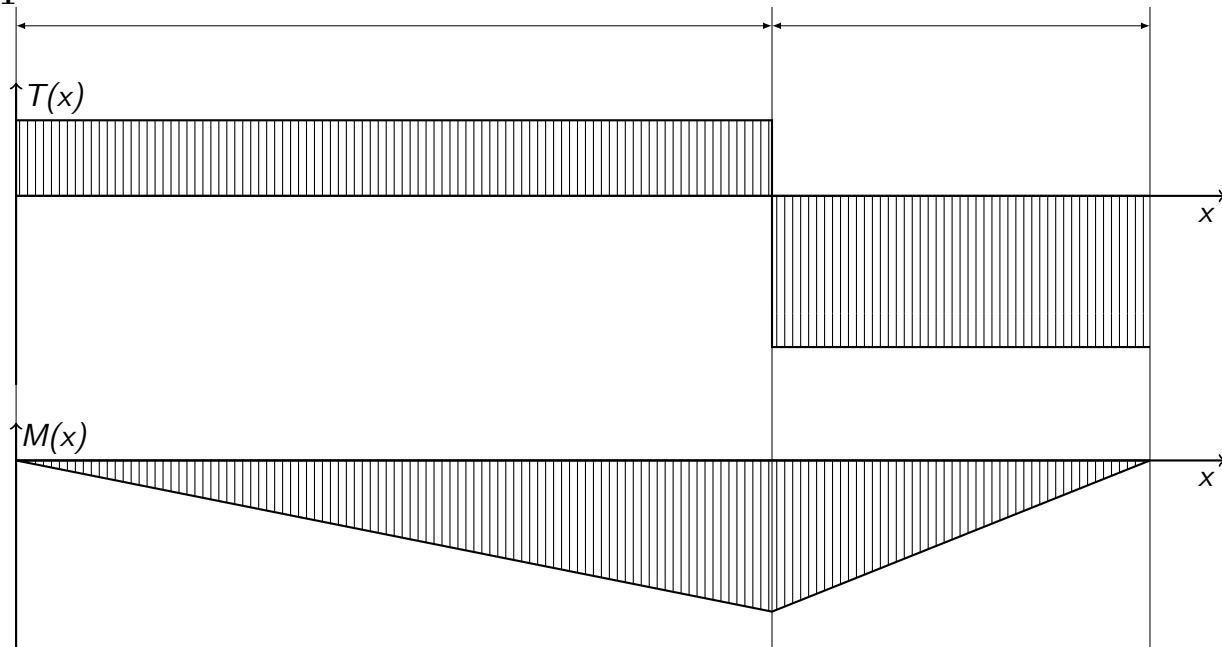
220. $R_A = R_B = m\omega^2 l^2 \sin 2\alpha / (a + b)$. **221.** $\vec{R}_A = m\omega^2 l (\vec{e}_x - 2\vec{e}_y)$, $\vec{R}_B = m\omega^2 l (-2\vec{e}_x + \vec{e}_y)$. **222.** $\vec{R}_A = m\omega^2 l (1 + \cos \phi l/a - \sin \phi) \vec{e}_y$, $\vec{R}_B = -m\omega^2 l (\vec{e}_x + (1 + \cos \phi l/a) \vec{e}_y)$. **223.** $R_E = R_F = \frac{a}{b} \cdot \frac{1}{2} m\omega^2 l$. **224.** $R_A = \frac{1}{3} m\omega^2 l$, $R_B = \frac{1}{6} m\omega^2 l$. **225.** $R_A = R_B = \frac{1}{6} m\omega^2 l$. **226.** $\vec{R}_A = -\frac{1}{6} m\omega^2 l (\vec{e}_x + 2\vec{e}_y)$, $\vec{R}_B = -\frac{1}{6} m\omega^2 l (2\vec{e}_x + \vec{e}_y)$. **227.** $R_A = m\omega^2 l \sin \alpha (\frac{1}{3} - \frac{1}{9} \cos \alpha)$, $R_B = m\omega^2 l \sin \alpha (\frac{1}{6} + \frac{1}{9} \cos \alpha)$. **228.** $R_A = R_B \approx 612\text{N}$ (+15kN). **229.** $R_A = R_B = 75\text{N}$. **230.** $\omega = \sqrt{4g/a}$. **231.** $R_A = R_B = \frac{1}{2} m\omega^2 ab(b^2 - a^2) / \sqrt{a^2 + b^2}$. **232.** $R_A = R_B \approx 204\text{N}$. **233.** $R_A = \frac{P}{2g} \omega^2 (\frac{1}{2a} \sin 2\alpha (e_x^2 + \frac{1}{4}r^2) \vec{j} - \vec{e} + \vec{e}_k)$, $R_B = \frac{P}{2g} \omega^2 (-\frac{1}{2a} \sin 2\alpha (e_x^2 + \frac{1}{4}r^2) \vec{j} - \vec{e} + \vec{e}_k)$, gdzie $\vec{k} = [\sin \alpha, 0, \cos \alpha]$ - wektor kierunku osi tarczy, a \vec{e} - wektor do geometrycznego środka tarczy ze środka obrotu. **234.** $N_1 = N_2 = \frac{1}{2} \sin 2\alpha \frac{P\omega^2}{4g} (r^2 - \frac{4}{3}l^2) / h$. **235.** $R_A = (\frac{1}{2} - \frac{R}{L}g/\sqrt{g^2 + \omega^4}) Rm\omega^4 / \sqrt{g^2 + \omega^4}$, $R_B = (\frac{1}{2} + \frac{R}{L}g/\sqrt{g^2 + \omega^4}) Rm\omega^4 / \sqrt{g^2 + \omega^4}$.

236. $R_A = 260\text{kN}$ \uparrow , $R_B = 180\text{kN}$ \downarrow , $F_1 = -164\text{kN}$, $F_2 = 115\text{kN}$, $F_3 = -143\text{kN}$, $F_4 = -60\text{kN}$, $F_5 = 190\text{kN}$. **237.** $R_A = 34\text{kN}$, $R_B = 26\text{kN}$, $F_1 = -73\text{kN}$, $F_2 = 58\text{kN}$, $F_3 = -24.4\text{kN}$, $F_4 = -47\text{kN}$, $F_5 = -47\text{kN}$, $F_6 = 39\text{kN}$, $F_7 = -8.1\text{kN}$, $F_8 = -55\text{kN}$, $F_9 = 44\text{kN}$. **238.** $R_A = 32.5\text{kN}$, $R_B = 27.5\text{kN}$, $F_1 = 13\text{kN}$, $F_2 = 30.3\text{kN}$, $F_3 = -35\text{kN}$, $F_4 = -25\text{kN}$, $F_5 = -26\text{kN}$, $F_6 = 17.3\text{kN}$, $F_7 = -17.3\text{kN}$. **239.** $R_A = -60\text{kN}$, $R_B = 51\text{kN}$, $F_1 = -60\text{kN}$, $F_2 = -51\text{kN}$, $F_3 = -31.3\text{kN}$, $F_4 = 5.4\text{kN}$, $F_5 = -20\text{kN}$, $F_6 = 20\text{kN}$, $F_7 = -28.3\text{kN}$, $F_8 = 0\text{kN}$, $F_9 = -30\text{kN}$. **240.** $R_A = 20\text{kN}$, $R_B = 28.3\text{kN}$, $\varphi = 45^\circ$, $F_1 = -33.3\text{kN}$, $F_2 = -26.7\text{kN}$, $F_3 = -24\text{kN}$, $F_4 = 24\text{kN}$, $F_5 = 6.7\text{kN}$, $F_6 = -44.7\text{kN}$, $F_7 = 20\text{kN}$, $F_8 = 20\text{kN}$. **241.** $R_A = 15\text{kN}$, $R_B = 27\text{kN}$, $\varphi = 68^\circ$, $F_1 = 20\text{kN}$, $F_2 = -30\text{kN}$, $F_3 = 27\text{kN}$, $F_4 = -30\text{kN}$, $F_5 = 36\text{kN}$, $F_6 = 15.7\text{kN}$, $F_7 = -40\text{kN}$. **242.** $X_A = -20\text{kN}$, $Y_A = 14\text{kN}$, $Y_B = 26\text{kN}$, $F_1 = 45\text{kN}$, $F_2 = -45\text{kN}$, $F_3 = 20\text{kN}$, $F_4 = -24.4\text{kN}$, $F_5 = 24.4\text{kN}$, $F_6 = 20\text{kN}$, $F_7 = 0\text{kN}$, $F_8 = -26\text{kN}$, $F_9 = -14\text{kN}$. **243.** $X_A = -10\text{kN}$, $Y_A = 30\text{kN}$, $Y_B = 10\text{kN}$, $F_1 = -20\text{kN}$, $F_2 = -20\text{kN}$, $F_3 = -10\text{kN}$, $F_4 = 14.1\text{kN}$, $F_5 = 20\text{kN}$, $F_6 = 42.4\text{kN}$, $F_7 = -40\text{kN}$, $F_8 = 14.1\text{kN}$, $F_9 = -10\text{kN}$. **244.** $X_A = 21\text{kN}$, $X_B = -20\text{kN}$, $Y_B = 29\text{kN}$, $F_1 = -29.7\text{kN}$, $F_2 = 21\text{kN}$, $F_3 = 21\text{kN}$, $F_4 = -21\text{kN}$, $F_5 = 15\text{kN}$, $F_6 = 9\text{kN}$, $F_7 = 0\text{kN}$, $F_8 = -41\text{kN}$, $F_9 = 9\text{kN}$. **245.** $X_A = 22\text{kN}$, $X_B = -20\text{kN}$, $Y_B = 28\text{kN}$, $F_1 = -60\text{kN}$, $F_2 = -70\text{kN}$, $F_3 = 49\text{kN}$, $F_4 = 25.3\text{kN}$, $F_5 = -57\text{kN}$. **246.** $X_A = 54\text{kN}$, $Y_A = 6\text{kN}$, $Y_B = -54\text{kN}$, $F_1 = -54\text{kN}$, $F_2 = -36\text{kN}$, $F_3 = -18\text{kN}$, $F_4 = 20.6\text{kN}$, $F_5 = 20.6\text{kN}$, $F_6 = 41\text{kN}$, $F_7 = -60\text{kN}$, $F_8 = 35\text{kN}$, $F_9 = -30$

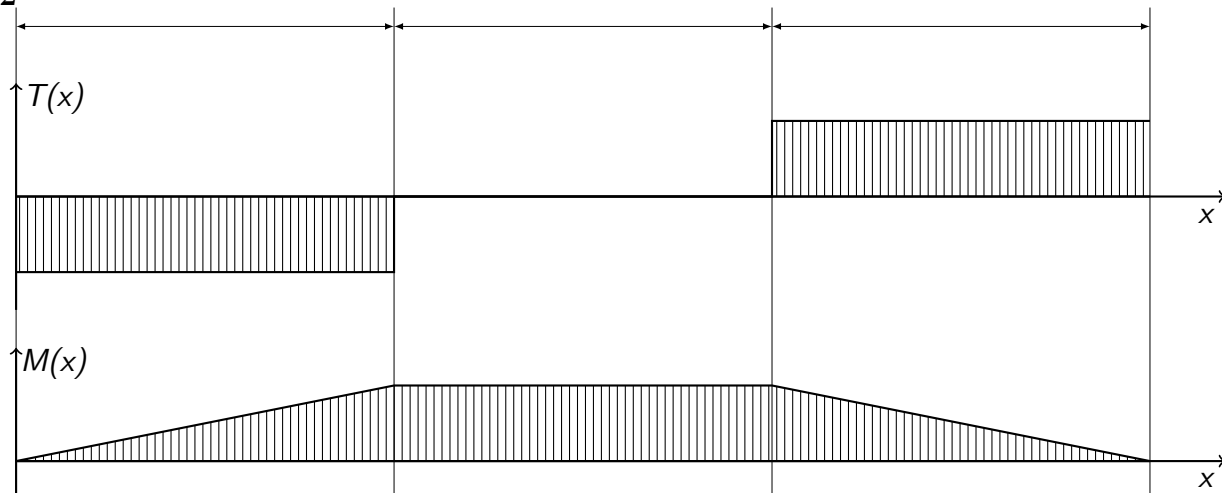
kN, $F_{10} = 27$ kN, $F_{11} = -20$ kN.

247. $T_1 = T_2 = 245$ N, $P = 17.3$ N. **248.** $S = -1.41$ kN, $T = 0.71$ kN. **249.** $T = 6$ kN, $S_1 = S_2 = -3$ kN. **250.** $T_C = 320$ N, $T_D = 240$ N, $T_B = -580$ N. **251.** 2.04 kN, -0.6 kN. **252.** $P_1 = 42$ kN, $P_2 = 58$ kN, $P_3 = P_4 = 50$ kN. **253.** $R_A = R_B = 26.4$ kN, $R_C = 33.5$ kN. **254.** $F_1 = F_2 = -0.5$ kN, $F_3 = 707$ N, $F_4 = F_5 = 0.5$ N, $F_6 = -1$ kN. **255.** $S_{BD} = P(\cos \alpha - \sin \alpha)$, $S_{BE} = P(\cos \alpha + \sin \alpha)$, $S_{AB} = -P\sqrt{2} \cos \alpha$. **256.** $S_{AD} = 2T(\sin \varphi + \cos \varphi)$, $S_{AC} = 2T(\sin \varphi - \cos \varphi)$, $S_{AB} = -2\sqrt{3}T \sin \varphi$. **257.** $\alpha \approx 36^\circ 50'$, $S = -400$ N. **258.** 4.83 kN. **259.** $R = 2\sqrt{3}N$. **260.** $\Delta_N = -\Delta_S = \frac{3}{2}F_W \cos \alpha$, $\Delta_E = -\Delta_W = \frac{3}{2}F_W \sin \alpha$. Pojawi się pozioma składowa siły reakcji fundamentu: $-\frac{1}{3}\vec{F}_W$. **261.** 38.5 N. **262.** 23 kN. **263.** $S_A = S_B = -31.5$ kN, $S_C = -1.5$ kN. **264.** $R = \frac{1}{3}P$, $T = \frac{P}{3\sqrt{6}}$. **265.** $R = \frac{1}{3}P + p$, $T = \frac{2P+3p}{18}\sqrt{6}$. **266.** Siły w prętach: $\frac{1}{\sqrt{3}}F_x \pm F_y + \frac{1}{\sqrt{6}}F_z$, $-\frac{2}{\sqrt{3}}F_x + \frac{1}{\sqrt{6}}F_z$. Pionowe składowe reakcji podłoża: $\frac{\sqrt{2}}{3}F_x \pm \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}F_y + \frac{1}{3}F_z$, $-\frac{2\sqrt{2}}{3}F_x + \frac{1}{3}F_z$. **267.** $mg \operatorname{tg} \alpha \frac{2\sqrt{2}}{3} \cos(\omega t \pm \frac{\pi}{3}) + \frac{1}{3}mg$, $mg \operatorname{tg} \alpha \frac{2\sqrt{2}}{3} \cos(\omega t - \pi) + \frac{1}{3}mg$. **268.** $R_A = 1250$ kN, $R_B = R_C = 600$ kN. **269.** $T = 13.6$ N. **270.** $T_A + T_B = \frac{l-\sqrt{3L^2-2l^2}}{3l\sqrt{3L^2-2l^2}}LQ$, $T_C = \frac{l+2\sqrt{3L^2-2l^2}}{3l\sqrt{3L^2-2l^2}}LQ$.

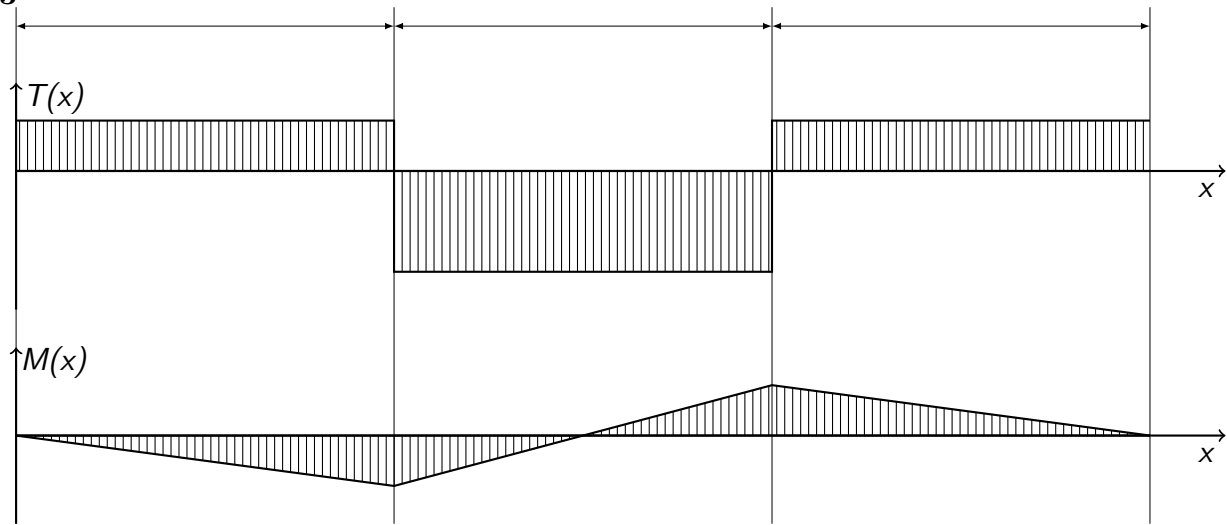
271



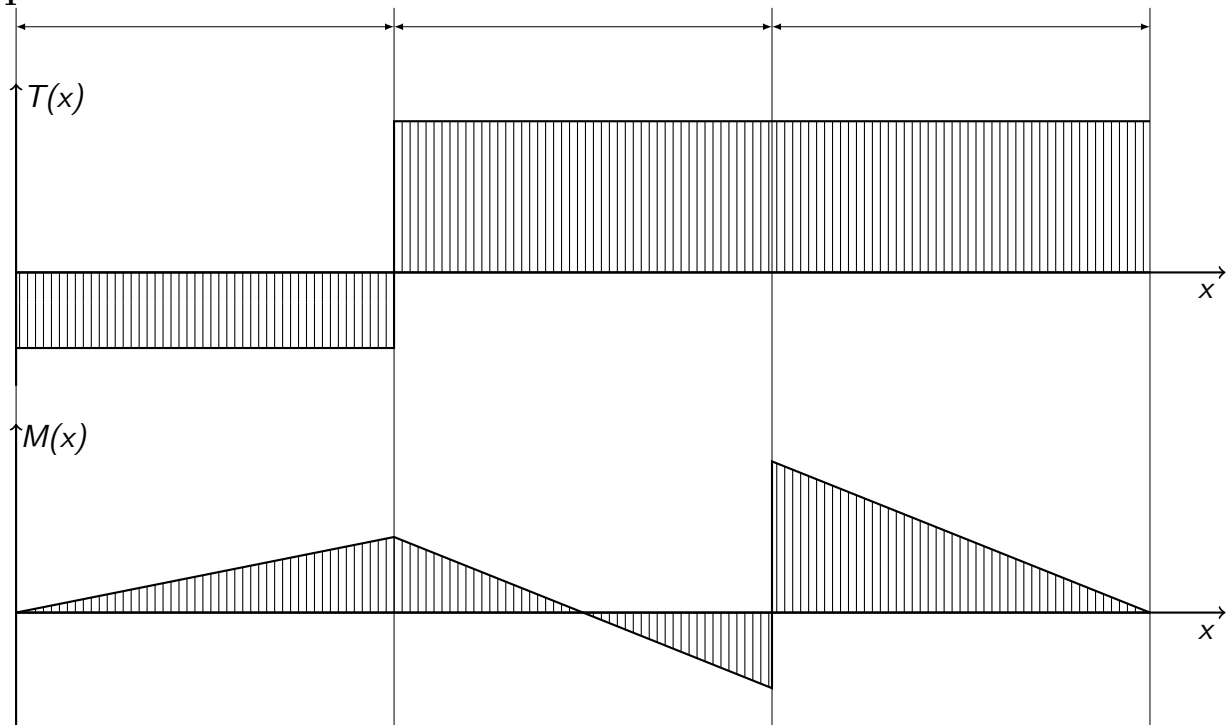
272



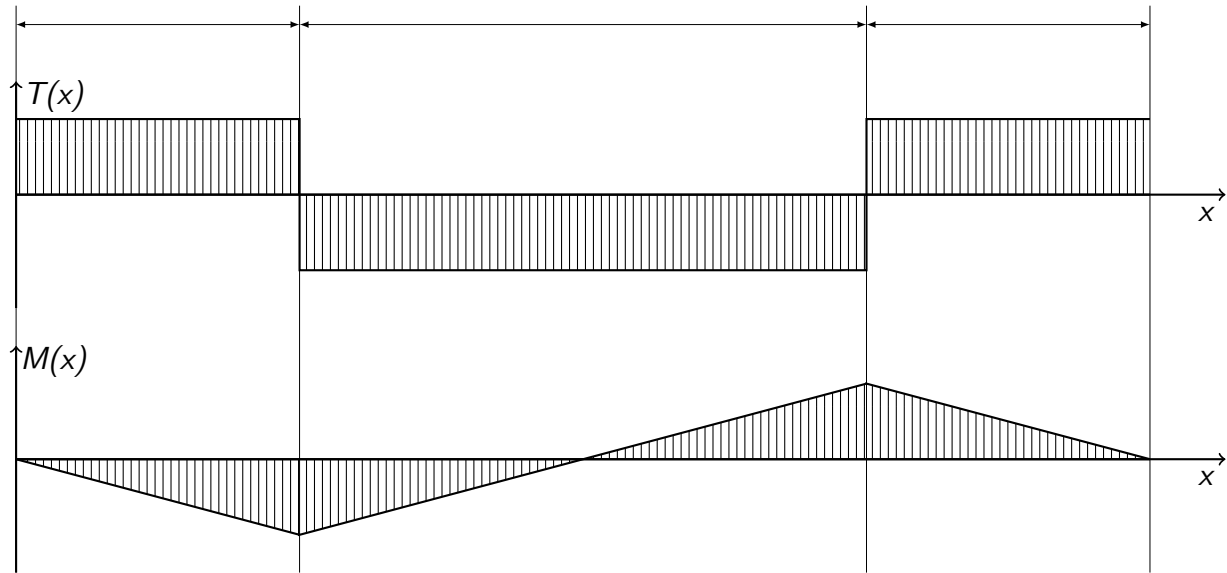
273



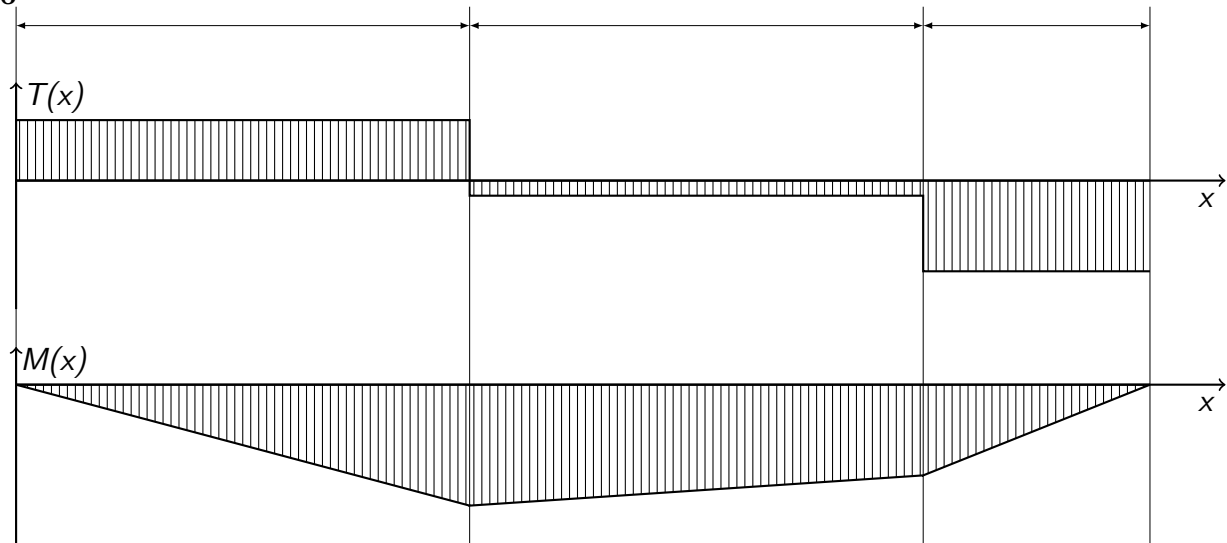
274



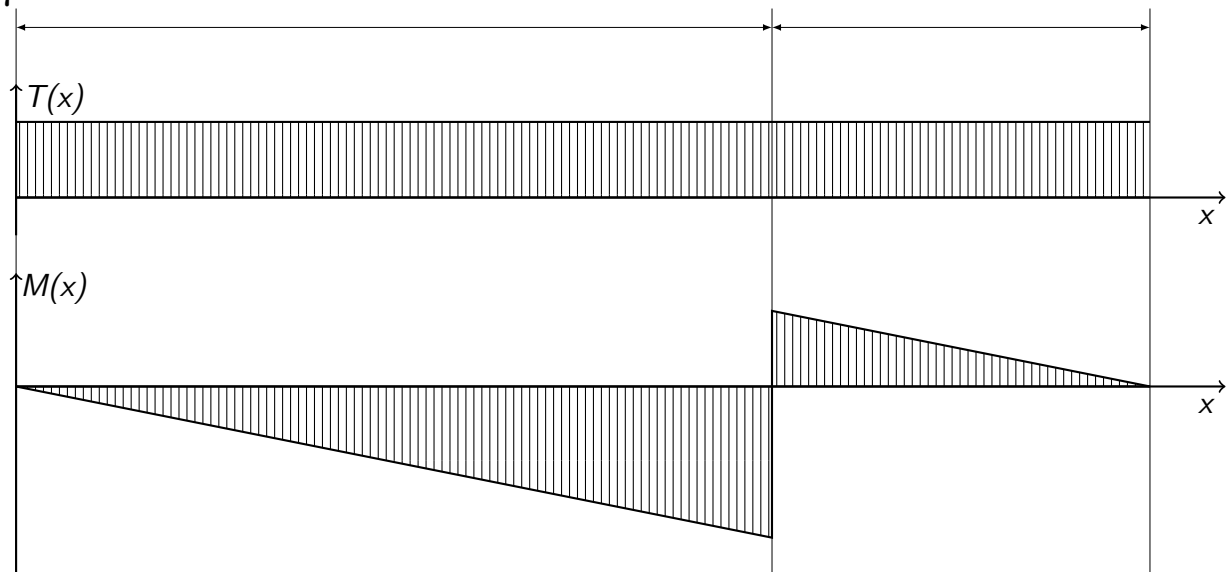
275



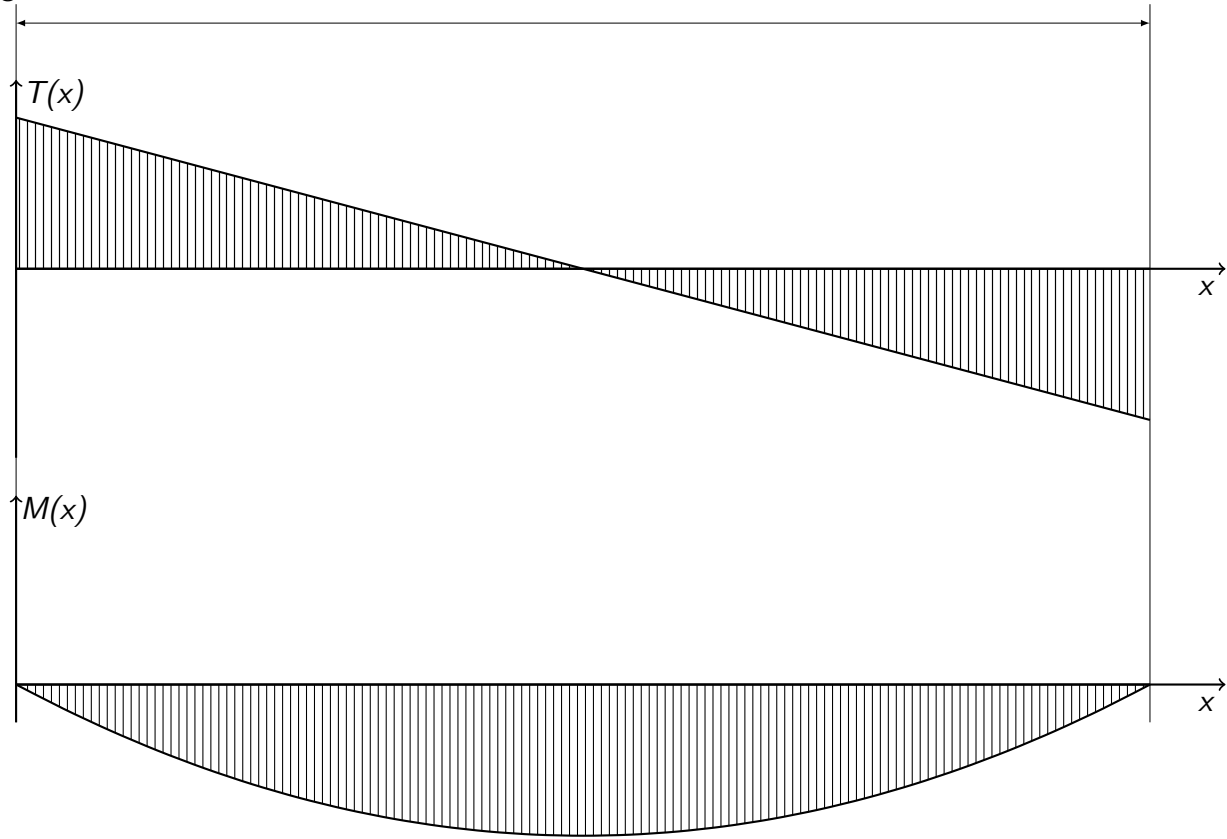
276



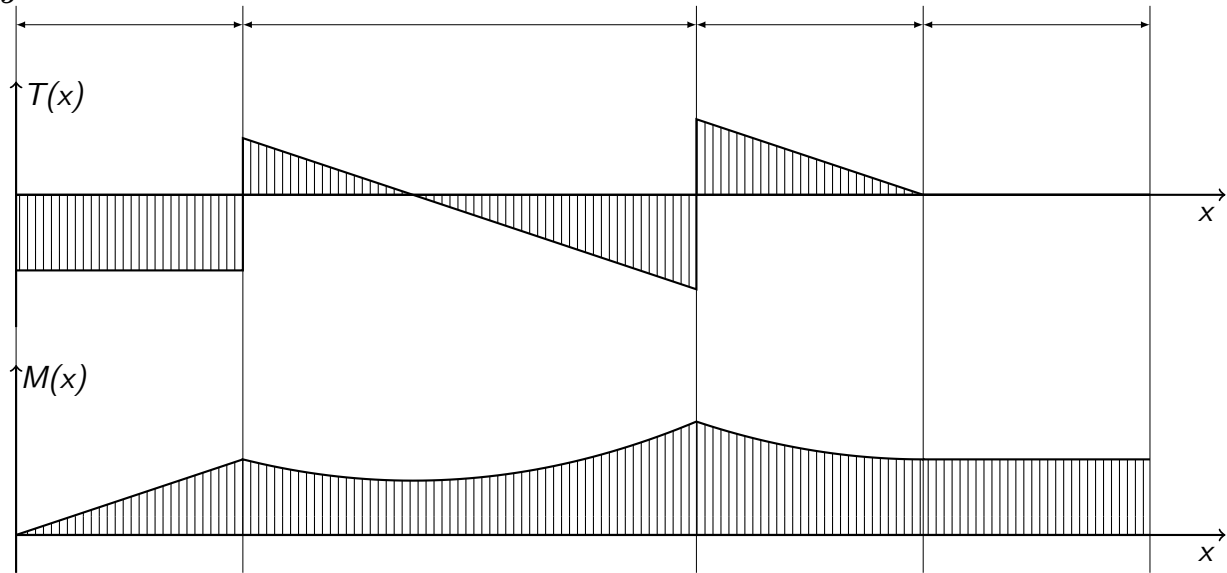
277



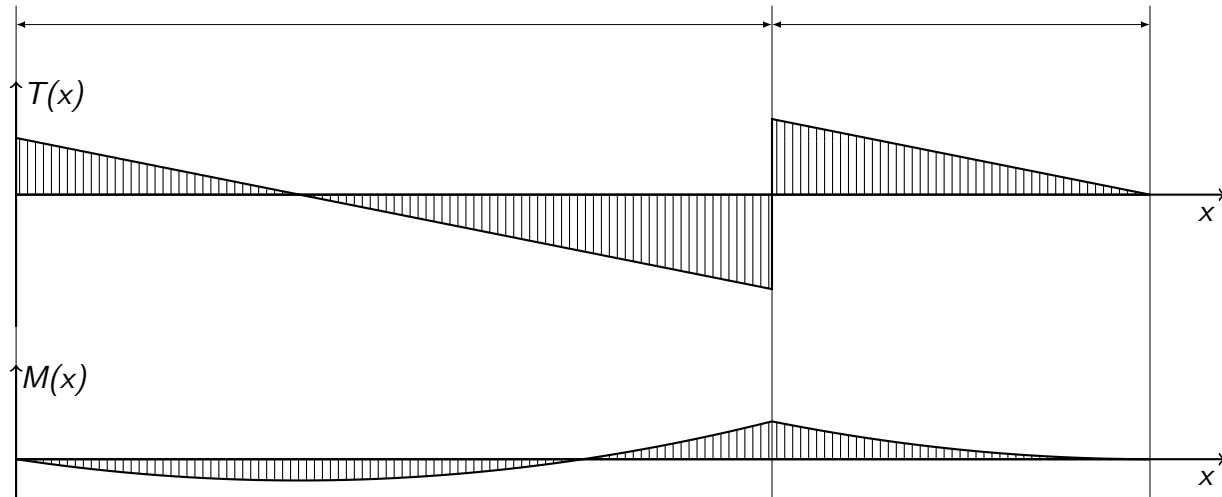
278



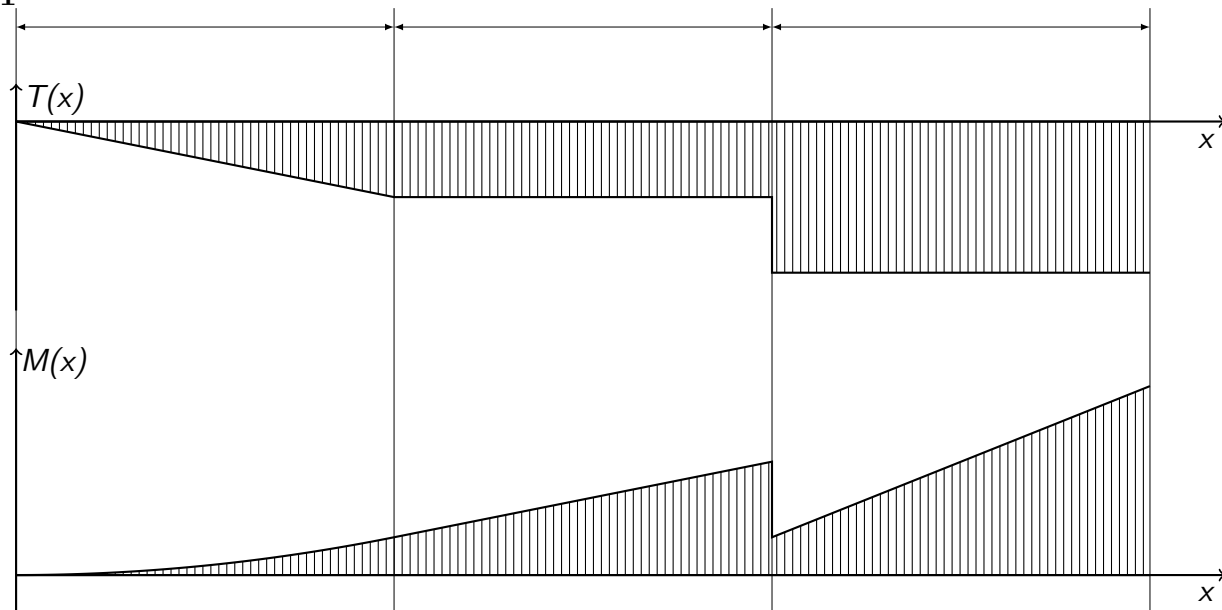
279



280



281



146 1. $I_{xx} = \frac{1}{36}ab^3$, $I_{yy} = \frac{1}{36}a^3b$, $I_{xy} = -\frac{1}{72}a^2b^2$, $I_0 = \frac{1}{36}ab(a^2 + b^2)$, $I_{||} = \frac{a^3b^3}{12(a^2+b^2)}$, $I_{\perp} = \frac{ab(a^4 - a^2b^2 + b^4)}{36(a^2+b^2)}$. **147** 1. $I_{xx} = \frac{1}{12}ab^3$, $I_{yy} = \frac{1}{12}a^3b$, $I_{xy} = 0$, $I_0 = \frac{ab}{12}(a^2 + b^2)$ 2. $I_{xx} = \frac{1}{12}(ab^3 - (a - 2d)(b - 2d)^3)$, $I_{yy} = \frac{1}{12}(a^3b - (a - 2d)^3(b - 2d))$, $I_{xy} = 0$, $I_0 = 2d(a + b)^3 - 6d(a - b)^2 - 16d^2(a + b) + 32d^4$. 3. $I_{xx} = I_{yy} = \frac{\pi}{64}D^4$, $I_0 = \frac{\pi}{32}D^4$. 4. $I_{xx} = I_{yy} = \frac{\pi}{64}(D^4 - (D - 2d)^4)$, $I_0 = \frac{\pi}{32}(D^4 - (D - 2d)^4)$. **148** $I_{xx} = \frac{1}{12}d(bd^2 - 2d^3 + 2a^3)$, $I_{yy} = \frac{1}{12}(ab^3 - (a - d)(b - 2d)^3)$, $I_0 = I_{xx} + I_{yy}$. **149** 1. $I = 579.098\text{cm}^3$. **283** 1. $dl = 0.092\text{mm}$. **296** 1. $\sigma = 273.29\text{ MPa}$, $\tau = 43.521\text{ MPa}$.