Kinematyka punktu we współrzędnych krzywoliniowych i wektorowych

naturalne

biegunowe

walcowe (cylindryczne)

kuliste (sferyczne)

Współrzędnymi krzywoliniowymi mogą być trzy dowolne funkcje (q_1, q_2, q_3) współrzędnych kartezjańskich o równaniach:

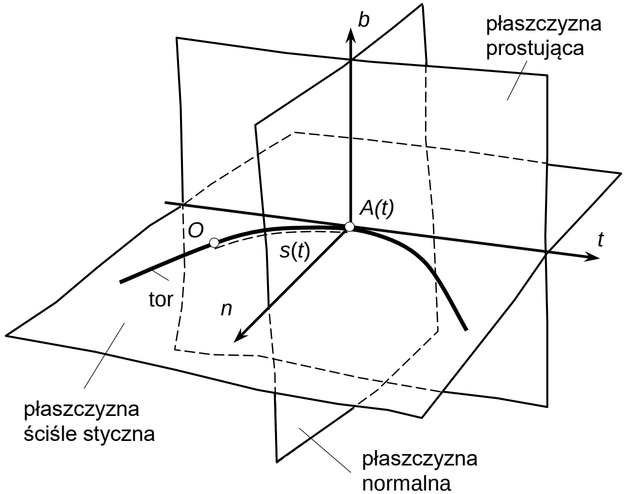
$$q_1 = q_1(x, y, z)$$
$$q_2 = q_2(x, y, z)$$
$$q_3 = q_3(x, y, z),$$

które powinny jednoznacznie wyznaczać współrzędne kartezjańskie:

$$x = x(q_1, q_2, q_3)$$
$$y = y(q_1, q_2, q_3)$$
$$z = z(q_1, q_2, q_3)$$

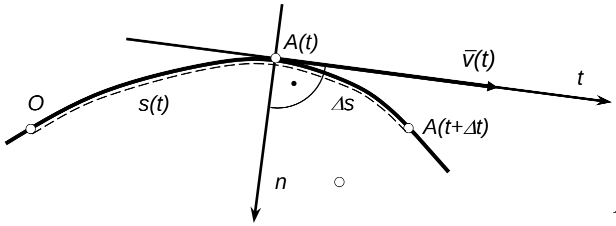
Opis ruchu we współrzędnych naturalnych

Podczas ruchu punktu po dowolnym torze możemy poprowadzić do toru *płaszczyznę ściśle styczną*, *płaszczyznę normalną* i *płaszczyznę prostującą* w miejscu, w którym znajduje się aktualnie rozważany punkt. Krawędzie przecięcia się płaszczyzn są osiami: *styczną*, *normalną główną* i *binormalną*.



Opis ruchu punktu we współrzędnych naturalnych;
t – oś styczna, n – oś normalna główna, b – oś binormalna,
O – położenie początkowe punktu, s(t) – równanie drogi przebytej po torze

Można wykazać, że ruch punktu odbywa się chwilowo w płaszczyźnie ściele stycznej i w dalszych rozważaniach brać pod uwagę tylko tor z naniesionym osiami: styczną i normalną.



Ruch punktu w płaszczyźnie ściśle stycznej

Położenie. Położenie punktu we współrzędnych naturalnych jest określone, gdy dany jest:

1) tor poruszającego się punktu (równanie toru),
2) położenie początkowe i chwila początkowa,
3) równanie ruchu po torze

$$s = s(t)\,. \tag{3.14}$$

Prędkość. Ponieważ ruch punktu odbywa się w płaszczyźnie ściśle stycznej, wektor prędkości pokrywa się zawsze z kierunkiem osi stycznej.

Wartość wektora prędkości średniej liczymy ze wzoru

$$v_{śr} = \frac{\Delta s}{\Delta t}\,, \tag{3.15}$$

natomiast prędkości chwilowej (ścisłej), dla dowolnej chwili czasu *t*, ze wzoru

$$v = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = \dot{s}\,, \tag{3.16}$$

Wektor prędkości możemy zatem zapisać

$$\overline{v} = v\overline{e}_t\,, \tag{3.17}$$

gdzie $\overline{e}_t$ – wersor osi stycznej.

Przyspieszenie. Możemy również wykazać, że przyspieszenie punktu jest wektorem leżącym zawsze w płaszczyźnie ściśle stycznej. Aby je wyznaczyć zróżniczkujmy prędkość (3.17) względem czasu

$$\overline{a} = \dot{\overline{v}} = \frac{d}{dt}(v\overline{e}_t) = \dot{v}\overline{e}_t + v\dot{\overline{e}}_t, \qquad (3.18)$$

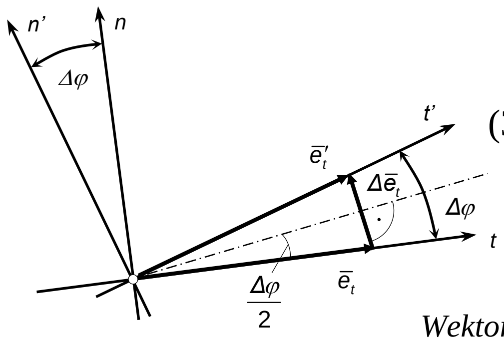
gdyż wersor $\overline{e}_t$ zmienia swój kierunek w czasie.

Określenie pochodnej wersora $\bar{e}_t$ względem czasu.

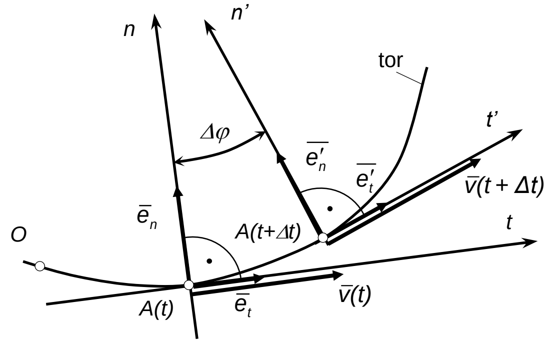
Zgodnie z definicją pochodnej mamy

$$\dot{\bar{e}}_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta \bar{e}_t}{\Delta t}, \qquad (3.18a)$$

gdzie $\Delta \bar{e}_t = \bar{e}_t' - \bar{e}_t$.



Wektor $\Delta \bar{e}_t$



Zmiany wersora osi normalnej $\bar{e}_t$

Gdy $\Delta t \to 0$, kierunek wektora $\Delta \bar{e}_t$ dąży do kierunku wersora $\bar{e}_n$, natomiast jego wartość $\Delta e_t = |\Delta \bar{e}_t| = 2 e_t \sin \frac{\Delta\varphi}{2} = 2 \sin \frac{\Delta\varphi}{2}$.

Z kolei pochodna

$$\dot{e}_t = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{|\Delta \bar{e}_t|}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{2 \sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\Delta t} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \frac{\Delta s}{\Delta t} = = \lim_{\Delta\varphi \to 0} \frac{\sin \frac{\Delta\varphi}{2}}{\frac{\Delta\varphi}{2}} \lim_{\Delta s \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta s} \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta s}{\Delta t} = 1 k v = 1 \frac{1}{\rho} v = \frac{v}{\rho},$$

gdzie: k – krzywizna toru, ρ – promień krzywizny toru.

Zatem ostatecznie

$$\dot{\bar{e}}_t = \omega \bar{e}_n, \quad \text{gdzie} \quad \omega = \frac{v}{\rho} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\Delta\varphi}{\Delta t} = \dot{\varphi}. \qquad (3.18b)$$

Przez analogię można wykazać, że

$$\dot{\bar{e}}_n = -\omega \bar{e}_t. \qquad (3.18c)$$

Znak minus oznacza, że kierunek zmiany w czasie wersora $\bar{e}_n$ jest przeciwny do osi stycznej t.

Po podstawieniu zależności (3.18b) do (3.18) otrzymujemy

$$\bar{a} = a_t \bar{e}_t + a_n \bar{e}_n \,, \tag{3.19}$$

gdzie:

$$a_t = \dot{v} = \ddot{s} \,, \tag{3.19a}$$

– *przyspieszenie styczne*

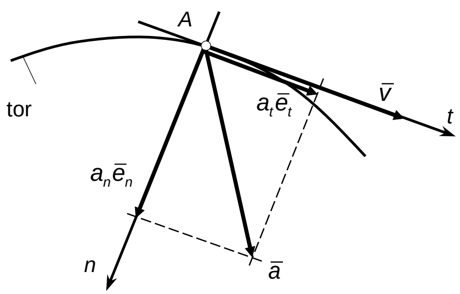
$$a_n = \frac{v^2}{\rho} \,, \tag{3.19b}$$

– *przyspieszenie normalne*.

Wartość wektora przyspieszenia całkowitego obliczamy ze wzoru

$$a = \sqrt{a_t^{\,2} + a_n^{\,2}} \,. \tag{3.19c}$$

Zarówno wektor prędkości jak i wektor przyspieszenia we współrzędnych naturalnych przedstawiono na rys.



Prędkość i przyspieszenie punktu we współrzędnych naturalnych

Promień krzywizny toru płaskiego, gdy dany on jest za pomocą równania $y = y(x)$, obliczamy ze wzoru

$$\rho = \frac{[1+(\frac{dy}{dx})^2]^{\frac{3}{2}}}{\frac{d^2y}{dx^2}}, \qquad (3.20a)$$

natomiast w przypadku toru przestrzennego, gdy tor dany jest w postaci parametrycznych równań toru (PRT) , tj.: $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$, korzystamy ze wzoru

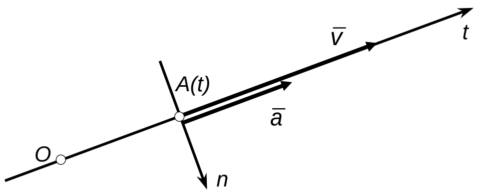
$$\rho = \frac{[\dot{x}^2+\dot{y}^2+\dot{z}^2]^{\frac{3}{2}}}{\sqrt{(\dot{y}\ddot{z}-\dot{z}\ddot{y})^2+(\dot{z}\ddot{x}-\dot{x}\ddot{z})^2+(\dot{x}\ddot{y}-\dot{y}\ddot{x})^2}}. \qquad (3.20b)$$

Jeżeli tor jest zadany w postaci uwikłanej $F(x, y) = 0$, to jego promień krzywizny obliczamy ze wzoru

$$\rho = \frac{\left[\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right]^{\frac{3}{2}}}{\left|\left(\frac{\partial F}{\partial x}\right)^2\frac{\partial^2 F}{\partial y^2}-2\left(\frac{\partial^2 F}{\partial x\partial y}\right)^2\frac{\partial F}{\partial x}\frac{\partial F}{\partial y}+\frac{\partial^2 F}{\partial x^2}\left(\frac{\partial F}{\partial y}\right)^2\right|}. \qquad (3.20c)$$

W szczególnym przypadku, gdy ruch odbywa się po torze prostoliniowym, wówczas promień krzywizny toru $\rho = \infty$, a zatem przyspieszenie normalne $a_n = 0$.

Prędkość i przyspieszenie punktu w ruchu po torze prostoliniowym



W *ruchu prostoliniowym* (ruch po torze prostoliniowym) zarówno wektor prędkości jak i przyspieszenia są styczne do toru.

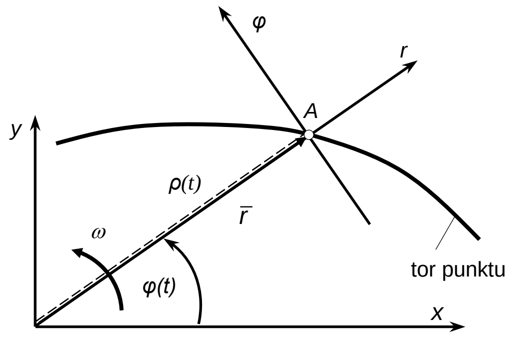
Opis ruchu we współrzędnych biegunowych

Współrzędne biegunowe stosujemy do opisu zagadnień płaskich.

Położenie. Do opisu położenia punktu *A* stosujemy współrzędne:

$$\rho = \rho(t)\,,$$

$$\varphi = \varphi(t)\,. \qquad (3.24)$$



Opis ruchu punktu
we współrzędnych biegunowych

Prędkość. Ponieważ wektor wodzący punktu *A* możemy zapisać

$$\overline{r} = \rho \overline{e}_r \, ,$$

gdzie $\overline{e}_r$ jest wersorem osi *r*, prędkość punktu *A* obliczymy

$$\overline{v} = \dot{\overline{r}} = \dot{\rho}\overline{e}_r + \rho\dot{\overline{e}}_r \, .$$

Pochodna wersora $\overline{e}_r$, który wiruje z prędkością kątową $\omega = \dot{\varphi}$, na podstawie (3.18b), jest równa

$$\dot{\overline{e}}_r = \dot{\varphi}\overline{e}_\varphi \, ,$$

gdzie $\overline{e}_\varphi$ jest wersorem osi φ.

Zatem zależność na prędkość punktu *A* we współrzędnych biegunowych przyjmuje postać

$$\overline{v} = v_r \overline{e}_r + v_\varphi \overline{e}_\varphi \, , \qquad (3.25)$$

gdzie:

$$v_r = \dot{\rho} \, ,$$

$$v_\varphi = \dot{\varphi}\rho \, . \qquad (3.25a)$$

Przyspieszenie. Przyspieszenie punktu A wyznaczymy różniczkując (3.25) względem czasu

$$\bar{a} = \dot{\bar{v}} = \frac{d}{dt}(\dot{\rho}\bar{e}_r + \dot{\varphi}\rho\bar{e}_\varphi) = \ddot{\rho}\bar{e}_r + \dot{\rho}\dot{\bar{e}}_r + \ddot{\varphi}\rho\bar{e}_\varphi + \dot{\varphi}\dot{\rho}\bar{e}_\varphi + \dot{\varphi}\rho\dot{\bar{e}}_\varphi \,.$$

Ponieważ pochodne wersorów są równe:

$$\dot{\bar{e}}_r = \dot{\varphi}\bar{e}_\varphi\,, \quad \dot{\bar{e}}_\varphi = -\dot{\varphi}\bar{e}_r\,,$$

wzór na przyspieszenie punktu A we współrzędnych biegunowych przyjmuje postać

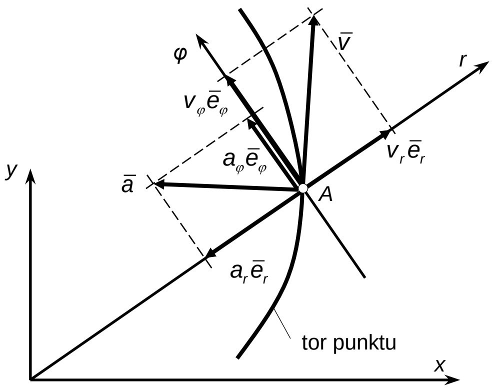
$$\bar{a} = a_r\bar{e}_r + a_\varphi\bar{e}_\varphi\,, \tag{3.26}$$

gdzie:

$$a_r = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\,,$$

$$a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}\,. \tag{3.26a}$$

Zarówno wektor prędkości jak i przyspieszenia przedstawiono na rys.



Prędkość przyspieszenie punktu we współrzędnych biegunowych

Opis ruchu we współrzędnych walcowych (cylindrycznych)

Współrzędne walcowe stosujemy do opisu zagadnień przestrzennych. Są one złożone z współrzędnych biegunowych dla płaszczyzny x,y, a ponadto dochodzi kierunek pionowy z.

Położenie. Do opisu położenia punktu *A* stosujemy współrzędne: $\rho = \rho(t)$, $\varphi = \varphi(t)$, $z = z(t)$

Związek współrzędnych kartezjańskich z walcowymi jest np.:

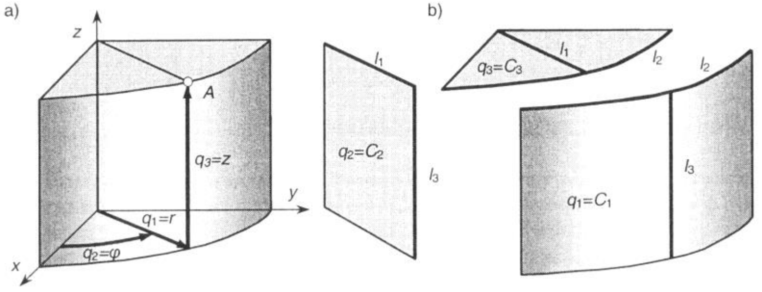
$$x = \rho \cdot \cos\varphi$$
$$y = \rho \cdot \sin\varphi$$
$$z = z$$

Prędkość. Prędkość punktu *A* we współrzędnych walcowych obliczamy

$$\bar{v} = v_r \bar{e}_r + v_\varphi \bar{e}_\varphi + v_z \bar{e}_z\,, \tag{3.25}$$

gdzie:

$$v_r = \dot{\rho}\,,$$
$$v_\varphi = \dot{\varphi}\rho\,,$$
$$v_z = \dot{z}\,.$$



Rys. 2.1. Współrzędne krzywoliniowe dla układu walcowego (a), ich powierzchnie $q_i = C_i$ i linie współrzędnych l_i (b)

Przyspieszenie. Przyspieszenie punktu *A* we współrzędnych walcowych obliczamy

$$\bar{a} = a_r \bar{e}_r + a_\varphi \bar{e}_\varphi + a_z \bar{e}_z\,, \tag{3.26b}$$

gdzie:

$$a_r = \ddot{\rho} - \rho\dot{\varphi}^2\,,$$
$$a_\varphi = \rho\ddot{\varphi} + 2\dot{\rho}\dot{\varphi}\,,$$
$$a_z = \ddot{z}$$

Opis ruchu za pomocą współrzędnych kulistych (sferycznych)

Położenie. Do opisu położenia punktu *A* stosujemy współrzędne: $r = r(t)$, $\psi = \psi(t)$, $\varphi = \varphi(t)$

Związek współrzędnych kartezjańskich z kulistymi jest np.:

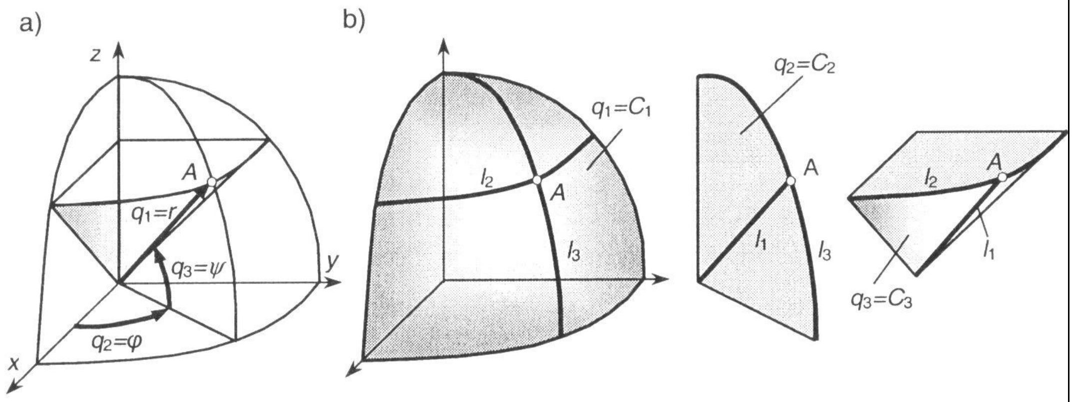
$$x = r \cdot \cos\psi \cdot \cos\varphi$$
$$y = r \cdot \cos\psi \cdot \sin\varphi$$
$$z = r \cdot \sin\psi$$

Prędkość. Prędkość punktu *A* we współrzędnych kulistych obliczamy

$$v_r = \dot{r}, \quad v_\varphi = r \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos\psi, \quad v_\psi = r \cdot \dot{\psi}$$

Przyspieszenie. Przyspieszenie punktu *A* we współrzędnych kulistych obliczamy

$$a_r = \ddot{r} - r \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \cos^2\psi - r \cdot \dot{\psi}^2,$$
$$a_\varphi = 2\dot{r} \cdot \dot{\varphi} \cdot \cos\psi + r \cdot \ddot{\varphi} \cdot \cos\varphi - 2r \cdot \dot{\varphi} \cdot \dot{\psi} \cdot \sin\psi,$$
$$a_\psi = 2\dot{r} \cdot \dot{\psi} + r \cdot \ddot{\psi} + 2r \cdot \dot{\varphi}^2 \cdot \sin\psi \cdot \cos\psi$$



Rys. 2.2. Współrzędne krzywoliniowe dla układu kulistego (a), i ich powierzchnie $q_i = C_i$ oraz linie współrzędnych l_i (b)

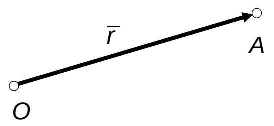
Kinematyka punktu we współrzędnych wektorowych

Wektorem wodzącym jest wektor o początku w punkcie odniesienia *O*, a końcu w miejscu, gdzie w danej chwili znajduje się rozważany punkt. Rozważmy teraz punkt *A*, którego położenie opisuje wektor wodzący o składowych:

$$r_x = r_x(t)\,,\quad r_y = r_y(t)\,,\quad r_z = r_z(t)\,, \qquad (3.1)$$

gdzie *t* jest czasem.

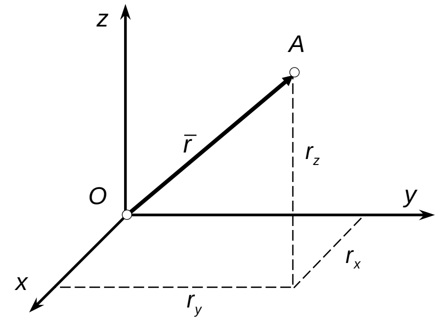
Opis ruchu punktu za pomocą wektora wodzącego



Równania (3.1) nazywamy równaniami ruchu (RR). Są one jednocześnie *parametrycznymi równaniami toru* (PRT). Wystarczy z równań ruchu wyrugować parametr, którym jest czas *t*, aby otrzymać równanie toru.

Położenie. Jeżeli początek wektora wodzącego $\overline{r}$, opisującego położenie punktu *A*, przyjmiemy w początku układu odniesienia, wówczas jego współrzędne są równe:

Położenie punktu we współrzędnych wektorowych

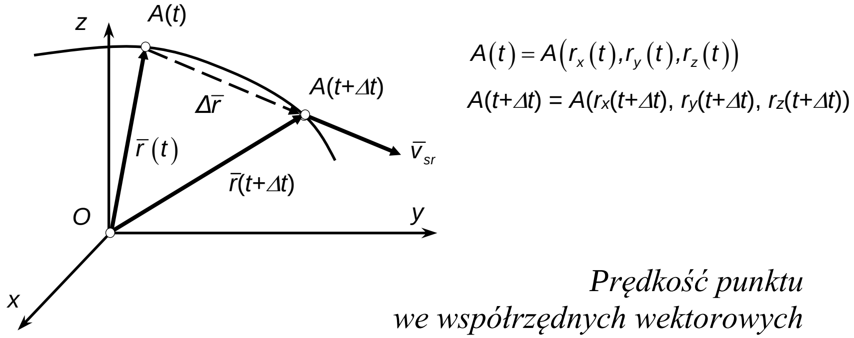


$$r_x = r_x(t)\,,$$
$$r_y = r_y(t)\,, \qquad (3.2)$$
$$r_z = r_z(t)\,,$$

a wektor wodzący możemy zapisać

$$\overline{r} = r_x(t)\overline{i} + r_y(t)\overline{j} + r_z(t)\overline{k}\ . \qquad (3.3)$$

Prędkość. Rozważmy teraz dwa położenia punktu *A*, jedno w chwili *t* i drugie w chwili $t+\Delta t$.



Prędkość punktu we współrzędnych wektorowych

Prędkość średnią punktu *A* wyznaczamy z zależności

$$\overline{v}_{śr} = \frac{\Delta\overline{r}}{\Delta t}. \qquad (3.4)$$

Wektor $\overline{v}_{śr}$ ma kierunek i zwrot zgodny z wektorem $\Delta\overline{r}$, a jego wartość zależy od przyjętego przedziału czasu Δt . Aby wyznaczyć prędkość chwilową (ścisłą), dla danej chwili czasu *t*, należy obliczyć granicę z (3.4), przy $\Delta t \to 0$

$$\overline{v} = \lim_{\Delta t\to 0}\frac{\Delta\overline{r}}{\Delta t} = \frac{d\overline{r}}{dt} = \dot{\overline{r}}\ . \qquad (3.5)$$

Wektor prędkości $\overline{v}$ jest <u>zawsze styczny do toru</u>, w punkcie, w którym znajduje się rozważany punkt.

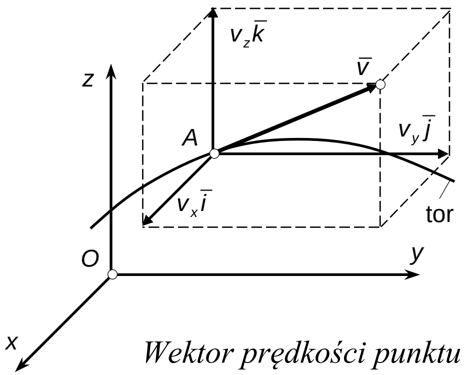
Podstawiając (3.3) do (3.5) otrzymujemy związek pomiędzy położeniem a prędkością punktu

$$\overline{v} = \dot{\overline{r}} = v_x\overline{i} + v_y\overline{j} + v_z\overline{k}\ , \qquad (3.5)$$

gdzie składowe wektora $\overline{v}$ są równe:

$$v_x = \dot{r}_x\,, \quad v_y = \dot{r}_y\,, \quad v_z = \dot{r}_z\,. \qquad (3.7)$$

Składowe wektora $\overline{v}$ są prędkościami punktu w kierunku osi *x*, *y*, *z*.



Wektor prędkości punktu

Wartość wektora $\overline{v}$ liczymy ze wzoru $v = \sqrt{v_x{}^2 + v_y{}^2 + v_z{}^2}\,.$ (3.8)

Przyspieszenie. Podobnie jak prędkość średnią, możemy obliczyć średnie przyspieszenie punktu *A*, które jest zmianą wektora prędkości w jednostce czasu. Obliczamy je z zależności

$$\overline{a}_{śr} = \frac{\Delta\overline{v}}{\Delta t} = \frac{\overline{v}(t+\Delta t)-\overline{v}(t)}{\Delta t}\,. \tag{3.9}$$

Zarówno wartość jak i pośrednio kierunek wektora $\overline{a}_{śr}$ zależy od przyjętego przedziału czasu Δt.

Aby obliczyć przyspieszenie chwilowe (ścisłe) dla czasu *t* przechodzimy z przyspieszeniem średnim (3.9) do granicy, przy $\Delta t \to 0$

$$\overline{a} = \lim_{\Delta t\to 0} = \frac{\Delta\overline{v}}{\Delta t} = \frac{d\overline{v}}{dt} = \dot{\overline{v}} = \ddot{\overline{r}}\,. \tag{3.10}$$

Podstawiając (3.3) do (3.10) otrzymujemy

$$\overline{a} = \dot{\overline{v}} = a_x\overline{i} + a_y\overline{j} + a_z\overline{k}\,, \tag{3.11}$$

gdzie składowe wektora $\overline{a}$ liczymy ze wzorów

$$a_x = \dot{v}_x = \ddot{r}_x\,,\quad a_y = \dot{v}_y = \ddot{r}_y\,,\quad a_z = \dot{v}_z = \ddot{r}_z\,, \tag{3.12}$$

natomiast wartość wektora przyspieszenia

$$a = \sqrt{a_x^{\,2} + a_y^{\,2} + a_z^{\,2}}\,. \tag{3.13}$$

Należy podkreślić, że wektor przyspieszenia <u>na ogół nie jest styczny do toru</u>.