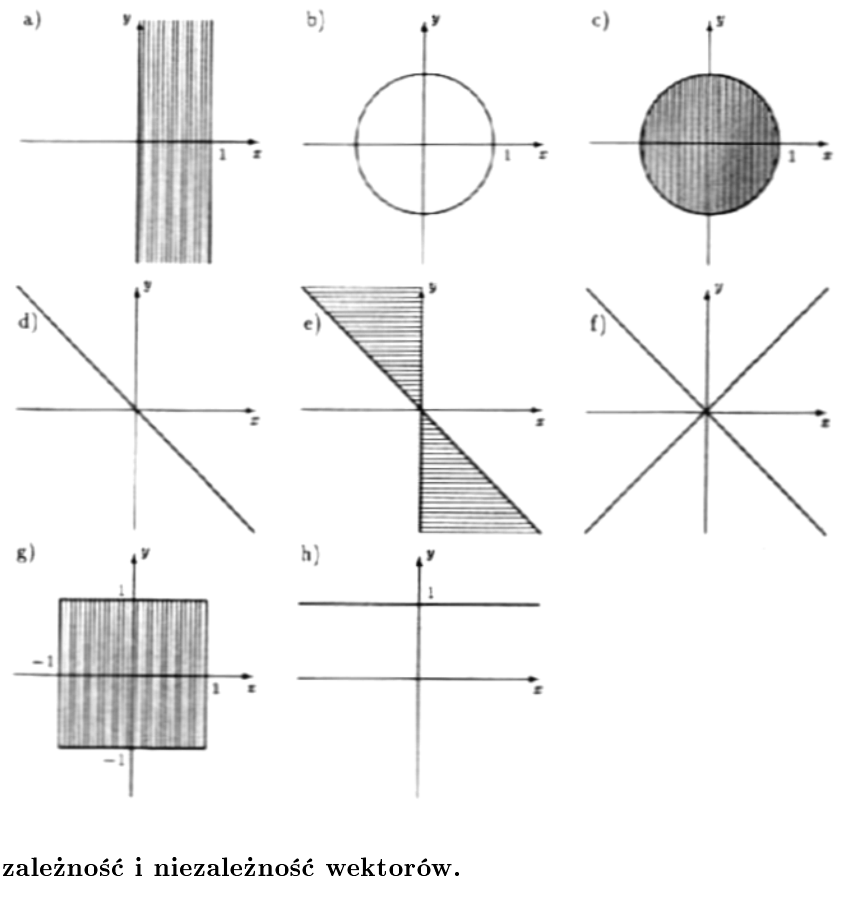
Lista zadań

I. **Przestrzenie i podprzestrzenie liniowe.**

1. Uzasadnij z definicji, że zbiór $\mathbb{R}_2[x]$ wszystkich wielomianów rzeczywistych stopnia nie większego niż 2 z dodawaniem wielomianów i mnożeniem ich przez liczby rzeczywiste jest przestrzenią liniową.
2. Uzasadnij, że podane zbiory $\mathbb{W}$ są podprzestrzeniami liniowymi odpowiadających im przestrzeni liniowych $\mathbb{V}$
   a) $\mathbb{W} = \left\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x = 3y\right\}, \mathbb{V} = \mathbb{R}^2$
   b) $\mathbb{W} = \left\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y = y + z = 0\right\}, \mathbb{V} = \mathbb{R}^3$
   c) $\mathbb{W} = \{\mathbf{p} \in \mathbb{R}_3[x] : \mathbf{p}(x) = \mathbf{p}(-x) \text{ dla każdego } x \in \mathbb{R}\}, \mathbb{V} = \mathbb{R}[x]$
   d) $\mathbb{W} = \{\mathbf{f} \in \mathbb{C}([0, 2]) : \mathbf{f}'(1) = 0\}, \mathbb{V} = \mathbb{C}([0, 2])$
   e) $\mathbb{W} = \left\{\mathbf{A} \in \mathbb{M}_{3x3} : \mathbf{A}^\top = 2\mathbf{A}\right\}, \mathbb{V} = \mathbb{M}_{3x3}$
3. Który z narysowanych zbiorów jest podprzestrzenią liniową płaszczyzny?



II. **Liniowa zależność i niezależność wektorów.**

1. Wektory $(1, 2, 3)$ i $(1, 3, 5)$ przedstawić na wszystkie możliwe sposoby jako kombinacje liniowe wektorów:
   a) $(2, 0, 6)$,$(0, 1, 0)$,$(1, -1, 3)$
   b) $(2, 0, 6)$,$(0, 1, 0)$,$(1, 1, 1)$
2. Wektory $(3, -2, 5)$ i $(0, 1, 1)$ przedstawić na wszystkie możliwe sposoby jako kombinacje liniowe wektorów:
   a) $(3, -2, 5)$,$(1, 1, 1)$
   b) $(3, -2, 5)$,$(1, 1, 1)$,$(0, -5, 2)$
   c) $(1, -2, 3)$,$(1, 0, 1)$,$(0, 2, -1)$
   d) $(1, -2, 3)$,$(1, 0, 1)$,$(-1, -2, 1)$

3. W $\mathbb{R}^3$ zbadać liniową niezależność wektorów:
   a) $(1,2,3)$, $(-2,-4,-6)$
   b) $(1,0,1)$, $(-1,2,1)$, $(0,2,2)$
   c) $(1,-1,0)$, $(2,1,1)$, $(3,0,2)$
   d) $(1,-2,-5)$, $(-3,4,5)$, $(-2,2,2)$
   e) $(1,-2,3)$, $(1,0,1)$, $(0,2,-1)$
   f) $(1,-2,3)$, $(1,0,1)$, $(-1,-2,1)$
4. W przestrzeni $\mathbb{R}^4$ zbadać liniową niezależność wektorów $u=(1,0,1,1)$, $v=(2,2,2,0)$, $w=(-1,2,3,1)$ i przedstawić wektor $x=(-3,4,9,5)$ jako kombinację wektorów u, v i w. Czy dowolny wektor w przestrzeni $\mathbb{R}^4$ można przedstawić w postaci kombinacji liniowej wektorów u, v i w?

III. **Baza i wymiar przestrzeni liniowej.**

1. Sprawdzić z definicji, czy podane zbiory wektorów są bazami wskazanych przestrzeni liniowych:
   a) B$=\{(1,0,1),(1,2,2)\}$, $\mathbb{R}^3$
   b) B$=\{(1,0,1),(1,2,2),(0,1,1)\}$, $\mathbb{R}^3$
   c) B$=\{(1,0,1),(1,2,2),(2,2,3)\}$, $\mathbb{R}^3$
   d) B$=\{(1,0,1),(1,2,2),(0,1,1),(2,3,4)\}$, $\mathbb{R}^3$
   e) B$=\{x^2+1, x^2+2x+2, x+1\}$, $\mathbb{R}_2[x]$
   f) B$=\{x^2+1, x^2+2x+2, 2x^2+2x+3\}$, $\mathbb{R}_2[x]$
   g) B$=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&1\end{bmatrix}\right\}$, $\mathbb{M}_{2x2}$
2. Wykazać, że wektory $u=(1,0,-1)$, $v=(1,1,0)$ i $w=(0,1,2)$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^3$. Wyznaczyć podprzestrzeń przestrzeni $\mathbb{R}^3$ generowaną przez wektory u i v. Zapisać $\operatorname{lin}\{u,v\}$ w postaci $\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : ax+by+cz=0\}$ przy odpowiednio dobranych $a,b,c\in\mathbb{R}$
3. Wskazać bazy i określić wymiary podanych przestrzeni liniowych:
   a) $\mathbb{V}=\{(2x, x+y, 3x-y, x-2y) : x,y\in\mathbb{R}\}$
   b) $\mathbb{V}=\{(r-2s-t, 2r+s-3t, 3r+4s-5t) : r,s,t\in\mathbb{R}\}$;
   c) $\mathbb{V}=\{(x,y,z,t)\in\mathbb{R}^4 : x+y=z-y\}$;
   d) $\mathbb{V}=\{\mathbf{p}\in\mathbb{R}_4[x] : \mathbf{p}(1)+\mathbf{p}(-1)=\mathbf{p}'(0)\}$;
   e) $\mathbb{V}=\{\mathbf{A}\in\mathbb{M}_{3x3} : \mathbf{A}+\mathbf{A}^T=\mathbf{0}\}$;
   f) $\mathbb{V}=\operatorname{lin}\{1,\sin^2(x),\cos(2x),\cos^2(x)\}$, przy czym $\mathbb{V}\subset\mathbb{C}(\mathbb{R})$.
4. W $\mathbb{R}^n$ przedstawić wektor $(x_1,x_2,\ldots,x_n)$ jako kombinację liniową wektorów z bazy kanonicznej.
5. Znaleźć współrzędne podanego wektora we wskazanej bazie odpowiedniej przestrzeni liniowej:
   a) $\vec{v}=(-2,5,6)\in\mathbb{R}^3$, $B=\{(1,1,0),(2,1,0),(3,3,1)\}$;
   b) $\vec{v}=(1,0,1,0)\in\mathbb{R}^4$, $B=\{(1,2,3,4),(0,1,2,3),(0,0,1,2),(0,0,0,1)\}$;
   c) $\mathbf{p}=2x^2+3x\in\mathbb{R}_2[x]$, $B=\{2+x, 3-x, x^2+4\}$;
   d) $\mathbb{A}=\begin{bmatrix}1&1\\3&0\end{bmatrix}\in\mathbb{M}_{2x2}$, $B=\left\{\begin{bmatrix}1&-1\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\0&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}-1&1\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&0\\1&0\end{bmatrix}\right\}$.

IV. **Macierze przejścia z bazy do bazy.**

1. Niech wektory $\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n$ i $\vec{x}$ przestrzeni liniowej nad ciałem $\mathbb{R}$ mają następujące współrzędne w pewnej bazie:
   a) $\vec{e}_1=(1,1,1), \vec{e}_2=(1,1,2), \vec{e}_3=(1,2,3), \vec{x}=(6,9,14)$
   b) $\vec{e}_1=(2,1,-3), \vec{e}_2=(3,2,-5), \vec{e}_3=(1,-1,1), \vec{x}=(6,2,-7)$
   c) $\vec{e}_1=(1,2,-1,-2), \vec{e}_2=(2,3,0,-1), \vec{e}_3=(1,2,1,4), \vec{e}_4=(1,3,-1,0), \vec{x}=(7,14,-1,2)$

   Wykazać, że zbiór $E=\{\vec{e}_1,\ldots,\vec{e}_n\}$ jest także bazą przestrzeni i wyznaczyć współrzędne wektora $\vec{x}$ w tej bazie.
2. Napisać macierz przejścia z bazy B do bazy B′ odpowiednich przestrzeni liniowych.
   a) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^2$, $B=\{(3,1),(2,1)\}$, $B'=\{(1,-1),(2,3)\}$;

b) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3,\ B=\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\},\ B'=\{(3,3,4),(-1,2,2),(1,1,1)\}$;

c) $\mathbb{V}=\mathbb{R}_2[x],\ B=\left\{x+1,x+2,x^2+1\right\},\ B'=\left\{x+3,x+4,x^2\right\}$;

d) $\mathbb{V}=\mathbb{R}_3[x],\ B=\left\{1,x,x^2,x^3\right\},\ B'=\left\{2x^2-3,x^3+x,4-x,1+x+x^2\right\}$;

e) $\mathbb{V}=\mathbb{M}_{2x2},\ B=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&0\\0&1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\1&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\0&0\end{bmatrix}\right\}$,

$B'=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&2\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&2\\3&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&2\\3&4\end{bmatrix}\right\}$;

3. Wyznaczyć współrzędne wskazanych wektorów w podanych bazach odpowiednich przestrzeni liniowych wykorzystując macierze przejścia z baz standardowych do baz danych:

a) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^2,\vec{v}=(2,-1),\mathbb{B}'=\{(5,3),(-2,7)\}$

b) $\mathbb{V}=\mathbb{R}^3,\vec{v}=(0,1,0),\mathbb{B}'=\{(1,1,0),(2,1,3),(0,2,1)\}$

c) $\mathbb{V}=\mathbb{R}_2[x],p=x^2+x+2,\mathbb{B}'=\{x^2-1,x^2+1,2-2x\}$

d) $\mathbb{V}=\mathbb{M}_{2x2},A=\begin{bmatrix}0&0\\3&0\end{bmatrix},\mathbb{B}'=\left\{\begin{bmatrix}1&0\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\0&0\end{bmatrix},\begin{bmatrix}1&1\\1&-1\end{bmatrix},\begin{bmatrix}0&1\\2&1\end{bmatrix}\right\}$

4. Wyznaczyć współrzędne wektora $\vec{v}$ w bazie

$$\left\{\vec{b}_1,2\vec{b}_1+\vec{b}_2,\vec{b}_1+\vec{b}_3,2\vec{b}_1+\vec{b}_4\right\}$$

jeżeli w bazie $\left\{\vec{b}_1,\vec{b}_1,\vec{b}_3,\vec{b}_4\right\}$ ma on współrzędne $[1,2,3,4]$. Wykorzystać macierz przejścia z bazy do bazy.

5. Sprawdzić, że każdy z dwóch podanych układów S i S' wektorów w przestrzeni $\mathbb{R}^n$ jest bazą. Następnie wyznaczyć macierz przejścia bazy S do bazy S':

a) $S=((1,2,1),(2,3,3),(3,8,2))$
$S'=((3,5,8),(5,14,13),(1,9,2))$

b) $S=((1,1,1,1),(1,2,1,1),(1,1,2,1),(1,3,2,3))$
$S'=((1,0,3,3),(-2,-3,-5,-4),(2,2,5,4),(-2,-3,-4,-4))$

V. **Przekształcenia liniowe.**

1. Udowodnij, że przekształcenia przestrzeni liniowych są liniowe:

a) $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3, L(x,y)=(x+2y,x-y,x)$,

b) $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, gdzie L jest symetrią względem osi Oy,

c) $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, gdzie L jest rzutem prostokątnym na płaszczyznę xOz,

d) $L:\mathbb{R}[x]\to\mathbb{R}[x],(L\mathbf{p}(x)=x\mathbf{p}'(x)+\mathbf{p}(1)$ dla $\mathbf{p}\in\mathbb{R}[x]$ oraz $x\in\mathbb{R}$,

e) $L:\mathbb{C}([0,1])\to\mathbb{C}([0,1]),(L\mathbf{f})(x)=2\mathbf{f}\left(\frac{x}{2}\right)$ dla $\mathbf{f}\in\mathbb{C}([0,1])$ oraz $x\in[0,1]$,

f) $L:\mathbb{M}_{2x2}\to\mathbb{M}_{2x2},L(\mathbf{A})=3\mathbf{A}-\mathbf{A}^T$.

2. Udowodnij, że przekształcenia przestrzeni liniowych nie są liniowe:

a) $L:\mathbb{R}\to\mathbb{R},L(x)=|x|$,

b) $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3,L(x,y,z)=(xy,x,z)$,

c) $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^3,L(x,y)=(2x-y,x+1,y-1)$,

d) $L:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$, gdzie L jest obrotem o kąt $\frac{\pi}{2}$ w kierunku przeciwnym do ruchu wskazówek zegara wokół punktu $(1,2)$,

e) $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^3$, gdzie L jest rzutem prostokątnym na prostą $x=1,z=0$,

f) $L:\mathbb{R}_2[x]\to\mathbb{R}[x],(L\mathbf{p})(x)=\int\limits_0^x\mathbf{p}(t)\mathbf{p}'(t)dt$ dla $\mathbf{p}\in\mathbb{R}_2[x]$ oraz $x\in\mathbb{R}$,

g) $L:\mathbb{C}(\mathbb{R})\to\mathbb{C}(\mathbb{R}),(L\mathbf{f})(x)=\mathbf{f}^2(x)$ dla $\mathbf{f}\in\mathbb{C}(\mathbb{R})$ oraz $x\in\mathbb{R}$

h) $L:\mathbb{M}_{2x2}\to\mathbb{R},L(\mathbf{A})=\det(\mathbf{A})$.

3. Wyznaczyć przekształcenie liniowe $L:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$ takie, żeby:

a) $L((1,0,1))=(0,4),\quad L((1,-1,1))=(-1,2),\quad L((0,1,1))=(0,5)$,

b) $L((1,0,1))=(4,-1),\quad L((0,1,1))=(-1,0),\quad L((1,1,-1))=(0,2)$,

c) $L((1,2,0))=(2,-1),\quad L((2,0,-1))=(5,1),\quad L((-1,2,1))=(-3,-2)$.

VI. **Jądro i obraz przekształcenia**

1. Wyznaczyć jądra i obrazy podanych przekształceń liniowych posługując się ich interpretacją geometryczną. Porównać uzyskane odpowiedzi z wynikami obliczeń algebraicznych:
   a) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, L jest rzutem prostokątnym na oś Ox ,
   b) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$, L jest obrotem wokół początku układu o kąt $\frac{\pi}{4}$,
   c) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, L jest symetrią względem osi Oy,
   d) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, L jest rzutem prostokątnym na płaszczyznę Oyz.
2. Wyznaczyć jądra, obrazy oraz ich bazy podanych przekształceń liniowych:
   a) $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2, L(x, y) = (2x - y, 3y - 6x)$,
   b) $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4, L(x, y, z) = (2x - y - z, x + y + 4z, 2x + y + 5z, -x - z)$,
   c) $L : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3, L(x, y, z, t) = (x + 2z + t, -2x + y - 3z - 5t, x - y + z + 4t)$,
   d) $L : \mathbb{R}_2[x] \to \mathbb{R}_3[x], (L\mathbf{p})(x) = (x^2 + 2x)\mathbf{p}'(-x)$ dla $x \in \mathbb{R}$,
   e) $L : \mathbb{M}_{2x2} \to \mathbb{M}_{2x2}, L(\mathbf{A}) = \mathbf{A} - \mathbf{A}^T$.

VII. **Macierz odwrotna.**

1. Wykorzystując algorytm bezwyznacznikowy oblicz macierz odwrotną macierzy:
   a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$,
   b) $A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}$,
   c) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \end{bmatrix}$.
2. Wykorzystując operację odwracania macierzy rozwiąż:
   a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 4 & -6 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$,
   b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$,
   c) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \\ 1 & 2 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 4 \end{bmatrix}$.

VIII. **Wartości i wektory własne macierzy.**

1. Znaleźć wartości i wektory własne podanych macierzy (rzeczywistych):
   a) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$,
   b) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$,
   c) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$,
   d) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.
2. Znaleźć wartości i wektory własne podanych macierzy (zespolonych):
   a) $A = \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ 9 & 1 \end{bmatrix}$,
   b) $A = \begin{bmatrix} 2 + \mathbf{i} & 1 \\ 2 & 2 - \mathbf{i} \end{bmatrix}$.

IX. **Diagonalizacja macierzy.**

1. Zdiagonalizuj macierz wykorzystując wartości i wektory własne:

   a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$,

   b) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$,

   c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

   d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

X. Rodzaje macierzy

1. Pokaż, że dla dowolnych dwóch macierzy cyklicznych A i B wymiaru 2×2 zachodzi równość $AB = BA$.
2. Korzystając z rozkładu dowolnych macierzy cyklicznych A i B wymiaru 3×3 na macierze permutacji pokaż, że zachodzi równość $AB = BA$.
3. Sprawdź, które z podanych macierzy są normalne

   a) $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -\mathbf{i} & \mathbf{i} \end{bmatrix}$,

   b) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2+\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 1 \end{bmatrix}$,

   c) $A = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & 3-5\mathbf{i} \end{bmatrix}$,

   d) $A = \begin{bmatrix} \mathbf{i} & 0 \\ 0 & 3-5\mathbf{i} \end{bmatrix}$,

   e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2-\mathbf{i} \\ 2+\mathbf{i} & 2 \end{bmatrix}$,

   f) $A = \frac{1}{\sqrt{2}} \begin{bmatrix} 1 & 1+\mathbf{i} \\ 1-\mathbf{i} & -1 \end{bmatrix}$

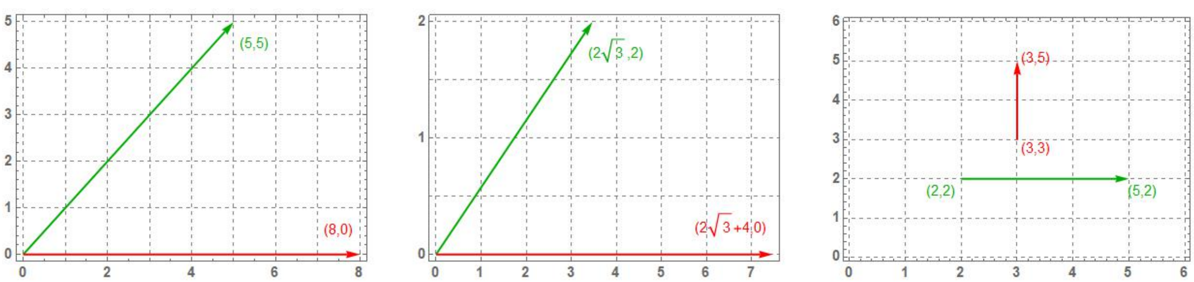
   g) $A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$,

   h) $A = \begin{bmatrix} 1 & -\mathbf{i} & -1+\mathbf{i} \\ \mathbf{i} & 1 & 1+\mathbf{i} \\ 1+\mathbf{i} & -1+\mathbf{i} & 0 \end{bmatrix}$,

   i) $A = \begin{bmatrix} 2 & 2+\mathbf{i} & 4 \\ 2-\mathbf{i} & 3 & \mathbf{i} \\ 4 & -\mathbf{i} & 1 \end{bmatrix}$.
4. Sprawdź, które z macierzy z zadania 3 są hermitowskie i/lub unitarne, a następnie oblicz wartości własne macierzy.

XI. Iloczyn skalarny.

1. Oblicz metodą analityczną i geometryczną standardowy iloczyn skalarny dwóch wektorów w $\mathbb{R}^2$:



2. Sprawdź, czy podane funkcje są iloczynami skalarnymi we wskazanych przestrzeniach liniowych:

   a) $(\vec{u},\vec{v}) = 3x_1y_1 - 2x_1y_2 - 2x_2y_1 + 4x_2y_2$, gdzie $\vec{u} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$ i $\vec{v} = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}^2$,
   b) $(\vec{u},\vec{v}) = 3x_1x_2 - x_1y_2 - x_2y_1 + 2y_1y_2$, gdzie $\vec{u} = (x_1, y_1) \in \mathbb{R}^2$ i $\vec{v} = (x_2, y_2) \in \mathbb{R}^2$,
   c) $(\vec{u},\vec{v}) = x_1x_2 + 2y_1y_2 + 3z_1z_2$, gdzie $\vec{u} = (x_1, y_1, z_1) \in \mathbb{R}^3$ i $\vec{v} = (x_2, y_2, z_2) \in \mathbb{R}^3$.

XII. **Norma i ortogonalność wektorów.**

1. Oblicz normę wektora we wskazanych przestrzeniach:

   a) $\vec{v} = (-3, 4) \in \mathbb{R}^2$,
   b) $\vec{v} = (-1, 2, 5, -6, 0) \in \mathbb{R}^5$,
   c) $\vec{v} = (1, -2, 3, -4) \in \mathbb{R}^4$.

2. Zbadaj ortogonalność wektorów we wskazanych przestrzeniach:

   a) $\vec{u} = (-3, 4) \in \mathbb{R}^2$ i $\vec{v} = (-3, -4) \in \mathbb{R}^2$,
   b) $\vec{u} = (1, 2, 1) \in \mathbb{R}^3$ i $\vec{v} = (-2, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$,
   c) $\vec{u} = (1, 2, 1, -2) \in \mathbb{R}^4$ i $\vec{v} = (-2, 1, 0, 1) \in \mathbb{R}^4$,
   d) $\vec{u} = (1, -1, 2, -2) \in \mathbb{R}^4$ i $\vec{v} = (3, 3, 1, 1) \in \mathbb{R}^4$.

3. Oblicz kąt pomiędzy wektorami we wskazanych przestrzeniach:

   a) $\vec{u} = (1, 2, 1, -2) \in \mathbb{R}^4$ i $\vec{v} = (-2, 1, 0, 1) \in \mathbb{R}^4$,
   b) $\vec{u} = (0, 1, -1, 2) \in \mathbb{R}^4$ i $\vec{v} = (3, -1, 2, 0) \in \mathbb{R}^4$.

XIII. **Bazy ortogonalne i ortonormalne.**

1. Uzasadnij, że podane układy wektorów są bazami ortogonalnymi wskazanych przestrzeni liniowych:

   a) $\left\{\left(\frac{3}{5}, \frac{-4}{5}\right), \left(\frac{4}{5}, \frac{3}{5}\right)\right\} \in \mathbb{R}^2$,
   b) $\left\{\left(\frac{5}{13}, \frac{12}{13}\right), \left(\frac{12}{13}, \frac{-5}{13}\right)\right\} \in \mathbb{R}^2$,
   c) $\{(1, 2, 1), (2, 1, -4), (3, -2, 1)\} \in \mathbb{R}^3$,
   d) $\left\{\left(\frac{2}{3}, \frac{2}{3}, \frac{-1}{3}\right), \left(\frac{2}{3}, \frac{-1}{3}, \frac{2}{3}\right), \left(\frac{-1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{2}{3}\right)\right\} \in \mathbb{R}^3$,
   e) $\left\{\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, -\frac{1}{2}\right), \left(\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right), \left(-\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\} \in \mathbb{R}^4$.

2. Sprawdzić, czy podane układy wektorów są bazami ortogonalnymi odpowiednich przestrzeni liniowych a następnie znaleźć współrzędne wektorów w tych bazach:

   a) $\vec{v}_1 = (2, -4)$, $\vec{v}_2 = (6, 3)$, $\vec{u} = (1, 2) \in \mathbb{R}^2$,
   b) $\vec{v}_1 = \left(\sqrt{\frac{1}{2}}, 0, -\sqrt{\frac{1}{2}}\right)$, $\vec{v}_2 = \left(\sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}, \sqrt{\frac{1}{3}}\right)$, $\vec{v}_3 = \left(\sqrt{\frac{1}{6}}, -2\sqrt{\frac{1}{6}}, \sqrt{\frac{1}{6}}\right)$, $\vec{u} = (0, 1, 0) \in \mathbb{R}^3$.

3. Sprawdzić, czy ortogonalne bazy z przykładów z zadania XIII.1 i XIII.2 są ortonormalne.

XIV. **Ortogonalizacja Grama-Schmidta.**

1. Wykorzystując metodę Grama-Schmidta zortogonalizować podane wektory ze wskazanych przestrzeni liniowych (ze standardowo zdefiniowanymi iloczynami skalarnymi).

   a) $\vec{v}_1 = (1, 1), \vec{v}_2 = (1, 0)$ w $\mathbb{R}^2$,
   b) $\vec{v}_1 = (1, 1, 0), \vec{v}_2 = (1, 1, 1)$ w $\mathbb{R}^3$,
   c) $\vec{v}_1 = (1, 1, 0), \vec{v}_2 = (1, 0, 1), \vec{v}_3 = (0, 1, 1)$ w $\mathbb{R}^3$,
   d) $\vec{v}_1 = (1, -2, 0), \vec{v}_2 = (5, 5, 1), \vec{v}_3 = (5, 4, 4)$ w $\mathbb{R}^3$,
   e) $\vec{v}_1 = (1, 1, 3), \vec{v}_2 = (1, 1, 4), \vec{v}_3 = (1, 2, 0)$ w $\mathbb{R}^3$,
   f) $\vec{v}_1 = (\mathbf{i}, 0, 0), \vec{v}_2 = (1, \mathbf{i}, 0), \vec{v}_3 = (1, 1, \mathbf{i})$ w $\mathbb{C}^3$,
   g) $\vec{v}_1 = (2, \mathbf{i}, 0), \vec{v}_2 = (1, 0, 1), \vec{v}_3 = (1, -1, 1 - \mathbf{i})$ w $\mathbb{C}^3$,
   h) $\vec{v}_1 = (1, 1, 1, 1), \vec{v}_2 = (2, 0, 1, 1)$ w $\mathbb{R}^4$,
   i) $\vec{v}_1 = (1, 1, 1, 0), \vec{v}_2 = (0, 1, -1, 1)$ w $\mathbb{R}^4$,
   j) $\vec{v}_1 = (1, 2, 0, 1), \vec{v}_2 = (4, 1, 1, 2)$ w $\mathbb{R}^4$,
   k) $\vec{v}_1 = (1, 0, 1, 0), \vec{v}_2 = (0, 2, 2, 0), \vec{v}_3 = (0, 1, 0, 1)$ w $\mathbb{R}^4$,
   l) $\vec{v}_1 = (-1, 1, 0, 0), \vec{v}_2 = (0, 2, 1, 1), \vec{v}_3 = (1, -3, 1, -1)$ w $\mathbb{R}^4$.

2. Podane wektory uzupełnij do baz ortogonalnych odpowiednich przestrzeni liniowych:

   a) $\vec{v}_1 = (1, 1, 4)$ w $\mathbb{R}^3$,

   b) $\vec{v}_1 = (1, 4, -2), \vec{v}_2 = (2, -1, -1)$ w $\mathbb{R}^3$,

   c) $\vec{v}_1 = (1, 1, 3, 1)$ w $\mathbb{R}^4$,

   d) $\vec{v}_1 = (1, 1, 1, 0), \vec{v}_2 = (0, 1, -1, 1)$ w $\mathbb{R}^4$.

XV. **Rozkład Jordana.**

1. Wykorzystując rozkład Jordana doprowadź macierze do postaci klatkowej.

   a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -10 \\ 0 & 7 & -10 \\ 0 & 5 & -8 \end{bmatrix}$,

   b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$,

   c) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}$,

   d) $\begin{bmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$,

   e) $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{bmatrix}$,

   f) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$,

   g) $\begin{bmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{bmatrix}$,

   h) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$,

   i) $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.

XVI. **Iloczyn Kroneckera.**

1. Oblicz.

   a) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 6 & -7 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 3 \end{bmatrix}$,

   b) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 6 & -7 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 \\ 6 \end{bmatrix}$,

   c) $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 6 & -7 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 6 & -7 \end{bmatrix}$,

   d) $\begin{bmatrix} 1 \\ -7 \end{bmatrix} \otimes \begin{bmatrix} -3 \\ 6 \\ 2 \end{bmatrix}$.