Algebra 2

Teoria do ćwiczeń

Michał Słowiński

Instytut Fizyki
Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej UMK

semestr letni 2022/2023

PRZESTRZENIE
I PODPRZESTRZENIE LINIOWE

Przestrzeń liniowa

Niepusty zbiór $\mathbb{V}$ jest przestrzenią liniową, jeżeli:

- $\forall_{\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{V}} \quad \vec{u}+\vec{v}\in\mathbb{V}$
- $\forall_{\alpha\in\mathbb{R}}\ \forall_{\vec{u}\in\mathbb{V}} \quad \alpha\vec{u}\in\mathbb{V}$

I jeżeli spełnia warunki:

- $\forall_{\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{V}} \quad \vec{u}+\vec{v}=\vec{v}+\vec{u}$
- $\forall_{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathbb{V}} \quad (\vec{u}+\vec{v})+\vec{w}=\vec{u}+(\vec{v}+\vec{w})$
- $\exists_{\vec{0}\in\mathbb{V}}\ \forall_{\vec{u}\in\mathbb{V}} \quad \vec{u}+\vec{0}=\vec{u}$
- $\forall_{\vec{u}\in\mathbb{V}}\ \exists_{\vec{v}\in\mathbb{V}} \quad \vec{u}+\vec{v}=\vec{0} \quad \Rightarrow \vec{u}=-\vec{v}$
- $\forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}}\ \forall_{\vec{u}\in\mathbb{V}} \quad 1\vec{u}=\vec{u} \quad \wedge \quad \alpha(\beta\vec{u})=(\alpha\beta)\vec{u}$
- $\forall_{\alpha,\beta\in\mathbb{R}}\ \forall_{\vec{u},\vec{v}\in\mathbb{V}} \quad (\alpha+\beta)\vec{u}=\alpha\vec{u}+\beta\vec{u}$

$$\wedge$$

$$\alpha(\vec{u}+\vec{v})=\alpha\vec{u}+\alpha\vec{v}$$

Podprzestrzeń liniowa

Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową.
Niepusty zbiór $\mathbb{W} \subset \mathbb{V}$ nazywany jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{V}$, jeżeli spełnione są warunki:

- $\forall_{\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \mathbb{W}} \quad \vec{w}_1 + \vec{w}_2 \in \mathbb{W}$
- $\forall_{\alpha \in \mathbb{R}} \forall_{\vec{w} \in \mathbb{W}} \quad \alpha \vec{w} \in \mathbb{W}$

Co można połączyć w jeden warunek:

- $\forall_{\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}} \forall_{\vec{w}_1, \vec{w}_2 \in \mathbb{W}} \quad \alpha_1 \vec{w}_1 + \alpha_2 \vec{w}_2 \in \mathbb{W}$

LINIOWA ZALEŻNOŚĆ I NIEZALEŻNOŚĆ WEKTORÓW

Kombinacja liniowa wektorów

Niech $\vec{v}_1$, $\vec{v}_2$, ..., $\vec{v}_n$, gdzie $n \in \mathbb{N}$, będą wektorami należącymi do przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$. Ich kombinację liniową można przedstawić jako:

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n$$

gdzie $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$.

Dowolny wektor $\vec{a} \in \mathbb{V}$ można przedstawić jako kombinację wektorów należących do $\mathbb{V}$:

$$\vec{a} = \alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n$$

Liniowa (nie)zależność wektorów

Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową. Mówimy, że wektory $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n \in \mathbb{V}$, gdzie $n \in \mathbb{N}$ są liniowo niezależne, jeżeli dla dowolnych współczynników $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{R}$ z warunku:

$$\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n = \vec{0}$$

wynikają równości $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0$

Innymi słowy, jeżeli którekolwiek α_i w powyższym równaniu jest niezerowe, to wektory $\vec{v}_i$ są liniowo zależne.

BAZA I WYMIAR PRZESTRZENI LINIOWEJ

Generowanie przestrzeni

Niech $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ będą wektorami z przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$. Zbiór wszystkich kombinacji liniowych wektorów $\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n$ oznacza się jako:

$$\mathbb{B} = \mathrm{lin}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\}$$

Zatem:

$$\mathrm{lin}\{\vec{v}_1, \vec{v}_2, \ldots, \vec{v}_n\} \overset{\text{def}}{=} \{\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n : \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ dla } 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

a dla nieskończonego zbioru wektorów $\mathbb{A}$:

$$\mathrm{lin}\mathbb{A} \overset{\text{def}}{=} \bigcup_{n\in\mathbb{N}} \{\alpha_1\vec{v}_1 + \alpha_2\vec{v}_2 + \ldots + \alpha_n\vec{v}_n : \vec{v}_i \in \mathbb{A} \text{ oraz } \alpha_i \in \mathbb{R} \text{ dla } 1 \leqslant i \leqslant n\}$$

Zwroty, jeżeli $\mathbb{B} = \mathrm{lin}\mathbb{A}$, to:

- zbiór $\mathbb{B}$ jest generowany przez zbiór $\mathbb{A}$
- elementy zbioru $\mathbb{A}$ to generatory zbioru $\mathbb{B}$

Baza przestrzeni liniowej

Bazą przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$ nazywa się zbiór $\mathbb{B}$ wektorów z tej przestrzeni spełniający warunki:

- wektory te są liniowo niezależne
- zbiór $\mathbb{B}$ generuje przestrzeń $\mathbb{V}$ (tj. $\mathrm{lin}\mathbb{B} = \mathbb{V}$)

Samo generowanie przestrzeni nie wystarczy, by zbiór był bazą!

Wymiar przestrzeni liniowej

Niech wektory $\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n$ $(n \in \mathbb{N})$ tworzą bazę przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$. Wymiar tej przestrzeni określony jest wzorem:

$$\dim \mathbb{V} \overset{\text{def}}{=} n$$

Mówi się wtedy, że przestrzeń $\mathbb{V}$ jest n-wymiarowa.

Przypadki szczególne:

- $\mathbb{B} = \{\vec{0}\} \Rightarrow \dim \mathbb{V} \overset{\text{def}}{=} 0$
- $\mathbb{B}$ jest nieskończony $\Rightarrow \dim \mathbb{V} \overset{\text{def}}{=} \infty$

WEKTORY W BAZACH PRZESTRZENI LINIOWEJ

Współrzędne wektora w bazie

Niech $\mathbb{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, \dots, \vec{b}_n\}$ $(n \in \mathbb{N})$ będzie bazą przestrzeni liniowej $\mathbb{V}$. Współrzędnymi wektora $\vec{v} \in \mathbb{V}$ w bazie $\mathbb{B}$ nazywamy współczynniki $\alpha_i \in \mathbb{R}$ $(1 \leqslant i \leqslant n)$ kombinacji liniowej przedstawiającej ten wektor:

$$\vec{v} = \alpha_1\vec{b}_1 + \alpha_2\vec{b}_2 + \dots + \alpha_n\vec{b}_n$$

Współrzędne wektora $\vec{v}$ w ustalonej bazie zapisuje się w postaci:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \text{ lub } \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} \text{ lub } \begin{matrix} [\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n] \\ \\ \text{lub} \\ \\ (\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n) \end{matrix}$$

Wektor pionowy jest transpozycją wektora poziomego (i odwrotnie).

Współrzędne wektora w bazie

Na potrzeby ćwiczeń zakładamy notację wektora w postaci pionowej:

$$\begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{bmatrix} \text{ lub } \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}$$

Nie ma problemu, by w równaniach wektorowych używać wektorów w postaci poziomej, jednakże przy równaniach z użyciem macierzy ma to znaczenie (reguła wymiarów przy mnożeniu macierzy - wektor to macierz Nx1).

W przypadku liczb rzeczywistych jest to zmiana "kosmetyczna", w przypadku późniejszego uogólnienia na liczby zespolone to będzie miało kluczowe znaczenie.

Baza kanoniczna

Nazywana także bazą standardową lub naturalną. Baza kanoniczna to zbiór wektorów jednostkowych wzdłuż kolejnych osi przestrzeni.

I tak dla przestrzeni kartezjańskiej bazą kanoniczną są wektory: $\vec{x} = (1, 0)$ i $\vec{y} = (0, 1)$, dla wielomianów rzędu trzeciego bazą kanoniczną są „wektory” kolejnych potęg x, tj. $B = \{1, x, x^2, x^3\}$, natomiast dla macierzy $\mathbb{M}_{2x2}$ baza kanoniczna to zestaw czterech macierzy:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \text{i} \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Macierz przejścia z bazy do bazy

Niech $\mathbb{V}$ będzie przestrzenią liniową oraz niech

$$\mathbb{B} = \{\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n\} \;\text{ i }\; \mathbb{B}' = \{\vec{b}'_1, \vec{b}'_2, ..., \vec{b}'_n\}$$

będą bazami tej przestrzeni. Wtedy:

$$B'^T = B^T \cdot P \Leftrightarrow \left[\vec{b}'_1, \vec{b}'_2, ..., \vec{b}'_n\right] = \left[\vec{b}_1, \vec{b}_2, ..., \vec{b}_n\right] \begin{bmatrix} p_{11} & p_{12} & \dots & p_{1n} \\ p_{21} & p_{22} & \dots & p_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ p_{n1} & p_{n2} & \dots & p_{nn} \end{bmatrix}$$

Macierz P stopnia n (kwadratowa) nazywamy macierzą przejścia z bazy $\mathbb{B}$ do bazy $\mathbb{B}'$. Kolumnami macierzy P są współrzędne wektorów bazy $\mathbb{B}'$ w bazie $\mathbb{B}$.

Wektor w nowej bazie

Jeżeli P to macierz przejścia z bazy $\mathbb{B}$ do bazy $\mathbb{B}'$ i $\vec{v}$ to wektor w bazie $\mathbb{B}$, to

$$\vec{v} = P\vec{v}'$$

gdzie $\vec{v}'$ to wektor $\vec{v}$ przedstawiony w bazie $\mathbb{B}'$.

PRZEKSZTAŁCENIA LINIOWE

Przekształcenie liniowe

Niech $\mathbb{U}$ i $\mathbb{V}$ będą rzeczywistymi przestrzeniami liniowymi. Mówimy, że przekształcenie $L : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ jest liniowe, jeśli spełnia warunki:

- $L(\vec{u}_1 + \vec{u}_2) = L(\vec{u}_1) + L(\vec{u}_2)$ dla dowolnych $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in \mathbb{U}$
- $L(\alpha\vec{u}) = \alpha L(\vec{u})$ dla każdego $\alpha \in \mathbb{R}$ i $\vec{u} \in \mathbb{U}$

co można zapisać jako jeden warunek:

- $L(\alpha_1\vec{u}_1 + \alpha_2\vec{u}_2) = \alpha_1 L(\vec{u}_1) + \alpha_2 L(\vec{u}_2)$
  dla dowolnych $\vec{u}_1, \vec{u}_2 \in \mathbb{U}$ i $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

Przykłady przekształceń:

- symetrie względem punktu 0, prostej lub płaszczyzny przechodzącej przez punkt 0
- obroty względem punktu 0 lub prostej przechodzącej przez punkt 0
- rzuty prostokątne i ukośne na prostą lub płaszczyznę przechodzącą przez punkt 0
- jednokładności względem punktu 0, prostej lub płaszczyzny przechodzącej przez punkt 0

Przekształcenie liniowe (2)

Przekształcenie $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ jest liniowe $\Leftrightarrow$ jest postaci:

$$L(x, y) = (ax + by, cx + dy)$$

Przekształcenie $L : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ jest liniowe $\Leftrightarrow$ jest postaci:

$$L(x, y) = (ax + by, cx + dy, ex + fy)$$

Przekształcenie $L : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ jest liniowe $\Leftrightarrow$ jest postaci:

$$L(x, y, z) = (ax + by + cz, dx + ey + fz, gx + hy + iz)$$

I analogicznie wszystkie inne.

Jądro przekształcenia liniowego

Jądrem przekształcenia liniowego $L : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ nazywamy zbiór $\operatorname{Ker} L$ określony jako:

$$\operatorname{Ker} L \overset{\text{def}}{=} \left\{ \vec{u} \in \mathbb{U} : L(\vec{u}) = \vec{0} \right\}$$

Zbiór $\operatorname{Ker} L$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{U}$.

Obraz przekształcenia liniowego

Obrazem przekształcenia liniowego $L : \mathbb{U} \to \mathbb{V}$ nazywamy zbiór $\operatorname{Im} L$ określony jako:

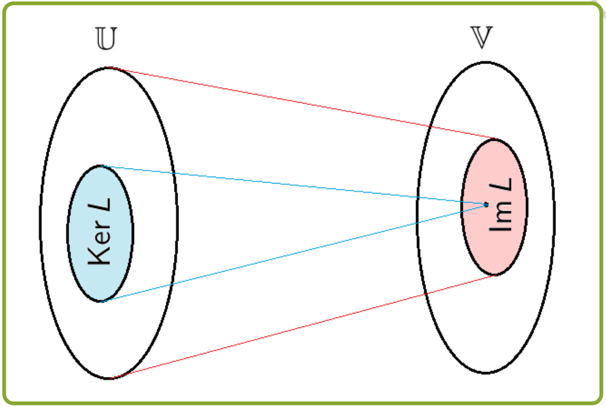
$$\operatorname{Im} L \overset{\text{def}}{=} \{\vec{v} \in \mathbb{V} : \text{istnieje wektor } \vec{u} \in \mathbb{U} \text{ taki, że } L(\vec{u}) = \vec{v}\} = \\ = \{L(\vec{u}) : \vec{u} \in \mathbb{U})\}$$

Zbiór $\operatorname{Im} L$ jest podprzestrzenią liniową przestrzeni $\mathbb{V}$.

Obraz i jądro

Zależności na wymiary:

$$\dim(\operatorname{Ker} L) + \dim(\operatorname{Im} L) = \dim(\mathbb{U})$$



ZAGADNIENIE WŁASNE MACIERZY

Odwracanie macierzy (1)

Jeżeli macierz jest nieosobliwa ($\det(\mathbf{A}) \neq 0$), to:

$$\mathbf{A}^{-1} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\mathbf{A}^{D^T} = \frac{1}{\det(\mathbf{A})}\begin{bmatrix} D_{11} & D_{12} & \dots & D_{1n} \\ D_{21} & D_{22} & \dots & D_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ D_{n1} & D_{n2} & \dots & D_{nn} \end{bmatrix}^T$$

gdzie $\mathbf{A}^D$ to macierz dopełnień, której elementy opisane są jako:

$$D_{ij} = (-1)^{i+j}\det\left(\begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1j} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & \dots & a_{ij} & \dots & a_{in} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & \dots & a_{nj} & \dots & a_{nn} \end{bmatrix}\right)$$

gdzie a_{ij} to elementy macierzy $\mathbf{A}$.

Odwracanie macierzy (2)

Dokładnie z tego wzoru pochodzi znany Państwu wzór na macierz odwrotną rozmiaru 2x2, polecam udowodnić/przeliczyć we własnym zakresie:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Odwracanie macierzy (met. przekształceń elementarnych)

Do macierzy nieosobliwej można dołączyć macierz jednostkową, a następnie za pomocą operacji na wierszach przekształcić do postaci macierzy odwrotnej według schematu:

$$[\,\mathbf{A} \mid \mathbf{1}\,] \to [\,\mathbf{1} \mid \mathbf{A}^{-1}]$$

Dozwolone operacje na wierszach:

1. przestawianie wierszy
2. mnożenie wiersza przez stałą
3. dodawanie do elementów wierszy sumy odpowiadających im elementów innych wierszy przemnożonych przez dowolne stałe

Najczęstsza operacja:

$$w_i \to a w_i + b w_j$$

Wartość własna i wektor własny macierzy

Niech $\mathbf{A}$ będzie macierzą rzeczywistą (zespoloną) stopnia n:

1. Wartością własną macierzy $\mathbf{A}$ nazywa się każdy pierwiastek rzeczywisty (zespolony) wielomianu charakterystycznego, tj. liczbę $\lambda \in \mathbb{R}$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ spełniającą równanie:

$$w_A(\lambda) \stackrel{\text{def}}{=} \det\left(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}\right) = 0$$

2. Niezerowy wektor $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ $(\in \mathbb{C}^n)$ nazywamy wektorem własnym macierzy $\mathbf{A}$ odpowiadającym wartości własnej $\lambda \in \mathbb{R}$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ tej macierzy, jeżeli spełnia warunek:

$$\mathbf{A} \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Wartość własna i wektor własny macierzy (2)

W obu przypadkach zapis równań możemy uprościć, przykład rozpisany dla rozmiaru 3x3:

1.
$$\det(\mathbf{A} - \lambda \mathbf{1}) = \det\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b & c \\ d & e-\lambda & f \\ g & h & i-\lambda \end{vmatrix}$$

2.
$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$
$$\Updownarrow$$
$$\begin{bmatrix} a-\lambda & b & c \\ d & e-\lambda & f \\ g & h & i-\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Diagonalizowanie macierzy

Każda macierz kwadratowa rzeczywista (zespolona) stopnia n jest diagonalizowalna, jeżeli istnieje odwracalna macierz rzeczywista (zespolona) $\mathbf{P}$ taka, że macierz $\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$ jest diagonalna (wtedy też macierz $\mathbf{P}$ diagonalizuje macierz $\mathbf{A}$).

Jeżeli macierz $\mathbf{A}$ jest diagonalizowalna, to równoznaczne jest stwierdzenie:

1. wektory własne macierzy $\mathbf{A}$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$)
2. $\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1}$, gdzie:
   - $\mathbf{D}$ - macierz diagonalna, której główną diagonalę tworzą kolejne wartości własne macierzy $\mathbf{A}$
   - $\mathbf{P}$ - macierz, której kolumny są wektorami własnymi odpowiadającymi kolejnym wartościom własnym wypisanym w macierzy $\mathbf{D}$.

RODZAJE MACIERZY

Macierz cykliczna

Macierzą cykliczną $n \times n$ nazywamy macierz postaci:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_0 & a_1 & a_2 & \dots & a_{n-1} \\ a_{n-1} & a_0 & a_1 & \dots & a_{n-2} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_0 \end{bmatrix}$$

Można ją rozłożyć na macierze permutacji:

$$\mathbf{A} = a_0\mathbf{1} + a_1\mathbf{S} + a_2\mathbf{S}^2 + \ldots + a_{n-1}\mathbf{S}^{n-1}.$$

Macierz permutacji

Macierze zdefiniowane są jako:

$$\mathbf{1} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & 1 \end{bmatrix}; \quad \mathbf{S} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 1 & 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix};$$

by łatwo je zapamiętać, warto zauważyć, że jest to macierz kwadratowa, a w przypadku zerowej potęgi - jednostkowa. W pierwszym wierszu jedynka pojawia się w tej kolumnie, jaka jest potęga macierzy (zakładając oczywiście numerację od zera).

Macierz normalna

Macierzą normalną $\mathbf{A} \in \mathbf{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ nazywamy macierz spełniającą warunek:

$$\left[\mathbf{A}, \mathbf{A}^{\dagger}\right] = \mathbf{0},$$

gdzie $[\mathbf{A}, \mathbf{B}]$ to komutator dwóch macierzy, zdefiniowany jako:

$$[\mathbf{A}, \mathbf{B}] = \mathbf{AB} - \mathbf{BA} = \mathbf{0}.$$

Macierz hermitowska i unitarna

Macierzą hermitowską $\mathbf{H} \in \mathbf{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ nazywamy macierz spełniającą warunek:

$$\mathbf{H} = \mathbf{H}^\dagger.$$

Macierzą unitarną $\mathbf{U} \in \mathbf{M}_{n,n}(\mathbb{C})$ nazywamy macierz spełniającą warunek:

$$\mathbf{U}^\dagger \mathbf{U} = \mathbf{U}\mathbf{U}^\dagger = \mathbf{1}.$$

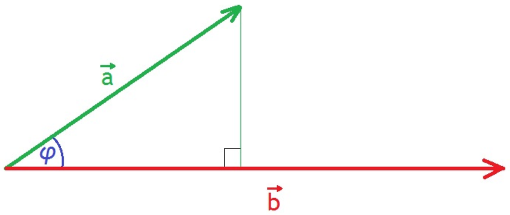
ILOCZYN SKALARNY WEKTORÓW

Standardowy iloczyn skalarny (1)

Standardowy iloczyn skalarny jest zdefiniowany jako:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

W ujęciu geometrycznym:



może być obliczony jako iloczyn długości zrzutowanych na kierunek jednego z wektorów:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos\left(\varphi\right)$$

Standardowy iloczyn skalarny (2)

Iloczyn skalarny można również przedstawić jako iloczyn dwóch macierzy:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = B^{\dagger} \cdot A$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = [b_1^*, b_2^*, ..., b_n^*] \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

gdzie:

- A to macierz zawierająca kolejne współrzędne wektora $\vec{a}$
- B to macierz zawierająca kolejne współrzędne wektora $\vec{b}$

Jest to najłatwiejszy i najszybszy sposób liczenia standardowych iloczynów skalarnych dla liczb zespolonych.

Iloczyn skalarny

Funkcja $(\bullet, \bullet) : \mathrm{V}x\mathrm{V} \to \mathbb{R}$ jest iloczynem skalarnym w rzeczywistej przestrzeni liniowej V wtedy i tylko wtedy:

1. $\forall_{\vec{u},\vec{v}\in\mathrm{V}} \left(\vec{u},\vec{v}\right) = \left(\vec{v},\vec{u}\right)$
2. $\forall_{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in\mathrm{V}} \left(\vec{u}+\vec{v},\vec{w}\right) = \left(\vec{u},\vec{w}\right) + \left(\vec{v},\vec{w}\right)$
3. $\forall_{\vec{u},\vec{v}\in\mathrm{V}}\forall_{\alpha\in\mathbb{R}} \left(\alpha\vec{u},\vec{v}\right) = \alpha\left(\vec{u},\vec{v}\right)$
4. $\forall_{\vec{u}\in\mathrm{V}} \left(\vec{u},\vec{u}\right) \geqslant 0$
5. $\forall_{\vec{u}\in\mathrm{V}} \left(\vec{u},\vec{u}\right) = 0 \Longrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Przestrzeń unitarna i jej iloczyn skalarny (1)

Funkcja $(\bullet, \bullet) : \mathrm{V} x \mathrm{V} \to \mathbb{C}$ jest iloczynem skalarnym w przestrzeni unitarnej V wtedy i tylko wtedy:

1. $\forall_{\vec{u},\vec{v}\in \mathrm{V}}\ (\vec{u},\vec{v}) = (\vec{v},\vec{u})^*$ (hermitowskość, sprzężona symetria)
2. $\forall_{\vec{u},\vec{v},\vec{w}\in \mathrm{V}}\ (\vec{u}+\vec{v},\vec{w}) = (\vec{u},\vec{w}) + (\vec{v},\vec{w})$
3. $\forall_{\vec{u},\vec{v}\in \mathrm{V}}\forall_{\alpha\in\mathbb{R}}\ (\alpha\vec{u},\vec{v}) = \alpha\,(\vec{u},\vec{v})$
4. $\forall_{\vec{u}\in \mathrm{V}}\ (\vec{u},\vec{u}) \geqslant 0$
5. $\forall_{\vec{u}\in \mathrm{V}}\ (\vec{u},\vec{u}) = 0 \Longrightarrow \vec{u} = \vec{0}$

Przestrzeń unitarna i jej iloczyn skalarny (2)

To dalej pozostaje w mocy:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = B^{\dagger} \cdot A$$

$$\vec{a} \circ \vec{b} = [b_1^*, b_2^*, ..., b_n^*] \cdot \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix}$$

Przy czym trzeba pamiętać, że sam iloczyn skalarny w przestrzeni unitarnej, według najprostszego wzoru:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = (\vec{a}, \vec{b}) = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i^*$$

Przestrzeń unitarna i jej iloczyn skalarny (3)

Notacja Diraca:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \left\langle\ \vec{b}\ \middle|\ \vec{a}\ \right\rangle$$

UWAGA!
W zagadnieniach fizycznych bardzo często stosuje się odwróconą notację w iloczynie skalarnym. Prowadzi to *de facto* do odwrócenia założeń iloczynu skalarnego:

$$\vec{a} \circ \vec{b} = \sum_{i=1}^{n} a_i^* b_i = \left\langle\ \vec{a}\ \middle|\ \vec{b}\ \right\rangle$$

To też jest dobrze zdefiniowany iloczyn skalarny, ale INNY. Uwaga na konwencje!

NORMA
I ORTOGONALNOŚĆ WEKTORÓW

Norma wektora i miara kąta pomiędzy wektorami

Niech $\vec{v}$ będzie dowolnym wektorem przestrzeni V. Normą tego wektora nazywa się liczbę:

$$||\vec{v}|| \stackrel{\text{def}}{=} \sqrt{(\vec{v}, \vec{v})} = \sqrt{\vec{v} \circ \vec{v}}$$

Norma wektora nazywana jest także jego długością.

Niech $\vec{u}$ i $\vec{v}$ będą dowolnymi wektorami przestrzeni V. Miarą kąta między wektorami $\vec{u}$ i $\vec{v}$ nazywamy liczbę $\varphi \in [0, \pi]$ spełniającą równość:

$$\varphi = \cos^{-1}\left(\frac{(\vec{u}, \vec{v})}{||\vec{u}|| \cdot ||\vec{v}||}\right)$$

W szczególności pozwala to znaleźć wektory prostopadłe. Wzór wtedy można sprowadzić do:

$$0 = (\vec{u}, \vec{v})$$

Baza ortogonalna i ortonormalna

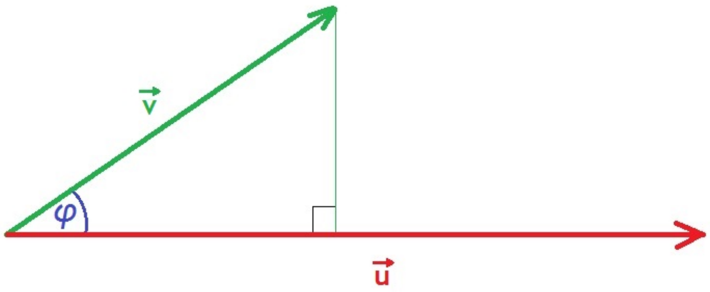
Bazę przestrzeni liniowej, która składa się z takich wektorów, z których każda para jest do siebie ortogonalna nazywamy bazą ortogonalną tej przestrzeni.

Bazą ortonormalną jest baza ortogonalna, której wszystkie wektory składowe są unormowane do 1.

Operator rzutowania ortogonalnego

Operatorem rzutowania ortogonalnego wektora $\vec{v}$ na wektor $\vec{u}$ definiowany jest jako:

$$\mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{(\vec{v}, \vec{u})}{(\vec{u}, \vec{u})}\vec{u}$$



Ortogonalizacja Grama-Schmidta

$\mathrm{proj}_{\vec{u}}\vec{v} = \frac{(\vec{v},\vec{u})}{(\vec{u},\vec{u})}\vec{u}$

Tworzenie bazy ortogonalnej algorytmem Grama-Schmidta polega na wyznaczaniu kolejnych wektorów składowych bazy przy użyciu algorytmu:

$$
\begin{aligned}
\vec{u}_1 &= \vec{v}_1 \\
\vec{u}_2 &= \vec{v}_2 - \mathrm{proj}_{\vec{u}_1}\vec{v}_2 \\
\vec{u}_3 &= \vec{v}_3 - \mathrm{proj}_{\vec{u}_1}\vec{v}_3 - \mathrm{proj}_{\vec{u}_2}\vec{v}_3 \\
&\vdots \\
\vec{u}_k &= \vec{v}_k - \sum_{j=1}^{k-1} \mathrm{proj}_{\vec{u}_j}\vec{v}_k
\end{aligned}
$$

Iloczyn wektorowy

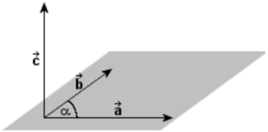
Iloczyn wektorowy (tutaj w trzech wymiarach) można przedstawić jako:

$$\vec{a} \times \vec{b} = \begin{vmatrix} \widehat{i} & \widehat{j} & \widehat{k} \\ a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \end{vmatrix} = \vec{c}$$

gdzie:

- $\widehat{i}, \widehat{j}, \widehat{k}$ - wersory stanowiące bazę ortonormalną
- $\vec{a} = (a_i, a_j, a_k)$
- $\vec{b} = (b_i, b_j, b_k)$

Utworzony wektor $\vec{c}$ jest prostopadły do wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$.



ROZKŁAD JORDANA

Diagonalizowanie macierzy

Każda macierz kwadratowa rzeczywista (zespolona) stopnia n jest diagonalizowalna, jeżeli istnieje odwracalna macierz rzeczywista (zespolona) $\mathbf{P}$ taka, że macierz $\mathbf{P}^{-1} \cdot \mathbf{A} \cdot \mathbf{P}$ jest diagonalna (wtedy też macierz $\mathbf{P}$ diagonalizuje macierz $\mathbf{A}$).

Jeżeli macierz $\mathbf{A}$ jest diagonalizowalna, to równoznaczne jest stwierdzenie:

1. wektory własne macierzy $\mathbf{A}$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$)
2. $\mathbf{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1}$, gdzie:
   - $\mathbf{D}$ - macierz diagonalna, której główną diagonalę tworzą kolejne wartości własne macierzy $\mathbf{A}$
   - $\mathbf{P}$ - macierz, której kolumny są wektorami własnymi odpowiadającymi kolejnym wartościom własnym wypisanym w macierzy $\mathbf{D}$.

Rozkład Jordana (1)

Rozkład Jordana, czyli doprowadzenie macierzy $\mathbf{A}$ do postaci Jordana z wykorzystaniem wektorów własnych macierzy $\mathbf{A}$. Każdą z macierzy można przedstawić jako iloczyn:

$$\mathbf{A} = \mathbf{PJP}^{-1}$$

gdzie:

- $\mathbf{A}$ - dana macierz
- $\mathbf{P}$ - nieosobliwa macierz, której *niektórymi* kolumnami są wektory własne $\mathbf{A}$
- $\mathbf{J}$ - szukana macierz Jordana

Rozkład Jordana (2)

$\mathbf{A} = \mathbf{PJP}^{-1}$

Sama macierz Jordana $\mathbf{J}$ ma postać pseudo-diagonalną. Na diagonali występują tzw. klatki Jordana:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J_1} & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{J_2} & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{J_n} \end{bmatrix}$$

gdzie

$$\mathbf{J_k} = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}$$

Rozkład Jordana (3)

W przypadku, gdy liczba wektorów własnych jest mniejsza niż wymiarowość przestrzeni (np. dwa wektory własne w przestrzeni $\mathbb{R}^3$) bazę tej przestrzeni złożoną z wektorów własnych uzupełnia się o tzw. wektory dołączone, według schematu:

$$(\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{1}) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \vec{x}_k$$

gdzie:

- λ_k jest wartością własną występującą wielokrotnie w wielomianie charakterystycznym, a dla której liczba wektorów własnych jest mniejsza niż krotność degeneracji
- $\vec{x}_k$ jest wektorem własnym dla wartości własnej λ_k

Tak utworzony wektor $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ dopisywany jest do macierzy $\mathbf{P}$ i wraz z wektorami własnymi tworzą bazę przestrzeni.

ILOCZYN TENSOROWY

Iloczyn tensorowy

Iloczyn tensorowy w ogólności zdefiniowany jest jako iloczyn dwóch przestrzeni liniowych $\mathbb{V}$ i $\mathbb{W}$. W wyniku takiej operacji uzyskuje się przestrzeń liniową $\mathbb{U}$.

$$\mathbb{U} = \mathbb{V} \otimes \mathbb{W}$$

Zależności wymiarów takiej operacji mają się jak:

$$\dim(\mathbb{U}) = \dim(\mathbb{V}) \cdot \dim(\mathbb{W})$$

Definicja iloczynu tensorowego może zostać rozszerzona na takie obiekty matematyczne jak macierze, tensory, algebry, topologiczne przestrzenie liniowe i moduły.

Uogólnieniem iloczynów macierzy opisujących przekształcenia liniowe (do czego sprowadzić można wiele problemów fizycznych) jest iloczyn Kroneckera.

Iloczyn Kroneckera (1)

Jeżeli $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$ to macierze:

$$\mathbf{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & \dots & a_{1n} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}; \mathbf{B} = \begin{bmatrix} b_{11} & \dots & b_{1o} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{p1} & \dots & b_{po} \end{bmatrix};$$

to ich iloczyn Kroneckera:

$$\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}\mathbf{B} & \dots & a_{1n}\mathbf{B} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\mathbf{B} & \dots & a_{mn}\mathbf{B} \end{bmatrix}$$

Iloczyn Kroneckera (2)

$$
\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \begin{bmatrix}
a_{11}b_{11} & a_{11}b_{12} & \dots & a_{11}b_{1o} & \dots & \dots & a_{1n}b_{11} & a_{1n}b_{12} & \dots & a_{1n}b_{1o} \\
a_{11}b_{21} & a_{11}b_{22} & \dots & a_{11}b_{2o} & \dots & \dots & a_{1n}b_{21} & a_{1n}b_{22} & \dots & a_{1n}b_{2o} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{11}b_{p1} & a_{11}b_{p2} & \dots & a_{11}b_{po} & \dots & \dots & a_{1n}b_{p1} & a_{1n}b_{p2} & \dots & a_{1n}b_{po} \\
\vdots & \vdots & & \vdots & \ddots & & \vdots & \vdots & & \vdots \\
\vdots & \vdots & & \vdots & & \ddots & \vdots & \vdots & & \vdots \\
a_{m1}b_{11} & a_{m1}b_{12} & \dots & a_{m1}b_{1o} & \dots & \dots & a_{mn}b_{11} & a_{mn}b_{12} & \dots & a_{mn}b_{1o} \\
a_{m1}b_{21} & a_{m1}b_{22} & \dots & a_{m1}b_{2o} & \dots & \dots & a_{mn}b_{21} & a_{mn}b_{22} & \dots & a_{mn}b_{2o} \\
\vdots & \vdots & \ddots & \vdots & & & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\
a_{m1}b_{p1} & a_{m1}b_{p2} & \dots & a_{m1}b_{po} & \dots & \dots & a_{mn}b_{p1} & a_{mn}b_{p2} & \dots & a_{mn}b_{po}
\end{bmatrix}
$$

Własności iloczynu Kroneckera

- Własności przekształceń:
  - $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} \neq \mathbf{B} \otimes \mathbf{A}$
  - $\mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} + \mathbf{C}) = \mathbf{A} \otimes \mathbf{B} + \mathbf{A} \otimes \mathbf{C}$
  - $(\mathbf{A} + \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes \mathbf{C} + \mathbf{B} \otimes \mathbf{C}$
  - $(\alpha\mathbf{A}) \otimes \mathbf{B} = \mathbf{A} \otimes (\alpha\mathbf{B}) = \alpha(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})$
  - $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) \otimes \mathbf{C} = \mathbf{A} \otimes (\mathbf{B} \otimes \mathbf{C})$
- Istnieją takie macierze $\mathbf{P}$ i $\mathbf{Q}$, że:
  - $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B} = \mathbf{P}(\mathbf{B} \otimes \mathbf{A})\mathbf{Q}$
- Jeżeli rozmiary macierzy na to pozwalają:
  - $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})(\mathbf{C} \otimes \mathbf{D}) = (\mathbf{A} \cdot \mathbf{C}) \otimes (\mathbf{B} \cdot \mathbf{D})$
- Transpozycja:
  - $(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B})^T = \mathbf{A}^T \otimes \mathbf{B}^T$
- Wyznacznik i ślad dla macierzy wymiarów $\mathbf{A}_{n\times n}$ i $\mathbf{B}_{m\times m}$:
  - $\det(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \det(\mathbf{A})^m \det(\mathbf{B})^n$
  - $\mathrm{tr}(\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}) = \mathrm{tr}(\mathbf{A})\mathrm{tr}(\mathbf{B})$
- Gdy $\lambda^{\mathbf{A}}$ i $\lambda^{\mathbf{B}}$ to wartości własne $\mathbf{A}$ i $\mathbf{B}$, to wart. wł. $\mathbf{A} \otimes \mathbf{B}$:
  - $\lambda^{\mathbf{A}\otimes\mathbf{B}}_{ij+j-1} = \lambda^{\mathbf{A}}_i \lambda^{\mathbf{B}}_j$