Lista zadań do przedmiotu - Algebra 1

M. Słowiński

Semestr zimowy 2022/2023

I. Wektory

1. Dane są trzy wektory: $\vec{a} = [1, 0, -1]$, $\vec{b} = [2, -1, 3]$, $\vec{c} = [1, 1, 2]$. Znajdź wektor $\vec{x} = 3\vec{a} - \vec{b} + 4\vec{c}$.
2. Narysuj dwa nierównoległe wektory $\vec{u}$ i $\vec{v}$ oraz trzeci wektor $\vec{w}$. Przedstaw $\vec{w}$ w postaci sumy dwóch wektorów, z których jeden jest równoległy do $\vec{u}$, a drugi do $\vec{v}$. Czy dla każdego niezerowego wektora $\vec{w}$ zadanie ma rozwiązanie? Skąd taki wniosek?
3. Dane są trzy punkty, A, B, C. Przedstaw wektor $\vec{OA} = \vec{a}$ jako kombinację liniową wektorów $\vec{OB} = \vec{b}$ i $\vec{OC} = \vec{c}$, gdzie O jest początkiem układu współrzędnych, jeżeli:
   a) $A = (5, 2)$, $B = (1, 4)$, $C = (-2, -1)$
   b) $A = (0, 1)$, $B = (1, -1)$, $C = (3, 2)$
   c) $A = (-2, 2)$, $B = (3, 1)$, $C = (-2, 4)$
4. Wektory $\vec{f_1}$ i $\vec{f_2}$ są liniowo niezależne na płaszczyźnie. Uzasadnić, że następujące wektory również są liniowo niezależne:
   a) $\vec{f_1}$ i $-\vec{f_2}$
   b) $\vec{f_1} - \vec{f_2}$ i $\vec{f_1} + \vec{f_2}$
   c) $2\vec{f_1} - \vec{f_2}$ i $\vec{f_1} - 2\vec{f_2}$
   d) $\vec{f_1} + \vec{f_2}$ i $\vec{f_2}$
5. Wektory $\vec{f_1}$, $\vec{f_2}$ i $\vec{f_3}$ są liniowo niezależne na przestrzeni. Uzasadnić, że następujące wektory również są liniowo niezależne:
   a) $\vec{f_1}$, $-\vec{f_2}$, $\vec{f_3}$
   b) $\vec{f_1} - \vec{f_2}$, $\vec{f_1} + \vec{f_3}$, $\vec{f_3}$
   c) $2\vec{f_1} - \vec{f_2} + \vec{f_3}$, $\vec{f_1} - 2\vec{f_2} - \vec{f_3}$, $2\vec{f_1} - \vec{f_2} - \vec{f_3}$
   d) $\vec{f_1} + \vec{f_2}$, $\vec{f_2}$, $-\vec{f_3}$
6. Sprawdź czy podane wektory są liniowo niezależne.
   a) $\vec{a} = [-1, 2]$, $\vec{b} = [1, 1]$
   b) $\vec{a} = [0, 2, -1]$, $\vec{b} = [-1, 1, 2]$, $\vec{c} = [-3, 5, 5]$
   c) $\vec{a} = [-1, 0, 3]$, $\vec{b} = [1, 1, -1]$, $\vec{c} = [-3, -1, 7]$
   d) $\vec{a} = [-1, 2, 0]$, $\vec{b} = [0, 1, -2]$, $\vec{c} = [-1, 1, 0]$
7. Dla jakich wartości parametru m wektory $\vec{a}$, $\vec{b}$ i $\vec{c}$ są liniowo niezależne?
   a) $\vec{a} = [2, -3, 4]$, $\vec{b} = [0, -1, 2]$, $\vec{c} = [-2, 2, m]$

b) $\vec{a} = [1, -1, m]$, $\vec{b} = [2, -1, 1]$, $\vec{c} = [m, 1, 1]$

8. Zapisz wektor $\vec{a}$ jako kombinację liniową wersorów $\hat{\imath} = [1, 0]$ i $\hat{\jmath} = [0, 1]$. Wskaż współrzędne i składowe wektora $\vec{a}$. Przedstaw wektor $\vec{a}$ i jego składowe graficznie:
   a) $\vec{a} = [1, 2]$
   b) $\vec{a} = [-1, 0]$
9. Zapisz wektor $\vec{a}$ jako kombinację liniową wersorów $\hat{\imath} = [1, 0, 0]$, $\hat{\jmath} = [0, 1, 0]$ i $\hat{k} = [0, 0, 1]$. Wskaż współrzędne i składowe wektora $\vec{a}$. Przedstaw wektor $\vec{a}$ i jego składowe graficznie:
   a) $\vec{a} = [1, 2, 3]$
   b) $\vec{a} = [-1, 5, -7]$
10. Rozłóż wektor $\vec{w}$ na składowe wzdłuż wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$. Rozkład zilustruj graficznie.
    a) $\vec{w} = [5, 5]$, $\vec{a} = [0, 1]$, $\vec{b} = [-1, 1]$
    b) $\vec{w} = [3, -3]$, $\vec{a} = [-1, 2]$, $\vec{b} = [2, -4]$
11. Znajdź iloczyn skalarny następujących wektorów:
    a) $\vec{a} = [2, 1, 0]$, $\vec{b} = [-1, 0, \frac{1}{2}]$
    b) $\vec{a} = [-1, 1, 3]$, $\vec{b} = [-3, 2, \frac{1}{3}]$
    c) $\vec{a} = [0, -\frac{1}{4}, -2\frac{1}{2}]$, $\vec{b} = [1, 2, -3]$
    d) $\vec{a} = [-3, 1, 2]$, $\vec{b} = [0, \frac{1}{3}, -1]$
    e) $\vec{a} = [2, 3, -\frac{5}{2}]$, $\vec{b} = [\frac{4}{3}, \frac{1}{3}, 0]$
    f) $\vec{a} = [-2, 1, -3]$, $\vec{b} = [0, -2\frac{1}{3}, 1]$
12. Oblicz długość wektora $\vec{a}$:
    a) $\vec{a} = [1, 1]$
    b) $\vec{a} = [2, 2\sqrt{3}]$
    c) $\vec{a} = [2, 1, 0]$
    d) $\vec{a} = [0, \frac{1}{4}, 2\frac{1}{2}]$
    e) $\vec{a} = [1, -\frac{1}{2}, -\frac{1}{2}]$
13. Sprawdź ortogonalność wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$
    a) $\vec{a} = [2, -3]$, $\vec{b} = [3, -2]$
    b) $\vec{a} = [-3, 5, 2]$, $\vec{b} = [2, 8, -17]$
14. Znajdź iloczyny wektorowe $\vec{a} \times \vec{b}$ i $\vec{b} \times \vec{a}$
    a) $\vec{a} = [2, -1, 6]$, $\vec{b} = [-3, 5, 1]$
    b) $\vec{a} = [1, 1, 1]$, $\vec{b} = [2, 2, 2]$
    c) $\vec{a} = [1, 2, 0]$, $\vec{b} = [2, 1, 0]$
15. Znajdź wektor normalny do płaszczyzny określonej przez wektory:
    a) $\vec{a} = [1, 1, 1]$, $\vec{b} = [2, 2, 2]$
    b) $\vec{a} = [1, 2, 0]$, $\vec{b} = [2, 1, 0]$
16. Oblicz pole równoległoboku, którego kolejnymi wierzchołkami są punkty o współrzędnych $(2, 5, 3), (1, -1, 3), (5, 4, 2)$.
17. Korzystając ze wzoru na iloczyn mieszany sprawdź czy wektory $[1, 1, 1], [0, 1, 1], [1, 0, 0]$ są liniowo niezależne od siebie.

18. Oblicz sinus kąta zawartego między wektorami $\vec{a} = [0, 1, -1]$ i $\vec{b} = [2, 1, 1]$.

II. Logika i zbiory

1. Oceń wartość logiczną poniższych zdań
   a) $2<3$ i $4<3$,
   b) $2<3$ lub $4<3$,
   c) Warszawa leży nad Wisłą i Łódź leży nad Wisłą,
   d) Jeżeli 9 jest dzielnikiem 36, to 6 jest dzielnikiem 36.
2. Sprawdź, czy następujące wyrażenia są tautologiami:
   a) $(p \implies q) \Leftrightarrow (\neg p \vee q)$
   b) $(p \implies q) \implies [p \implies (q \vee r)]$
   c) $[(p \vee q) \wedge \neg p] \implies q$
   d) $p \vee (\neg p \vee q) \implies (\neg q \wedge \neg q)$
3. Podanie poniżej funkcje zdaniowe zapisz symbolicznie, używając kwantyfikatorów, symboli logicznych, symboli działań arytmetycznych i nierówności:
   a) dla każdej liczby naturalnej n spełniona jest nierówność $n > 2^n$
   b) istnieje taki kąt α, dla którego $\sin(\alpha) = \cos(\alpha)$
   c) nie istnieje rozwiązanie rzeczywiste równania $2x^2 + x + 1 = 0$
   d) dla dowolnej liczby naturalnej można wskazać liczbę naturalną większą o 3.
4. Zapisz słowami następujące zdania:
   a) $\exists_{x\in\mathbb{R}} : x^2 = \frac{1}{4}$
   b) $\forall_{x\in\mathbb{R}} : \cos^2(x) \leq 0$
   c) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\forall_{y\in\mathbb{R}} : x^2 + y^2 < 0$
   d) $\exists_{x\in\mathbb{R}}\forall_{y\geq x} : f(x) < f(y)$
5. Które z poniższych zdań są prawdziwe?
   a) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\exists_{y\in\mathbb{R}} : x + y = 0$
      $\exists_{y\in\mathbb{R}}\forall_{x\in\mathbb{R}} : x + y = 0$
   b) $\forall_{x\in\mathbb{R}}\exists_{y\in\mathbb{R}} : x > y$
      $\exists_{y\in\mathbb{R}}\forall_{x\in\mathbb{R}} : x > y$
   c) $\forall_{x\in\mathbb{N}}\exists_{y\in\mathbb{N}} : m > n$
      $\exists_{y\in\mathbb{N}}\forall_{x\in\mathbb{N}} : m > n$
6. Wypisz wszystkie elementy następujących zbiorów:
   a) $A = \{a, b, c\}$
   b) $B = \{\{a, b, c\}, c\}$
   c) $C = \{\emptyset\}$
   d) $D = \emptyset$
   e) $E = \{x \in \mathbb{N} : x = 2\}$
   f) $F = \{X : X \subset A\}$, gdzie $A = \{a, b, c\}$
   g) $G = \{1, 2, \{3, 4\}\}$
   h) $H = \{x \in \mathbb{R} : x^2 + 1 \leq 0\}$

7. Zaznacz na osi liczbowej następujące zbiory $A \cup B$, $A \cap B$, $B \cup C$, $A \cap C$, $A \setminus B$, $B \setminus A$, $A \setminus C$, $A \cap (B \cup C)$ dla

   a) $A = \{x \in \mathbb{R} : x^2 \neq 0\}$,
      $B = \{x \in \mathbb{R} : x \geq 4\}$,
      $C = \{x \in \mathbb{R} : (x-2)^2 < 4\}$

   b) $A = \{x \in \mathbb{R} : (x-1)^2 < 1\}$,
      $B = \{x \in \mathbb{R} : |x-3| \geq 2\}$,
      $C = \{x \in \mathbb{R} : x^2 = \frac{1}{4}\}$

8. Oblicz $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ dla:

   a) $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 4\}$,
      $B = \{x \in \mathbb{N} : x \geq 4\}$

   b) $A = \{x \in \mathbb{N} : x < 0\}$,
      $B = \{x \in \mathbb{N} : x = 2\}$

   c) $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$,
      $B = \{x \in \mathbb{N} : x < 2\}$

   d) $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 2\}$,
      $B = \{x \in \mathbb{R} : x < 4\}$

9. Zilustruj graficzne zbiory A, B, $A \cup B$, $A \cap B$, $A \setminus B$, $B \setminus A$ dla:

   a) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : 2x - y + 3 > 0\}$,
      $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + 2y - 1 \leq 0\}$

   b) $A = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 - y - 1 < 0\}$,
      $B = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y - 1 \leq 0\}$

10. Uzasadnij poniższe równości używając diagramów Venna:

    a) $A \setminus B = B^c \setminus A^c$
    b) $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
    c) $(A \cup B) \cap C = (A \cap C) \cup (B \cap C)$
    d) $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \cap C)$
    e) $(A \cup C) \setminus (A \cap B) = (A \setminus B) \cup (C \setminus A)$

11. Wypisz wszystkie elementy zbiorów $A \times B$ i $B \times A$:

    a) A= $\{1\}$, B= $\{2, 3\}$,
    b) A= $\{a, b\}$, B=$\{c, d, e\}$

12. Niech A= $\{0, 1, 2, 3, 4\}$ i B=$\{0, 2, 4\}$. Wypisz elementy następujących zbiorów:

    a) $\{(m,n) \in A \times B : m < n\}$
    b) $\{(m,n) \in B \times A : m < n\}$
    c) $\{(m,n) \in A \times B : m + n \geq 3\}$
    d) $\{(m,n) \in A \times B : m + n = 9\}$

13. Przyjmując, że punkty na płaszczyźnie są uporządkowanymi parami (a, b) liczb rzeczywistych, gdzie a jest odciętą, a b rzędną punktu, znajdź graficznie $A \times B$ i $B \times A$ dla następujących zbiorów:

    a) $A = \{x \in \mathbb{R} : 1 < x < 2\}$, $B = \{y \in \mathbb{R} : 0 < y < 1\}$,
    b) $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x\}$, $B = \{y \in \mathbb{R} : 0 < y\}$,
    c) $A = \{y \in \mathbb{R} : -1 < y < 1\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : 0 \leq x < 1\}$,

d) $A = \{x \in \mathbb{R} : x < 1 \vee x > 1\}$, $B = \{y \in \mathbb{R} : y^2 > 0\}$,

e) $A = \{x \in \mathbb{R} : 0 < x < 1 \vee 2 < x < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : 1 \leq x < 2 \vee 3 < x \leq 4\}$,

f) $A = \{x \in \mathbb{R} : |x| < 3\}$, $B = \{x \in \mathbb{R} : x^2 > 4\}$,

14. Znajdź zbiór potęgowy dla następujących zbiorów A:

a) $A = \{a, b, c\}$

b) $B = \{1, 2, 3, 4\}$

c) $C = \emptyset$

d) $D = \{7\}$

e) $E = \{\emptyset\}$

f) $F = \{\{a\}, a\}$

g) $G = \{k \in \mathbb{Z}\, |k - 5| \leq 1\}$

h) $H = (m, n) \in \{0, 1\}^2 : m + n = 1\}$

III. Relacje

1. Znajdź dziedzinę i przeciwdziedzinę relacji

a) $R = \{(a, b), (a, c), (b, c)\}$

b) $R = \{(a, a), (a, b), (a, c)\}$

c) $aRb \Leftrightarrow \{a \in \mathbb{N} \wedge b \in \mathbb{N} \wedge a < b\}$

2. Zbadaj czy relacja jest: zwrotne, przeciwzwrotna, symetryczna, antysymetryczna, przechodnia, spójna:

a) $R \subset \{a, b\}^2$; $R = \{(a, a), (b, b), (a, b)\}$

b) $R \subset \mathbb{N}^2$; $xRy \Leftrightarrow x|y$

c) $R \subset \mathbb{R}^2$; $xRy \Leftrightarrow x + y = 1$

d) $R \subset \mathbb{R}^2$; $xRy \Leftrightarrow x + y \geq 2$

e) $R \subset \mathbb{R}^2$; $xRy \Leftrightarrow x^2 = y^2$

3. Sprawdź czy poniższe relacje są funkcjami:

a) $R = \{(a, a), (a, b)\} \subset \{a\} \times \{a, b\}$

b) $R = \{(a, a), (b, a)\} \subset \{a, b\} \times \{a\}$

c) $R = \{(x, y) : x^2 = y^2\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

d) $R = \{(x, y) : x^2 = y^2\} \in \mathbb{R}_+ \times \mathbb{R}_+$

e) $R = \{(x, y) : xy = 1\} \subset \mathbb{R} \times \mathbb{R}$

4. Sprawdź czy poniższe przyporządkowanie określa funkcję. Jeśli tak, to wskaż dziedzinę, przeciwdziedzinę i obraz (zbiór wartości) funkcji.

a) $f : \{1, 2, 5, 8\} \to \{8, 3, 2\}, f(1) = 8, f(5) = 3, f(8) = 2$

b) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to y = \sqrt{2}$

c) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, x \to y = \log(x)$

5. Sprawdzić, które z własności: różnowartościowość, na, bijekcja, mają poniższe funkcje. Sprawdzić, czy podane funkcje są odwracalne. Jeśli tak, to podać funkcję odwrotną.

a) $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}, f(x) = 2x + 1$

b) $f : \mathbb{R}_+ \cup \{0\} \to [0, 8), f(x) = x^2$

c) $f : (1, \infty) \to \mathbb{R}, f(x) = \ln(x - 1)$

6. Niech $f : X \to Y, A \subset B, B \subset Y$. Wyznacz $f(A), f^{-1}(B)$, gdy:
   a) $X = Y = \mathbb{R}$; $f(x) = x^2 - 3x + 2$
      i. $A = (0, 1]$, $B = (-\infty, -6]$
      ii. $A = [-2, 1]$, $B = \{-3, 4\}$
   b) $X = Y = \mathbb{R}$; $f(x) = x^3 - x$
      i. $A = (1, \infty), B = (0, \infty)$
      ii. $A = [0, 1], B = \{0\}$
7. Wyznacz złożenia $f \circ g$ oraz $g \circ f$ (jeżeli istnieją):
   a) $f(x) = 2x + 1$ dla $x \in \mathbb{R}$
      $g(x) = x^2$ dla $x \in \mathbb{R}$
   b) $f(x) = \sin(x) - 1$ dla $x \in \mathbb{R}$
      $g(x) = \sqrt{x}$ dla $x \geq 0$
8. Przedstaw poniższe funkcje jako złożenia dwóch funkcji:
   a) $f(x) = \sqrt{x^2 + 1}$ dla $x \in \mathbb{R}$,
   b) $f(x) = log(|x|) + 2$ dla $x \in \mathbb{R}$

IV. Kresy

1. Podać przykład zbioru liczb, w którym jest liczba najmniejsza, nie ma liczby największej, lecz zbiór jest ograniczony z góry. Podać kres górny i dolny tego zbioru. Który z nich należy do zbioru?
2. Oblicz kres górny i dolny (o ile istnieją) zbioru:
   a) $\{\frac{1}{3^n} : n \in \mathbb{N}\}$
   b) $\{2 - \frac{1}{k+1} : k \in \mathbb{N}\}$
   c) $\{1 + \frac{(-1)^k}{k+1} : k \in \mathbb{N}\}$
   d) $\{\frac{i}{i+1} : i \in \mathbb{N}\}$
   e) $\{(-1)^n + \frac{(-1)^{n+1}}{n+1} : k \in \mathbb{N}\}$
   f) $\{\frac{(i+1)^2}{2^i} : i \in \mathbb{N}\}$
   g) $\{-\frac{2^i}{(2i+1)^2} : i \in \mathbb{N}\}$
   h) $\{\frac{2^k}{k!} : k \in \mathbb{N}\}$
   i) $\emptyset$
   j) $\{x^2 : x \in [-2, 3)\}$
   k) $\{xy : x \in [-1, 4), y \in (-3, 2]\}$

V. Liczby zespolone

1. Przedstawić w postaci algebraicznej (kanonicznej, tj. a+bi) liczby zespolone:
   a) $z = (4 - 3\mathrm{i}) + (2\mathrm{i} - 6)$
   b) $z = (2 + \mathrm{i})(4 - \mathrm{i})$
   c) $z = (1 + 2\mathrm{i})(3 - 5\mathrm{i})$
   d) $z = \frac{5}{2-\mathrm{i}}$
   e) $z = \frac{-1-4\mathrm{i}}{4-\mathrm{i}}$

f) $z = \frac{3}{2+3\mathrm{i}}$
g) $z = (3+\mathrm{i})(3-\mathrm{i})\left(\frac{1}{5}+\frac{\mathrm{i}}{10}\right)$
h) $z = (1-\mathrm{i})(2-\mathrm{i})(3-\mathrm{i})$
i) $z = (1+\mathrm{i})^2\left(\frac{4}{1-\mathrm{i}}+\frac{2-\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)$
j) $z = \left(\frac{1+2\mathrm{i}}{1+\mathrm{i}}\right)^2 - \left(\frac{2}{1-\mathrm{i}}\right)^2$
k) $z = \frac{\mathrm{i}^4+\mathrm{i}^9+\mathrm{i}^{16}}{2-\mathrm{i}^5+\mathrm{i}^{10}-\mathrm{i}^{15}}$

2. Przedstawić w postaci trygonometrycznej liczbę zespoloną:
   a) $z = 3$
   b) $z = -4$
   c) $z = -3\mathrm{i}$
   d) $z = 1-\mathrm{i}$
   e) $z = \sqrt{3}-\mathrm{i}$
   f) $z = -\sqrt{2}+\mathrm{i}\sqrt{2}$
   g) $z = -\sqrt{6}-\mathrm{i}\sqrt{2}$
   h) $z = 3+3\sqrt{3}\mathrm{i}$
   i) $z = \frac{1+\mathrm{i}}{\mathrm{i}}$
   j) $z = \frac{4}{\sqrt{3}-\mathrm{i}}$
3. Przedstawić w postaci wykładniczej liczbę zespoloną:
   a) $z = -5+5\mathrm{i}$
   b) $z = -\frac{3\sqrt{3}}{2}-\frac{3}{2}\mathrm{i}$
   c) $z = \mathrm{i}^{20}$
   d) $z = -2\sqrt{3}-2\mathrm{i}$
   e) $z = \frac{(1+\mathrm{i})^2 e^{\mathrm{i}\pi}}{(1-\mathrm{i})^3 e^{-\frac{\pi}{4}\mathrm{i}}}$
4. Znajdź wszystkie liczby zespolone, dla których spełnione jest równanie $\overline{z} = z^2$
5. Rozwiąż względem $x, y \in \mathbb{R}$ równanie $(5-8\mathrm{i})x + (7+3\mathrm{i})y = 2-\mathrm{i}$
6. Znajdź zbiór liczb rzeczywistych, dla których liczba $u = \frac{z+4}{z-2\mathrm{i}}$ jest:
   - rzeczywista
   - urojona
7. Znajdź miejsca zerowe wielomianów zespolonych:
   a) $x^2+1=0$
   b) $x^3+x=0$
   c) $x^4+x^2+2=0$
   d) $x^2-4x+4=0$
   e) $\mathrm{i}x^2-2x+\mathrm{i}=0$
   f) $(x+5\mathrm{i})(x-4\mathrm{i})-\mathrm{i}x=0$
   g) $(x+4\mathrm{i})(x-5\mathrm{i})+\mathrm{i}x=0$
   h) $(x+2\sqrt{5})(x-2\sqrt{5})=0$
   i) $\frac{x+8\mathrm{i}}{x-8\mathrm{i}}=0$
   j) $\frac{(x+8\mathrm{i})^2}{x^4+4x^2-\mathrm{i}\sqrt{2}-8\mathrm{i}}=0$

8. Oblicz:
   a) $\mathfrak{i}^4$
   b) $\mathfrak{i}^{21}$
   c) $(1+\mathfrak{i})^2$
   d) $(1+\mathfrak{i})^4$
   e) $(1+\mathfrak{i})^{24}$
   f) $(\sqrt{3}\mathfrak{i}-1)^{30}$
9. Oblicz wszystkie pierwiastki liczby zespolonej:
   a) $\sqrt[3]{16}$
   b) $\sqrt[4]{-4}$
   c) $\sqrt[3]{\mathfrak{i}}$
   d) $\sqrt[2]{1+\sqrt{3}\mathfrak{i}}$

VI. Macierze

1. Mając macierze $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 0 \end{bmatrix}$, $C = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$, $E = \begin{bmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $F = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 8 \end{bmatrix}$, $G = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 8 & 0 \end{bmatrix}$, $H = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 4 & 0 & -1 \\ -2 & 1 & 3 \end{bmatrix}$, $J = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 4 & -2 \\ 3 & 0 \end{bmatrix}$, $K = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $L = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$, $M = \begin{bmatrix} -2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & -3 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$, $N = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}$, wykonaj następujące działania (jeżeli to możliwe):

   a) $A+B$
   b) $C+D$
   c) $F+G$
   d) $B+E$
   e) $C+H$
   f) $K+L$
   g) $3M$
   h) $2C$
   i) $2C-1E$
   j) $F-2G$
   k) $2L+N-2M$
   l) $C \cdot A$
   m) $D \cdot A$
   n) $A \cdot D$
   o) $F \cdot G$
   p) $H \cdot I$
   q) $H \cdot J$
   r) $J \cdot H$
   s) $I \cdot J$
   t) $L \cdot M$
   u) $M \cdot N$
   v) $N \cdot M$
   w) N^2
   x) M^2-2K
   y) M^T
   z) $(2A-3G+F)^T$
2. Dla macierzy
$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} -1 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$
   znaleźć macierz X spełniającą równanie:

a) $4(A-X)+5(3X+B)=A-B+8X$

b) $B^T X = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T$

3. Znaleźć macierz X spełniającą równanie:

a) $X^2 = \begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $X \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} X^T$

c) $AX - 2B^2 = C$, gdzie:

- $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$
- $B = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$
- $C = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$

4. Na przykładzie macierzy

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 4 & 1 \\ -2 & 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & 2 \\ 2 & -3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

sprawdź relację $(AB)^T = B^T A^T$

5. Sprawdź, czy macierz B jest odwrotna do macierzy A. Jeżeli nie jest - jak wygląda macierz odwrotna?

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$

b) $A = \begin{bmatrix} -3 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -2 & -5 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$

c) $A = \begin{bmatrix} 5 & 1 \\ 1 & 5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 5 & -1 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}$

d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ -1 & 0 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$

e) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & -5 & -2 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

f) $A = \begin{bmatrix} 2 & 5 & 7 \\ 6 & 3 & 4 \\ 5 & -2 & -3 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -38 & 41 & -34 \\ 27 & -29 & 2 \end{bmatrix}$

g) $A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 1 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} -5 & 1 & 7 \\ 1 & 7 & -5 \\ 7 & -5 & 1 \end{bmatrix}$

h) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \frac{1}{12} \begin{bmatrix} 3 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 6 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 12 \end{bmatrix}$

6. Dla macierzy

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -1 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

oblicz:

a) $2A - B$

b) AB^T

c) $A^T B$

d) $(B^T A)^2$

7. Oblicz $B^{13} + B$ dla macierzy:

a) $\begin{bmatrix} \frac{1}{2} & \frac{\sqrt{3}}{2} \\ -\frac{\sqrt{3}}{2} & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

8. Znaleźć wzór na n-tą potęgę macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

c) $\begin{bmatrix} \cos(x) & \sin(x) & 0 \\ -\sin(x) & \cos(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

9. Znajdź x:

a) $A = \begin{vmatrix} 2x-2 & -1 \\ 7x & 2x-3 \end{vmatrix} = \frac{3}{2}$

b) $B = \begin{vmatrix} x & 1 & 0 \\ x-3 & -3x & x \\ 1 & 3 & 1 \end{vmatrix} = \frac{1}{3}$

10. Sprawdź tożsamość:

a) $\begin{vmatrix} \cos(x) & \sin(x) & 0 \\ -r\cos(x) & r\cos(x) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = r$

b) $\begin{vmatrix} 0 & -a & -b \\ a & 0 & -c \\ b & c & 0 \end{vmatrix} = 0$

11. Oblicz wyznaczniki macierzy A, B, AB oraz A^{-1}.

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 1 \\ 2 & 3 & 0 \end{bmatrix}, \; B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 2 & 3 & 1 \\ 3 & 3 & -3 \end{bmatrix}$$

Sprawdź, czy $|AB| = |A||B|$ i czy $|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$.

12. Obliczyć wyznacznik macierzy A korzystając z tego, że jeden pozadiagonalny blok jest zerowy.

- $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 & 2 & 7 \\ -2 & 3 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -3 & 5 \\ 0 & 0 & 4 & -5 \end{bmatrix}$

13. Wykazać, że:

- $\begin{vmatrix} 1 & a & a^2 \\ 1 & b & b^2 \\ 1 & c & c^2 \end{vmatrix} = (b-a)(c-a)(c-b)$

14. Obliczyć wyznacznik macierzy:

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

b) $B = \begin{bmatrix} 0 & a & 0 & 0 & 0 & 0 \\ f & 0 & b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & g & 0 & c & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h & 0 & d & 0 \\ 0 & 0 & 0 & i & 0 & e \\ 0 & 0 & 0 & 0 & j & 0 \end{bmatrix}$

c) $C = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -3 \\ 3 & 2 & -2 & 4 \\ 2 & 3 & 1 & 1 \end{bmatrix}$

d) $D = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 & 2 & 2 \\ -2 & 2 & -1 & 2 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

15. Rozwiązać równanie:

a) $\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 2 & 2 & 2 & 2 \\ 4 & 6-x & 4 & 4 \\ 6 & 6 & 6 & x \end{vmatrix} = 0$

b) $\begin{vmatrix} x^2 & 4 & 9 & 3 \\ -1 & 1-x^2 & -9 & -3 \\ 1 & 4 & 9 & 3 \\ 1 & 4 & x^2 & 3 \end{vmatrix} = 0$

16. Wykazać, że macierz:

- $A = \begin{bmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

jest odwracalna. Obliczyć A^{-1}. Rozwiązać układ równań:

$$\begin{aligned} 4x + 2y + z &= 3 \\ 2x - y &= 3 \\ x + 3y + z &= -1 \end{aligned}$$

17. Metodą eliminacji Gaussa rozwiąż układy równań:

a)

$$\begin{aligned} x + y &= 3 \\ x - 3y &= -5 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x + y + z &= 0 \\ x - y + z &= 0 \\ x + y - z &= 2 \end{aligned}$$

c)

$$\begin{aligned} x + y + z - t &= 4 \\ x + y - z + t &= -4 \\ x - y + z + t &= 2 \\ -x + y + z + t &= -2 \end{aligned}$$

Dodatkowo rozwiąż układy równań a) i b) wzorami Cramera i macierzowo.

18. Rozwiąż układy równań

a)

$$\begin{aligned} -x - y + z + t &= 4 \\ x - y - z + t &= 0 \\ x - y - z - t &= -8 \end{aligned}$$

b)

$$\begin{aligned} x + y + z &= 1 \\ 2x + y + 2z &= 1 \\ 3x + 2y + 3z &= 3 \end{aligned}$$

19. Dla jakiej wartości $a \in \mathbb{R}$ układ równań ma nieskończenie wiele rozwiązań

$$\begin{aligned} x + y + az &= 1 \\ x + ay + z &= a \\ ax + y + z &= -a - 1 \end{aligned}$$

20. Wyznacz te wartości a, dla których poniższy układ nie ma rozwiązań.

$$\begin{aligned} x + 2y + z &= 2 \\ x + y + 2z &= \operatorname{sgn}(a) - 1 \\ 2x + y + z &= 2 \\ 2y + 2z &= 0 \end{aligned}$$

21. Wyznacz wartości i wektory własne macierzy:

a) $\begin{bmatrix} 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -5 & -2 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} a & 0 & 0 \\ 0 & b & 0 \\ 0 & 0 & c \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ -2 & -2 & -1 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

f) $\begin{bmatrix} 1 & 3 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -4 \end{bmatrix}$,

g) $\begin{bmatrix} 2 & 2 & 0 \\ -2 & 1 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \end{bmatrix}$

h) $\begin{bmatrix} 2 & -1 & -1 \\ 3 & -2 & -3 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix}$

i) $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$.

22. Przekształć macierz do przestrzeni rozpiętej na wektorach własnych.

a) $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$,

b) $A = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 2 & 3 \end{bmatrix}$,

c) $A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{bmatrix}$,

d) $A = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$.

23. Wykorzystując rozkład Jordana doprowadź macierze do postaci klatkowej.

a) $\begin{bmatrix} 2 & 5 & -10 \\ 0 & 7 & -10 \\ 0 & 5 & -8 \end{bmatrix}$,

b) $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 0 & 2 & -2 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 4 & -7 & 8 \\ 6 & -7 & 7 \end{bmatrix}$,

d) $\begin{bmatrix} 4 & -5 & 7 \\ 1 & -4 & 9 \\ -4 & 0 & 5 \end{bmatrix}$,

e) $\begin{bmatrix} 4 & 6 & 0 \\ -3 & -5 & 0 \\ -3 & -6 & 1 \end{bmatrix}$,

f) $\begin{bmatrix} 3 & 0 & 8 \\ 3 & -1 & 6 \\ -2 & 0 & -5 \end{bmatrix}$,

g) $\begin{bmatrix} -2 & 8 & 6 \\ -4 & 10 & 6 \\ 4 & -8 & -4 \end{bmatrix}$,

h) $\begin{bmatrix} 1 & -3 & 0 & 3 \\ -2 & -6 & 0 & 13 \\ 0 & -3 & 1 & 3 \\ -1 & -4 & 0 & 8 \end{bmatrix}$,

i) $\begin{bmatrix} 5 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -1 \\ -1 & -1 & 3 & 0 \\ 1 & 1 & -1 & 2 \end{bmatrix}$.