Algebra 1

Michał Słowiński

Instytut Fizyki, Wydział Fizyki, Astronomii i Informatyki Stosowanej
Uniwersytet Mikołaja Kopernika w Toruniu

Toruń, rok akademicki 2022/2023

Materiał do kolokwium #1

Wektory

Wektory

Dodawanie analityczne wektorów na przykładzie wektorów trójwymiarowych.
Mamy trzy wektory:

$$\vec{x_1} = [a_1, b_1, c_1]$$

$$\vec{x_2} = [a_2, b_2, c_2]$$

$$\vec{x_3} = [a_3, b_3, c_3]$$

Ich suma:

$$\vec{x_1} + \vec{x_2} = [a_1 + a_2, b_1 + b_2, c_1 + c_2]$$

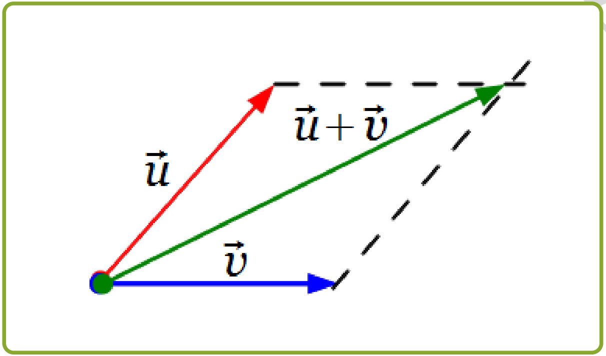
$$\vec{x_1} + \vec{x_2} + \vec{x_3} = [a_1 + a_2 + a_3, b_1 + b_2 + b_3, c_1 + c_2 + c_3]$$

W ogólności:

$$\sum_{i=1}^{n} \vec{x_i} = \left[\sum_{i=1}^{n} a_i, \sum_{i=1}^{n} b_i, \sum_{i=1}^{n} c_i,\right]$$

Wektory

Dodawanie graficzne wektorów na przykładzie wektorów dwuwymiarowych.



Kombinacja liniowa wektorów

Kombinacja liniowa wektorów w przestrzeni euklidesowej.
Wektor można przedstawić jako kombinacja liniowa innych wektorów, np:

$$\vec{x_3} = \alpha\vec{x_1} + \beta\vec{x_2} = [\alpha a_1 + \beta a_2, \alpha b_1 + \beta b_2, \alpha c_1 + \beta c_2]$$

Kombinacja liniowa wektorów

Jeżeli można znaleźć taką kombinację liniową wektorów o niezerowej długości, że w efekcie otrzymamy wektor zerowy, to wektory te są od siebie liniowo zależne. Niezależne liniowo wektory, to takie, które spełniają zależność:

$$\sum_{i=1}^{n} \xi_i \vec{x_i} = \vec{0} \iff \forall_{i \in [1,n]} \ \xi_i = 0$$

Innymi słowy, jeżeli użyjemy jakichkolwiek wektorów o niezerowej długości i potrafimy "skasować" użyte wektory przez ich dodawanie/odejmowanie, to wektory te są zależne od siebie liniowo.

Standardowy iloczyn skalarny wektorów

Standardowy iloczyn skalarny dwóch wektorów:

$$\vec{a} \odot \vec{c} = (\vec{a}, \vec{c}) = \sum_{i=1}^{n} a_i c_i$$

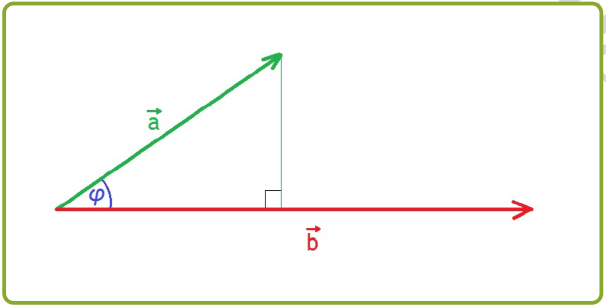
gdzie:

$$\vec{a} = [a_1, a_2, ..., a_n]$$

$$\vec{c} = [c_1, c_2, ..., c_n]$$

Standardowy iloczyn skalarny wektorów

W ujęciu geometrycznym:



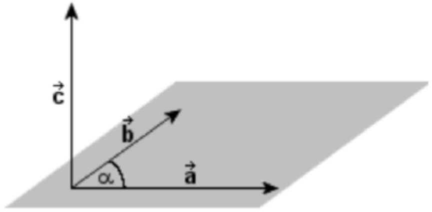
może być obliczony jako iloczyn długości rzutowanych na kierunek jednego z wektorów:

$$\vec{a} \odot \vec{b} = \left(\vec{a}, \vec{b}\right) = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \cos\left(\varphi\right)$$

Iloczyn wektorowy

Iloczyn wektorowy (na przykładzie wektorów z przestrzeni trójwymiarowej) można przedstawić jako:

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \sin\left(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})\right) \vec{e}_{\perp} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \end{vmatrix} = \vec{c}$$



Iloczyn wektorowy

Iloczyn wektorowy (na przykładzie wektorów z przestrzeni trójwymiarowej) można przedstawić jako:

$$\vec{a} \times \vec{b} = |\vec{a}| \left|\vec{b}\right| \sin\left(\sphericalangle(\vec{a}, \vec{b})\right) \vec{e}_{\perp} = \begin{vmatrix} \hat{i} & \hat{j} & \hat{k} \\ a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \end{vmatrix} = \vec{c}$$

gdzie

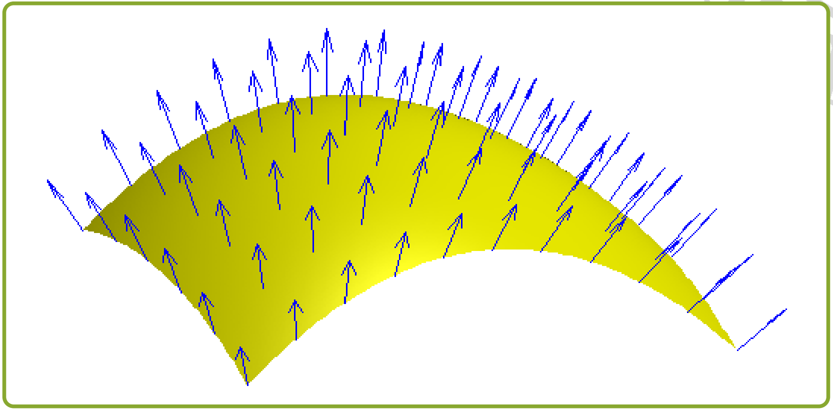
- $\hat{i}, \hat{j}, \hat{k}$ - niezależne liniowo wersory tworzące (generujące) przestrzeń trójwymiarową
- $\vec{e}_{\perp}$ - wersor prostopadły do wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$
- $\vec{a} = [a_i, a_j, a_k]$
- $\vec{b} = [b_i, b_j, b_k]$

Iloczyn wektorowy

Długość wektora będącego iloczynem wektorowym wektorów $\vec{a}$ i $\vec{b}$ jest równa polu powierzchni równoległoboku rozpiętego na wektorach $\vec{a}$ i $\vec{b}$.

Wektor normalny

Wektor normalny (w punkcie) to wektor prostopadły do płaszczyzny w danym punkcie. Wektor normalny ma długość 1.



Iloczyn mieszany

$$\left(\vec{a}, \vec{b}, \vec{c}\right) \equiv \vec{a} \odot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \odot (\vec{c} \times \vec{a}) = \vec{c} \odot (\vec{a} \times \vec{b}) =$$

$$= -\vec{a} \odot (\vec{c} \times \vec{b}) = -\vec{c} \odot (\vec{b} \times \vec{a}) = -\vec{b} \odot (\vec{a} \times \vec{c}) =$$

$$= \begin{vmatrix} a_i & a_j & a_k \\ b_i & b_j & b_k \\ c_i & c_j & c_k \end{vmatrix}$$

Podwójny iloczyn wektorowy

$$\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \odot \vec{c})\ \vec{b} - (\vec{a} \odot \vec{b})\ \vec{c}$$

Logika

Logika

Zdanie logiczne - stwierdzenie, które jest albo prawdziwe, albo fałszywe. Jeżeli zdanie jest prawdziwe, to przypisujemy mu wartość logiczną 1, jeżeli jest fałszywe, to ma wartość logiczną 0.

Operacja logiczna - operacja, dzięki której ze zdań logicznych budujemy nowe zdania logiczne.

Logika

Negacja - negacją zdania p nazywamy $\neg p$. Definiowany:

- jeżeli $p = 1$ to $\neg p = 0$
- jeżeli $p = 0$ to $\neg p = 1$

Koniunkcja - koniunkcja zdań p i q oznaczana jest jako $p \wedge q$. Definiowany tak, że otrzymuje wartość logiczną 1, gdy zarówno p i q mają wartość logiczną 1. Jeżeli p lub q mają wartość logiczną 0, to ich koniunkcja też.

Logika

Alternatywa - alternatywą zdań p i q oznaczana jest jako $p \vee q$. Alternatywa zdań przyjmuje wartość logiczną 1 wtedy, gdy którekolwiek ze zdań także przyjęło wartość logiczną 1. W przeciwnym wypadku jej wartość logiczna to 0.

Implikacja - implikacją nazywanie zdanie $p \implies q$. Zdanie p nazywane jest założeniem, zdanie q tezą implikacji. Z fałszu zawsze może wyjść prawda, z prawdy nie możemy otrzymać fałszu, Implikacja przyjmuje wartość logiczną równą 0, gdy $p = 1$ i $q = 0$, w przeciwnym wypadku wartość logiczna jest równa 1.

Logika

Równoważność - zdania logiczne są równoważne, gdy ich wartości logiczne są takie same. Równoważność $p \Leftrightarrow q$ przyjmuje wartość logiczną 1 w momencie, gdy $p = q$, natomiast gdy $p \neq q$, wartość logiczna równoważności wynosi 0.

Alternatywa wykluczająca (także: **alternatywa rozłączna**) - alternatywa, która przyjmuje wartość logiczną 0 wtedy, gdy oba zdania przyjmują wartość logiczną 1.

Tautologia

Tautologią nazywany zdanie logiczne, które jest zawsze prawdziwe.
Przykłady:

- $p \vee \neg p$ - prawo wyłączonego środka
- $(p \implies q) \Leftrightarrow \neg(p \wedge \neg q)$ dowód nie wprost (*reductio ad absurdum*)

Kwantyfikatory

Niech $\phi(a)$ będzie zdaniem dla każdego elementu a ze zbioru A. **Kwantyfikatorem ogólnym** nazywamy operację logiczną, która ze wszystkich zdań $\phi(a)$ tworzy nowe zdanie:

$$\forall_{a \in A} : \phi(a)$$

które jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy gdy dla każdego $a \in A$ zdanie $\phi(a)$ jest prawdziwe.

Kwantyfikatory

Niech $\phi(a)$ będzie zdaniem dla każdego elementu a ze zbioru A. **Kwantyfikatorem szczególnym** nazywamy operację logiczną, która ze wszystkich zdań $\phi(a)$ tworzy nowe zdanie:

$$\exists_{a \in A} : \phi(a)$$

które jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy gdy przynajmniej dla jednego $a \in A$ zdanie $\phi(a)$ jest prawdziwe.

$$\exists!_{a \in A} : \phi(a)$$

które jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy gdy dla dokładnie jednego $a \in A$ zdanie $\phi(a)$ jest prawdziwe.

Zbiory

Zbiór - pojęcie pierwotne (nie ma definicji). Zasadniczo: dowolna rodzina obiektów zwanych elementami zbioru.

Zbiór skończony: $A = \{a_1, a_2, ..., a_n\}$

- $a \in A$ - element a należy do zbioru A
- $b \notin A$ - element b nie należy do zbioru A

Zbiór pusty - zbiór, który nie zawiera elementów. $\emptyset = \{\}$

Zbiory

Zbiory

Zbiór A nazywamy podzbiorem zbioru B jeżeli

$$a \in A \implies a \in B$$

Jeżeli A jest podzbiorem zbioru B, to mówimy też, że A zawiera się w B:

$$A \subset B$$

Zbiory $\emptyset$ i A nazywamy **niewłaściwymi** podzbiorami zbioru A. Pozostałe podzbiory są **właściwymi** podzbiorami.

Zbiory

Suma zbiorów to zbiór

$$A \cup B = \{a : a \in A \vee a \in B\}$$

Iloczynem (przekrojem, częścią wspólną) zbiorów nazywamy zbiór:

$$A \cap B = \{a : a \in A \wedge a \in B\}$$

Różnicą zbiorów nazywamy zbiór:

$$A \setminus B = \{a : a \in A \wedge a \notin B\}$$

Zbiory

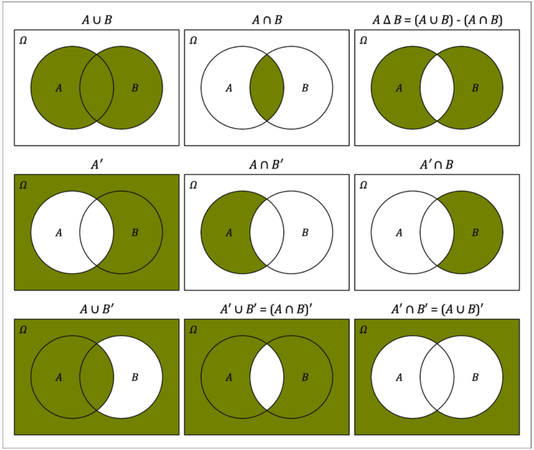
Związki na zbiorach:

- przemienność
  - $A \cup B = B \cup A$
  - $A \cap B = B \cap A$
- łączność
  - $(A \cup B) \cup C = A \cup (B \cup C)$
  - $(A \cap B) \cap C = A \cap (B \cap C)$
- rozdzielność
  - $A \cup (B \cap C) = (A \cup B) \cap (A \cup C)$
  - $A \cap (B \cup C) = (A \cap B) \cup (A \cap C)$

Inne ważne wzory:

- $A \cap (B \setminus C) = (A \cap B) \setminus C$
- $(A \cup B) \setminus C = (A \setminus C) \cup (B \setminus C)$
- $A \setminus (B \setminus C) = (A \setminus B) \cup (A \setminus C)$

Diagramy Venna



Iloczyn kartezjański

Iloczyn kartezjański zbiorów A i B to zbiór takich par liczb, że:

$$A \times B = \{(x, y) : x \in A \land y \in B\}$$

Zbiór potęgowy

Zbiór potęgowy danego zbioru do zbiór wszystkich podzbiorów danego zbioru.

$$B = P(A) = \forall_X (X \in B \Leftrightarrow X \subset A)$$

Relacje i funkcje

Relacje

Relacją n-argumentową nazywamy dowolny zbiór R iloczynu kartezjańskiego $X_1 \times X_2 \times \ldots \times X_n$.

Relacją binarną określoną na zbiorach A i B nazywamy dowolny podzbiór iloczynu kartezjańskiego $A \times B$,

$$R \subset A \times B$$

O elementach $a \in A$ i $b \in B$ mówimy, że są w relacji R i piszemy $(a, b) \in R$ lub aRb $(a \in A, b \in B)$

Relacje

Dziedzina relacji R:

$$d_R = \{x \in X : \exists_{y \in Y} \; xRy\}$$

Przeciwdziedzina relacji R:

$$d_R^{-1} = \{y \in Y : \exists_{x \in X} \; xRy\}$$

Relacja odwrotna do R:

$$R^{-1} = \{(y, x) \subset Y \times X : \; xRy\}$$

Relacje

Przypadki szczególne relacji:

1. relacja pełna: $R = X \times Y$
2. relacja pusta: $R = \emptyset$
3. relacja identyczności: $I_x \subset X \times X$

$$I_x = \{(x, y) \in X \times X : x = y\}$$

Relacje

Własności relacji:

1. zwrotna: $\forall_{x \in X}\ xRx$
2. przeciwzwrotna: $\forall_{x \in X}\ \neg xRx$
3. symetryczna: $\forall_{x,y \in X}\ xRy \implies yRx$
4. antysymetryczna: $\forall_{x,y \in X}\ (xRy \wedge yRx) \implies x = y$
5. silnie antysymetryczna (przeciwsymetryczna): $\forall_{x,y \in X}\ xRy = \neg yRx$
6. przechodnia: $\forall_{x,y,z \in X}\ xRy \wedge yRz \implies xRz$
7. spójna: $\forall_{x,y \in X}\ xRy \vee yRx$

Relację w $X \times X$ nazywamy relacją równoważności, jeżeli jest zwrotna, symetryczna i przechodnia.

Relacje

Niech A, B będą niepustymi podzbiorami. Relacje $f \subset A \times B$ nazywamy **funkcją** przekształcającą zbiór A w zbiór B, jeżeli dla **każdego** elementu $a \in A$ instnieje dokładnie jeden element $b \in B$ taki, że afb.

Dla relacji, które są funkcjami, stosujemy specjalny sposób zapisu:

- piszemy $f : A \to B$ zamiast $f \subset A \times B$
- piszemy $f(a) = b$ zamiast afb

Relacje

Element $f(a) \in B$ nazywamy wartością funkcji f w puncie $a \in A$. Zbiór A nazywamy dziedziną funkcji f, a zbiór B - przeciwdziedziną funkcji f. Obrazem funkcji f nazywamy zbiór:

$$f(A) = \{b \in B : \exists_{a \in A} : f(a) \in B\}$$

Przeciwobrazem zbioru B nazywamy zbiór:

$$f^{-1}(B) = \{a \in A : f(a) \in B\}$$

Relacje

Niech A, B będą niepustymi zbiorami. Odwzorowanie $f : A \to B$ nazywamy:

- suriekcją (odwzorowaniem A na B), jeżeli:

$$f(A) = B$$

- iniekcją (odwzorowaniem różnowartościowym), jeżeli:

$$\forall_{a_1, a_2 \in A} : a_1 \neq a_2 \implies f(a_1) \neq f(a_2)$$

- bijekcją (odwzorowaniem wzajemnie jednoznacznym), jeżeli jest bijekcją i suriekcją.

Relacje

Niech $f : X \to Y$ oraz $g : Y \to Z$. Ich złożeniem nazywamy funkcję $h : X \to Z$ taką, że:

$$h(x) = g(f(x)) \text{ dla } x \in X$$

Funkcje f i g nazywamy funkcjami składanymi, a h - funkcją złożoną. Alternatywny zapis:

$$h = g \circ f$$

$$h(x) = g(f(x)) = (g \circ f)(x)$$

Kresy

Kresy

Kres (kraniec) **górny** - supremum (od łac. *supremus*):
Najmniejsze z ograniczeń górnych danego zbioru:

$$s = \sup(A) \Leftrightarrow \forall_{a \in A}\ a \leqslant s\ \wedge\ \forall_{\epsilon > 0}\ \exists_{a \in A}\ a > s - \epsilon$$

Kres (kraniec) **dolny** - infimum (od łac. *infimus*):
Największe z ograniczeń dolnych danego zbioru:

$$s = \inf(A) \Leftrightarrow \forall_{a \in A}\ a \geqslant s\ \wedge\ \forall_{\epsilon > 0}\ \exists_{a \in A}\ a < s + \epsilon$$

Materiał do kolokwium #2

Liczby zespolone

Liczby zespolone

Zbiór liczb zespolonych $\mathbb{C}$ to zbiór rozszerzający zbiór liczb rzeczywistych $\mathbb{R}$ o jednostkę urojoną i tak, że:

$$z = a + bi$$

(postać kanoniczna liczb zespolonych)

gdy:

- $a, b \in \mathbb{R}$
- $z \in \mathbb{C}$
- $i = \sqrt{-1}$

Zapisujemy także:

- $\Re z = \mathrm{Re}(z) = a$
- $\Im z = \mathrm{Im}(z) = b$
- $z = (a, b)$

Liczby zespolone

Sprzężenie liczby zespolonej:

$$z = a + bi$$

$$\bar{z} = a - bi$$

Wykorzystanie wzoru skróconego mnożenia:

$$(a + b)(a - b) = a^2 + b^2$$

$$(a + bi)(a - bi) = a^2 + b^2 i^2 = a^2 - b^2$$

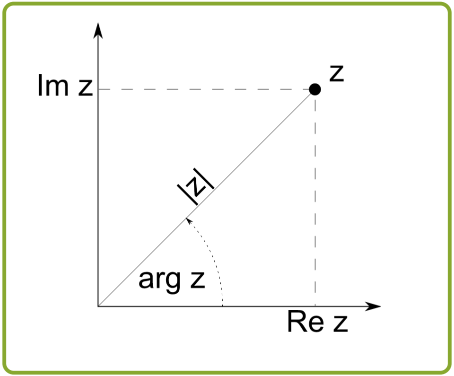
$$z\bar{z} = (\Re z)^2 - (\Im z)^2$$

Liczby zespolone

Moduł liczby zespolonej:

$$|z| = \sqrt{(\Re z)^2 + (\Im z)^2}$$

Argument liczby zespolonej to wartość kąta z osią części rzeczywistej.



Liczby zespolone

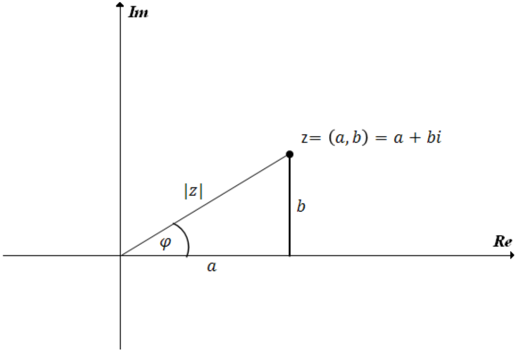
α	0	$\frac{\pi}{6}$	$\frac{\pi}{4}$	$\frac{\pi}{3}$	$\frac{\pi}{2}$	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{4}$	$\frac{5\pi}{6}$	π	$\frac{7\pi}{6}$	$\frac{5\pi}{4}$	$\frac{4\pi}{3}$	$\frac{3\pi}{2}$	$\frac{5\pi}{3}$	$\frac{7\pi}{4}$	$\frac{11\pi}{6}$	2π
α°	0°	30°	45°	60°	90°	120°	135°	150°	180°	210°	225°	240°	270°	300°	315°	330°	360°
$\sin\alpha$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0
$\cos\alpha$	1	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$-\frac{1}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	-1	$-\frac{\sqrt{3}}{2}$	$-\frac{\sqrt{2}}{2}$	$-\frac{1}{2}$	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{\sqrt{2}}{2}$	$\frac{\sqrt{3}}{2}$	1
$\operatorname{tg}\alpha$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	1	$\sqrt{3}$	-	$-\sqrt{3}$	-1	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	0
$\operatorname{ctg}\alpha$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-	$\sqrt{3}$	1	$\frac{1}{\sqrt{3}}$	0	$-\frac{1}{\sqrt{3}}$	-1	$-\sqrt{3}$	-

Postać trygonometryczna / wykładnicza

$$z = a + bi$$

$$\cos(\varphi) = \frac{a}{|z|} \to a = |z|\cos(\varphi)$$
$$\sin(\varphi) = \frac{b}{|z|} \to b = |z|\sin(\varphi)$$

$$z = |z|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$$



Postać trygonometryczna / wykładnicza

Rozwinięcie sin/cos/exp w szereg Taylora (patrz: wzór Eulera):

$$\sin(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n+1}}{(2n+1)!} = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} + \dots$$

$$\cos(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n z^{2n}}{(2n)!} = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} + \dots$$

$$\exp(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!}$$

$$\exp(iz) = 1 + iz + \frac{(iz)^2}{2!} + \frac{(iz)^3}{3!} + \dots =$$

$$(1 - \frac{z^2}{2!} + \dots) + i(z - \frac{z^3}{3!} + \dots) = \cos(z) + i\sin(z)$$

Postać trygonometryczna / wykładnicza

$$z = a + bi$$
$$z = |z|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))$$
$$z = |z|\exp(i\varphi)$$

$$\cos(x) = \frac{1}{2}(\exp(ix) + \exp(-ix))$$
$$\sin(x) = \frac{1}{2i}(\exp(ix) - \exp(-ix))$$

Najpiękniejszy wzór matematyczny

$$e^{i\pi} + 1 = 0$$

Mnożenie (i potęgowanie) liczb zespolonych

$$z = |z|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)); k = |k|(\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta))$$

$$\begin{aligned} z \cdot k = & |z||k|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))(\cos(\vartheta) + i\sin(\vartheta)) = \\ & = |z||k|(\cos(\varphi)\cos(\vartheta) + i\sin(\varphi)\cos(\vartheta) + \\ & \qquad i\cos(\varphi)\sin(\vartheta) - \sin(\varphi)\sin(\vartheta)) = \\ & = |z||k|(\cos(\varphi)\cos(\vartheta) - \sin(\varphi)\sin(\vartheta)) + \\ & \quad |z||k|(\sin(\varphi)\cos(\vartheta) + \cos(\varphi)\sin(\vartheta))i = \\ & = |z||k|(\cos(\varphi + \vartheta) + i\sin(\varphi + \vartheta)) \end{aligned}$$

Wzór de Moivre'a:

$$z^n = (|z|(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi))^n = |z|^n(\cos(n\varphi) + i\sin(n\varphi))$$

Pierwiastkowanie liczb zespolonych

Pierwiastek n-tego stopnia, w przestrzeni liczb zespolonych ma zawsze n rozwiązań!

Przykłady:

- $\sqrt[2]{16} = 4 \vee \sqrt[2]{16} = -4$, ponieważ:
  - $4^2 = 16$
  - $(-4)^2 = 16$
- $\sqrt[4]{16} = 2 \vee \sqrt[4]{16} = -2 \vee \sqrt[4]{16} = 2i \vee \sqrt[4]{16} = -2i$, ponieważ:
  - $2^4 = 16$
  - $(-2)^4 = 16$
  - $(2i)^4 = 2^4 i^4 = 16 * 1 = 16$
  - $(-2i)^4 = (-2)^4 i^4 = 16 * 1 = 16$

Pierwiastkowanie liczb zespolonych

W ogólności pierwiastki n-tego stopnia najłatwiej przedstawić dla interpretacji liczby zespolonej w funkcji od argumentu (postać trygonometryczna lub wykładnicza).

Niech $z = |z|[(\cos(\varphi) + i\sin(\varphi)]$ lub $z = |z|e^{i\varphi}$. Dla tego określonej liczby zespolonej można przedstawić wszystkie n pierwiastków n-tego stopnia za pomocą:

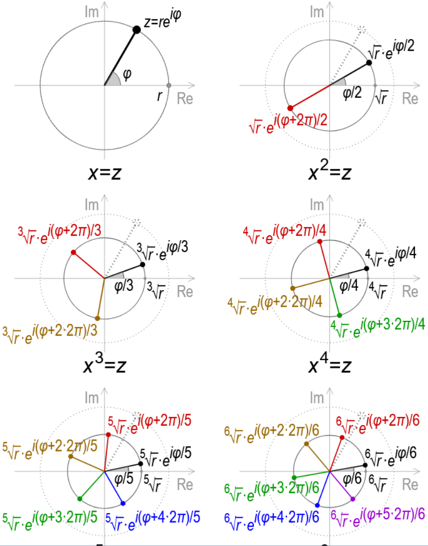
$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}\left[\cos\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right) + i\sin\left(\frac{\varphi + 2k\pi}{n}\right)\right]$$

$$\sqrt[n]{z} = \sqrt[n]{|z|}e^{\frac{\varphi+2k\pi}{n}i}$$

gdzie:

- $k = 0, 1, 2, ..., n-1$

Pierwiastkowanie liczb zespolonych



Macierze

Macierze

Operacje elementarne - dodawanie:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1n} \\ b_{21} & b_{22} & \cdots & b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{m1} & b_{m2} & \cdots & b_{mn} \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} a_{11}+b_{11} & a_{12}+b_{12} & \dots & a_{1n}+b_{1n} \\ a_{21}+b_{21} & a_{22}+b_{22} & \cdots & a_{2n}+b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}+b_{m1} & a_{m2}+b_{m2} & \cdots & a_{mn}+b_{mn} \end{bmatrix}$$

Koniecznie takie same wymiary macierzy dodawanych.

Macierze

Operacje elementarne - dodawanie:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$$

Macierze

Operacje elementarne - mnożenie:

$$\alpha \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \ldots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \ldots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

$$2 \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 \\ 6 & 8 \end{bmatrix}$$

Macierze

Operacje elementarne - mnożenie:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}_{m\times n} \cdot \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & \dots & b_{1p} \\ b_{21} & b_{22} & \dots & b_{2p} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ b_{n1} & b_{n2} & \dots & b_{np} \end{bmatrix}_{n\times p} =$$

$$= \begin{bmatrix} \sum_{s=1}^{n} a_{1s}b_{s1} & \sum_{s=1}^{n} a_{1s}b_{s2} & \dots & \sum_{s=1}^{n} a_{1s}b_{sp} \\ \sum_{s=1}^{n} a_{2s}b_{s1} & \sum_{s=1}^{n} a_{2s}b_{s2} & \dots & \sum_{s=1}^{n} a_{2s}b_{sp} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \sum_{s=1}^{n} a_{ms}b_{s1} & \sum_{s=1}^{n} a_{ms}b_{s2} & \dots & \sum_{s=1}^{n} a_{ms}b_{sp} \end{bmatrix}_{m\times p}$$

Macierze

Operacje elementarne - mnożenie:

$$\begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + 3 \cdot (-1) & 1 \cdot 2 + 3 \cdot 3 \\ (-2) \cdot (-1) + 1 \cdot (-1) & (-2) \cdot 2 + 1 \cdot 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & 11 \\ 1 & -1 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} -1 \\ -2 \\ -3 \end{bmatrix} =$$

$$= \begin{bmatrix} 1 \cdot (-1) + 2 \cdot (-2) + 3 \cdot (-3) \\ 4 \cdot (-1) + 5 \cdot (-2) + 6 \cdot (-3) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -14 \\ -32 \end{bmatrix}$$

Macierze

Operacje elementarne - transpozycja:

$$\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \dots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \dots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \dots & a_{mn} \end{bmatrix}^{T}_{m\times n} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \dots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \dots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \dots & a_{nm} \end{bmatrix}_{n\times m}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}^{T} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 5 \\ 2 & 4 & 6 \end{bmatrix}$$

Macierze

Macierz jednostkowa - macierz kwadratowa, która posiada jedynki na głównej diagonali i zera na pozostałych diagonalach.

$$\mathbb{1}_{nxn} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

Przykładowe macierze jednostkowe:

$$\mathbb{1}_{2x2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad \mathbb{1}_{3x3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Macierze

Wyznacznik macierzy - funkcja działająca na macierz, która zwraca jedną liczbę (rzeczywistą lub zespoloną, zależnie od macierzy). Wyznacznik możemy obliczyć za pomocą rozwinięcia Laplace'a (wzór ogólny).

Gdy szukamy wyznacznika $\det(A)$ macierzy A, dla każdego j lub dla każdego i zachodzi zależność:

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij},$$

gdzie

- a_{ij} - element macierzy w i-tym wierszu i j-tej kolumnie
- A_{ij} - dopełnienie algebraiczne elementu a_{ij}

Macierze

Dopełnienie algebraiczne elementu a_{ij} danej macierzy A określone jest jako iloczyn

$$A_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

gdzie M_{ij} to minor macierzy, czyli wyznacznik mniejszej macierzy (wymiar $n-1$) powstałej z usunięcia i-tego wiersza i j-tej kolumny.

Przykład:

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$A_{12} = (-1)^3 M_{12} = -\det\left(\begin{bmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{bmatrix}\right)$$

$$A_{23} = (-1)^5 M_{23} = -\det\left(\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 8 \end{bmatrix}\right)$$

Macierze

$$\det(A) = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} A_{ij} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} A_{ij}$$

Przykład (iteracja po pierwszym wierszu lub alternatywnie po drugiej kolumnie):

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 4 & 5 & 6 \\ 7 & 8 & 9 \end{bmatrix}$$

$$|A| = (-1)^{1+1} \cdot 1 \cdot \begin{vmatrix} 5 & 6 \\ 8 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{1+3} \cdot 3 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$$

$$|A| = (-1)^{1+2} \cdot 2 \cdot \begin{vmatrix} 4 & 6 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2} \cdot 5 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 9 \end{vmatrix} + (-1)^{3+2} \cdot 8 \cdot \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & 6 \end{vmatrix}$$

Macierze

Wyznacznik dla macierzy 2x2 można przedstawić za pomocą definicji permutacyjnej wyznacznika:

$$\begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Dowód za pomocą wyznacznika Laplace'a:

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

(Wzdłuż pierwszej kolumny)

$$|A| = (-1)^{1+1} a\,|d| + (-1)^{2+1} c\,|b| = ad - bc$$

(alternatywnie wzdłuż drugiego wiersza)

$$|A| = (-1)^{2+1} c\,|b| + (-1)^{2+2} d\,|a| = ad - bc$$

Macierze

Wyznacznik dla macierzy 3x3 można liczyć według reguły Sarrusa:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & k \end{vmatrix} = aek + bfg + cdh - afh - bdk - ceg$$

Dowód za pomocą wyznacznika Laplace'a (pierwsza kolumna):

$$|A| = (-1)^{1+1} a \begin{vmatrix} e & f \\ h & k \end{vmatrix} + (-1)^{2+1} d \begin{vmatrix} b & c \\ h & k \end{vmatrix} + (-1)^{3+1} g \begin{vmatrix} b & c \\ e & f \end{vmatrix}$$

$$|A| = a(ek - fh) - d(bk - ch) + g(bf - ce)$$

$$|A| = aek - afh - dbk + dch + gbf - gce$$

Macierze

Macierz odwrotna - macierz określona dla macierzy kwadratowych nieosobliwych (mających wyznacznik różny od zera). Macierz odwrotna do macierzy A oznaczona jest jako A^{-1} i spełnia warunek:

$$AA^{-1} = \mathbb{1}$$

gdzie $\mathbb{1}$ to macierz jednostkowa o wymiarach macierzy A.

Macierz odwrotną można przedstawić jako:

$$A^{-1} = (A^{\mathrm{D}})^{\mathrm{T}} \frac{1}{\det(A)},$$

gdzie

- A^{D} - macierz dopełnień algebraicznych
- $(A^{\mathrm{D}})^{\mathrm{T}}$ - macierz dołączona

Macierze

Macierz odwrotna - przykład 2x2

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1 \cdot 4 - 2 \cdot 3 = -2$$

$$A^{D} = \begin{bmatrix} 4 & -3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(A^{D})^{T} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{(A^{D})^{T}}{|A|} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} -4 & 2 \\ 3 & -1 \end{bmatrix}$$

Macierze

Macierz odwrotna - 2x2 to szczególny przypadek:

$$\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^{-1} = \frac{1}{ad - bc} \begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

Macierze

Macierz odwrotna - przykład 3x3

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$|A| = 1 \cdot 1 \cdot 0 + 2 \cdot 1 \cdot 1 + 3 \cdot 0 \cdot 1 - 1 \cdot 1 \cdot 1 - 2 \cdot 0 \cdot 0 - 3 \cdot 1 \cdot 1 = -2$$

$$(A^D)^T = \begin{bmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ -\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} \\ \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} & -\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} & \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} -1 & 3 & -1 \\ 1 & -3 & -1 \\ -1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{2} \begin{bmatrix} 1 & -3 & 1 \\ -1 & 3 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Wartość własna i wektor własny macierzy

Niech A będzie macierzą rzeczywistą (zespoloną) stopnia n:

1. Wartością własną macierzy A nazywa się każdy pierwiastek rzeczywisty (zespolony) wielomianu charakterystycznego, tj. liczbę $\lambda \in \mathbb{R}$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ spełniającą równanie:
$$w_A(\lambda) = \det(A - \lambda \mathbf{1}) = 0$$
2. Niezerowy wektor $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ $(\in \mathbb{C}^n)$ nazywamy wektorem własnym macierzy A odpowiadającym wartości własnej $\lambda \in \mathbb{R}$ $(\lambda \in \mathbb{C})$ tej macierzy, jeżeli spełnia warunek:
$$A \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix}$$

Wartość własna i wektor własny macierzy (2)

W obu przypadkach zapis równań możemy uprościć, przykład rozpisany dla rozmiaru 3x3:

1.

$$\det(\mathbf{A}-\lambda\mathbf{1}) = \det\left(\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} - \lambda \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}\right) = \begin{vmatrix} a-\lambda & b & c \\ d & e-\lambda & f \\ g & h & i-\lambda \end{vmatrix}$$

2.

$$\begin{bmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \lambda \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix}$$

$$\Updownarrow$$

$$\begin{bmatrix} a-\lambda & b & c \\ d & e-\lambda & f \\ g & h & i-\lambda \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Diagonalizowanie macierzy

Każda macierz kwadratowa rzeczywista (zespolona) stopnia n jest diagonalizowalna, jeżeli istnieje odwracalna macierz rzeczywista (zespolona) $\mathbf{P}$ taka, że macierz $\mathbf{P}^{-1} \cdot \boldsymbol{A} \cdot \mathbf{P}$ jest diagonalna (wtedy też macierz $\mathbf{P}$ diagonalizuje macierz $\boldsymbol{A}$).

Jeżeli macierz $\boldsymbol{A}$ jest diagonalizowalna, to równoznaczne jest stwierdzenie:

1. wektory własne macierzy $\boldsymbol{A}$ tworzą bazę przestrzeni $\mathbb{R}^n$ ($\mathbb{C}^n$)
2. $\boldsymbol{A} = \mathbf{P} \cdot \mathbf{D} \cdot \mathbf{P}^{-1}$, gdzie:
   - $\mathbf{D}$ - macierz diagonalna, której główną diagonalę tworzą kolejne wartości własne macierzy $\boldsymbol{A}$
   - $\mathbf{P}$ - macierz, której kolumny są wektorami własnymi odpowiadającymi kolejnym wartościom własnym wypisanym w macierzy $\mathbf{D}$.

Rozkład Jordana (1)

Rozkład Jordana, czyli doprowadzenie macierzy $\boldsymbol{A}$ do postaci Jordana z wykorzystaniem wektorów własnych macierzy $\boldsymbol{A}$. Każdą z macierzy można przedstawić jako iloczyn:

$$\boldsymbol{A} = \mathbf{PJP}^{-1}$$

gdzie:

- $\boldsymbol{A}$ - dana macierz
- $\mathbf{P}$ - nieosobliwa macierz, której *niektórymi* kolumnami są wektory własne $\boldsymbol{A}$
- $\mathbf{J}$ - szukana macierz Jordana

Rozkład Jordana (2)

Sama macierz Jordana $\mathbf{J}$ ma postać pseudo-diagonalną. Na diagonali występują tzw. klatki Jordana:

$$\mathbf{J} = \begin{bmatrix} \mathbf{J}_1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & \mathbf{J}_2 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \dots & \mathbf{J}_n \end{bmatrix}$$

gdzie

$$\mathbf{J}_k = \begin{bmatrix} \lambda_k & 1 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & \lambda_k & 1 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \lambda_k & 1 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & \lambda_k & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & \lambda_k \end{bmatrix}$$

Rozkład Jordana (3)

W przypadku, gdy liczba wektorów własnych jest mniejsza niż wymiarowość przestrzeni (np. dwa wektory własne w przestrzeni $\mathbb{R}^3$) bazę tej przestrzeni złożoną z wektorów własnych uzupełnia się o tzw. wektory dołączone, według schematu:

$$(\mathbf{A} - \lambda_k \mathbf{1}) \cdot \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{bmatrix} = \vec{x}_k$$

gdzie:

- λ_k jest wartością własną występującą wielokrotnie w wielomianie charakterystycznym, a dla której liczba wektorów własnych jest mniejsza niż krotność degeneracji
- $\vec{x}_k$ jest wektorem własnym dla wartości własnej λ_k

Tak utworzony wektor $\vec{x} = (x_1, x_2, ..., x_n)$ dopisywany jest do macierzy $\mathbf{P}$ i wraz z wektorami własnymi tworzą bazę przestrzeni.