

Wprowadzenie do teorii chaosu

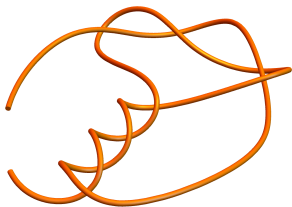
Wykład 6: fraktale

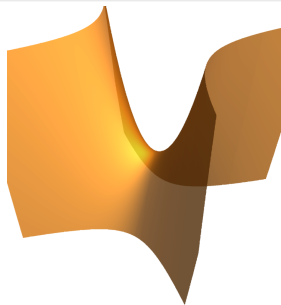
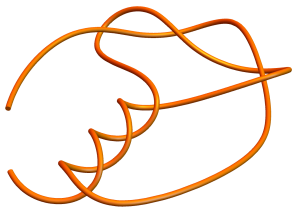
Mariusz Tarnopolski

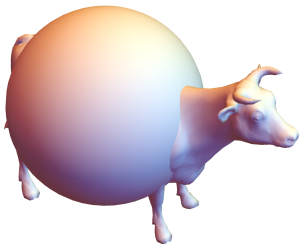
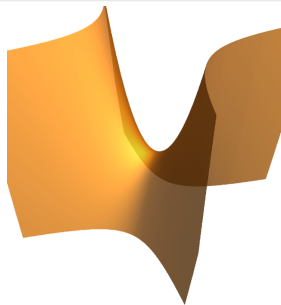
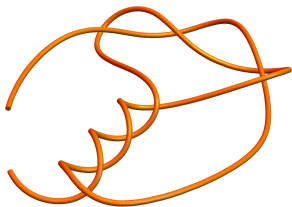
Instytut Astronomii UMK

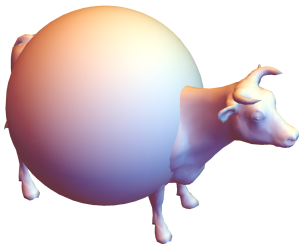
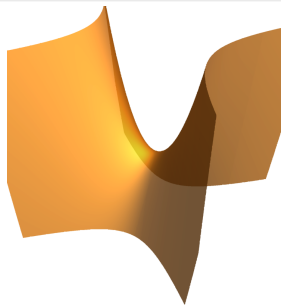
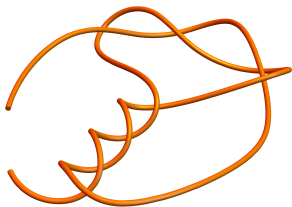
Chaos, 2023/2024











Weźmy linię ℓ o długości a .



Wymiar

Weźmy linię ℓ o długości a . Jeśli powiększymy ją dwukrotnie:



to potrzebujemy $N = 2$ linii ℓ , aby dostać linię o długości $2a$.

Weźmy linię ℓ o długości a . Jeśli powiększymy ją dwukrotnie:



to potrzebujemy $N = 2$ linii ℓ , aby dostać linię o długości $2a$. To znaczy, że

$$\text{długość}(2\ell(a)) = 2^1 \cdot \text{długość}(\ell(a))$$

lub ogólniej:

$$\text{długość}(s\ell(a)) = s^1 \cdot \text{długość}(\ell(a)).$$

Weźmy linię ℓ o długości a . Jeśli powiększymy ją dwukrotnie:



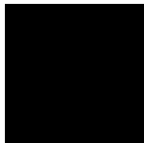
to potrzebujemy $N = 2$ linii ℓ , aby dostać linię o długości $2a$. To znaczy, że

$$\text{długość}(2\ell(a)) = 2^1 \cdot \text{długość}(\ell(a))$$

lub ogólniej:

$$\text{długość}(s\ell(a)) = s^1 \cdot \text{długość}(\ell(a)).$$

Weźmy kwadrat o boku a .



Wymiar

Weźmy linię ℓ o długości a . Jeśli powiększymy ją dwukrotnie:



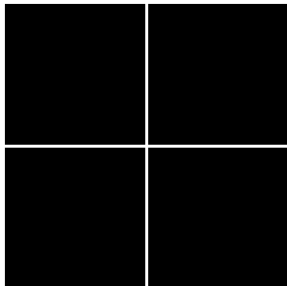
to potrzebujemy $N = 2$ linii ℓ , aby dostać linię o długości $2a$. To znaczy, że

$$\text{długość}(2\ell(a)) = 2^1 \cdot \text{długość}(\ell(a))$$

lub ogólniej:

$$\text{długość}(s\ell(a)) = s^1 \cdot \text{długość}(\ell(a)).$$

Weźmy kwadrat o boku a . Jeśli powiększymy go dwukrotnie/trzykrotnie/itd.,



to pole wzrośnie
czterokrotnie/dziewięciokrotnie/itd.

Weźmy linię ℓ o długości a . Jeśli powiększymy ją dwukrotnie:

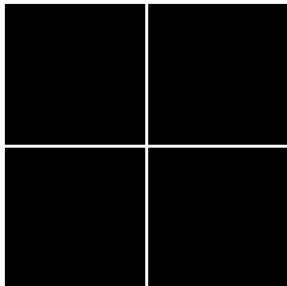


to potrzebujemy $N = 2$ linii ℓ , aby dostać linię o długości $2a$. To znaczy, że
długość($2\ell(a)$) = $2^1 \cdot$ długość($\ell(a)$)

lub ogólniej:

$$\text{długość}(s\ell(a)) = s^1 \cdot \text{długość}(\ell(a)).$$

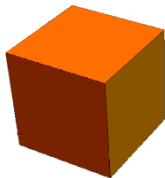
Weźmy kwadrat o boku a . Jeśli powiększymy go dwukrotnie/trzykrotnie/itd.,



to pole wzrośnie
czterokrotnie/dziewięciokrotnie/itd.

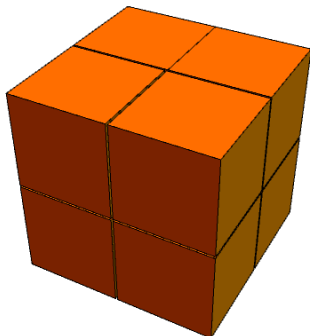
Zatem ogólnie:
pole($\square(sa)$) = $s^2 \cdot$ pole($\square(a)$).

Analogicznie dla sześcianu o boku a .



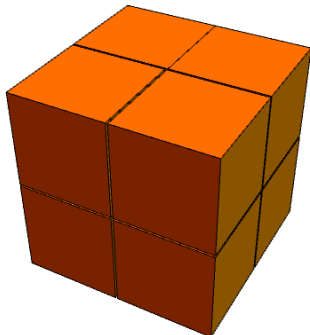
Wymiar

Analogicznie dla sześcianu o boku a . Jeśli powiększymy go dwukrotnie (trzykrotnie itd):



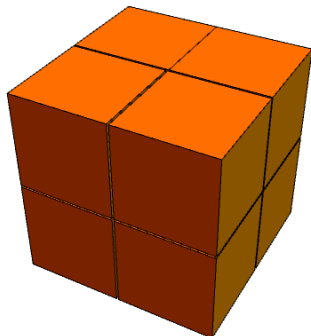
Wymiar

Analogicznie dla sześcianu o boku a . Jeśli powiększymy go dwukrotnie (trzykrotnie itd):



to potrzeba $N = 2^3$ kopii ($N = 3^3$ kopii itd.), aby zbudować ten większy sześcian.

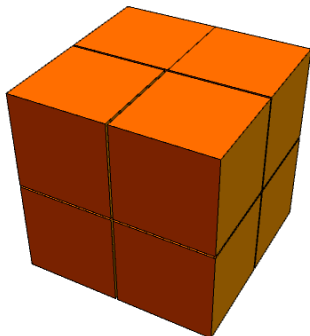
Analogicznie dla sześcianu o boku a . Jeśli powiększymy go dwukrotnie (trzykrotnie itd):



to potrzeba $N = 2^3$ kopii ($N = 3^3$ kopii itd.), aby zbudować ten większy sześcian. To znaczy, że objętość $(\text{obj}(2a)) = 2^3 \cdot \text{obj}(a)$, czyli:

$$\text{objętość}(\text{obj}(sa)) = s^3 \cdot \text{objętość}(\text{obj}(a)).$$

Analogicznie dla sześcianu o boku a . Jeśli powiększymy go dwukrotnie (trzykrotnie itd):



to potrzeba $N = 2^3$ kopii ($N = 3^3$ kopii itd.), aby zbudować ten większy sześcian. To znaczy, że objętość $(\text{obj}(2a)) = 2^3 \cdot \text{obj}(a)$, czyli:

$$\text{obj}(sa) = s^3 \cdot \text{obj}(a).$$

Dla tesseractu: hiper(4)objętość $(\text{hiper}(4)\text{obj}(sa)) = s^4 \cdot \text{hiper}(4)\text{objętość}(\text{hiper}(4)\text{obj}(a))$.

Zatem mamy:

$$\text{hiperobjętość}(sa) = s^d \cdot \text{hiperobjętość}(a),$$

gdzie d jest wymiarem bryły/przestrzeni.

¹Strogatz, Nonlinear Dynamics and Chaos; Peitgen, Jürgens, Saupe, Chaos and Fractals. New Frontiers of Science; Falconer, The Geometry of Fractal Sets

Zatem mamy:

$$\text{hiperobjętość}(sa) = s^d \cdot \text{hiperobjętość}(a),$$

gdzie d jest wymiarem bryły/przestrzeni.

Równoważnie: jeśli przeskalujemy obiekt d -wymiarowy o czynnik s , to dostaniemy

$$N = s^d$$

kopii wyjściowego obiektu

¹Strogatz, Nonlinear Dynamics and Chaos; Peitgen, Jürgens, Saupe, Chaos and Fractals. New Frontiers of Science; Falconer, The Geometry of Fractal Sets

Zatem mamy:

$$\text{hiperobjętość}(sa) = s^d \cdot \text{hiperobjętość}(a),$$

gdzie d jest wymiarem bryły/przestrzeni.

Równoważnie: jeśli przeskalujemy obiekt d -wymiarowy o czynnik s , to dostaniemy

$$N = s^d$$

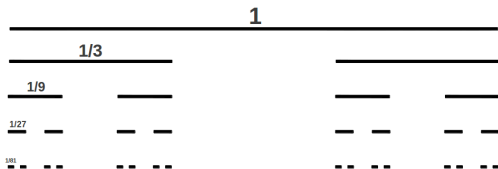
kopii wyjściowego obiektu, skąd po zlogarytmowaniu otrzymamy wzór

$$d = \frac{\ln N}{\ln s}$$

¹Strogatz, Nonlinear Dynamics and Chaos; Peitgen, Jürgens, Saupe, Chaos and Fractals. New Frontiers of Science; Falconer, The Geometry of Fractal Sets

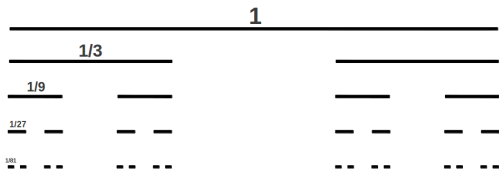
Zbiór Cantora

Weźmy odcinek o długości 1. Usuwamy **otwarty** przedział ze środka; powtarzamy następnie z każdym z uzyskiwanych przedziałów **domkniętych**.



Zbiór Cantora

Weźmy odcinek o długości 1. Usuwamy **otwarty** przedział ze środka; powtarzamy następnie z każdym z uzyskiwanych przedziałów **domkniętych**.



Długość każdego z przedziałów:

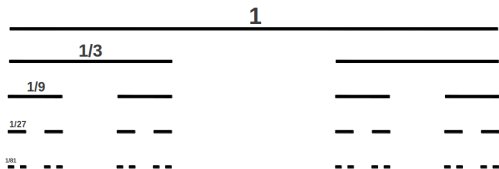
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = 0$$

Całkowita długość przedziałów:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 0$$

Zbiór Cantora

Weźmy odcinek o długości 1. Usuwamy **otwarty** przedział ze środka; powtarzamy następnie z każdym z uzyskiwanych przedziałów **domkniętych**.



Długość każdego z przedziałów:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = 0$$

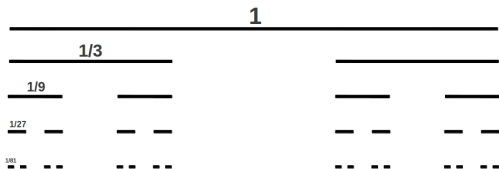
Całkowita długość przedziałów:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 0$$

zatem zbiór Cantora, \mathcal{C} , składa się z punktów, ale nie z odcinków. Jaki ma wymiar?

Zbiór Cantora

Weźmy odcinek o długości 1. Usuwamy **otwarty** przedział ze środka; powtarzamy następnie z każdym z uzyskiwanych przedziałów **domkniętych**.



Długość każdego z przedziałów:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = 0$$

Całkowita długość przedziałów:

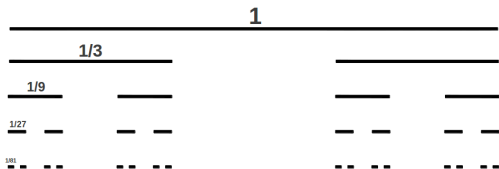
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 0$$

zatem zbiór Cantora, \mathcal{C} , składa się z punktów, ale nie z odcinków. Jaki ma wymiar?

$$d = \frac{\ln N}{\ln s} =$$

Zbiór Cantora

Weźmy odcinek o długości 1. Usuwamy **otwarty** przedział ze środka; powtarzamy następnie z każdym z uzyskiwanych przedziałów **domkniętych**.



Długość każdego z przedziałów:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = 0$$

Całkowita długość przedziałów:

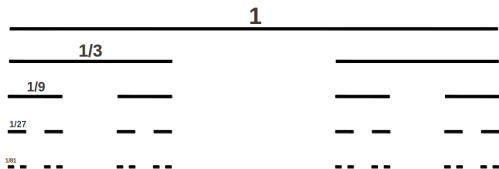
$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 0$$

zatem zbiór Cantora, \mathcal{C} , składa się z punktów, ale nie z odcinków. Jaki ma wymiar?

$$d = \frac{\ln N}{\ln s} = \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

Zbiór Cantora

Weźmy odcinek o długości 1. Usuwamy **otwarty** przedział ze środka; powtarzamy następnie z każdym z uzyskiwanych przedziałów **domkniętych**.



Długość każdego z przedziałów:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = 0$$

Całkowita długość przedziałów:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 0$$

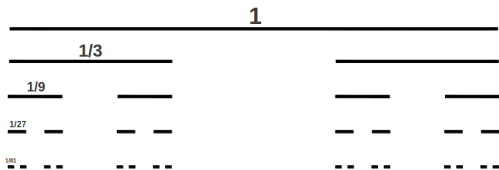
zatem zbiór Cantora, \mathcal{C} , składa się z punktów, ale nie z odcinków. Jaki ma wymiar?

$$d = \frac{\ln N}{\ln s} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.631$$

Nie jest to zatem linia, ale jednak jest to *coś więcej* niż zbiór punktów.

Zbiór Cantora

Weźmy odcinek o długości 1. Usuwamy **otwarty** przedział ze środka; powtarzamy następnie z każdym z uzyskiwanych przedziałów **domkniętych**.



Długość każdego z przedziałów:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{1}{3}\right)^k = 0$$

Całkowita długość przedziałów:

$$\lim_{k \rightarrow \infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = 0$$

zatem zbiór Cantora, \mathcal{C} , składa się z punktów, ale nie z odcinków. Jaki ma wymiar?

$$d = \frac{\ln N}{\ln s} = \frac{\ln 2}{\ln 3} \approx 0.631$$

Nie jest to zatem linia, ale jednak jest to *coś więcej* niż zbiór punktów. Ile jest punktów w zbiorze Cantora?

Ile jest liczb rzeczywistych? Czy jest ich tyle samo co naturalnych?

²Słupecki & Borkowski, Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości

Ile jest liczb rzeczywistych? Czy jest ich tyle samo co naturalnych?

- Algebrą zbiorów zajmuje się teoria mnogości.
- Zbiory dzielimy na przeliczalne i nieprzeliczalne.
- Moc zbioru (czyli liczebność) określają liczby kardynalne.
- Zbiory A i B są równoliczne, jeśli każdemu $a \in A$ można przyporządkować dokładnie jeden $b \in B$ i vice versa (bijekcja):

²Stupecki & Borkowski, Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości

Ile jest liczb rzeczywistych? Czy jest ich tyle samo co naturalnych?

- Algebrą zbiorów zajmuje się teoria mnogości.
- Zbiory dzielimy na przeliczalne i nieprzeliczalne.
- Moc zbioru (czyli licznosc) określają liczby kardynalne.
- Zbiory A i B są równoliczne, jeśli każdemu $a \in A$ można przyporządkować dokładnie jeden $b \in B$ i vice versa (bijekcja):

²Stupecki & Borkowski, Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości

Ile jest liczb rzeczywistych? Czy jest ich tyle samo co naturalnych?

- Algebrą zbiorów zajmuje się teoria mnogości.
- Zbiory dzielimy na przeliczalne i nieprzeliczalne.
- Moc zbioru (czyli liczebność) określają liczby kardynalne.
- Zbiory A i B są równoliczne, jeśli każdemu $a \in A$ można przyporządkować dokładnie jeden $b \in B$ i vice versa (bijekcja):

²Stupecki & Borkowski, Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości

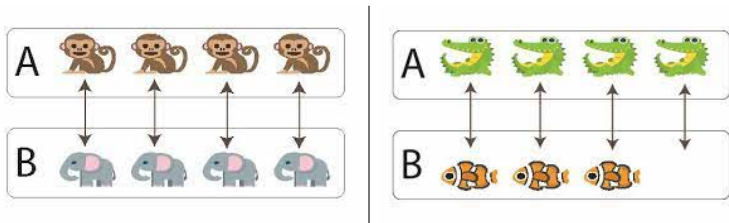
Ile jest liczb rzeczywistych? Czy jest ich tyle samo co naturalnych?

- Algebrą zbiorów zajmuje się teoria mnogości.
- Zbiory dzielimy na przeliczalne i nieprzeliczalne.
- Moc zbioru (czyli liczebność) określają liczby kardynalne.
- Zbiory A i B są równoliczne, jeśli każdemu $a \in A$ można przyporządkować dokładnie jeden $b \in B$ i vice versa (bijekcja):

²Słupecki & Borkowski, Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości

Ile jest liczb rzeczywistych? Czy jest ich tyle samo co naturalnych?

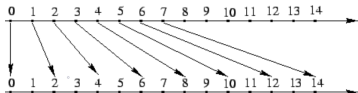
- Algebrą zbiorów zajmuje się teoria mnogości.
- Zbiory dzielimy na przeliczalne i nieprzeliczalne.
- Moc zbioru (czyli liczność) określają liczby kardynalne.
- Zbiory A i B są równoliczne, jeśli każdemu $a \in A$ można przyporządkować dokładnie jeden $b \in B$ i vice versa (bijekcja):



²Stupecki & Borkowski, Elementy logiki matematycznej i teorii mnogości

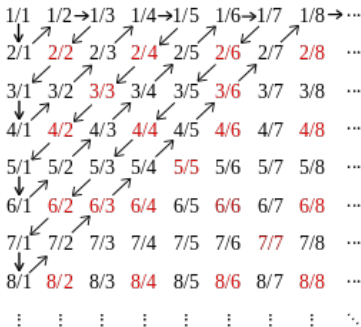
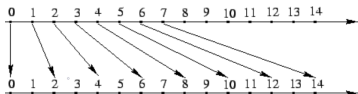
Teoria mnogości

- Liczb parzystych (nieparzystych) jest tyle samo co liczb naturalnych. Tyle samo jest też liczb całkowitych.



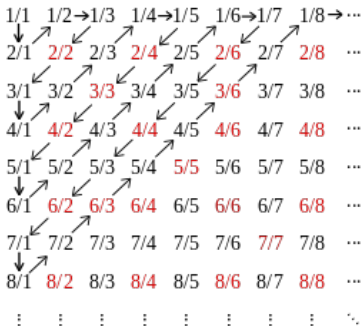
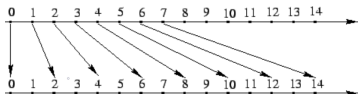
Teoria mnogości

- Liczb parzystych (nieparzystych) jest tyle samo co liczb naturalnych. Tyle samo jest też liczb całkowitych.
- Liczb wymiernych jest tyle samo co liczb naturalnych.



Teoria mnogości

- Liczb parzystych (nieparzystych) jest tyle samo co liczb naturalnych. Tyle samo jest też liczb całkowitych.
- Liczb wymiernych jest tyle samo co liczb naturalnych.



Są to zbiory **przeliczalne** (choć nieskończone). Ich moc oznacza się symbolem \aleph_0 . Jest to pierwsza tzw. **pozaskończona liczba kardynalna**.

Twierdzenie Cantora

Oznaczmy moc zbioru liczb rzeczywistych przez \mathfrak{c} (continuum).
Ponieważ $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, to $\aleph_0 \leq \mathfrak{c}$. Zachodzi ❶ $\aleph_0 < \mathfrak{c}$ czy ❷ $\aleph_0 = \mathfrak{c}$?

Twierdzenie Cantora

Oznaczmy moc zbioru liczb rzeczywistych przez \mathfrak{c} (continuum).

Ponieważ $\mathbb{N} \subset \mathbb{R}$, to $\aleph_0 \leq \mathfrak{c}$. Zachodzi ❶ $\aleph_0 < \mathfrak{c}$ czy ❷ $\aleph_0 = \mathfrak{c}$?

Metoda przekątniowa Cantora:

wypiszmy w pewnym porządku wszystkie liczby rzeczywiste z przedziału $(0, 1)$:

$$x_1 = 0.y_{11}y_{12}y_{13} \dots y_{1n} \dots$$

$$x_2 = 0.y_{21}y_{22}y_{23} \dots y_{2n} \dots$$

$$x_3 = 0.y_{31}y_{32}y_{33} \dots y_{3n} \dots$$

\vdots

$$x_n = 0.y_{n1}y_{n2}y_{n3} \dots y_{nn} \dots$$

\vdots

gdzie y_{ij} oznacza j -tą po przecinku cyfrę rozwinięcia właściwego liczby x_i .

Zdefiniujmy pewną liczbę postaci $z = 0.z_1z_2z_3 \dots$ wg reguły

$$z_n = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } y_{nn} \neq 1 \\ 2 & \text{jeśli } y_{nn} = 1 \end{cases}$$

Twierdzenie Cantora

Zdefiniujmy pewną liczbę postaci $z = 0.z_1z_2z_3 \dots$ wg reguły

$$z_n = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } y_{nn} \neq 1 \\ 2 & \text{jeśli } y_{nn} = 1 \end{cases}$$

Dwie liczby rzeczywiste u i v są sobie równe wtedy i tylko wtedy gdy mają takie same rozwinięcia dziesiętne, tj. $u_{ij} = v_{ij}$.

Zdefiniujmy pewną liczbę postaci $z = 0.z_1z_2z_3 \dots$ wg reguły

$$z_n = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } y_{nn} \neq 1 \\ 2 & \text{jeśli } y_{nn} = 1 \end{cases}$$

Dwie liczby rzeczywiste u i v są sobie równe wtedy i tylko wtedy gdy mają takie same rozwinięcia dziesiętne, tj. $u_{ij} = v_{ij}$. Liczba z jest przeto różna od **każdej** x_i , a zatem istnieją liczby rzeczywiste $\in (0, 1)$, które nie znalazły się na naszej liście wszystkich liczb rzeczywistych z przedziału $(0, 1) \Rightarrow$ sprzeczność, czyli zbiór $(0, 1)$ jest nieprzeliczalny.

Zdefiniujemy pewną liczbę postaci $z = 0.z_1z_2z_3 \dots$ wg reguły

$$z_n = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } y_{nn} \neq 1 \\ 2 & \text{jeśli } y_{nn} = 1 \end{cases}$$

Dwie liczby rzeczywiste u i v są sobie równe wtedy i tylko wtedy gdy mają takie same rozwinięcia dziesiętne, tj. $u_{ij} = v_{ij}$. Liczba z jest przeto różna od **każdej** x_i , a zatem istnieją liczby rzeczywiste $\in (0, 1)$, które nie znalazły się na naszej liście wszystkich liczb rzeczywistych z przedziału $(0, 1) \Rightarrow$ sprzeczność, czyli zbiór $(0, 1)$ jest nieprzeliczalny.

Przedział $(0, 1)$ jest równoliczny z przedziałem (a, b) , $a < b$, ponieważ $\exists f : (0, 1) \rightarrow (a, b)$, która jest bijekcją: $f(x) = a + (b - a)x$.

Zdefiniujemy pewną liczbę postaci $z = 0.z_1z_2z_3 \dots$ wg reguły

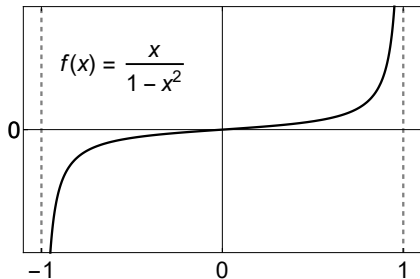
$$z_n = \begin{cases} 1 & \text{jeśli } y_{nn} \neq 1 \\ 2 & \text{jeśli } y_{nn} = 1 \end{cases}$$

Dwie liczby rzeczywiste u i v są sobie równe wtedy i tylko wtedy gdy mają takie same rozwinięcia dziesiętne, tj. $u_{ij} = v_{ij}$. Liczba z jest przeto różna od **każdej** x_i , a zatem istnieją liczby rzeczywiste $\in (0, 1)$, które nie znalazły się na naszej liście wszystkich liczb rzeczywistych z przedziału $(0, 1) \Rightarrow$ sprzeczność, czyli zbiór $(0, 1)$ jest nieprzeliczalny.

Przedział $(0, 1)$ jest równoliczny z przedziałem (a, b) , $a < b$, ponieważ $\exists f : (0, 1) \rightarrow (a, b)$, która jest bijekcją: $f(x) = a + (b - a)x$.

(Istnieją też bijekcje między $(0, 1)$ a $[0, 1)$ oraz $[0, 1]$.)

Twierdzenie Cantora

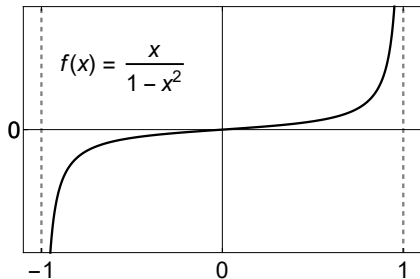


W szczególności, przedział $(0, 1)$ jest równoliczny z $(-1, 1)$, który z kolei jest równoliczny z \mathbb{R} , ponieważ $\exists f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, która jest bijekcją, a zatem zachodzi

$$\aleph_0 < \mathfrak{c}$$



Twierdzenie Cantora



W szczególności, przedział $(0, 1)$ jest równoliczny z $(-1, 1)$, który z kolei jest równoliczny z \mathbb{R} , ponieważ $\exists f : (-1, 1) \rightarrow \mathbb{R}$, która jest bijekcją, a zatem zachodzi

$$\aleph_0 < \mathfrak{c}$$

□

Arytmetyka liczb pozaskończonych ($k \in \mathbb{N}$)

- $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$
- $k^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$
- $k \cdot \aleph_0 = \aleph_0$
- $\aleph_0 \cdot \aleph_0 = \aleph_0$
- $\aleph_0^k = \aleph_0$
- $k \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$
- $\mathfrak{c} \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$
- $\mathfrak{c}^k = \mathfrak{c}$
- $\mathfrak{c}^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$
- $\aleph_0 \cdot \mathfrak{c} = \mathfrak{c}$
- $\aleph_0^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$

Dodatkowe ciekawostki

- \aleph_1 to najmniejsza liczba nieprzeliczalna. Hipoteza continuum mówi, że $\aleph_1 = \mathfrak{c}$.
- \aleph_1 — moc zbioru wszystkich funkcji ciągłych z \mathbb{R} w \mathbb{R} .
- Skala alefów: $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots$, co prowadzi do \aleph_{\aleph_0} — pierwsza liczba pozaskończona, która jest większa od nieskończenie wielu liczb pozaskończonych.
- Ponieważ $2^m > m$ dla dowolnej liczby kardynalnej m , to $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$; ponadto zachodzi $2^{\mathfrak{c}} = \aleph_0^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$.
- Skala betów: $\beth_0 = \aleph_0$, $\beth_{k+1} = 2^{\beth_k}$ — moc zbioru podzbiorów zbioru poprzedniego.
- \beth_2 ($= 2^{\mathfrak{c}}$ przy założeniu uogólnionej hipotezy continuum) — moc zbioru:
 - wszystkich funkcji z \mathbb{R} w \mathbb{R} ,
 - wszystkich fraktali deterministycznych,
 - wszystkich fraktali losowych.
- $\aleph_{\aleph_0}^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_0} + \aleph_{\aleph_4}$

Dodatkowe ciekawostki

- \aleph_1 to najmniejsza liczba nieprzeliczalna. Hipoteza continuum mówi, że $\aleph_1 = \mathfrak{c}$.
- \aleph_1 — moc zbioru wszystkich funkcji ciągłych z \mathbb{R} w \mathbb{R} .
- Skala alefów: $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots$, co prowadzi do \aleph_{\aleph_0} — pierwsza liczba pozaskończona, która jest większa od nieskończenie wielu liczb pozaskończonych.
- Ponieważ $2^m > m$ dla dowolnej liczby kardynalnej m , to $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$; ponadto zachodzi $2^{\mathfrak{c}} = \aleph_0^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$.
- Skala betów: $\beth_0 = \aleph_0$, $\beth_{k+1} = 2^{\beth_k}$ — moc zbioru podzbiorów zbioru poprzedniego.
- \beth_2 ($= 2^{\mathfrak{c}}$ przy założeniu uogólnionej hipotezy continuum) — moc zbioru:
 - wszystkich funkcji z \mathbb{R} w \mathbb{R} ,
 - wszystkich fraktali deterministycznych,
 - wszystkich fraktali losowych.
- $\aleph_{\aleph_0}^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_0} + \aleph_{\aleph_4}$

Dodatkowe ciekawostki

- \aleph_1 to najmniejsza liczba nieprzeliczalna. Hipoteza continuum mówi, że $\aleph_1 = \mathfrak{c}$.
- \aleph_1 — moc zbioru wszystkich funkcji ciągłych z \mathbb{R} w \mathbb{R} .
- Skala alefów: $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots$, co prowadzi do \aleph_{\aleph_0} — pierwsza liczba pozaskończona, która jest większa od nieskończenie wielu liczb pozaskończonych.
- Ponieważ $2^m > m$ dla dowolnej liczby kardynalnej m , to $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$; ponadto zachodzi $2^{\mathfrak{c}} = \aleph_0^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$.
- Skala betów: $\beth_0 = \aleph_0$, $\beth_{k+1} = 2^{\beth_k}$ — moc zbioru podzbiorów zbioru poprzedniego.
- \beth_2 ($= 2^{\mathfrak{c}}$ przy założeniu uogólnionej hipotezy continuum) — moc zbioru:
 - wszystkich funkcji z \mathbb{R} w \mathbb{R} ,
 - wszystkich fraktali deterministycznych,
 - wszystkich fraktali losowych.
- $\aleph_{\aleph_0}^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_0} + \aleph_{\aleph_4}$

Dodatkowe ciekawostki

- \aleph_1 to najmniejsza liczba nieprzeliczalna. Hipoteza continuum mówi, że $\aleph_1 = \mathfrak{c}$.
- \aleph_1 — moc zbioru wszystkich funkcji ciągłych z \mathbb{R} w \mathbb{R} .
- Skala alefów: $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots$, co prowadzi do \aleph_{\aleph_0} — pierwsza liczba pozaskończona, która jest większa od nieskończenie wielu liczb pozaskończonych.
- Ponieważ $2^m > m$ dla dowolnej liczby kardynalnej m , to $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$; ponadto zachodzi $2^{\mathfrak{c}} = \aleph_0^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$.
- Skala betów: $\beth_0 = \aleph_0$, $\beth_{k+1} = 2^{\beth_k}$ — moc zbioru podzbiorów zbioru poprzedniego.
- \beth_2 ($= 2^{\mathfrak{c}}$ przy założeniu uogólnionej hipotezy continuum) — moc zbioru:
 - wszystkich funkcji z \mathbb{R} w \mathbb{R} ,
 - wszystkich fraktali deterministycznych,
 - wszystkich fraktali losowych.
- $\aleph_{\aleph_0}^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_0} + \aleph_{\aleph_1}$

Dodatkowe ciekawostki

- \aleph_1 to najmniejsza liczba nieprzeliczalna. Hipoteza continuum mówi, że $\aleph_1 = \mathfrak{c}$.
- \aleph_1 — moc zbioru wszystkich funkcji ciągłych z \mathbb{R} w \mathbb{R} .
- Skala alefów: $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots$, co prowadzi do \aleph_{\aleph_0} — pierwsza liczba pozaskończona, która jest większa od nieskończenie wielu liczb pozaskończonych.
- Ponieważ $2^m > m$ dla dowolnej liczby kardynalnej m , to $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$; ponadto zachodzi $2^{\mathfrak{c}} = \aleph_0^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$.
- Skala betów: $\beth_0 = \aleph_0$, $\beth_{k+1} = 2^{\beth_k}$ — moc zbioru podzbiorów zbioru poprzedniego.
- \beth_2 ($= 2^{\mathfrak{c}}$ przy założeniu uogólnionej hipotezy continuum) — moc zbioru:
 - wszystkich funkcji z \mathbb{R} w \mathbb{R} ,
 - wszystkich fraktali deterministycznych,
 - wszystkich fraktali losowych.
- $\aleph_{\aleph_0}^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_0} + \aleph_{\aleph_1}$

Dodatkowe ciekawostki

- \aleph_1 to najmniejsza liczba nieprzeliczalna. Hipoteza continuum mówi, że $\aleph_1 = \mathfrak{c}$.
- \aleph_1 — moc zbioru wszystkich funkcji ciągłych z \mathbb{R} w \mathbb{R} .
- Skala alefów: $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots$, co prowadzi do \aleph_{\aleph_0} — pierwsza liczba pozaskończona, która jest większa od nieskończenie wielu liczb pozaskończonych.
- Ponieważ $2^m > m$ dla dowolnej liczby kardynalnej m , to $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$; ponadto zachodzi $2^{\mathfrak{c}} = \aleph_0^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$.
- Skala betów: $\beth_0 = \aleph_0$, $\beth_{k+1} = 2^{\beth_k}$ — moc zbioru podzbiorów zbioru poprzedniego.
- \beth_2 ($= 2^{\mathfrak{c}}$ przy założeniu uogólnionej hipotezy continuum) — moc zbioru:
 - wszystkich funkcji z \mathbb{R} w \mathbb{R} ,
 - wszystkich **fraktali deterministycznych**,
 - wszystkich **fraktali losowych**.
- $\aleph_{\aleph_0}^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_0} + \aleph_{\aleph_1}$

Dodatkowe ciekawostki

- \aleph_1 to najmniejsza liczba nieprzeliczalna. Hipoteza continuum mówi, że $\aleph_1 = \mathfrak{c}$.
- \aleph_1 — moc zbioru wszystkich funkcji ciągłych z \mathbb{R} w \mathbb{R} .
- Skala alefów: $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots$, co prowadzi do \aleph_{\aleph_0} — pierwsza liczba pozaskończona, która jest większa od nieskończenie wielu liczb pozaskończonych.
- Ponieważ $2^m > m$ dla dowolnej liczby kardynalnej m , to $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$; ponadto zachodzi $2^{\mathfrak{c}} = \aleph_0^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$.
- Skala betów: $\beth_0 = \aleph_0$, $\beth_{k+1} = 2^{\beth_k}$ — moc zbioru podzbiorów zbioru poprzedniego.
- \beth_2 ($= 2^{\mathfrak{c}}$ przy założeniu uogólnionej hipotezy continuum) — moc zbioru:
 - wszystkich funkcji z \mathbb{R} w \mathbb{R} ,
 - wszystkich fraktali deterministycznych,
 - wszystkich fraktali losowych.
- $\aleph_{\aleph_0}^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_0} + \aleph_{\aleph_1}$

Dodatkowe ciekawostki

- \aleph_1 to najmniejsza liczba nieprzeliczalna. Hipoteza continuum mówi, że $\aleph_1 = \mathfrak{c}$.
- \aleph_1 — moc zbioru wszystkich funkcji ciągłych z \mathbb{R} w \mathbb{R} .
- Skala alefów: $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots$, co prowadzi do \aleph_{\aleph_0} — pierwsza liczba pozaskończona, która jest większa od nieskończenie wielu liczb pozaskończonych.
- Ponieważ $2^m > m$ dla dowolnej liczby kardynalnej m , to $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$; ponadto zachodzi $2^{\mathfrak{c}} = \aleph_0^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$.
- Skala betów: $\beth_0 = \aleph_0$, $\beth_{k+1} = 2^{\beth_k}$ — moc zbioru podzbiorów zbioru poprzedniego.
- \beth_2 ($= 2^{\mathfrak{c}}$ przy założeniu uogólnionej hipotezy continuum) — moc zbioru:
 - wszystkich funkcji z \mathbb{R} w \mathbb{R} ,
 - wszystkich **fraktali deterministycznych**,
 - wszystkich **fraktali losowych**.

$$\aleph_{\aleph_0}^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_0} + \aleph_{\aleph_1}$$

Dodatkowe ciekawostki

- \aleph_1 to najmniejsza liczba nieprzeliczalna. Hipoteza continuum mówi, że $\aleph_1 = \mathfrak{c}$.
- \aleph_1 — moc zbioru wszystkich funkcji ciągłych z \mathbb{R} w \mathbb{R} .
- Skala alefów: $\aleph_0, \aleph_1, \aleph_2, \dots$, co prowadzi do \aleph_{\aleph_0} — pierwsza liczba pozaskończona, która jest większa od nieskończenie wielu liczb pozaskończonych.
- Ponieważ $2^m > m$ dla dowolnej liczby kardynalnej m , to $2^{\mathfrak{c}} > \mathfrak{c}$; ponadto zachodzi $2^{\mathfrak{c}} = \aleph_0^{\mathfrak{c}} = \mathfrak{c}^{\mathfrak{c}}$.
- Skala betów: $\beth_0 = \aleph_0$, $\beth_{k+1} = 2^{\beth_k}$ — moc zbioru podzbiorów zbioru poprzedniego.
- \beth_2 ($= 2^{\mathfrak{c}}$ przy założeniu uogólnionej hipotezy continuum) — moc zbioru:
 - wszystkich funkcji z \mathbb{R} w \mathbb{R} ,
 - wszystkich **fraktali deterministycznych**,
 - wszystkich **fraktali losowych**.
- $\aleph_{\aleph_0}^{\aleph_0} \leq 2^{\aleph_0} + \aleph_{\aleph_4}$

Moc zbioru Cantora

Dowód przekątniowy

Metoda przekątniowa — wykorzystamy rozwinięcie trójkowe liczb należących do zbioru Cantora. Np. 11 w systemie dziesiętnym (1011 w systemie binarnym: $11 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$) to 102 w systemie trójkowym: $11 = 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0$.

Moc zbioru Cantora

Dowód przekątniowy

Metoda przekątniowa — wykorzystamy rozwinięcie trójkowe liczb należących do zbioru Cantora. Np. 11 w systemie dziesiętnym (1011 w systemie binarnym: $11 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$) to 102 w systemie trójkowym: $11 = 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0$. System trójkowy jest naturalny przy opisie zbioru Cantora, bo \mathcal{C} powstaje przez sukcesywne dzielenie otrzymywanych przedziałów na trzy części.

Moc zbioru Cantora

Dowód przekątniowy

Metoda przekątniowa — wykorzystamy rozwinięcie trójkowe liczb należących do zbioru Cantora. Np. 11 w systemie dziesiętnym (1011 w systemie binarnym: $11 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$) to 102 w systemie trójkowym: $11 = 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0$. System trójkowy jest naturalny przy opisie zbioru Cantora, bo \mathcal{C} powstaje przez sukcesywne dzielenie otrzymywanych przedziałów na trzy części.

Liczba $x \in \mathcal{C}$ ma rozwinięcie trójkowe postaci

$$x = 0.d_1d_2d_3\dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{3^k}$$

$d_k \in \{0, 2\}$, gdzie d_1 mówi, czy liczba leży w lewej (0) czy prawej (2) jednej trzeciej wyjściowego odcinka (nie może leżeć w środkowej (1) bo go całkowicie usuwamy).

Moc zbioru Cantora

Dowód przekątniowy

Metoda przekątniowa — wykorzystamy rozwinięcie trójkowe liczb należących do zbioru Cantora. Np. 11 w systemie dziesiętnym (1011 w systemie binarnym: $11 = 1 \cdot 2^3 + 0 \cdot 2^2 + 1 \cdot 2^1 + 1 \cdot 2^0$) to 102 w systemie trójkowym: $11 = 1 \cdot 3^2 + 0 \cdot 3^1 + 2 \cdot 3^0$. System trójkowy jest naturalny przy opisie zbioru Cantora, bo \mathcal{C} powstaje przez sukcesywne dzielenie otrzymywanych przedziałów na trzy części.

Liczba $x \in \mathcal{C}$ ma rozwinięcie trójkowe postaci

$$x = 0.d_1d_2d_3\dots = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{3^k}$$

$d_k \in \{0, 2\}$, gdzie d_1 mówi, czy liczba leży w lewej (0) czy prawej (2) jednej trzeciej wyjściowego odcinka (nie może leżeć w środkowej (1) bo go całkowicie usuwamy). Z kolei d_2 określa, czy x leży w lewej czy prawej jednej trzeciej odcinka określonego przez d_1 itd.

Moc zbioru Cantora

Dowód przekątniowy

Uporządkujmy wszystkie $x \in \mathcal{C}$:

$$x_1 = 0.d_{11}d_{12}d_{13} \dots$$

$$x_2 = 0.d_{21}d_{22}d_{23} \dots$$

$$x_3 = 0.d_{31}d_{32}d_{33} \dots$$

\vdots

Moc zbioru Cantora

Dowód przekątniowy

Uporządkujmy wszystkie $x \in \mathcal{C}$:

$$x_1 = 0.d_{11}d_{12}d_{13} \dots$$

$$x_2 = 0.d_{21}d_{22}d_{23} \dots$$

$$x_3 = 0.d_{31}d_{32}d_{33} \dots$$

\vdots

Zdefiniujmy $z = 0.z_1z_2z_3 \dots$, gdzie

$$z_i = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } d_{ii} = 2 \\ 2 & \text{jeśli } d_{ii} = 0 \end{cases}$$

Moc zbioru Cantora

Dowód przekątniowy

Uporządkujmy wszystkie $x \in \mathcal{C}$:

$$x_1 = 0.d_{11}d_{12}d_{13} \dots$$

$$x_2 = 0.d_{21}d_{22}d_{23} \dots$$

$$x_3 = 0.d_{31}d_{32}d_{33} \dots$$

\vdots

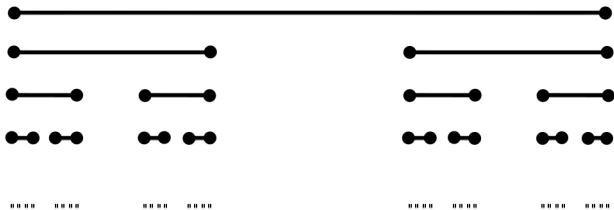
Zdefiniujmy $z = 0.z_1z_2z_3 \dots$, gdzie

$$z_i = \begin{cases} 0 & \text{jeśli } d_{ii} = 2 \\ 2 & \text{jeśli } d_{ii} = 0 \end{cases}$$

Zatem z jest różna od **każdej** x_i , więc \mathcal{C} musi być nieprzeliczalny. \square

Moc zbioru Cantora

Dowód wykorzystujący arytmetykę pozaskończoną



liczba punktów

$$2^1 = 2$$

$$2^2 = 4$$

$$2^3 = 8$$

$$2^4 = 16$$

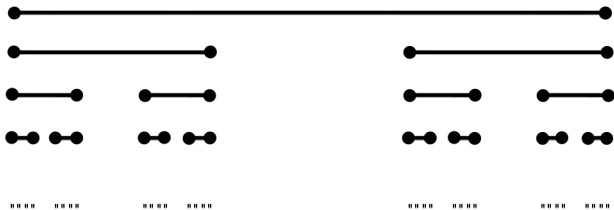
\vdots

$$2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$$



Moc zbioru Cantora

Dowód wykorzystujący arytmetykę pozaskończoną



liczba punktów
 $2^1 = 2$
 $2^2 = 4$
 $2^3 = 8$
 $2^4 = 16$
 \vdots
 $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ □

Jeszcze inny sposób:

Odwzorowanie

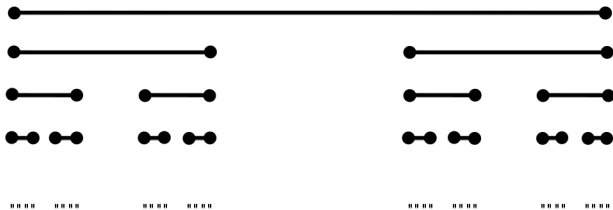
$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{3^k} \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}, \quad a_k = \frac{d_k}{2}$$

odwzorowuje $\mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$,

zatem są równoliczne. □

Moc zbioru Cantora

Dowód wykorzystujący arytmetykę pozaskończoną



liczba punktów
 $2^1 = 2$
 $2^2 = 4$
 $2^3 = 8$
 $2^4 = 16$
 \vdots
 $2^{\aleph_0} = \mathfrak{c}$ □

Jeszcze inny sposób:

Odwzorowanie

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{d_k}{3^k} \rightarrow \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{2^k}, \quad a_k = \frac{d_k}{2}$$

odwzorowuje $\mathcal{C} \rightarrow [0, 1]$,
zatem są równoliczne. □

Zadanie 24

Jaka jest średnia odległość między dwoma losowymi punktami należącymi do \mathcal{C} ?

Zbiór Cantora

Zbiór Cantora jest przykładem iterowanego układu funkcyjnego (*iterated function system*, IFS), tzn. układu kontrakcji $f_i : X \rightarrow X$,

$i = 1, \dots, k < \infty$ (tj. $\forall x, y \in X$ zachodzi $|f_i(x) - f_i(y)| \leq r_i |x - y|$, $0 \leq r_i < 1$).

W tym przypadku:

oraz $X = [0, 1] \equiv X_0$.

$$\begin{cases} f_1(x) &= \frac{1}{3}x \\ f_2(x) &= \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \end{cases}$$

Zbiór Cantora

Zbiór Cantora jest przykładem iterowanego układu funkcyjnego (*iterated function system*, IFS), tzn. układu kontrakcji $f_i : X \rightarrow X$, $i = 1, \dots, k < \infty$ (tj. $\forall x, y \in X$ zachodzi $|f_i(x) - f_i(y)| \leq r_i |x - y|$, $0 \leq r_i < 1$).

W tym przypadku:

oraz $X = [0, 1] \equiv X_0$.

$$\begin{cases} f_1(x) &= \frac{1}{3}x \\ f_2(x) &= \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \end{cases}$$

Mając zbiór początkowy X_0 , rekurencyjnie działamy na niego IFSem:

$$X_{n+1} = \bigcup_{i=1}^k f_i(X_n), \quad \mathcal{C} = \bigcap_{n=0}^{\infty} X_n$$

Zbiór Cantora

Zbiór Cantora jest przykładem iterowanego układu funkcyjnego (*iterated function system*, IFS), tzn. układu kontrakcji $f_i : X \rightarrow X$, $i = 1, \dots, k < \infty$ (tj. $\forall x, y \in X$ zachodzi $|f_i(x) - f_i(y)| \leq r_i |x - y|$, $0 \leq r_i < 1$).

W tym przypadku:

oraz $X = [0, 1] \equiv X_0$.

$$\begin{cases} f_1(x) &= \frac{1}{3}x \\ f_2(x) &= \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \end{cases}$$

Mając zbiór początkowy X_0 , rekurencyjnie działamy na niego IFSem:

$$X_{n+1} = \bigcup_{i=1}^k f_i(X_n), \quad \mathcal{C} = \bigcap_{n=0}^{\infty} X_n$$

IFSy mogą być opisane sekwencją stosunków r_i (*ratio list*) opisujących jaki ułamek przedziału X_n bierzemy w $(n + 1)$ -szym kroku. Dla zbioru Cantora \mathcal{C} mamy $\{r_1, r_2\} = \{1/3, 1/3\}$.

Zbiór Cantora

Zbiór Cantora jest przykładem iterowanego układu funkcyjnego (*iterated function system*, IFS), tzn. układu kontrakcji $f_i : X \rightarrow X$, $i = 1, \dots, k < \infty$ (tj. $\forall x, y \in X$ zachodzi $|f_i(x) - f_i(y)| \leq r_i |x - y|$, $0 \leq r_i < 1$).

W tym przypadku:

oraz $X = [0, 1] \equiv X_0$.

$$\begin{cases} f_1(x) &= \frac{1}{3}x \\ f_2(x) &= \frac{1}{3}x + \frac{2}{3} \end{cases}$$

Mając zbiór początkowy X_0 , rekurencyjnie działamy na niego IFSem:

$$X_{n+1} = \bigcup_{i=1}^k f_i(X_n), \quad \mathcal{C} = \bigcap_{n=0}^{\infty} X_n$$

IFSy mogą być opisane sekwencją stosunków r_i (*ratio list*) opisujących jaki ułamek przedziału X_n bierzemy w $(n + 1)$ -szym kroku. Dla zbioru Cantora \mathcal{C} mamy $\{r_1, r_2\} = \{1/3, 1/3\}$.

Twierdzenie Morana (1946):

Wymiar samopodobieństwa d jest

(jednoznacznym) rozwiązaniem równania:

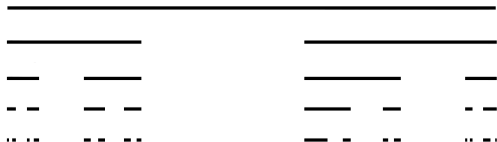
$$\sum_{i=1}^k r_i^d = 1$$

Zadanie 25

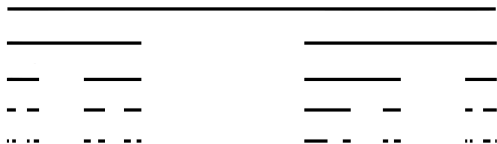
Ile wynoszą wymiary samopodobieństwa uogólnień zbioru Cantora:

- 1 w każdej iteracji wycinamy połowę przedziału położoną pośrodku;
- 2 w każdej iteracji wycinamy $1/p$ przedziału położoną w środku; jakie wartości p mają sens? Co dostaniemy dla $p = \sqrt{2}$?
- 3 w każdej iteracji zostawiamy równo rozmieszczone jedne piąte przedziału;
- 4 opisanego stosunkami $(r_1, r_2) = (1/5, 1/7)$;
- 5 współrzędne punktów należących do zbioru nie posiadające w swoim rozwinięciu dziesiętnym cyfry 5.

Losowy zbiór Cantora

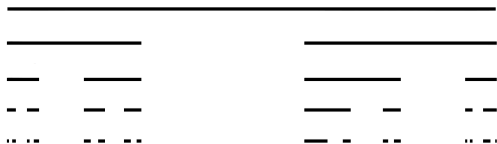


Losowy zbiór Cantora



Wtedy r_i są zmiennymi losowymi o pewnym rozkładzie prawdopodobieństwa.

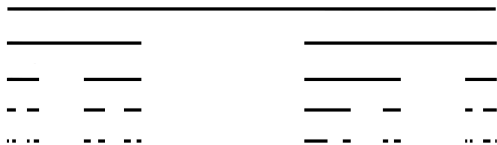
Losowy zbiór Cantora



Wtedy r_i są zmiennymi losowymi o pewnym rozkładzie prawdopodobieństwa. Wymiar d takiego zbioru to rozwiązanie odpowiednika równania z twierdzenia Morana wyrażonego poprzez operator wartości oczekiwanej:

$$\mathbb{E} \left[r_1^d + \dots + r_k^d \right] = 1$$

Losowy zbiór Cantora



Wtedy r_i są zmiennymi losowymi o pewnym rozkładzie prawdopodobieństwa. Wymiar d takiego zbioru to rozwiązanie odpowiednika równania z twierdzenia Morana wyrażonego poprzez operator wartości oczekiwanej:

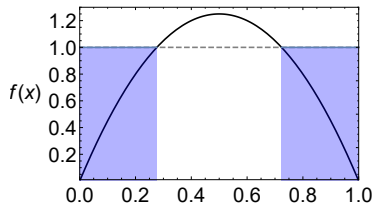
$$\mathbb{E} \left[r_1^d + \dots + r_k^d \right] = 1$$

Przykład: gdy usuwamy losowo rozmieszczoną jedną trzecią każdego przedziału, to

$$2 \int_0^1 \int_0^{1-r_1} \left(r_1^d + r_2^d \right) dr_2 dr_1 = 1 \Rightarrow d = \frac{\sqrt{17} - 3}{2} \approx 0.56 < \frac{\ln 2}{\ln 3}$$

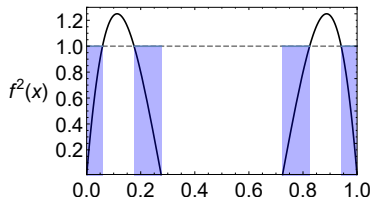
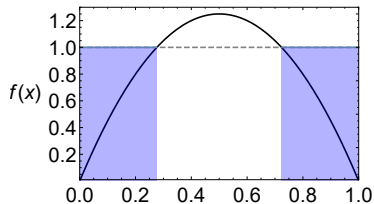
czyli w pewnym sensie jest mniej „gęsty” niż standardowy zbiór Cantora, \mathcal{C} .

Odwzorowanie logistyczne z $r > 4$ jest chaotyczne na zbiorze Cantora⁴



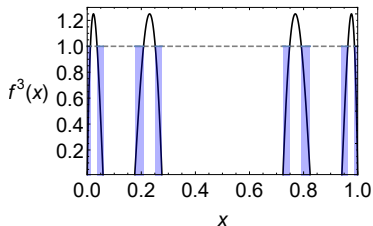
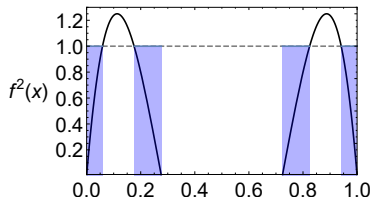
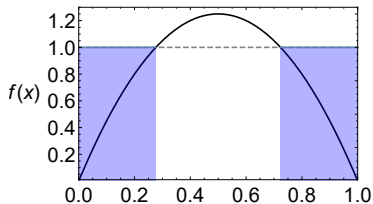
⁴Holmgren, A First Course in Discrete Dynamical Systems

Odzworowanie logistyczne z $r > 4$ jest chaotyczne na zbiorze Cantora⁴



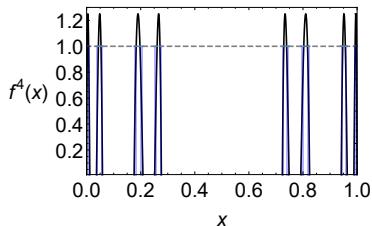
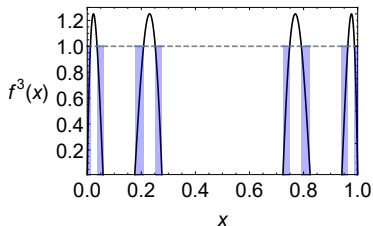
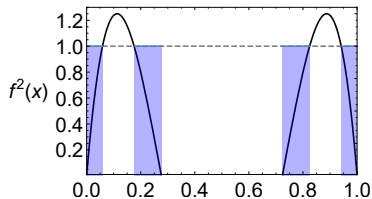
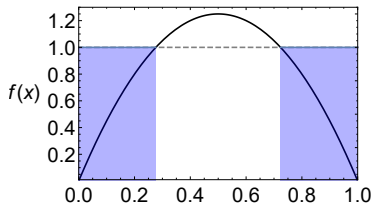
⁴Holmgren, A First Course in Discrete Dynamical Systems

Odzworowanie logistyczne z $r > 4$ jest chaotyczne na zbiorze Cantora⁴



⁴Holmgren, A First Course in Discrete Dynamical Systems

Odwzorowanie logistyczne z $r > 4$ jest chaotyczne na zbiorze Cantora⁴

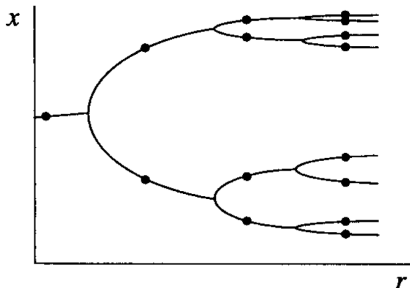


⁴Holmgren, A First Course in Discrete Dynamical Systems

Odzworowanie logistyczne z $r = r_\infty$

Atraktor jest zbiorem Cantora⁵

Punkty oznaczają położenia cykli superstabilnych. W $r_\infty = 3.5699\dots$ następuje akumulacja kaskady podwajania okresu \rightarrow powstanie chaosu.

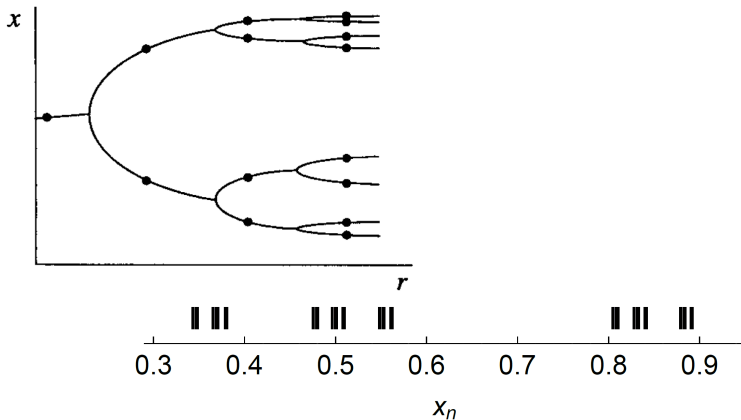


⁵Grassberger & Procaccia, Physica D 9, 189 (1983)

Odzworowanie logistyczne z $r = r_\infty$

Atraktor jest zbiorem Cantora⁵

Punkty oznaczają położenia cykli superstabilnych. W $r_\infty = 3.5699\dots$ następuje akumulacja kaskady podwajania okresu \rightarrow powstanie chaosu.

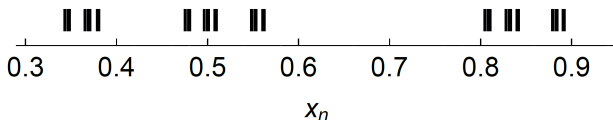
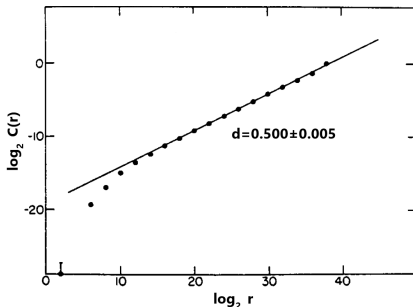
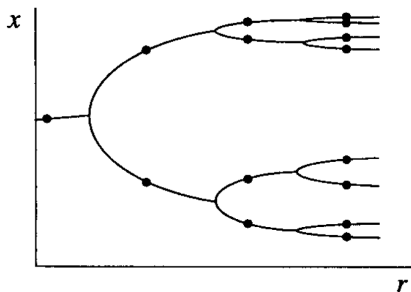


⁵Grassberger & Procaccia, Physica D 9, 189 (1983)

Odzworowanie logistyczne z $r = r_\infty$

Atraktor jest zbiorem Cantora⁵

Punkty oznaczają położenia cykli superstabilnych. W $r_\infty = 3.5699\dots$ następuje akumulacja kaskady podwajania okresu \rightarrow powstanie chaosu.



⁵Grassberger & Procaccia, Physica D 9, 189 (1983)

Trójkąt Sierpińskiego



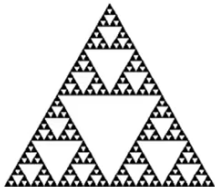
Trójkąt Sierpińskiego



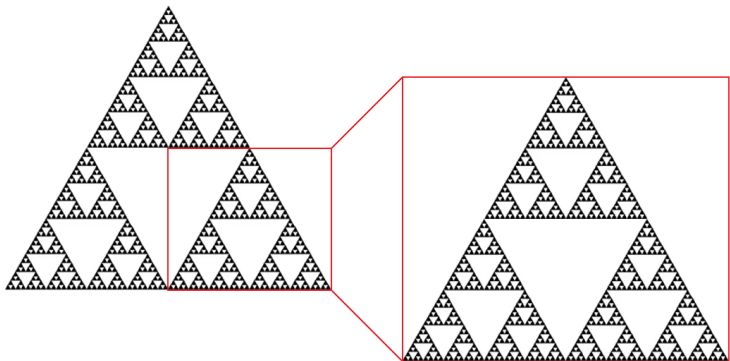
Trójkąt Sierpińskiego



Trójkąt Sierpińskiego

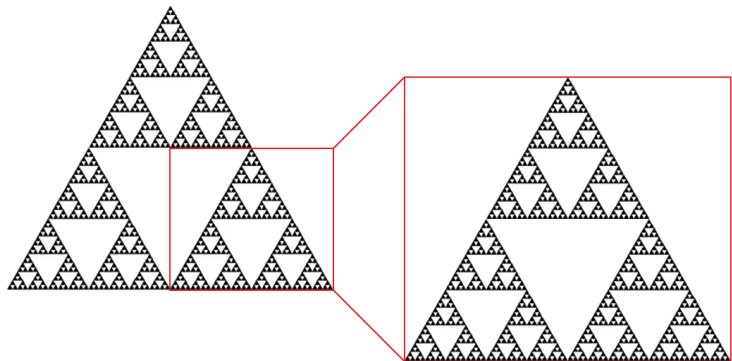


Trójkąt Sierpińskiego



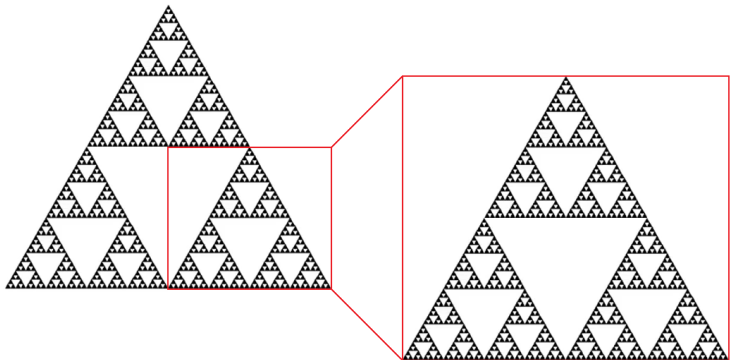
$$d = \frac{\ln N}{\ln s} =$$

Trójkąt Sierpińskiego



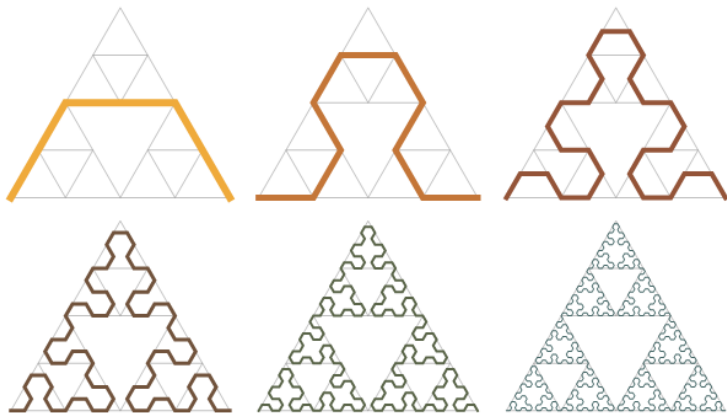
$$d = \frac{\ln N}{\ln s} = \frac{\ln 3}{\ln 2}$$

Trójkąt Sierpińskiego



$$d = \frac{\ln N}{\ln s} = \frac{\ln 3}{\ln 2} \approx 1.585$$

Trójkąt Sierpińskiego



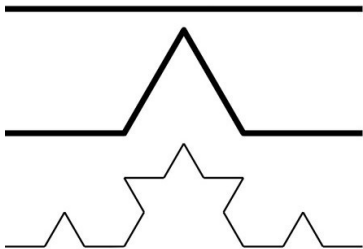
⁶<https://m.youtube.com/watch?v=ackDGIKx1cw>

Krzywa i śnieżynka Kocha

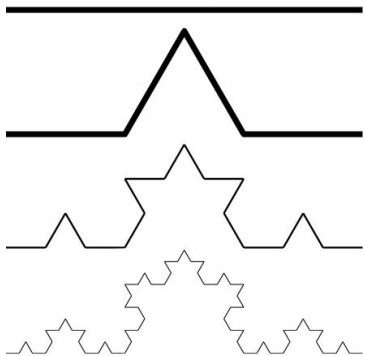
Krzywa i śnieżynka Kocha



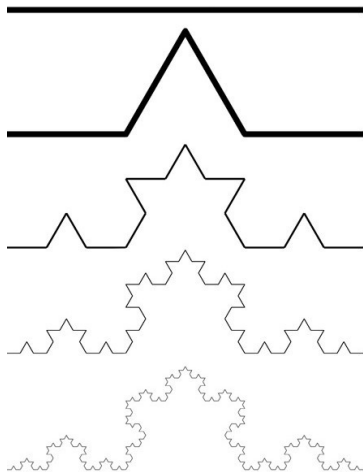
Krzywa i śnieżynka Kocha



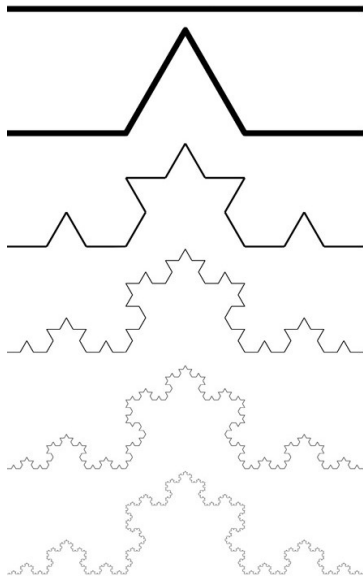
Krzywa i śnieżynka Kocha



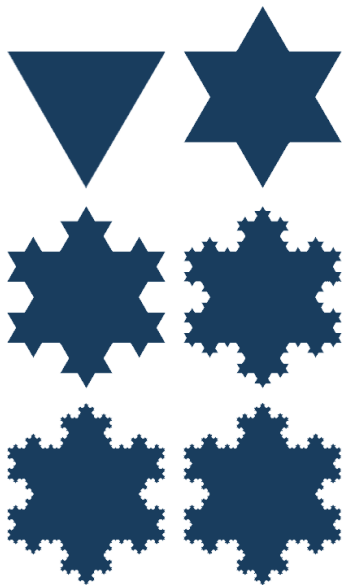
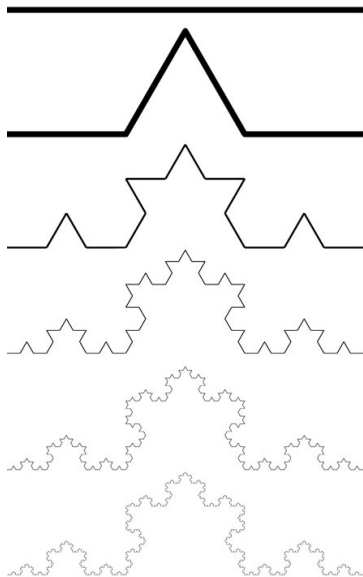
Krzywa i śnieżynka Kocha



Krzywa i śnieżynka Kocha



Krzywa i śnieżynka Kocha



Obwód i powierzchnia

- Długość krzywej:

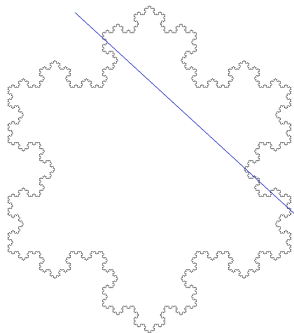
$$L_1 = \frac{4}{3}L_0 \Rightarrow L_n = \left(\frac{4}{3}\right)^n L_0 \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \infty$$

- Pole powierzchni:

- liczba boków: $N_n = 4 \cdot N_{n-1} = 4^n \cdot N_0 = 3 \cdot 4^n$
- liczba nowych trójkątów: $T_n = N_{n-1} = 3 \cdot 4^{n-1}$
- pole każdego nowego trójkąta: $a_n = \frac{a_{n-1}}{9} = \frac{a_0}{9^n}$
- pole dodane po każdej iteracji: $b_n = T_n \cdot a_n = \frac{3}{4} \left(\frac{4}{9}\right)^n a_0$
- pole całkowite:

$$\begin{aligned} A &= a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} b_k = a_0 \left(1 + \frac{3}{4} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{4}{9}\right)^k \right) \\ &= a_0 \left(1 + \frac{3}{4} \cdot \frac{4/9}{1 - 4/9} \right) = \frac{8}{5} a_0 < \infty \end{aligned}$$

Śnieżynka Kocha

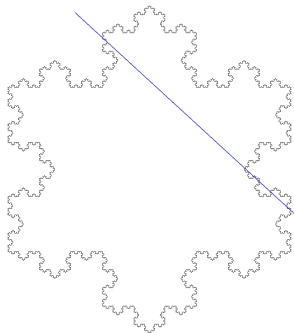


Przecięcie śnieżynki Kocha prawie każdą linią* ℓ daje zbiór Cantora.

*Poza osiami symetrii.

⁷Marstrand, Proc. Lond. Math. Soc. 4, 257 (1954); Mattila, Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces — uogólnienie dla $S \subset \mathbb{R}^n, \ell \subset \mathbb{R}^m, n > 2, m < n$.

Śnieżynka Kocha



Przecięcie śnieżynki Kocha prawie każdą linią* ℓ daje zbiór Cantora.

Twierdzenie Marstranda o przecięciu⁷ (niech $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^2$)

$$d(\mathcal{S} \cap \ell) \leq \min\{0, d(\mathcal{S}) - 1\}$$

*Poza osiami symetrii.

⁷Marstrand, Proc. Lond. Math. Soc. 4, 257 (1954); Mattila, Geometry of Sets and Measures in Euclidean Spaces — uogólnienie dla $\mathcal{S} \subset \mathbb{R}^n, \ell \subset \mathbb{R}^m, n > 2, m < n$.

Zadanie 26

Obliczyć wymiary samopodobieństwa:

- 1 zbioru Cantora $(r_1, r_2) = (1/4, 1/2)$



- 2 fraktala Vicseka:



- 3 fraktala^a z $(r_i, r_j) = (1/4, 1/2)$:



tj.

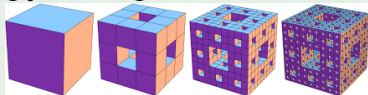


- 4 śnieżynki Kocha

- 5 dywanu Sierpińskiego:






- 6 gąbki Mengera:



^aRozważyć krotność stosunków.

Wymiar Hausdorffa⁸

			
\mathcal{H}^1	$0 < _ < \infty$	∞	∞
\mathcal{H}^2	0	$0 < _ < \infty$	∞
\mathcal{H}^3	0	0	$0 < _ < \infty$

⁸Ott, Chaos w Układach Dynamicznych

Wymiar Hausdorffa⁸

Weźmy $A \subset \mathbb{R}^n$. Średnicą zbioru A nazywa się maksymalną odległość między punktami $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$:

$$|A| = \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

Wymiar Hausdorffa⁸

Weźmy $A \subset \mathbb{R}^n$. Średnicą zbioru A nazywa się maksymalną odległość między punktami $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$:

$$|A| = \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

Niech $\{S_i\}$ będzie przeliczalnym zbiorem podzbiorów \mathbb{R}^n , zaś $\epsilon_i = |S_i|$.

Wtedy

$$\exists \delta : 0 < \epsilon_i \leq \delta \quad (*)$$

oraz

$$A \subset \bigcup_i S_i$$

Wymiar Hausdorffa⁸

Weźmy $A \subset \mathbb{R}^n$. Średnicą zbioru A nazywa się maksymalną odległość między punktami $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$:

$$|A| = \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

Niech $\{S_i\}$ będzie przeliczalnym zbiorem podzbiorów \mathbb{R}^n , zaś $\epsilon_i = |S_i|$.

Wtedy

$$\exists \delta : 0 < \epsilon_i \leq \delta \quad (*)$$

oraz

$$A \subset \bigcup_i S_i$$

Definiujemy wielkość:

$$\mathcal{H}_\delta^d(A) = \inf_{S_i} \sum_i \epsilon_i^d \quad (**)$$

tj. bierzemy zbiór $\{S_i\}$ o średnicach $(*)$ minimalizujący sumę w $(**)$.

Wymiar Hausdorffa⁸

Weźmy $A \subset \mathbb{R}^n$. Średnicą zbioru A nazywa się maksymalną odległość między punktami $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A$:

$$|A| = \sup_{\mathbf{x}, \mathbf{y} \in A} |\mathbf{x} - \mathbf{y}|$$

Niech $\{S_i\}$ będzie przeliczalnym zbiorem podzbiorów \mathbb{R}^n , zaś $\epsilon_i = |S_i|$.
Wtedy

$$\exists \delta : 0 < \epsilon_i \leq \delta \quad (*)$$

oraz

$$A \subset \bigcup_i S_i$$

Definiujemy wielkość:

$$\mathcal{H}_\delta^d(A) = \inf_{S_i} \sum_i \epsilon_i^d \quad (**)$$

tj. bierzemy zbiór $\{S_i\}$ o średnicach $(*)$ minimalizujący sumę w $(**)$.
Wreszcie, d -wymiarową **miarę Hausdorffa** definiuje się jako

$$\mathcal{H}^d(A) = \lim_{\delta \rightarrow 0} \mathcal{H}_\delta^d(A)$$

Graniczną wartość d_H , dla której zachodzi

$$\mathcal{H}^{d < d_H}(A) = \infty \quad \wedge \quad \mathcal{H}^{d > d_H}(A) = 0,$$

tj. $\forall d > 0 \exists d_H : 0 < \mathcal{H}^{d_H}(A) < \infty$, nazywa się **wymiarem Hausdorffa**.

Graniczną wartość d_H , dla której zachodzi

$$\mathcal{H}^{d < d_H}(A) = \infty \quad \wedge \quad \mathcal{H}^{d > d_H}(A) = 0,$$

tj. $\forall d > 0 \exists d_H : 0 < \mathcal{H}^{d_H}(A) < \infty$, nazywa się **wymiarem Hausdorffa**.

Np. dla $A \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ takiego, że $|A| < \infty$, to $\mathcal{H}^2(A)$ jest polem powierzchni dwuwymiarowego zbioru A .

Graniczną wartość d_H , dla której zachodzi

$$\mathcal{H}^{d < d_H}(A) = \infty \quad \wedge \quad \mathcal{H}^{d > d_H}(A) = 0,$$

tj. $\forall d > 0 \exists d_H : 0 < \mathcal{H}^{d_H}(A) < \infty$, nazywa się **wymiarem Hausdorffa**.

Np. dla $A \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ takiego, że $|A| < \infty$, to $\mathcal{H}^2(A)$ jest polem powierzchni dwuwymiarowego zbioru A .

Dla fraktali ściśle samopodobnych wymiar Hausdorffa jest równy wymiarowi samopodobieństwa (zob. slajd [5](#) oraz por. tw. Morana, slajd [16](#)).

Graniczną wartość d_H , dla której zachodzi

$$\mathcal{H}^{d < d_H}(A) = \infty \quad \wedge \quad \mathcal{H}^{d > d_H}(A) = 0,$$

tj. $\forall d > 0 \exists d_H : 0 < \mathcal{H}^{d_H}(A) < \infty$, nazywa się **wymiarem Hausdorffa**.

Np. dla $A \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ takiego, że $|A| < \infty$, to $\mathcal{H}^2(A)$ jest polem powierzchni dwuwymiarowego zbioru A .

Dla fraktali ściśle samopodobnych wymiar Hausdorffa jest równy wymiarowi samopodobieństwa (zob. slajd [5](#) oraz por. tw. Morana, slajd [16](#)).

W praktycznych zastosowaniach (np. dane eksperymentalne/obserwacyjne) d_H zdefiniowany jw. jest mało użyteczny. Stosuje się wtedy uproszczone procedury dające przybliżone wyniki (zob. slajdy [36](#) oraz [40](#)).

Graniczną wartość d_H , dla której zachodzi

$$\mathcal{H}^{d < d_H}(A) = \infty \quad \wedge \quad \mathcal{H}^{d > d_H}(A) = 0,$$

tj. $\forall d > 0 \exists d_H : 0 < \mathcal{H}^{d_H}(A) < \infty$, nazywa się **wymiarem Hausdorffa**.

Np. dla $A \subset \mathbb{R}^2 \subset \mathbb{R}^3$ takiego, że $|A| < \infty$, to $\mathcal{H}^2(A)$ jest polem powierzchni dwuwymiarowego zbioru A .

Dla fraktali ściśle samopodobnych wymiar Hausdorffa jest równy wymiarowi samopodobieństwa (zob. slajd [5](#) oraz por. tw. Morana, slajd [16](#)).

W praktycznych zastosowaniach (np. dane eksperymentalne/obserwacyjne) d_H zdefiniowany jw. jest mało użyteczny. Stosuje się wtedy uproszczone procedury dające przybliżone wyniki (zob. slajdy [36](#) oraz [40](#)).

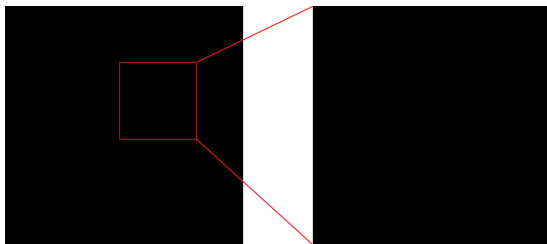
Najpierw jednak...

Samopodobieństwo a wymiar ułamkowy

czyli co to właściwie jest fraktal

Samopodobieństwo?

Samopodobieństwo?



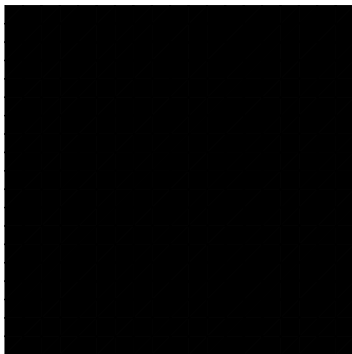
Kwadratowy fragment kwadratu też jest podobny do całego kwadratu.

Samopodobieństwo a wymiar ułamkowy

czyli co to właściwie jest fraktal

Wymiar ułamkowy?

Zbiór Garnetta-Ivanova:



Samopodobieństwo a wymiar ułamkowy

czyli co to właściwie jest fraktal

Wymiar ułamkowy?

Zbiór Garnetta-Ivanova:

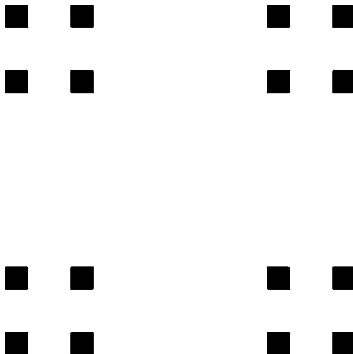


Samopodobieństwo a wymiar ułamkowy

czyli co to właściwie jest fraktal

Wymiar ułamkowy?

Zbiór Garnetta-Ivanova:

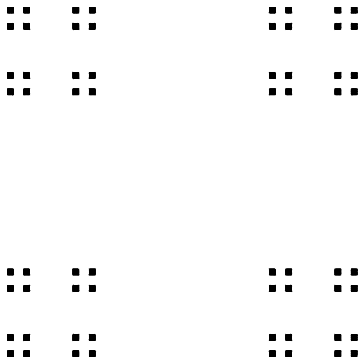


Samopodobieństwo a wymiar ułamkowy

czyli co to właściwie jest fraktal

Wymiar ułamkowy?

Zbiór Garnetta-Ivanova:

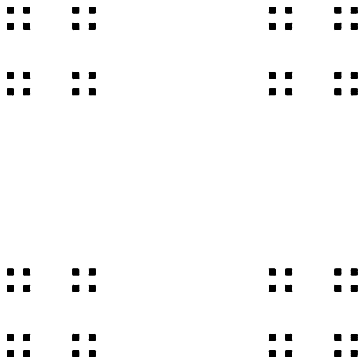


Samopodobieństwo a wymiar ułamkowy

czyli co to właściwie jest fraktal

Wymiar ułamkowy?

Zbiór Garnetta-Ivanova:



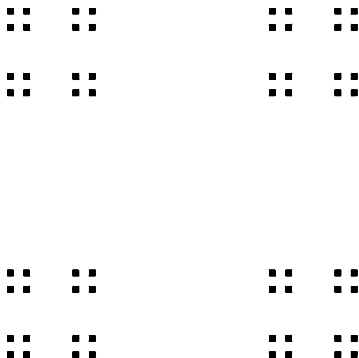
$$d = \frac{\ln N}{\ln s} =$$

Samopodobieństwo a wymiar ułamkowy

czyli co to właściwie jest fraktal

Wymiar ułamkowy?

Zbiór Garnetta-Ivanova:



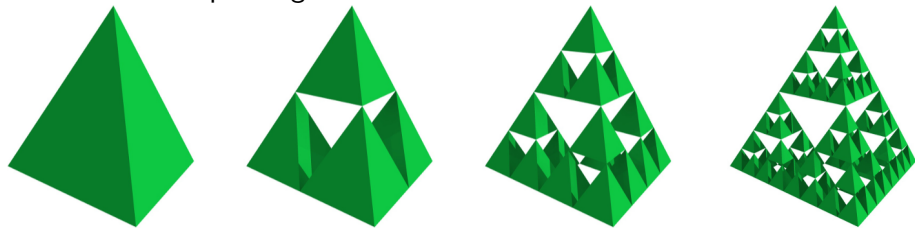
$$d = \frac{\ln N}{\ln s} = \frac{\ln 4}{\ln 4} = 1$$

Samopodobieństwo a wymiar ułamkowy

czyli co to właściwie jest fraktal

Wymiar ułamkowy?

Czworościan Sierpińskiego:



$$d = \frac{\ln N}{\ln s} = \frac{\ln 4}{\ln 2} = 2$$

- Mały wymiar indukcyjny (*small inductive dimension*), *ind*:
zbiór pusty \emptyset (i tylko \emptyset) ma wymiar $ind(\emptyset) = -1$. Każdy inny wymiar definiuje się indukcyjnie poprzez wymiar brzegu.

- Mały wymiar indukcyjny (*small inductive dimension*), *ind*:
zbiór pusty \emptyset (i tylko \emptyset) ma wymiar $ind(\emptyset) = -1$. Każdy inny wymiar definiuje się indukcyjnie poprzez wymiar brzegu. Zbiór X jest n -wymiarowy, jeśli może być pokryty dowolnie małymi zbiorami otwartymi o $(n - 1)$ -wymiarowym brzegu.

- Mały wymiar indukcyjny (*small inductive dimension*), ind :
zbiór pusty \emptyset (i tylko \emptyset) ma wymiar $ind(\emptyset) = -1$. Każdy inny wymiar definiuje się indukcyjnie poprzez wymiar brzegu. Zbiór X jest n -wymiarowy, jeśli może być pokryty dowolnie małymi zbiorami otwartymi o $(n - 1)$ -wymiarowym brzegu.
Np. brzeg zbioru złożonego z punktów jest pusty, zatem dowolny (przeliczalny) zbiór punktów \mathcal{P} ma $ind(\mathcal{P}) = 0$.

- Mały wymiar indukcyjny (*small inductive dimension*), ind :
zbiór pusty \emptyset (i tylko \emptyset) ma wymiar $ind(\emptyset) = -1$. Każdy inny wymiar definiuje się indukcyjnie poprzez wymiar brzegu. Zbiór X jest n -wymiarowy, jeśli może być pokryty dowolnie małymi zbiorami otwartymi o $(n - 1)$ -wymiarowym brzegu.
Np. brzeg zbioru złożonego z punktów jest pusty, zatem dowolny (przeliczalny) zbiór punktów \mathcal{P} ma $ind(\mathcal{P}) = 0$.
Zaś dowolną krzywą można pokryć otwartymi odcinkami/łukami, czyli mającymi 0-wymiarowe brzegi, zatem krzywa jest 1-wymiarowa.

- Mały wymiar indukcyjny (*small inductive dimension*), ind :
zbiór pusty \emptyset (i tylko \emptyset) ma wymiar $ind(\emptyset) = -1$. Każdy inny wymiar definiuje się indukcyjnie poprzez wymiar brzegu. Zbiór X jest n -wymiarowy, jeśli może być pokryty dowolnie małymi zbiorami otwartymi o $(n - 1)$ -wymiarowym brzegu.
Np. brzeg zbioru złożonego z punktów jest pusty, zatem dowolny (przeliczalny) zbiór punktów \mathcal{P} ma $ind(\mathcal{P}) = 0$.
Zaś dowolną krzywą można pokryć otwartymi odcinkami/łukami, czyli mającymi 0-wymiarowe brzegi, zatem krzywa jest 1-wymiarowa.
Z kolei przestrzeń \mathbb{R}^2 ma

$$\begin{aligned} ind(\mathbb{R}^2) &= 1 + ind(\mathbb{S}^1) \\ &= 1 + (1 + ind(\text{dwa punkty})) \\ &= 1 + (1 + (1 + ind(\emptyset))) \\ &= 1 + (1 + (1 + (-1))) = 2 \end{aligned}$$

- a Mały wymiar indukcyjny (*small inductive dimension*), ind :
zbiór pusty \emptyset (i tylko \emptyset) ma wymiar $ind(\emptyset) = -1$. Każdy inny wymiar definiuje się indukcyjnie poprzez wymiar brzegu. Zbiór X jest n -wymiarowy, jeśli może być pokryty dowolnie małymi zbiorami otwartymi o $(n - 1)$ -wymiarowym brzegu.
Np. brzeg zbioru złożonego z punktów jest pusty, zatem dowolny (przeliczalny) zbiór punktów \mathcal{P} ma $ind(\mathcal{P}) = 0$.
Zaś dowolną krzywą można pokryć otwartymi odcinkami/łukami, czyli mającymi 0-wymiarowe brzegi, zatem krzywa jest 1-wymiarowa.
Z kolei przestrzeń \mathbb{R}^2 ma

$$\begin{aligned} ind(\mathbb{R}^2) &= 1 + ind(\mathbb{S}^1) \\ &= 1 + (1 + ind(\text{dwa punkty})) \\ &= 1 + (1 + (1 + ind(\emptyset))) \\ &= 1 + (1 + (1 + (-1))) = 2 \end{aligned}$$

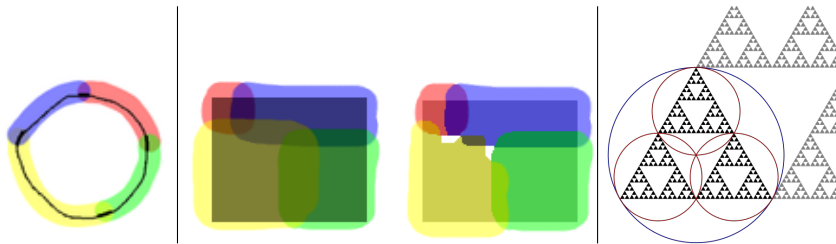
- b Duży wymiar indukcyjny (*large inductive dimension*), Ind —
pomijamy bez dyskusji.

- Wymiar pokryciowy Lebesgue'a (*Lebesgue covering dimension*), *dim*: zbiór X jest n -wymiarowy jeśli można go pokryć zbiorami otwartymi takimi, że dowolny $x \in X$ znajduje się w co najwyżej $(n + 1)$ takich zbiorów otwartych.

⁹Engelking, Dimension Theory

Wymiar topologiczny⁹

- Wymiar pokryciowy Lebesgue'a (*Lebesgue covering dimension*), dim : zbiór X jest n -wymiarowy jeśli można go pokryć zbiorami otwartymi takimi, że dowolny $x \in X$ znajduje się w co najwyżej $(n + 1)$ takich zbiorów otwartych. Np. w trójkącie Sierpińskiego \mathcal{S} każdy z trzech subtrójkątów (tj. po pierwszej iteracji) można pokryć kołami bez brzegu tak, że dowolny $x \in \mathcal{S}$ leży w maksymalnie dwóch takich kołach, itd. Zatem $dim(\mathcal{S}) = 1$. Co ciekawe, gąbka Menger'a \mathcal{M} też ma $dim(\mathcal{M}) = 1$.



⁹Engelking, Dimension Theory

Fraktalem jest obiekt geometryczny cechujący się:

- 1 nietrywialną/nieeuklidesową geometrią w każdej skali;
- 2 samopodobieństwem — dokładnym, statystycznym lub przybliżonym;
- 3 wymiarem Hausdorffa różnym (większym) od wymiaru topologicznego.

Wymiar pudełkowy

(wymiar Minkowskiego-Bouliganda)

Dowolną linię ℓ o długości L można pokryć $N(\varepsilon)$ odcinkami o długości ε ,
czyli

$$N(\varepsilon) = L \cdot \frac{1}{\varepsilon}$$

Wymiar pudełkowy

(wymiar Minkowskiego-Bouliganda)

Dowolną linię ℓ o długości L można pokryć $N(\varepsilon)$ odcinkami o długości ε ,
czyli

$$N(\varepsilon) = L \cdot \frac{1}{\varepsilon}$$

Z kolei do pokrycia kwadratu o boku L potrzeba L^2 kwadracików o boku $1/\varepsilon$ (czyli o powierzchni $1/\varepsilon^2$ każdy), tj.

$$N(\varepsilon) = L^2 \cdot \frac{1}{\varepsilon^2}$$

Wymiar pudełkowy

(wymiar Minkowskiego-Bouliganda)

Dowolną linię ℓ o długości L można pokryć $N(\varepsilon)$ odcinkami o długości ε , czyli

$$N(\varepsilon) = L \cdot \frac{1}{\varepsilon}$$

Z kolei do pokrycia kwadratu o boku L potrzeba L^2 kwadracików o boku $1/\varepsilon$ (czyli o powierzchni $1/\varepsilon^2$ każdy), tj.

$$N(\varepsilon) = L^2 \cdot \frac{1}{\varepsilon^2}$$

Podobnie dla sześcianu, tesseractu, itd. W ogólności zatem dla obiektu d -wymiarowego zachodzi

$$N(\varepsilon) = L^d \cdot \frac{1}{\varepsilon^d}$$

Wymiar pudełkowy

(wymiar Minkowskiego-Bouliganda)

$$N(\varepsilon) = L^d \cdot \frac{1}{\varepsilon^d}$$

Po zlogarytmowaniu:

$$\ln N(\varepsilon) = -d \ln \varepsilon + d \ln L$$

Wymiar pudełkowy

(wymiar Minkowskiego-Bouliganda)

$$N(\varepsilon) = L^d \cdot \frac{1}{\varepsilon^d}$$

Po zlogarytmowaniu:

$$\ln N(\varepsilon) = -d \ln \varepsilon + d \ln L$$

$$d = \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln L + \ln(1/\varepsilon)}$$

zaś gdy $\varepsilon \ll L$, wyraz $\ln L$ w mianowniku jest zaniedbywalny.

Wymiar pudełkowy

(wymiar Minkowskiego-Bouliganda)

$$N(\varepsilon) = L^d \cdot \frac{1}{\varepsilon^d}$$

Po zlogarytmowaniu:

$$\ln N(\varepsilon) = -d \ln \varepsilon + d \ln L$$

$$d = \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln L + \ln(1/\varepsilon)}$$

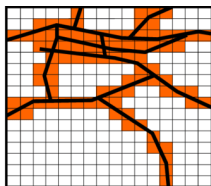
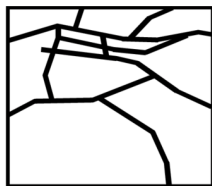
zaś gdy $\varepsilon \ll L$, wyraz $\ln L$ w mianowniku jest zaniedbywalny. Zatem ostatecznie

$$d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}$$

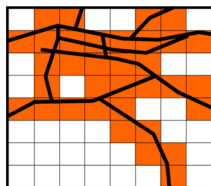
Wymiar pudełkowy

(wymiar Minkowskiego-Bouliganda)

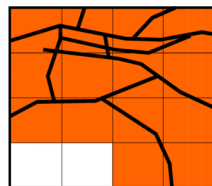
$$\ln N(\varepsilon) = -d \ln \varepsilon + b$$



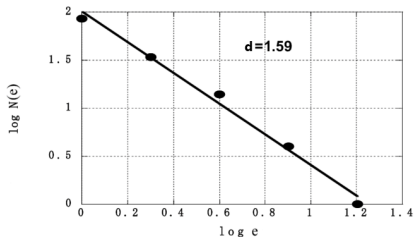
$N(1) = 86$



$N(2) = 34$



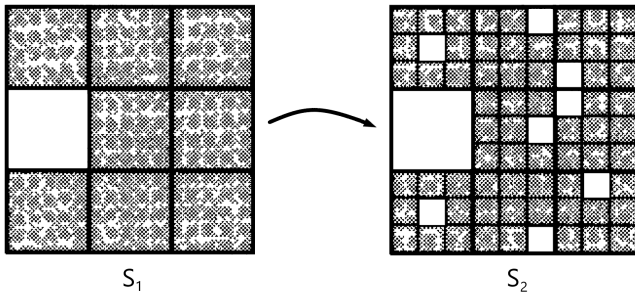
$N(4) = 14$



Wymiar pudełkowy

Przykład losowego fraktala

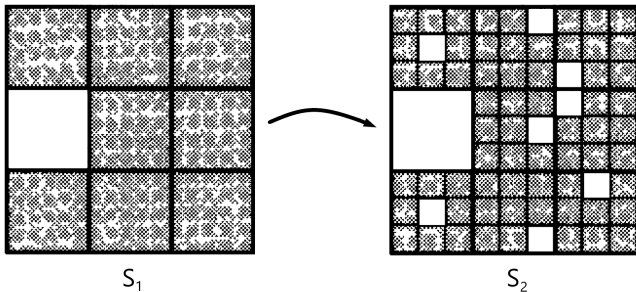
Dzielimy kwadrat na 9 i losowo usuwamy jeden; zostaje 8 mniejszych. Każdy z nich dzielimy na 9 i losowo usuwamy jeden itd.



Wymiar pudełkowy

Przykład losowego fraktala

Dzielimy kwadrat na 9 i losowo usuwamy jeden; zostaje 8 mniejszych. Każdy z nich dzielimy na 9 i losowo usuwamy jeden itd.

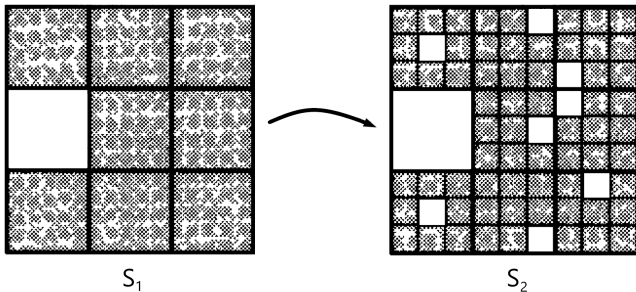


S_1 składa się z $N = 8$ kwadratów o boku $\varepsilon = 1/3$; S_2 składa się z $N = 8^2$ kwadratów o boku $\varepsilon = (1/3)^2$ itd. Ogólnie, $N = 8^n$ i $\varepsilon = (1/3)^n$.

Wymiar pudełkowy

Przykład losowego fraktala

Dzielimy kwadrat na 9 i losowo usuwamy jeden; zostaje 8 mniejszych. Każdy z nich dzielimy na 9 i losowo usuwamy jeden itd.



S_1 składa się z $N = 8$ kwadratów o boku $\varepsilon = 1/3$; S_2 składa się z $N = 8^2$ kwadratów o boku $\varepsilon = (1/3)^2$ itd. Ogólnie, $N = 8^n$ i $\varepsilon = (1/3)^n$. Zatem

$$d = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\ln 8^n}{\ln 3^n} = \frac{\ln 8}{\ln 3} \approx 1.89$$

Wymiar korelacyjny

Wymiar pudełkowy nie bierze pod uwagę rozkładu gęstości punktów w badanym zbiorze.

Wymiar korelacyjny

Wymiar pudełkowy nie bierze pod uwagę rozkładu gęstości punktów w badanym zbiorze. Dlatego w praktyce najczęściej używa się wymiaru korelacyjnego zdefiniowanego jako

$$d = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln C(r)}{\ln r}$$

z funkcją korelacji

$$C(r) = \frac{2}{N_{\text{pts}}(N_{\text{pts}} - 1)} \sum_{i=1}^{N_{\text{pts}}} \sum_{j=i+1}^{N_{\text{pts}}} \Theta(r - |\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_j|)$$

Wymiar korelacyjny

Wymiar pudełkowy nie bierze pod uwagę rozkładu gęstości punktów w badanym zbiorze. Dlatego w praktyce najczęściej używa się wymiaru korelacyjnego zdefiniowanego jako

$$d = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln C(r)}{\ln r}$$

z funkcją korelacji

$$C(r) = \frac{2}{N_{\text{pts}}(N_{\text{pts}} - 1)} \sum_{i=1}^{N_{\text{pts}}} \sum_{j=i+1}^{N_{\text{pts}}} \Theta(r - |\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_j|)$$

gdzie funkcja Heaviside'a Θ dodaje do $C(r)$ tylko punkty \mathbf{x}_i leżące w odległości mniejszej niż r od punktu \mathbf{y}_j i vice versa.

$C(r)$ jest miarą prawdopodobieństwa znalezienia dwóch punktów odległych od siebie o mniej niż r . Daje zatem średni stosunek punktów leżących wewnątrz (hiper)sfery o promieniu r .

Wymiar korelacyjny

Wymiar pudełkowy nie bierze pod uwagę rozkładu gęstości punktów w badanym zbiorze. Dlatego w praktyce najczęściej używa się wymiaru korelacyjnego zdefiniowanego jako

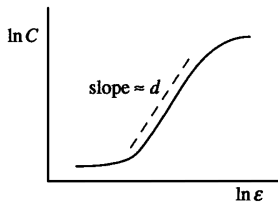
$$d = \lim_{r \rightarrow \infty} \frac{\ln C(r)}{\ln r}$$

z funkcją korelacji

$$C(r) = \frac{2}{N_{\text{pts}}(N_{\text{pts}} - 1)} \sum_{i=1}^{N_{\text{pts}}} \sum_{j=i+1}^{N_{\text{pts}}} \Theta(r - |\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_j|)$$

gdzie funkcja Heaviside'a Θ dodaje do $C(r)$ tylko punkty \mathbf{x}_i leżące w odległości mniejszej niż r od punktu \mathbf{y}_j i vice versa.

$C(r)$ jest miarą prawdopodobieństwa znalezienia dwóch punktów odległych od siebie o mniej niż r . Daje zatem średni stosunek punktów leżących wewnątrz (hiper)sfery o promieniu r .



Związek między wymiarami

- $d_{\text{Hausdorff}} \leq d_{\text{correlation}} \leq d_{\text{box counting}}$ — równość zachodzi gdy rozkład punktów na danym zbiorze jest jednorodny;

Związek między wymiarami

- $d_{\text{Hausdorff}} \leq d_{\text{correlation}} \leq d_{\text{box counting}}$ — równość zachodzi gdy rozkład punktów na danym zbiorze jest jednorodny;
- $d_{\text{Hausdorff}}(X \times Y) \geq d_{\text{Hausdorff}}(X) + d_{\text{Hausdorff}}(Y)$ — równość zachodzi ❶ dla fraktali ściśle samopodobnych (w szczególności dla IFSów); np. dla $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ (tzw. pył Cantora):

$$d_{\text{Hausdorff}}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) = 2d_{\text{Hausdorff}}(\mathcal{C}) = \frac{\ln 4}{\ln 3}$$

oraz ❷ gdy $Y = \mathbb{R}^n$.

Związek między wymiarami

- $d_{\text{Hausdorff}} \leq d_{\text{correlation}} \leq d_{\text{box counting}}$ — równość zachodzi gdy rozkład punktów na danym zbiorze jest jednorodny;
- $d_{\text{Hausdorff}}(X \times Y) \geq d_{\text{Hausdorff}}(X) + d_{\text{Hausdorff}}(Y)$ — równość zachodzi ① dla fraktali ściśle samopodobnych (w szczególności dla IFSów); np. dla $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ (tzw. pył Cantora):

$$d_{\text{Hausdorff}}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) = 2d_{\text{Hausdorff}}(\mathcal{C}) = \frac{\ln 4}{\ln 3}$$

oraz ② gdy $Y = \mathbb{R}^n$.

Caveat emptor!

Należy mieć dobre podstawy by móc podejrzewać, że wymiar ułamkowy \Rightarrow fraktal. Trzeba uważać na *uproszczone* metody estymowania wymiaru Hausdorffa.

Związek między wymiarami

- $d_{\text{Hausdorff}} \leq d_{\text{correlation}} \leq d_{\text{box counting}}$ — równość zachodzi gdy rozkład punktów na danym zbiorze jest jednorodny;
- $d_{\text{Hausdorff}}(X \times Y) \geq d_{\text{Hausdorff}}(X) + d_{\text{Hausdorff}}(Y)$ — równość zachodzi ❶ dla fraktali ściśle samopodobnych (w szczególności dla IFSów); np. dla $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ (tzw. pył Cantora):

$$d_{\text{Hausdorff}}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) = 2d_{\text{Hausdorff}}(\mathcal{C}) = \frac{\ln 4}{\ln 3}$$

oraz ❷ gdy $Y = \mathbb{R}^n$.

Caveat emptor!

Należy mieć dobre podstawy by móc podejrzewać, że wymiar ułamkowy \Rightarrow fraktal. Trzeba uważać na *uproszczone* metody estymowania wymiaru Hausdorffa. Np.:

- ❶ $\left\{ \frac{1}{n} \right\}_{n=1}^{\infty}$ jest przeliczalnym zbiorem punktów, zatem ma $d_{\text{Hausdorff}} = 0$. Wymiar pudełkowy jednak daje fałszywą wartość $d_{\text{box counting}} = 1/2$.

Związek między wymiarami

- $d_{\text{Hausdorff}} \leq d_{\text{correlation}} \leq d_{\text{box counting}}$ — równość zachodzi gdy rozkład punktów na danym zbiorze jest jednorodny;
- $d_{\text{Hausdorff}}(X \times Y) \geq d_{\text{Hausdorff}}(X) + d_{\text{Hausdorff}}(Y)$ — równość zachodzi ① dla fraktali ściśle samopodobnych (w szczególności dla IFSów); np. dla $\mathcal{C} \times \mathcal{C}$ (tzw. pył Cantora):

$$d_{\text{Hausdorff}}(\mathcal{C} \times \mathcal{C}) = 2d_{\text{Hausdorff}}(\mathcal{C}) = \frac{\ln 4}{\ln 3}$$

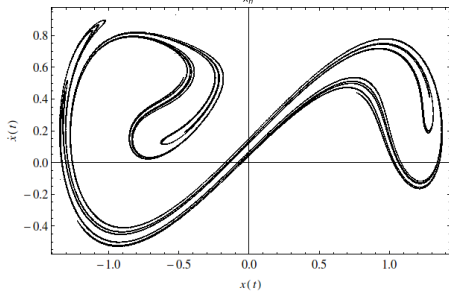
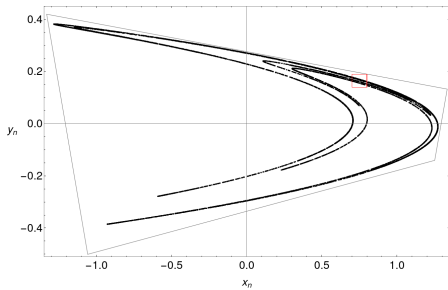
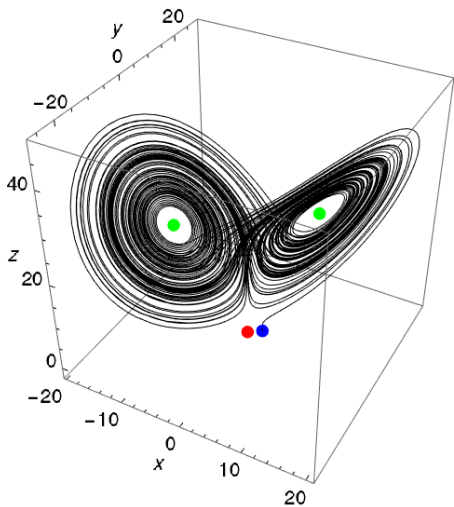
oraz ② gdy $Y = \mathbb{R}^n$.

Caveat emptor!

Należy mieć dobre podstawy by móc podejrzewać, że wymiar ułamkowy \Rightarrow fraktal. Trzeba uważać na *uproszczone* metody estymowania wymiaru Hausdorffa. Np.:

- ① $\left\{\frac{1}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ jest przeliczalnym zbiorem punktów, zatem ma $d_{\text{Hausdorff}} = 0$. Wymiar pudełkowy jednak daje fałszywą wartość $d_{\text{box counting}} = 1/2$.
- ② Krzywa $\sin\left(\frac{1}{x}\right)$, jako ciągła, ma wymiar $d_{\text{Hausdorff}} = 1$. Jednak wymiar pudełkowy daje fałszywą wartość $d_{\text{box counting}} = 3/2$.

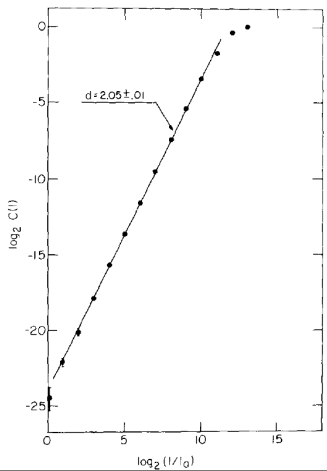
Dziwne atraktory



Dziwne atraktory

- Atraktor Lorenza¹⁰:

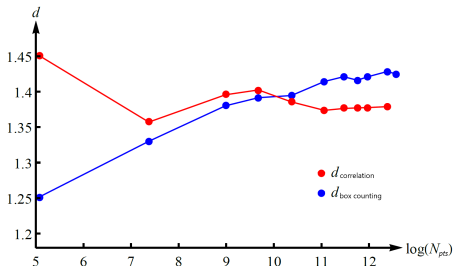
$$d_{\text{correlation}} = 2.05 \pm 0.01$$



- Atraktor Hénona¹⁰:

$$d_{\text{box counting}} = 1.261 \pm 0.003$$

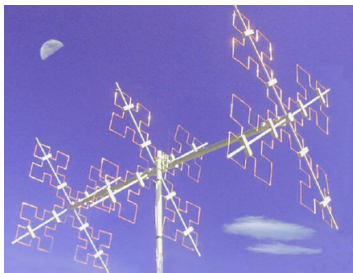
- Atraktor Duffinga¹¹:



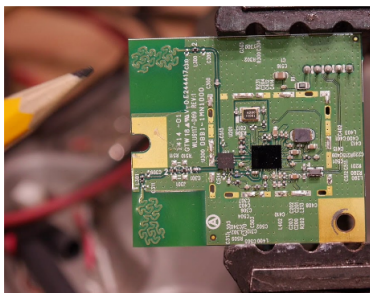
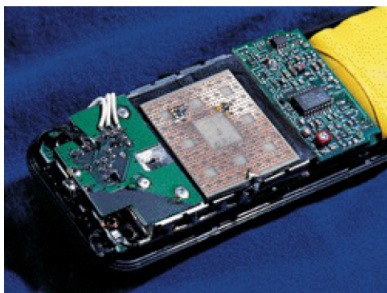
¹⁰Grassberger & Procaccia, Physica D 9, 189 (1983)

¹¹MT, Rom. Rep. Phys. 66, 907 (2014)

Zastosowanie 1 — fraktalne anteny

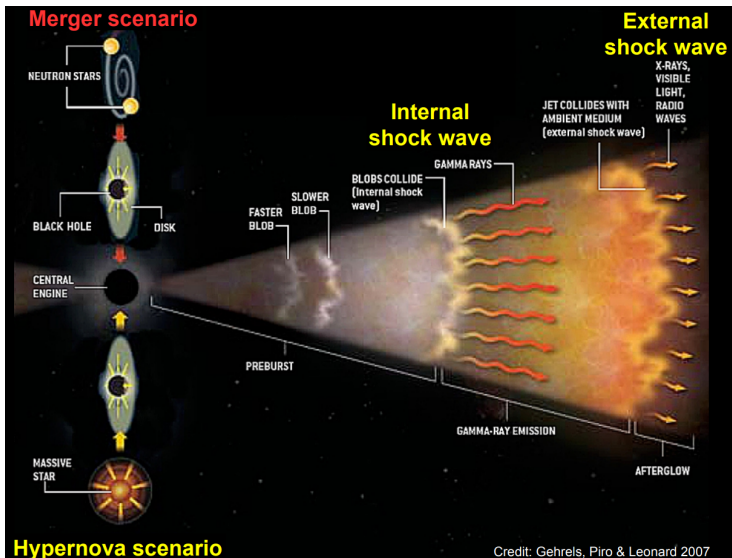


Zwykłe anteny są dostosowane do wąskiego pasma częstotliwości. Fraktalne anteny składają się z elementów o różnych skalach, więc obejmują szerszy zakres.



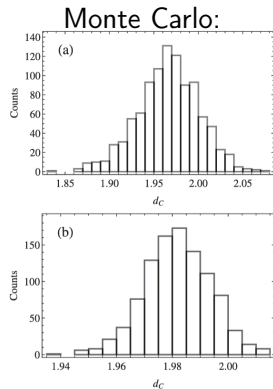
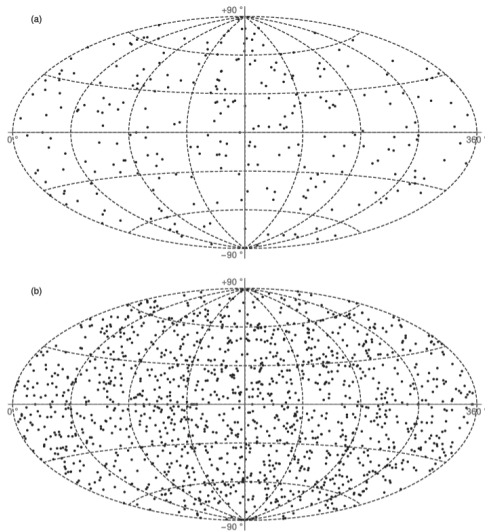
Zastosowanie 2 — (an)izotropia

Rozbłyski gamma:



Zastosowanie 2 — (an)izotropia¹³

Rozkład (a) krótkich ($\lesssim 2$ sec) i (b) długich ($\gtrsim 2$ sec) rozbłysków gamma:



N	Mean d_c	Standard deviation
278	1.966	0.035
1387	1.982	0.012

Wyniki:

Sample	d_C	p -value
Short	1.91	0.05
Long	1.99	0.58

Odległość między dwoma punktami $\mathbf{x}_i = (b_i, l_i)$ na sferze

$$|\mathbf{x}_1 - \mathbf{x}_2| = \arccos [\sin b_1 \sin b_2 + \cos b_1 \cos b_2 \cos (l_1 - l_2)]$$

gdzie $b_i \in [-90^\circ, 90^\circ]$, $l_i \in [0^\circ, 360^\circ]$.

¹³MT, MNRAS 472, 4819 (2017)

Przykłady z życia wzięte



Przykłady z życia wzięte



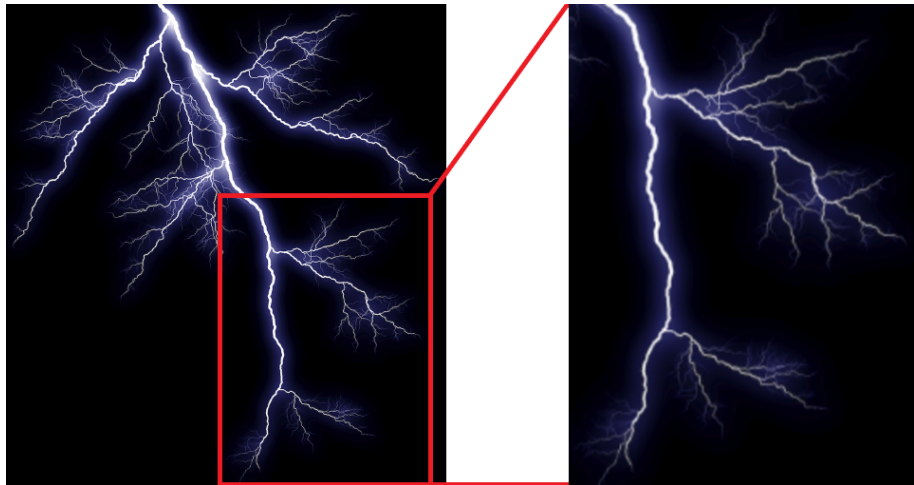
Przykłady z życia wzięte



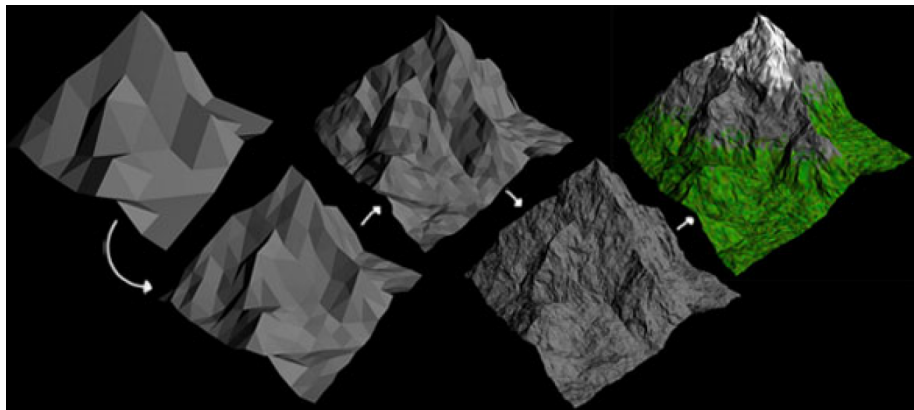
Przykłady z życia wzięte



Przykłady z życia wzięte



Zastosowanie 3 — generowanie krajobrazów



Przykłady z życia wzięte

Jackson Pollock (1912–1956)



Przykłady z życia wzięte

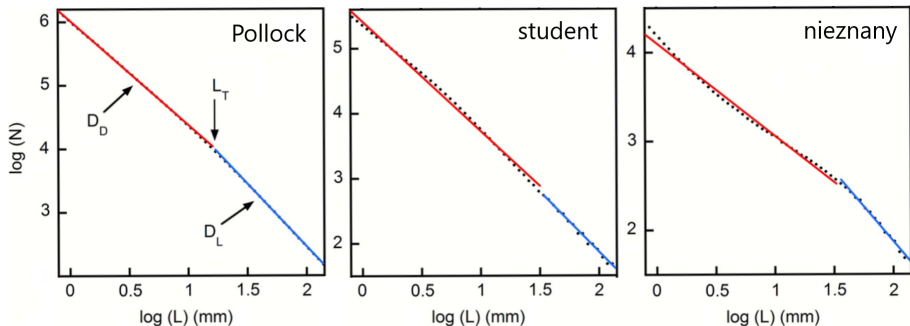
Jackson Pollock (1912–1956)



Blue Poles: Number 11 (1952)

Przykłady z życia wzięte

Jackson Pollock (1912–1956)

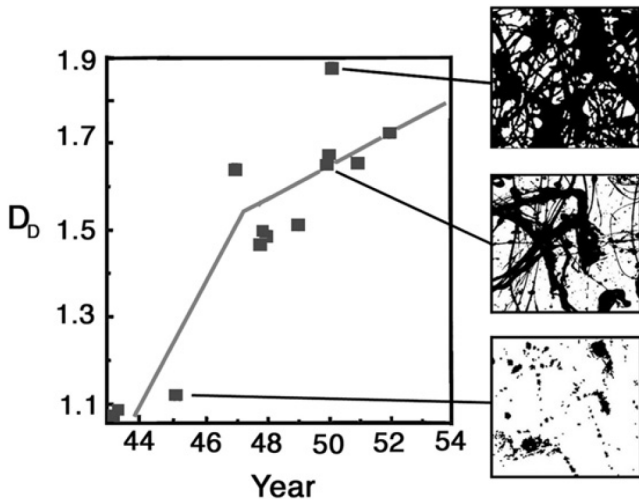


- 1 złamane prawo potęgowe
- 2 $L_T \geq 1$ cm, $\langle L_T \rangle = 3$ cm
- 3 ok. trzy rzędy wielkości
- 4 $D_L > D_D$
- 5 $0.009 < sd < 0.027$
- 6 obrazy wielokolorowe spełniają wszystkie powyższe kryteria

¹⁴Taylor et al., *Patt. Rec. Lett.* 28, 695 (2007)

Przykłady z życia wzięte

Jackson Pollock (1912–1956)



¹⁴Taylor et al., *Patt. Rec. Lett.* 28, 695 (2007)

Przykłady z życia wzięte

Architektura



San Clemente, XI w., Rzym



Wielkie Muzeum Egipskie, XXI w., Kair

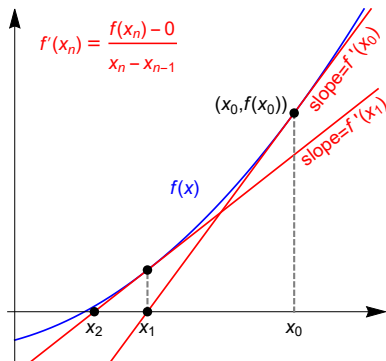
Przykłady z życia wzięte

Metoda Newtona-Raphsona i baseny przyciągania (baseny Wady)

Poszukujemy miejsc zerowych funkcji $f(x)$. Zgadujemy wartość początkową x_0 ; każda następna iteracja wg reguły

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (*)$$

daje przybliżenie lepsze niż x_n .



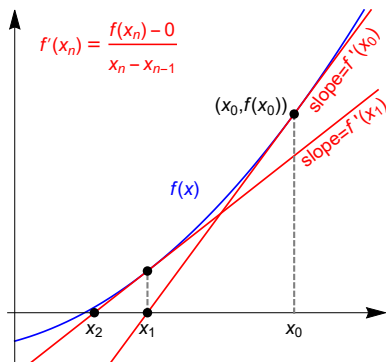
Przykłady z życia wzięte

Metoda Newtona-Raphsona i baseny przyciągania (baseny Wady)

Poszukujemy miejsc zerowych funkcji $f(x)$. Zgadujemy wartość początkową x_0 ; każda następna iteracja wg reguły

$$x_{n+1} = x_n - \frac{f(x_n)}{f'(x_n)} \quad (*)$$

daje przybliżenie lepsze niż x_n .

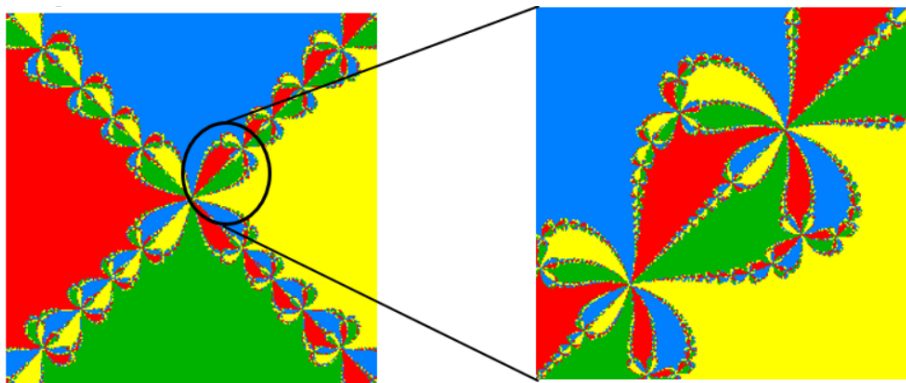


Miejsca zerowe funkcji $f(x)$ są superstabilnymi punktami stałymi odwzorowania $(*)$ — dlatego metoda Newtona-Raphsona jest niezwykle szybko zbieżna (dosłownie kilka iteracji w wielu przypadkach). Zazwyczaj każda iteracja średnio dwukrotnie zwiększa liczbę poprawnych miejsc po przecinku kolejnych przybliżeń miejsca zerowego.

Przykłady z życia wzięte

Metoda Newtona-Raphsona i baseny przyciągania (baseny Wady)

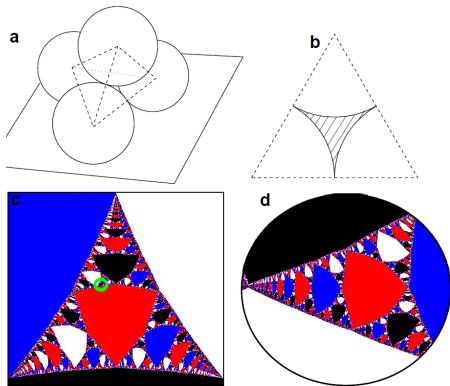
$$f(z) = z^4 - 1, \quad z \in \mathbb{C}$$



(Por. wykład 5, slajdy 40–42.)

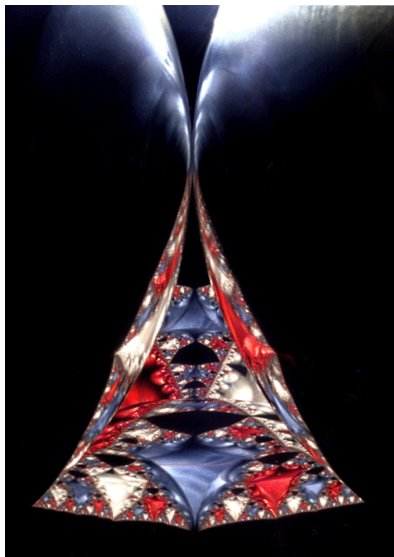
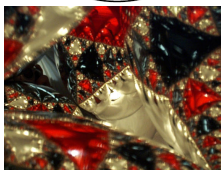
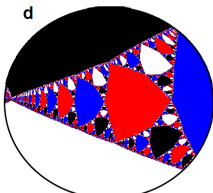
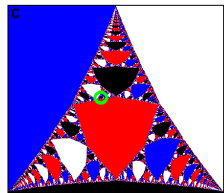
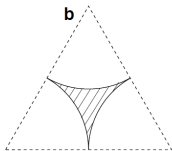
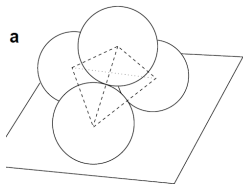
¹⁵<http://aleph0.clarku.edu/~djoyce/newton/examples.html>

Fizyczna realizacja fraktala¹⁶ ($d \approx 1.6$)



¹⁶Sweet et al., Nature 399, 315 (1999); www.andamooka.org/~dsweet/Spheres

Fizyczna realizacja fraktala¹⁶ ($d \approx 1.6$)



¹⁶Sweet et al., Nature 399, 315 (1999); www.andamooka.org/~dsweet/Spheres