

Wprowadzenie do teorii chaosu

Wykład 3: odwzorowania dwuwymiarowe

Mariusz Tarnopolski

Instytut Astronomii UMK

Chaos, 2023/2024



Odwzorowania 2D

- 1D odwzorowanie $f : x_n \rightarrow x_{n+1} = f(x_n)$
- 2D odwzorowanie $\mathbf{M} : (x_n, y_n) \rightarrow (x_{n+1}, y_{n+1}) = \mathbf{M}(x_n, y_n)$

¹Powiązanie między liczbami Fibonacciego a diagramem bifurkacyjnym odwzorowania logistycznego: Linage et al., Phys. Lett. A 359, 638-639 (2006)

Odwzorowania 2D

- 1D odwzorowanie $f : x_n \rightarrow x_{n+1} = f(x_n)$
- 2D odwzorowanie $\mathbf{M} : (x_n, y_n) \rightarrow (x_{n+1}, y_{n+1}) = \mathbf{M}(x_n, y_n)$

Rozważmy liczby Fibonacciego¹ jako przykład odwzorowania liniowego:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1},$$

gdzie $F_0 = 0$, $F_1 = 1$. Zmieńmy nazwy: $x_n = F_n$, $y_n = F_{n-1}$.

¹Powiązanie między liczbami Fibonacciego a diagramem bifurkacyjnym odwzorowania logistycznego: Linage et al., Phys. Lett. A 359, 638-639 (2006)

Odwzorowania 2D

- 1D odwzorowanie $f : x_n \rightarrow x_{n+1} = f(x_n)$
- 2D odwzorowanie $\mathbf{M} : (x_n, y_n) \rightarrow (x_{n+1}, y_{n+1}) = \mathbf{M}(x_n, y_n)$

Rozważmy liczby Fibonacciego¹ jako przykład odwzorowania liniowego:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1},$$

gdzie $F_0 = 0$, $F_1 = 1$. Zmieńmy nazwy: $x_n = F_n$, $y_n = F_{n-1}$. Wtedy:

$$\begin{cases} x_{n+1} &= x_n + y_n \\ y_{n+1} &= x_n \end{cases}$$

gdzie $x_1 = 1$, $y_1 = 0$.

¹Powiązanie między liczbami Fibonacciego a diagramem bifurkacyjnym odwzorowania logistycznego: Linage et al., Phys. Lett. A 359, 638-639 (2006)

Odwzorowania 2D

- 1D odwzorowanie $f : x_n \rightarrow x_{n+1} = f(x_n)$
- 2D odwzorowanie $\mathbf{M} : (x_n, y_n) \rightarrow (x_{n+1}, y_{n+1}) = \mathbf{M}(x_n, y_n)$

Rozważmy liczby Fibonacciego¹ jako przykład odwzorowania liniowego:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1},$$

gdzie $F_0 = 0$, $F_1 = 1$. Zmieńmy nazwy: $x_n = F_n$, $y_n = F_{n-1}$. Wtedy:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases}$$

gdzie $x_1 = 1$, $y_1 = 0$. Jest to układ postaci

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n,$$

gdzie $\mathbf{x}_n = (x_n, y_n)^\top$, $\mathbf{x}_1 = (1, 0)^\top$ oraz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

¹Powiązanie między liczbami Fibonacciego a diagramem bifurkacyjnym odwzorowania logistycznego: Linage et al., Phys. Lett. A 359, 638-639 (2006)

Odwzorowania 2D

- 1D odwzorowanie $f : x_n \rightarrow x_{n+1} = f(x_n)$
- 2D odwzorowanie $\mathbf{M} : (x_n, y_n) \rightarrow (x_{n+1}, y_{n+1}) = \mathbf{M}(x_n, y_n)$

Rozważmy liczby Fibonacciego¹ jako przykład odwzorowania liniowego:

$$F_{n+1} = F_n + F_{n-1},$$

gdzie $F_0 = 0$, $F_1 = 1$. Zmieńmy nazwy: $x_n = F_n$, $y_n = F_{n-1}$. Wtedy:

$$\begin{cases} x_{n+1} = x_n + y_n \\ y_{n+1} = x_n \end{cases}$$

gdzie $x_1 = 1$, $y_1 = 0$. Jest to układ postaci

$$\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{A}\mathbf{x}_n,$$

gdzie $\mathbf{x}_n = (x_n, y_n)^\top$, $\mathbf{x}_1 = (1, 0)^\top$ oraz

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$$

Ogólnym rozwiązaniem jest

$$\mathbf{x}_n = \mathbf{A}^{n-1}\mathbf{x}_1 \quad (*)$$

¹Powiązanie między liczbami Fibonacciego a diagramem bifurkacyjnym odwzorowania logistycznego: Linage et al., Phys. Lett. A 359, 638-639 (2006)

Odwzorowania 2D

Istnieje macierz \mathbf{J} podobna do \mathbf{A} , czyli taka, że²

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1},$$

gdzie kolumnami $\mathbf{P} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ są wektory własne. Zatem zachodzi

$$\mathbf{A}^{n-1} = \mathbf{P}\mathbf{J}^{n-1}\mathbf{P}^{-1} \quad (**)$$

²W tym przykładzie – diagonalna; w ogólności jest to klatka Jordana.

Odzwzorowania 2D

Istnieje macierz \mathbf{J} podobna do \mathbf{A} , czyli taka, że²

$$\mathbf{A} = \mathbf{P}\mathbf{J}\mathbf{P}^{-1},$$

gdzie kolumnami $\mathbf{P} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ są wektory własne. Zatem zachodzi

$$\mathbf{A}^{n-1} = \mathbf{P}\mathbf{J}^{n-1}\mathbf{P}^{-1} \quad (**)$$

Wartości własne macierzy \mathbf{A} to

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

oraz odpowiadające wektory własne

$$\mathbf{u}_{1,2} = (\lambda_{1,2}, 1)^T$$

²W tym przykładzie – diagonalna; w ogólności jest to klatka Jordana.

Odwzorowania 2D

Istnieje macierz \mathbf{J} podobna do \mathbf{A} , czyli taka, że²

$$\mathbf{A} = \mathbf{PJP}^{-1},$$

gdzie kolumnami $\mathbf{P} = (\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2)$ są wektory własne. Zatem zachodzi

$$\mathbf{A}^{n-1} = \mathbf{PJ}^{n-1}\mathbf{P}^{-1} \quad (**)$$

Wartości własne macierzy \mathbf{A} to

$$\lambda_{1,2} = \frac{1 \pm \sqrt{5}}{2}$$

oraz odpowiadające wektory własne

$$\mathbf{u}_{1,2} = (\lambda_{1,2}, 1)^T$$

Podstawiając do (**), a następnie do (*) otrzymujemy

$$x_n \equiv F_n = \frac{1}{\sqrt{5}} \left[\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2} \right)^n - \left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2} \right)^n \right]$$

²W tym przykładzie – diagonalna; w ogólności jest to klatka Jordana.

Rozważmy N -wymiarowe odwzorowanie \mathbf{M} (dopuszczając by było nieliniowe):

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{M}(\mathbf{y}_n)$$

³Ott, Chaos in Dynamical Systems

Rozważmy N -wymiarowe odwzorowanie \mathbf{M} (dopuszczając by było nieliniowe):

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{M}(\mathbf{y}_n)$$

oraz infinitezymalny wektor odchylenia (*deviation vector*) \mathbf{w}_n w punkcie \mathbf{y}_n . Wtedy

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{DM}(\mathbf{y}_n) \cdot \mathbf{w}_n,$$

gdzie $\mathbf{DM}(\mathbf{y}_n)$ jest jacobianem odwzorowania \mathbf{M} w punkcie \mathbf{y}_n .

³Ott, Chaos in Dynamical Systems

Rozważmy N -wymiarowe odwzorowanie \mathbf{M} (dopuszczając by było nieliniowe):

$$\mathbf{y}_{n+1} = \mathbf{M}(\mathbf{y}_n)$$

oraz infinitezymalny wektor odchylenia (*deviation vector*) \mathbf{w}_n w punkcie \mathbf{y}_n . Wtedy

$$\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{DM}(\mathbf{y}_n) \cdot \mathbf{w}_n,$$

gdzie $\mathbf{DM}(\mathbf{y}_n)$ jest jacobianem odwzorowania \mathbf{M} w punkcie \mathbf{y}_n . W 2D:

$$\mathbf{DM}(x_n, y_n) = \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} \end{pmatrix}$$

³Ott, Chaos in Dynamical Systems

Wtedy

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{DM}^n(\mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{w}_0$$

gdzie

$$\mathbf{DM}^n(\mathbf{y}_0) = \mathbf{DM}(\mathbf{y}_{n-1}) \cdot \mathbf{DM}(\mathbf{y}_{n-2}) \cdot \dots \cdot \mathbf{DM}(\mathbf{y}_1) \cdot \mathbf{DM}(\mathbf{y}_0)$$

Wtedy

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{DM}^n(\mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{w}_0$$

gdzie

$$\mathbf{DM}^n(\mathbf{y}_0) = \mathbf{DM}(\mathbf{y}_{n-1}) \cdot \mathbf{DM}(\mathbf{y}_{n-2}) \cdot \dots \cdot \mathbf{DM}(\mathbf{y}_1) \cdot \mathbf{DM}(\mathbf{y}_0)$$

$\mathbf{u}_n = \frac{\mathbf{w}_n}{|\mathbf{w}_n|}$ (wektor jednostkowy) określa kierunek względem \mathbf{y}_n . Weźmy pewien \mathbf{u}_0 .

Wtedy

$$\mathbf{w}_n = \mathbf{DM}^n(\mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{w}_0$$

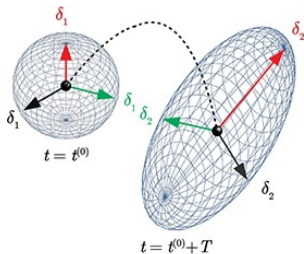
gdzie

$$\mathbf{DM}^n(\mathbf{y}_0) = \mathbf{DM}(\mathbf{y}_{n-1}) \cdot \mathbf{DM}(\mathbf{y}_{n-2}) \cdot \dots \cdot \mathbf{DM}(\mathbf{y}_1) \cdot \mathbf{DM}(\mathbf{y}_0)$$

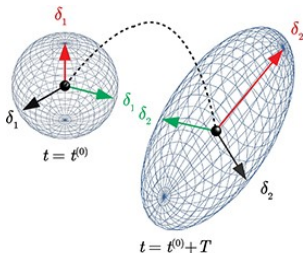
$\mathbf{u}_n = \frac{\mathbf{w}_n}{|\mathbf{w}_n|}$ (wektor jednostkowy) określa kierunek względem \mathbf{y}_n . Weźmy pewien \mathbf{u}_0 . Wtedy λ (wykładnik Lapunowa) w punkcie \mathbf{y}_0 :

$$\lambda = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln \frac{|\mathbf{w}_n|}{|\mathbf{w}_0|} = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\mathbf{DM}^n(\mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{u}_0| \equiv \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{n} \ln |\mathbf{u}_n|$$

Rozważmy i -ty kierunek ortogonalny (N -wymiarowej przestrzeni):



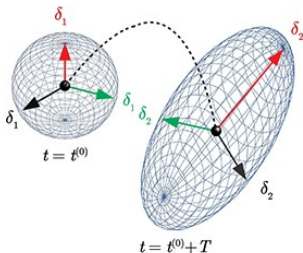
Rozważmy i -ty kierunek ortogonalny (N -wymiarowej przestrzeni):



$$\begin{aligned} \lambda_i &\simeq \frac{1}{n} \ln |\mathbf{u}_n^i| \\ &= \frac{1}{n} \ln \sqrt{[\mathbf{DM}^n(\mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{u}_0^i]^\top \cdot [\mathbf{DM}^n(\mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{u}_0^i]} \\ &\equiv \frac{1}{2n} \ln [(\mathbf{u}_0^i)^\top \cdot \mathbf{H}_n(\mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{u}_0^i] = \frac{1}{2n} \ln h_i, \end{aligned}$$

gdzie $\mathbf{H}_n(\mathbf{y}_0) = [\mathbf{DM}^n(\mathbf{y}_0)]^\top \mathbf{DM}^n(\mathbf{y}_0)$, zaś h_i jest i -tą wartością własną.

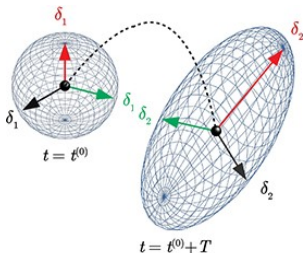
Rozważmy i -ty kierunek ortogonalny (N -wymiarowej przestrzeni):



$$\begin{aligned} \lambda_i &\simeq \frac{1}{n} \ln |\mathbf{u}_n^i| \\ &= \frac{1}{n} \ln \sqrt{[\mathbf{DM}^n(\mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{u}_0^i]^\top \cdot [\mathbf{DM}^n(\mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{u}_0^i]} \\ &\equiv \frac{1}{2n} \ln [(\mathbf{u}_0^i)^\top \cdot \mathbf{H}_n(\mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{u}_0^i] = \frac{1}{2n} \ln h_i, \end{aligned}$$

gdzie $\mathbf{H}_n(\mathbf{y}_0) = [\mathbf{DM}^n(\mathbf{y}_0)]^\top \mathbf{DM}^n(\mathbf{y}_0)$, zaś h_i jest i -tą wartością własną. $\mathbf{H}_n(\mathbf{y}_0)$ jest hermitowska nieujemnie określona, więc $h_i \geq 0$, zaś wektory własne można wybrać tak by były rzeczywiste.

Rozważmy i -ty kierunek ortogonalny (N -wymiarowej przestrzeni):



$$\begin{aligned} \lambda_i &\simeq \frac{1}{n} \ln |\mathbf{u}_n^i| \\ &= \frac{1}{n} \ln \sqrt{[\mathbf{DM}^n(\mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{u}_0^i]^\top \cdot [\mathbf{DM}^n(\mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{u}_0^i]} \\ &\equiv \frac{1}{2n} \ln [(\mathbf{u}_0^i)^\top \cdot \mathbf{H}_n(\mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{u}_0^i] = \frac{1}{2n} \ln h_i, \end{aligned}$$

gdzie $\mathbf{H}_n(\mathbf{y}_0) = [\mathbf{DM}^n(\mathbf{y}_0)]^\top \mathbf{DM}^n(\mathbf{y}_0)$, zaś h_i jest i -tą wartością własną. $\mathbf{H}_n(\mathbf{y}_0)$ jest hermitowska nieujemnie określona, więc $h_i \geq 0$, zaś wektory własne można wybrać tak by były rzeczywiste.

Wprowadzamy porządek: $\lambda_1 \geq \lambda_2 \geq \dots \geq \lambda_N$.

Wykładniki Lapunowa³

W przypadku układów nieliniowych wybór arbitralnego \mathbf{u}_0 zazwyczaj będzie kombinacją liniową wektorów własnych $\{\mathbf{e}_i\}$ macierzy $\mathbf{H}_n(\mathbf{y}_0)$:

$$\mathbf{u}_0 = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{e}_i$$

Wykładniki Lapunowa³

W przypadku układów nieliniowych wybór arbitralnego \mathbf{u}_0 zazwyczaj będzie kombinacją liniową wektorów własnych $\{\mathbf{e}_i\}$ macierzy $\mathbf{H}_n(\mathbf{y}_0)$:

$$\mathbf{u}_0 = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{e}_i$$

Zatem

$$(\mathbf{u}_0)^\top \cdot \mathbf{H}_n(\mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{u}_0 = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \exp(2n\lambda_i)$$

Wykładniki Lapunowa³

W przypadku układów nieliniowych wybór arbitralnego \mathbf{u}_0 zazwyczaj będzie kombinacją liniową wektorów własnych $\{\mathbf{e}_i\}$ macierzy $\mathbf{H}_n(\mathbf{y}_0)$:

$$\mathbf{u}_0 = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{e}_i$$

Zatem

$$(\mathbf{u}_0)^T \cdot \mathbf{H}_n(\mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{u}_0 = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \exp(2n\lambda_i)$$

Dla dostatecznie dużych n dominującym będzie człon z $i = 1$ jako powiązany z największym wykładnikiem Lapunowa λ_1 .

Czyli powyższy algorytm efektywnie doprowadzi do dobrze określonej wartości h_1 , zatem też λ_1 .

Wykładniki Lapunowa³

W przypadku układów nieliniowych wybór arbitralnego \mathbf{u}_0 zazwyczaj będzie kombinacją liniową wektorów własnych $\{\mathbf{e}_i\}$ macierzy $\mathbf{H}_n(\mathbf{y}_0)$:

$$\mathbf{u}_0 = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{e}_i$$

Zatem

$$(\mathbf{u}_0)^T \cdot \mathbf{H}_n(\mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{u}_0 = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \exp(2n\lambda_i)$$

Dla dostatecznie dużych n dominującym będzie człon z $i = 1$ jako powiązany z największym wykładnikiem Lapunowa λ_1 .

Czyli powyższy algorytm efektywnie doprowadzi do dobrze określonej wartości h_1 , zatem też λ_1 . Żeby uzyskać pozostałe $\lambda_{i>1}$ należałoby się ograniczyć do podprzestrzeni ortogonalnej do \mathbf{e}_1 , czyli sukcesywnie podstawiać $\alpha_1 = 0$. Dostaniemy wtedy λ_2 jako drugi największy wykładnik Lapunowa itd. aż do N .

Wykładniki Lapunowa³

W przypadku układów nieliniowych wybór arbitralnego \mathbf{u}_0 zazwyczaj będzie kombinacją liniową wektorów własnych $\{\mathbf{e}_i\}$ macierzy $\mathbf{H}_n(\mathbf{y}_0)$:

$$\mathbf{u}_0 = \sum_{i=1}^N \alpha_i \mathbf{e}_i$$

Zatem

$$(\mathbf{u}_0)^T \cdot \mathbf{H}_n(\mathbf{y}_0) \cdot \mathbf{u}_0 = \sum_{i=1}^N \alpha_i^2 \exp(2n\lambda_i)$$

Dla dostatecznie dużych n dominującym będzie człon z $i = 1$ jako powiązany z największym wykładnikiem Lapunowa λ_1 .

Czyli powyższy algorytm efektywnie doprowadzi do dobrze określonej wartości h_1 , zatem też λ_1 . Żeby uzyskać pozostałe $\lambda_{i>1}$ należałoby się ograniczyć do podprzestrzeni ortogonalnej do \mathbf{e}_1 , czyli sukcesywnie podstawiać $\alpha_1 = 0$. Dostaniemy wtedy λ_2 jako drugi największy wykładnik Lapunowa itd. aż do N . W praktyce jednak można równocześnie uzyskać wszystkie λ stosując ortogonalizację Grama-Schmidta po każdej iteracji (zob. też wykład 4, slajdy 46–48).

Zadanie 18

Obliczyć wykładniki Lapunowa dla odwzorowania Arnolda (*Arnold's cat map* lub *Anosov map*):

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \pmod{1}$$

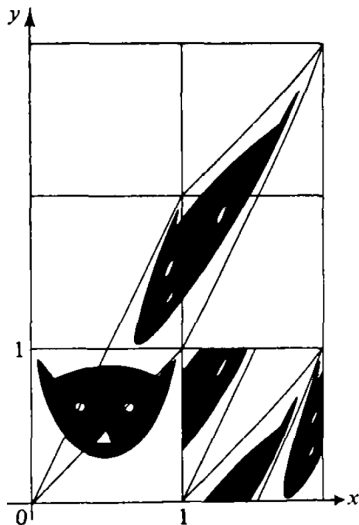
Czy to odwzorowanie jest chaotyczne? Co gdyby pominąć mod 1?

Zadanie 18

Obliczyć wykładniki Lapunowa dla odwzorowania Arnolda (*Arnold's cat map* lub *Anosov map*):

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \pmod{1}$$

Czy to odwzorowanie jest chaotyczne? Co gdyby pominąć mod 1?



Odwzorowania

zachowawcze (hamiltonowskie) i dyssypatywne

W ogólności, układy dynamiczne dzieli się na:

$$|\det \mathbf{DM}| = \begin{cases} < 1 & : \text{dyssypatywne} \\ = 1 & : \text{zachowawcze} \end{cases}$$

[Cf. zmiana zmiennych: $dx dy = |\det J| du dv$.]

Odwzorowanie Hénona⁴

$$\begin{cases} x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 + y_n \\ y_{n+1} &= bx_n \end{cases}$$

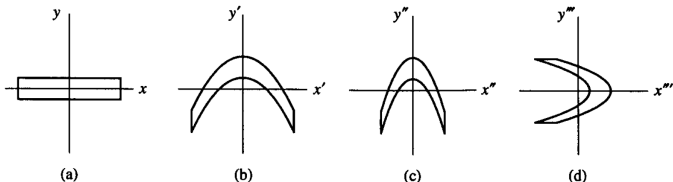
Zaprojektowane by łatwiej badać mechanizmy ściskania i rozciągania w układzie Lorenza (zob. wykład 4). Kanoniczne wartości: $a = 1.4, b = 0.3$.

⁴Hénon, Commun. Math. Phys. 50, 69-77 (1976)

Odwzorowanie Hénona⁴

$$\begin{cases} x_{n+1} &= 1 - ax_n^2 + y_n \\ y_{n+1} &= bx_n \end{cases}$$

Zaprojektowane by łatwiej badać mechanizmy ściskania i rozciągania w układzie Lorenza (zob. wykład 4). Kanoniczne wartości: $a = 1.4$, $b = 0.3$. To odwzorowanie składa się z trzech transformacji ($T = T''' \circ T'' \circ T'$):



b T' : $x' = x$, $y' = 1 + y - ax^2$

c T'' : $x'' = bx'$, $y'' = y'$

d T''' : $x''' = y''$, $y''' = x''$

⁴Hénon, Commun. Math. Phys. 50, 69-77 (1976)

- Dwa punkty stałe: $\left\{ x_{1,2} = \frac{b-1 \pm \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2a}, y_{1,2} = bx_{1,2} \right\}$,
- rzeczywiste jeśli $a > -\frac{1}{4}(1-b)^2$.
- Jeden jest zawsze niestabilny; drugi staje się niestabilny gdy $a > \frac{3}{4}(1-b)^2$.

- Dwa punkty stałe: $\left\{ x_{1,2} = \frac{b-1 \pm \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2a}, y_{1,2} = bx_{1,2} \right\}$,
- rzeczywiste jeśli $a > -\frac{1}{4}(1-b)^2$.
- Jeden jest zawsze niestabilny; drugi staje się niestabilny gdy $a > \frac{3}{4}(1-b)^2$.

- Dwa punkty stałe: $\left\{ x_{1,2} = \frac{b-1 \pm \sqrt{(1-b)^2 + 4a}}{2a}, y_{1,2} = bx_{1,2} \right\}$,
- rzeczywiste jeśli $a > -\frac{1}{4}(1-b)^2$.
- Jeden jest zawsze niestabilny; drugi staje się niestabilny gdy $a > \frac{3}{4}(1-b)^2$.

Jakobian:

$$\det \mathbf{DM} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -2ax_n & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} = -b$$

$$|\det \mathbf{DM}| = |-b| : \begin{cases} < 1, & -1 < b < 1 & : \text{dyssypatywne} \\ = 1, & b = \pm 1 & : \text{zachowawcze} \end{cases}$$

Jakobian:

$$\det \mathbf{DM} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial x_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial x_{n+1}}{\partial y_n} \\ \frac{\partial y_{n+1}}{\partial x_n} & \frac{\partial y_{n+1}}{\partial y_n} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} -2ax_n & 1 \\ b & 0 \end{pmatrix} = -b$$

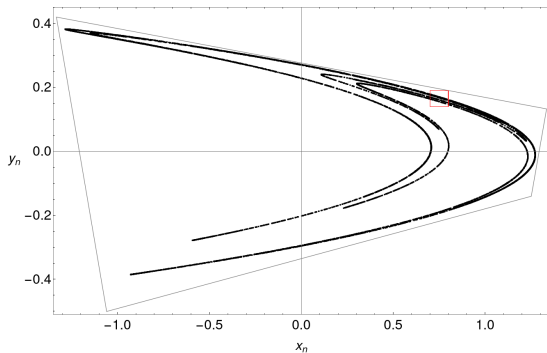
$$|\det \mathbf{DM}| = |-b| : \begin{cases} < 1, & -1 < b < 1 & : \text{dysypatywne} \\ = 1, & b = \pm 1 & : \text{zachowawcze} \end{cases}$$

Zadanie 19

Zanalizować stabilność punktów stałych poprzez obliczenie wartości własnych ν jacobianu w tych punktach (przyjąć wartości kanoniczne): jeśli $|\nu| < 1$, to punkt stały jest stabilny; jeśli co najmniej jeden $|\nu| > 1$, to istnieje jakiś rodzaj niestabilności (por. $\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{DM}(\mathbf{y}_n) \cdot \mathbf{w}_n$ z $|\delta_{n+1}| = |f'(p)| |\delta_n|$ z wykładu 2.; więcej szczegółów na wykładzie 4.).

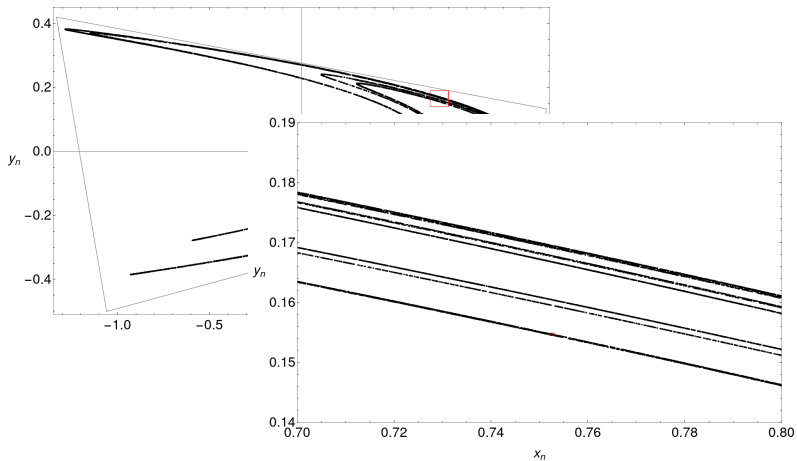
Odwzorowanie Hénona — dziwny atraktor

(więcej szczegółów na wykładzie 6.)



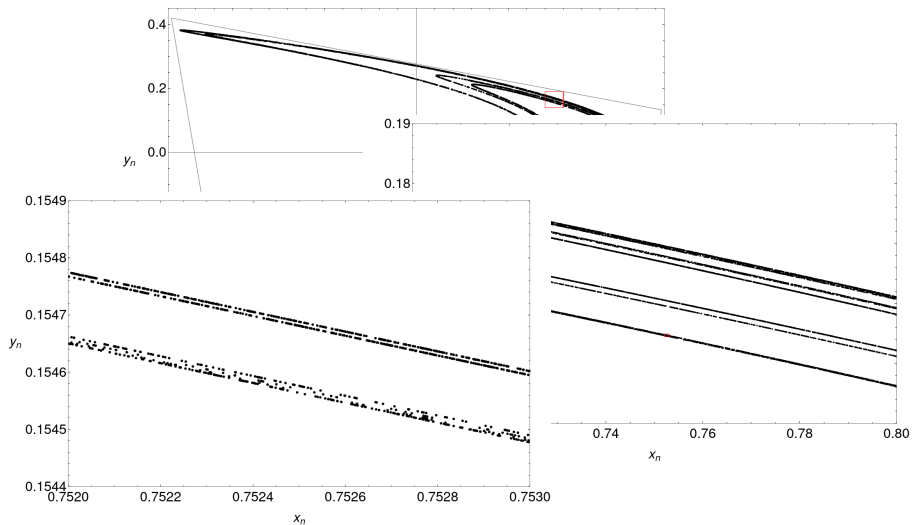
Odwzorowanie Hénona — dziwny atraktor

(więcej szczegółów na wykładzie 6.)



Odwzorowanie Hénona — dziwny atraktor

(więcej szczegółów na wykładzie 6.)



Odwzorowanie czworokąta $ABCD$:

$$A = (-1.33, 0.42)$$

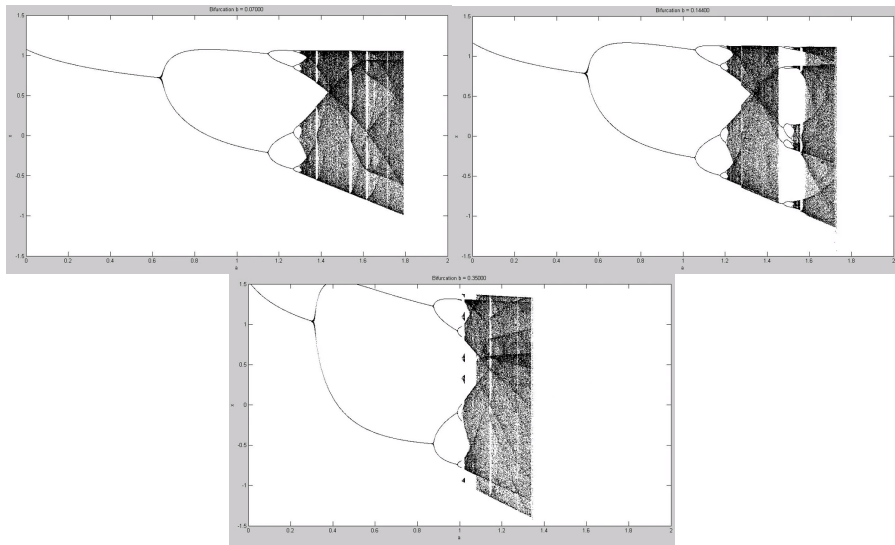
$$B = (1.32, 0.133)$$

$$C = (1.245, -0.14)$$

$$D = (-1.06, -0.5)$$

odwzorowaniem Hénona zawiera się wewnątrz tego czworokąta, tj. $ABCD$ jest **obszarem pułapkowania** (*trapping region*) — $(x_0, y_0) \in ABCD$ prowadzi do ograniczonej orbity. (Łatwo znaleźć war. pocz. spoza $ABCD$, które uciekają do nieskończoności.)

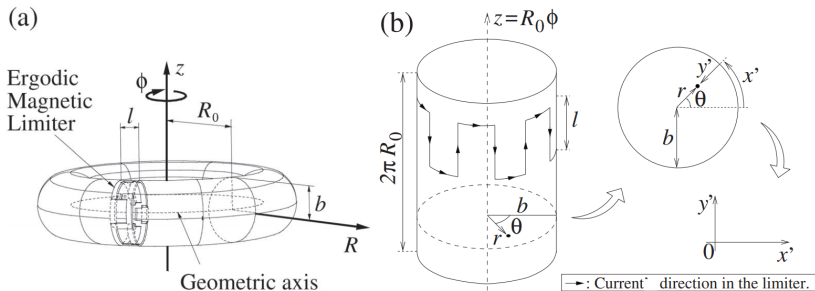
Odwzorowanie Hénona — diagramy bifurkacyjne



⁵<https://www.youtube.com/watch?v=bmn6N5niYU4>

Odwzorowanie Chirikowa (odwz. standardowe)

Uwięzienie plazmy w pułapce magnetycznej — tokamaki⁶ (lata 1950').



Naładowana cząstka wirująca w polu \vec{B} ma orbitalny moment magn. $\mu = v_{\perp}^2/2B$ antyrównoległy do \vec{B} , więc jeśli \vec{B} nie jest jednorodne, to cząstka jest wypychana w obszary ze słabszym polem.

Np. $B(r) = B_0(1 + r^2)$, więc uwięzienie jest w $r \approx 0$.

⁶Portela, Caldas, Viana, Eur. Phys. J. Special Topics 165, 195–210 (2008)

Odwzorowanie Chirikowa (odwz. standardowe)

$$\begin{cases} r_{n+1} &= r_n + K \sin(\theta_n) & \text{mod } 2\pi \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + r_{n+1} & \text{mod } 2\pi \end{cases}$$

lub równoważnie

$$\begin{cases} r_{n+1} &= r_n + \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\theta_n) & \text{mod } 1 \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + r_{n+1} & \text{mod } 1 \end{cases}$$

Zatem trajektorie leżą na torusie, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, odwzorowywanym w kwadrat jednostkowy (ew. w $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$).

Odwzorowanie Chirikowa (odwz. standardowe)

$$\begin{cases} r_{n+1} &= r_n + K \sin(\theta_n) & \text{mod } 2\pi \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + r_{n+1} & \text{mod } 2\pi \end{cases}$$

lub równoważnie

$$\begin{cases} r_{n+1} &= r_n + \frac{K}{2\pi} \sin(2\pi\theta_n) & \text{mod } 1 \\ \theta_{n+1} &= \theta_n + r_{n+1} & \text{mod } 1 \end{cases}$$

Zatem trajektorie leżą na torusie, $\mathbb{S}^1 \times \mathbb{S}^1$, odwzorowywanym w kwadrat jednostkowy (ew. w $[0, 2\pi] \times [0, 2\pi]$). Jest to układ zachowawczy:

$$\det \mathbf{DM} = \det \begin{pmatrix} \frac{\partial r_{n+1}}{\partial r_n} & \frac{\partial r_{n+1}}{\partial \theta_n} \\ \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial r_n} & \frac{\partial \theta_{n+1}}{\partial \theta_n} \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} 1 & K \cos(\theta_n) \\ 1 & 1 + K \cos(\theta_n) \end{pmatrix} = 1$$

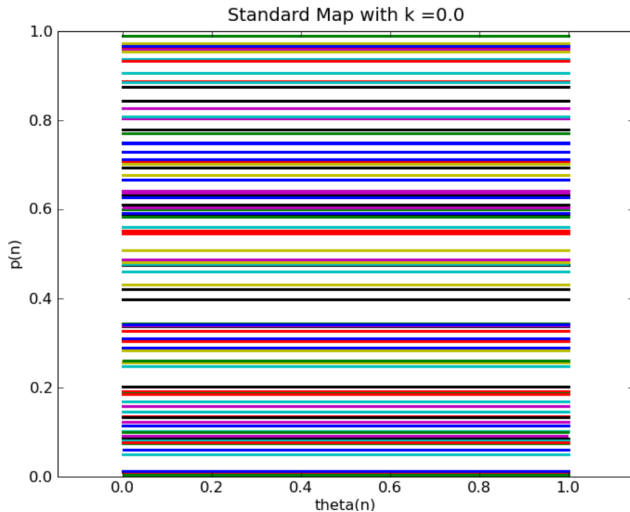
Dla ustalonego r : $\theta_{n+1} = \theta_n + f(r)$.

- $f(r)$ wymierne — orbity okresowe
- $f(r)$ niewymierne — orbity kwaziokresowe — torusy KAM.

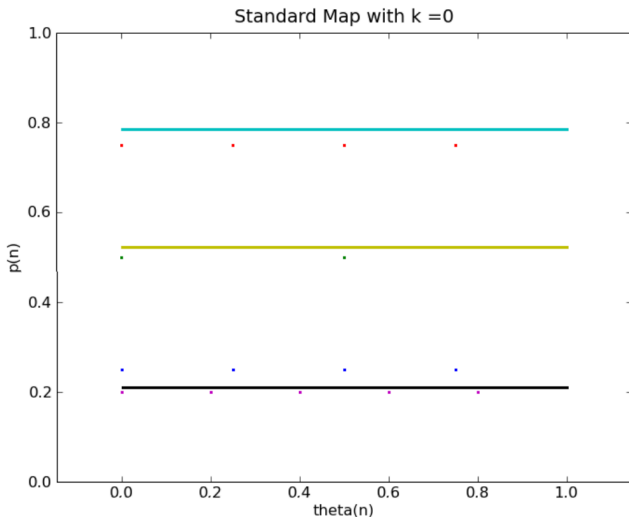
Dla $K = 0$ jest $\theta_n = \theta_0 + nr_0$.

[$p \equiv r$ na następnych slajdach.]

Odwzorowanie Chirikowa (odwz. standardowe)



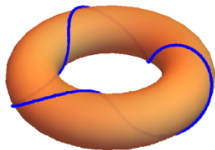
Odwzorowanie Chirikowa (odwz. standardowe)



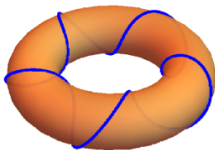
$$P_0 = \pi/4, 3/4, \pi/6, 1/2, 1/4, \pi/15, 1/5$$

Ruch na torusie – okresowość

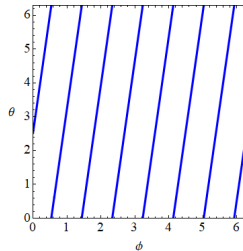
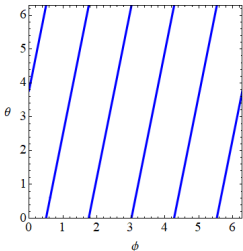
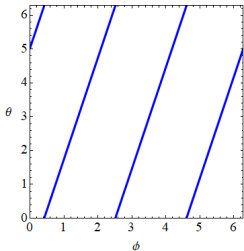
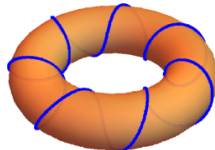
$\mathcal{T}(1,3)$



$\mathcal{T}(1,5)$

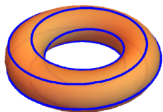


$\mathcal{T}(1,7)$

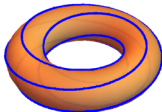


Ruch na torusie – okresowość

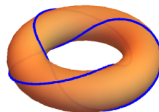
$\mathcal{T}(5,1)$



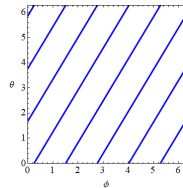
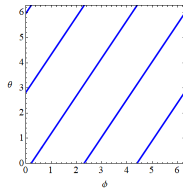
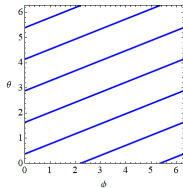
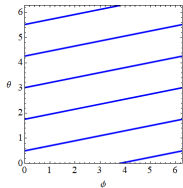
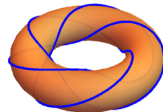
$\mathcal{T}(5,2)$



$\mathcal{T}(2,3)$

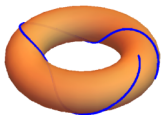


$\mathcal{T}(3,5)$

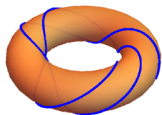


Ruch na torusie – quasiokresowość

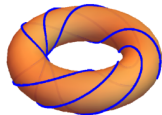
$\tau(1, \sqrt{5})$



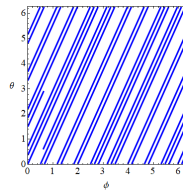
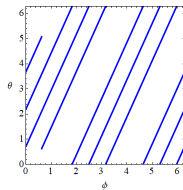
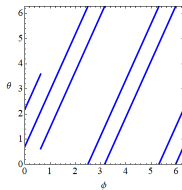
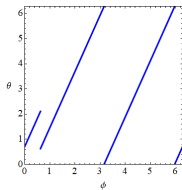
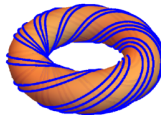
$\tau(1, \sqrt{5})$



$\tau(1, \sqrt{5})$

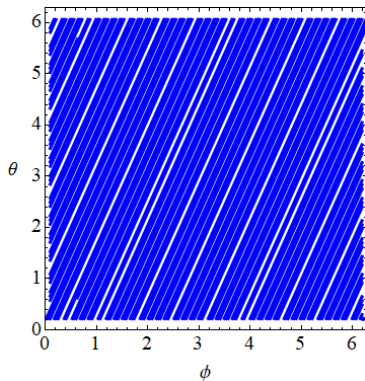
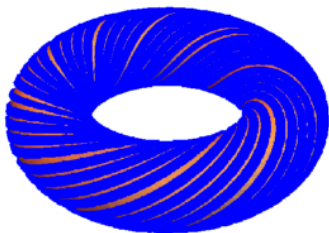


$\tau(1, \sqrt{5})$

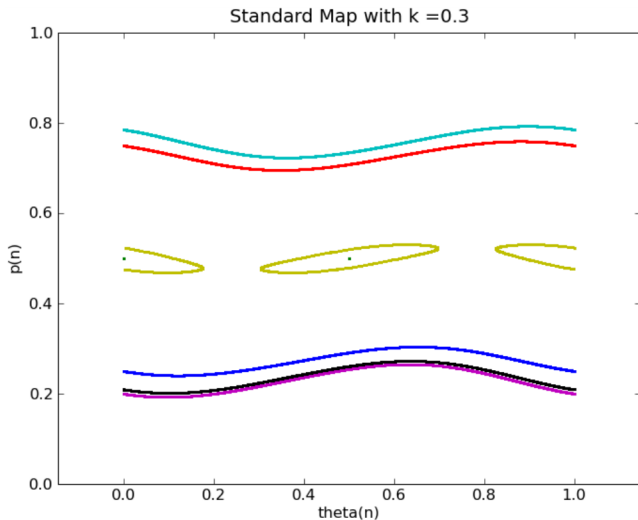


Ruch na torusie – quasiokresowość

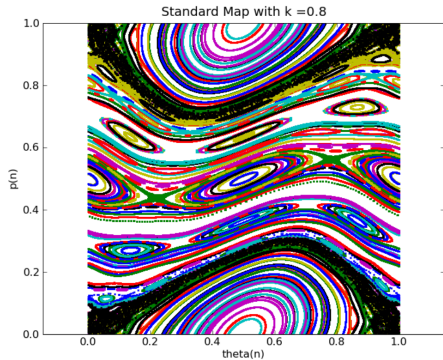
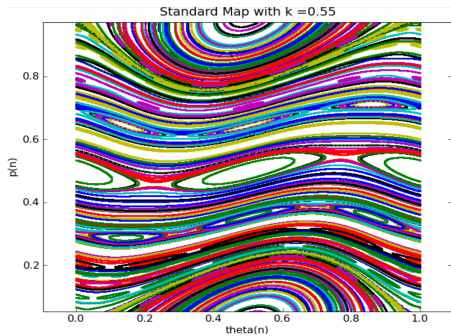
$$\mathcal{T}(1, \sqrt{5})$$



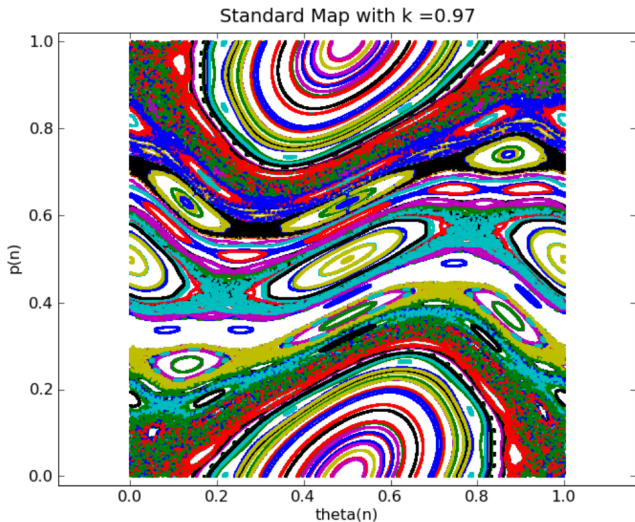
Odwzorowanie Chirikowa (odwz. standardowe)



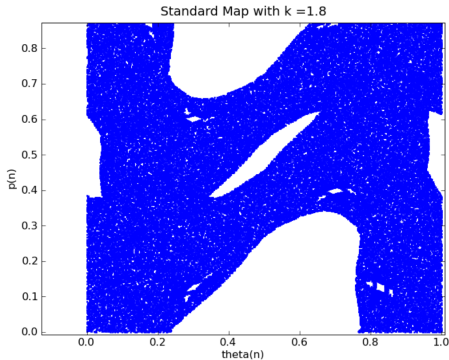
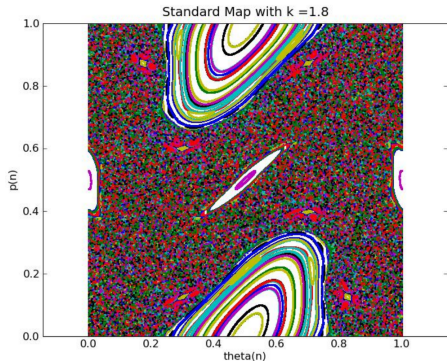
Odwzorowanie Chirikowa (odwz. standardowe)



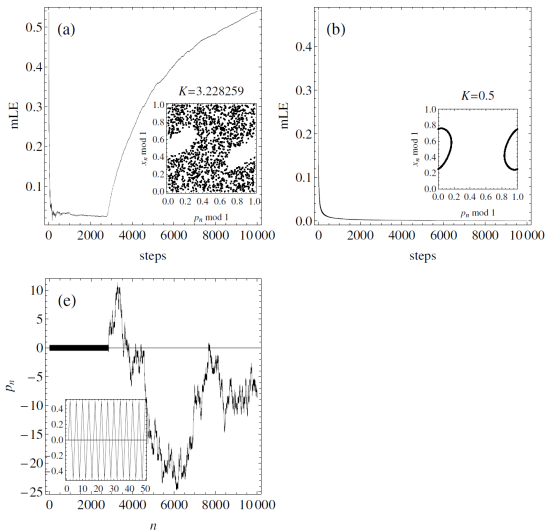
Odwzorowanie Chirikowa (odwz. standardowe)



Odwzorowanie Chirikowa (odwz. standardowe)



Odwzorowanie Chirikowa — lepkie orbity (*sticky orbits*)



⁷MT, Phys. A 490, 834-844 (2018)

Odwzorowanie Chirikowa — szturchnięty rotator

Położenie kątowe θ i pęd p .

K — natężenie „szturchnięć”. Hamiltonian:

$$\mathcal{H}(\theta, p, t) = \frac{1}{2}p^2 + K \cos \theta \sum_n \delta(t - n)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = K \sin \theta \sum_n \delta(t - n)$$

⁸https://www.youtube.com/watch?v=liHVOhdT_Pg

Odwzorowanie Chirikowa — szturchnięty rotator

Położenie kątowe θ i pęd p .

K — natężenie „szturchnięć”. Hamiltonian:

$$\mathcal{H}(\theta, p, t) = \frac{1}{2}p^2 + K \cos \theta \sum_n \delta(t - n)$$

$$\dot{\theta} = \frac{\partial \mathcal{H}}{\partial p} = p, \quad \dot{p} = -\frac{\partial \mathcal{H}}{\partial \theta} = K \sin \theta \sum_n \delta(t - n)$$

Rozważając chwile bezpośrednio przed n -tym szturchnięciem ($t \rightarrow n^-$), mamy z \mathcal{H} :

$$\begin{cases} \theta_{n+1} - \theta_n &= p_{n+1} \\ p_{n+1} - p_n &= K \sin \theta_n \sum_n \delta(t - n) = K \sin \theta_n \end{cases}$$

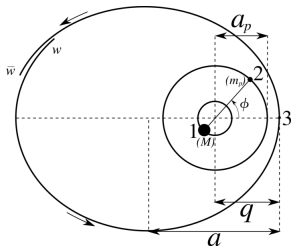
czyli znów odwzorowanie Chirikowa⁸.

⁸https://www.youtube.com/watch?v=liHV0hdT_Pg

Odwzorowanie Keplera

Zagadnienie trzech ciał z masą próbną m :

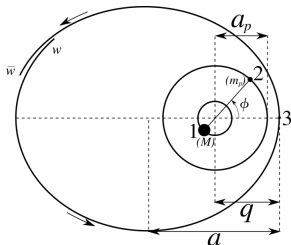
$$\begin{cases} w_{n+1} = w_n + j \sin \phi_n \\ \phi_{n+1} = \phi_n + 2\pi w_{n+1}^{-3/2} \end{cases}$$



Odwzorowanie Keplera

Zagadnienie trzech ciał z masą próbną m :

$$\begin{cases} w_{n+1} = w_n + j \sin \phi_n \\ \phi_{n+1} = \phi_n + 2\pi w_{n+1}^{-3/2} \end{cases}$$



• $\det \mathbf{DM} = 1$

• $w = \frac{-2E}{mv^2}$ jest przeskalowaniem energii E cząstki testowej o masie m ;
 v — prędkość orbitalna planety

• $x = \frac{\phi}{2\pi} = t/T \pmod{1}$ — faza w czasach t , w których planeta jest w perycentrum; T — okres orbitalny planety m_p wokół gwiazdy M

• Komety długookresowe — np. kometa Halleya:

$$j = j(M, m_p, q) = 0.007$$

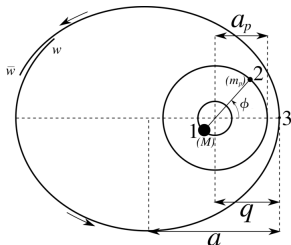
• Także jonizacja wodoru lub atomy rydbergowskie

• Globalny chaos gdy $\frac{5}{2}j^{2/5} \lesssim 1 \Leftrightarrow j \lesssim 0.1$

Odwzorowanie Keplera

Zagadnienie trzech ciał z masą próbną m :

$$\begin{cases} w_{n+1} = w_n + j \sin \phi_n \\ \phi_{n+1} = \phi_n + 2\pi w_{n+1}^{-3/2} \end{cases}$$

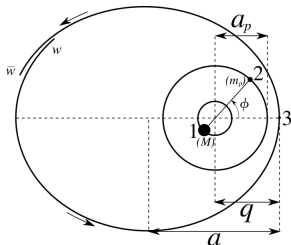


- $\det \mathbf{DM} = 1$
- $w = \frac{-2E}{mv^2}$ jest przeskalowaniem energii E cząstki testowej o masie m ;
 v — prędkość orbitalna planety
- $x = \frac{\phi}{2\pi} = t/T \pmod{1}$ — faza w czasach t , w których planeta jest w perycentrum; T — okres orbitalny planety m_p wokół gwiazdy M
- Komety długookresowe — np. kometa Halleya:
$$j = j(M, m_p, q) = 0.007$$
- Także jonizacja wodoru lub atomy rydbergowskie
- Globalny chaos gdy $\frac{5}{2}j^{2/5} \lesssim 1 \Leftrightarrow j \lesssim 0.1$

Odwzorowanie Keplera

Zagadnienie trzech ciał z masą próbną m :

$$\begin{cases} w_{n+1} = w_n + j \sin \phi_n \\ \phi_{n+1} = \phi_n + 2\pi w_{n+1}^{-3/2} \end{cases}$$



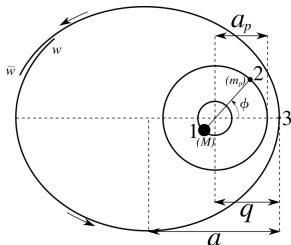
- $\det \mathbf{DM} = 1$
- $w = \frac{-2E}{mv^2}$ jest przeskalowaniem energii E cząstki testowej o masie m ; v — prędkość orbitalna planety
- $x = \frac{\phi}{2\pi} = t/T \pmod{1}$ — faza w czasach t , w których planeta jest w perycentrum; T — okres orbitalny planety m_p wokół gwiazdy M
- Komety długookresowe — np. kometa Halleya:

$$j = j(M, m_p, q) = 0.007$$

- Także jonizacja wodoru lub atomy rydbergowskie
- Globalny chaos gdy $\frac{5}{2}j^{2/5} \lesssim 1 \Leftrightarrow j \lesssim 0.1$

Zagadnienie trzech ciał z masą próbną m :

$$\begin{cases} w_{n+1} = w_n + j \sin \phi_n \\ \phi_{n+1} = \phi_n + 2\pi w_{n+1}^{-3/2} \end{cases}$$



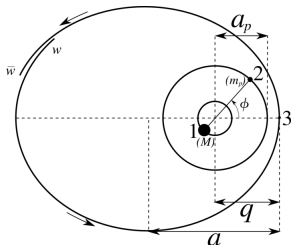
- $\det \mathbf{DM} = 1$
- $w = \frac{-2E}{mv^2}$ jest przeskalowaniem energii E cząstki testowej o masie m ; v — prędkość orbitalna planety
- $x = \frac{\phi}{2\pi} = t/T \pmod{1}$ — faza w czasach t , w których planeta jest w perycentrum; T — okres orbitalny planety m_p wokół gwiazdy M
- Komety długookresowe — np. kometa Halleya:

$$j = j(M, m_p, q) = 0.007$$

- Także jonizacja wodoru lub atomy rydbergowskie
- Globalny chaos gdy $\frac{5}{2}j^{2/5} \lesssim 1 \Leftrightarrow j \lesssim 0.1$

Zagadnienie trzech ciał z masą próbną m :

$$\begin{cases} w_{n+1} = w_n + j \sin \phi_n \\ \phi_{n+1} = \phi_n + 2\pi w_{n+1}^{-3/2} \end{cases}$$

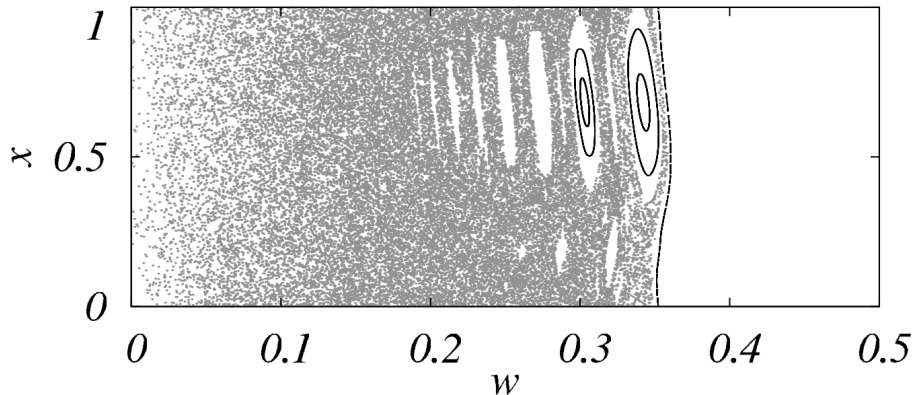


- $\det \mathbf{DM} = 1$
- $w = \frac{-2E}{mv^2}$ jest przeskalowaniem energii E cząstki testowej o masie m ; v — prędkość orbitalna planety
- $x = \frac{\phi}{2\pi} = t/T \pmod{1}$ — faza w czasach t , w których planeta jest w perycentrum; T — okres orbitalny planety m_p wokół gwiazdy M
- Komety długookresowe — np. kometa Halleya:

$$j = j(M, m_p, q) = 0.007$$

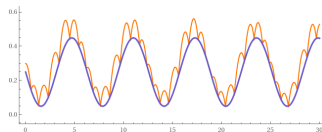
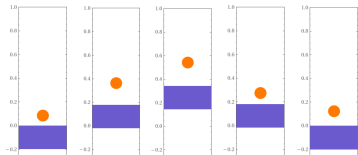
- Także jonizacja wodoru lub atomy rydbergowskie
- Globalny chaos gdy $\frac{5}{2}j^{2/5} \lesssim 1 \Leftrightarrow j \lesssim 0.1$

Dla komety Halleya:



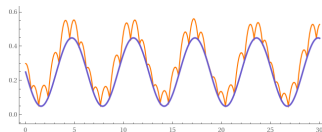
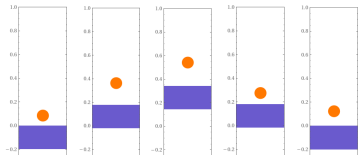
⁹Rollin, Lages, Shepelyansky, *Astron. Astrophys.* 576, A40 (2015)

Odwzorowanie odbijającej się piłki¹⁰



¹⁰Holmes, J. Sound Vib. 82(2) 173-189, 1982

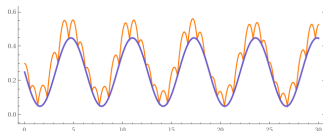
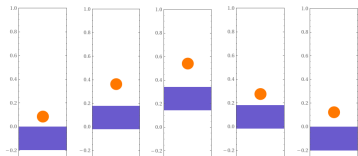
Odwzorowanie odbijającej się piłki¹⁰



$$\begin{cases} \phi_{n+1} &= (\phi_n + v_n) \pmod{2\pi} \\ v_{n+1} &= \alpha v_n - \gamma \cos(\phi_n + v_n) \end{cases}$$

¹⁰Holmes, J. Sound Vib. 82(2) 173-189, 1982

Odwzorowanie odbijającej się piłki¹⁰

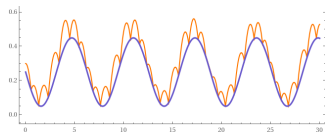
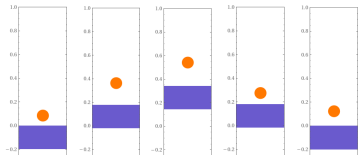


$$\begin{cases} \phi_{n+1} &= (\phi_n + v_n) \pmod{2\pi} \\ v_{n+1} &= \alpha v_n - \gamma \cos(\phi_n + v_n) \end{cases}$$

- ϕ_n — czas n -tego odbicia (modulo okres)
- v_n — prędkość w chwili n -tego odbicia
- $0 < \alpha \leq 1$ — współczynnik odbicia piłki (*coefficient of restitution*)
- γ — amplituda wymuszenia
- $\det \mathbf{DM} = \alpha$
- punkty stałe: $(\phi^*, v^*) = \left(2k\pi - \arccos\left(\frac{2k\pi(\alpha-1)}{\gamma}\right), 2k\pi \right)$,
 $k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N\}$, gdzie $N = \left\lfloor \frac{\gamma}{2\pi(1-\alpha)} \right\rfloor$.

¹⁰Holmes, J. Sound Vib. 82(2) 173-189, 1982

Odwzorowanie odbijającej się piłki¹⁰

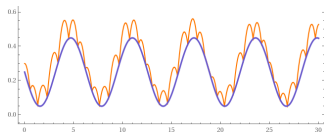
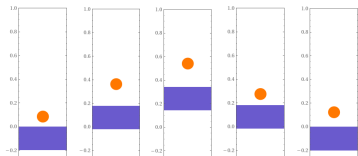


$$\begin{cases} \phi_{n+1} = (\phi_n + v_n) \pmod{2\pi} \\ v_{n+1} = \alpha v_n - \gamma \cos(\phi_n + v_n) \end{cases}$$

- ϕ_n — czas n -tego odbicia (modulo okres)
- v_n — prędkość w chwili n -tego odbicia
- $0 < \alpha \leq 1$ — współczynnik odbicia piłki (*coefficient of restitution*)
- γ — amplituda wymuszenia
- $\det \mathbf{DM} = \alpha$
- punkty stałe: $(\phi^*, v^*) = \left(2k\pi - \arccos\left(\frac{2k\pi(\alpha-1)}{\gamma}\right), 2k\pi \right)$,
 $k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N\}$, gdzie $N = \left\lfloor \frac{\gamma}{2\pi(1-\alpha)} \right\rfloor$.

¹⁰Holmes, J. Sound Vib. 82(2) 173-189, 1982

Odwzorowanie odbijającej się piłki¹⁰

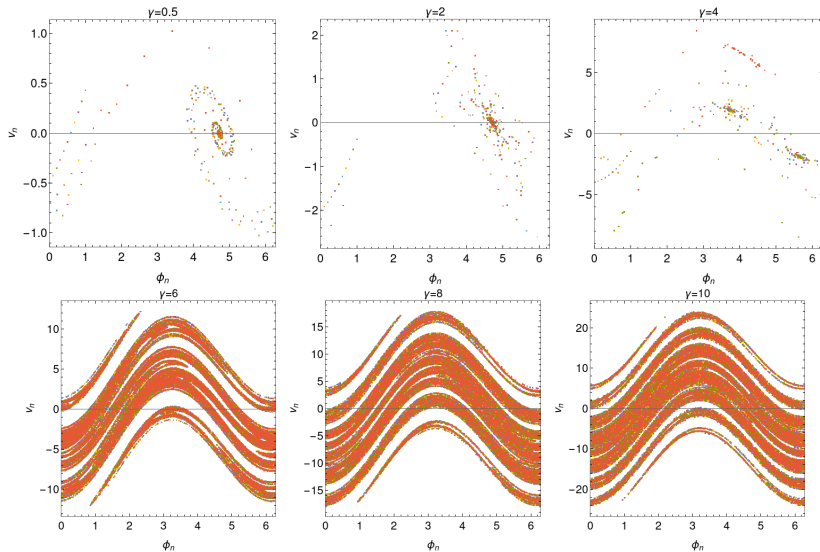


$$\begin{cases} \phi_{n+1} &= (\phi_n + v_n) \pmod{2\pi} \\ v_{n+1} &= \alpha v_n - \gamma \cos(\phi_n + v_n) \end{cases}$$

- ϕ_n — czas n -tego odbicia (modulo okres)
- v_n — prędkość w chwili n -tego odbicia
- $0 < \alpha \leq 1$ — współczynnik odbicia piłki (*coefficient of restitution*)
- γ — amplituda wymuszenia
- $\det \mathbf{DM} = \alpha$
- punkty stałe: $(\phi^*, v^*) = \left(2k\pi - \arccos\left(\frac{2k\pi(\alpha-1)}{\gamma}\right), 2k\pi \right)$,
 $k \in \{0, \pm 1, \pm 2, \dots, \pm N\}$, gdzie $N = \left\lfloor \frac{\gamma}{2\pi(1-\alpha)} \right\rfloor$.

¹⁰Holmes, J. Sound Vib. 82(2) 173-189, 1982

Odwzorowanie odbijającej się piłki ($\alpha = 0.7$)



¹¹<https://youtu.be/iNSkwed13AM?t=360>

Odwzorowanie piernikowego ludzika

$$\begin{cases} x_{n+1} = 1 - y_n + |x_n| \\ y_{n+1} = x_n \end{cases}$$

