Wprowadzenie do teorii chaosu

Lista zadań

Mariusz Tarnopolski

2023/2024

Wykład 2 – odwzorowanie logistyczne

1. (*Wspomagane komputerowo*) Zlokalizować pierwszą wartość r dla której bifurkacja stycznościowa odwzorowania logistycznego $f(x) = rx(1-x)$ prowadzi do orbity o okresie-5.

2. Określić typ maksimum odwzorowań:

   (a) $f(x) = r(1-(2x-1)^4)$

   (b) $g(x) = \dfrac{rx(1-x)}{1+x}$

   gdzie $r > 0$ jest parametrem.

3. Niech będzie dane odwzorowanie trójkątne (*tent map*)[1]

$$x_{n+1} = T(x_n) = \begin{cases} \mu x_n & x_n < {}^{1}\!/_{2} \\ \mu\,(1-x_n) & x_n \geqslant {}^{1}\!/_{2} \end{cases}$$

   gdzie $x \in [0,1]$, $\mu \in [0,2]$.

   (a) Zbadać stabilność punktów stałych $T(x)$ w zależności od parametru μ.

   (b) Rozważyć $T^2(x)$. Jakie ma punkty stałe? Wskazać okres-2. Czy jest on stabilny?

   (c) Przyjąć $\mu = 2$. Znaleźć orbity o okresie-3.

4. Udowodnić, że cykle superstabilne odwzorowań unimodalnych zawsze przechodzą przez x_m (tj. przez argument maksimum).

5. Pokazać, że jeśli $g(x)$ spełnia równanie Feigenbauma-Cvitanovića, to $\mu g({}^{x}\!/_{\mu})$, gdzie $\mu \in \mathbb{R}\backslash\{0\}$, również je spełnia.

6. Założyć, że $g(x) = 1 + bx^2 + \mathcal{O}(x^4)$. Rozwiązać równanie Feigenbauma-Cvitanovića oraz obliczyć wartość stałej α. Ile wynosi błąd względny?

7. Założyć, że $h(x) = h(0) + \mathcal{O}(x)$, $h(0) \neq 0$. Rozwiązać równanie własne (slajd 60) oraz obliczyć wartość stałej δ. Ile wynosi błąd względny?

8. Policzyć analitycznie i narysować wykresy wykładnika Lapunowa $\lambda(r)$ dla odwzorowania logistycznego w przedziałach:

   (a) $0 < r < 1$

[1] Równoważne sformułowania: $x_{n+1} = \frac{\mu}{2}\left(1 - 2\left|x_n - {}^{1}\!/_{2}\right|\right) \equiv \mu \min\left\{x_n, 1-x_n\right\}$

(b) $1 < r < 3$

(c) $3 < r < 1 + \sqrt{6}$

Korzystając z tych postaci analitycznych, znaleźć położenia cykli superstabilnych.

9. Obliczyć wykładnik Lapunowa dla odwzorowania $f(x) = 6x(1-x)(1-2x+2x^2)$.

   (*Wskazówka*: rozważyć stabilność punktów stałych.)

10. Znaleźć odpowiedni homeomorfizm h i pokazać, że odwzorowanie logistyczne z $r = 4$ oraz odwzorowanie trójkątne z $\mu = 2$ są topologicznie sprzężone.

11. Wykorzystując wynik zad. 10 obliczyć wykładnik Lapunowa dla odwzorowania logistycznego z $r = 4$.

12. Ułożyć równanie Perrona-Frobeniusa dla odwzorowania trójkątnego z $\mu = 2$ oraz podać jego rozwiązanie.

13. Wykorzystując rozkład niezmienniczy, obliczyć wykładnik Lapunowa dla odwzorowania trójkątnego z $\mu = 2$.

14. Obliczyć rozkład niezmienniczy dla odwzorowania logistycznego z $r = 4$. Jak można go wykorzystać do policzenia wykładnika Lapunowa?

15. Obliczyć wykładnik Lapunowa dla $x_{n+1} = 13x_n + 21$. Czy ten układ jest chaotyczny?

16. Uporządkować wg porządku Szarkowskiego: $\{452, 897, 802, 326\}$.

17. Pokazać[2], że odwzorowanie logistyczne z $r = 4$ ma orbity o okresie-3. Znaleźć je.

Wykład 3 – odwzorowania dwuwymiarowe

18. Obliczyć wykładniki Lapunowa dla odwzorowania Arnolda (*Arnold's cat map* lub *Anosov map*):

$$\begin{pmatrix} x_{n+1} \\ y_{n+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_n \\ y_n \end{pmatrix} \mod 1$$

   Czy to odwzorowanie jest chaotyczne? Co gdyby pominąć $\mod 1$?

19. Zanalizować stabilność punktów stałych odwzorowania Hénona poprzez obliczenie wartości własnych ν jakobianu w tych punktach (przyjąć wartości kanoniczne dla parametrów a i b): jeśli $|\nu| < 1$, to punkt stały jest stabilny; jeśli co najmniej jeden $|\nu| > 1$, to istnieje jakiś rodzaj niestabilności.

[2] Jedno z możliwych rozwiązań może być wspomagane komputerowo.

Wykład 4 – układ Lorenza

20. Określić jakie zachodzą relacje między wartościami własnymi (λ_1, λ_2) w poszczególnych obszarach diagramu $(\mathrm{Tr}\mathbf{A}, \det\mathbf{A})$.

21. Zlinearyzować układ

$$\begin{cases} \dot{x} &= -y + ax(x^2+y^2) \\ \dot{y} &= x + ay(x^2+y^2) \end{cases}$$

gdzie $a \neq 0$, oraz zbadać stabilność punktów stałych. Naszkicować portret fazowy oraz porównać z portretem układu nieliniowego[3]. Rozwiązać układ analitycznie.

22. Rozważyć populacje królików i owiec, rywalizujących na ograniczonym obszarze o te same zasoby, opisanych układem dynamicznym

$$\begin{cases} \dot{x} &= x(3-x) - 2xy \\ \dot{y} &= y(2-y) - xy \end{cases}$$

Zbadać dynamikę tego modelu, tj. określić stabilność punktów stałych i naszkicować portret fazowy.

23. Przekształcić układ Sprotta

$$\dddot{x} + A\ddot{x} - \dot{x}^2 + x = 0$$

do postaci układu dynamicznego i zbadać stabilność punktu stałego.

(*Wskazówka*: skorzystać z twierdzenia Routha-Hurwitza.)

Wykład 6 – fraktale

24. Jaka jest średnia odległość między dwoma losowymi punktami należącymi do zbioru Cantora $\mathcal{C}$?

(*Wskazówka:* symetria i samopodobieństwo.)

25. Ile wynoszą wymiary samopodobieństwa uogólnień zbioru Cantora:
    (a) w każdej iteracji wycinamy połowę przedziału położoną pośrodku;
    (b) w każdej iteracji wycinamy $1/p$ przedziału położoną w środku; jakie wartości p mają sens?
    (c) w każdej iteracji zostawiamy równo rozmieszczone jedne piąte przedziału;
    (d) opisanego stosunkami $(r_1, r_2) = (1/5, 1/7)$;
    (e) współrzędne punktów należących do zbioru nie posiadające w swoim rozwinięciu dziesiętnym cyfry 5.

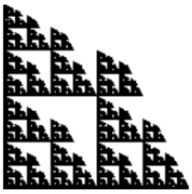
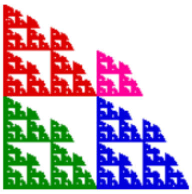
[3] Np. `https://aeb019.hosted.uark.edu/pplane.html`

26. Obliczyć wymiary samopodobieństwa:

(a) zbioru Cantora z $(r_1, r_2) = (1/4, 1/2)$,

(b) fraktala Vicseka,

(c) poniższego fraktala[4] z $(r_i, r_j) = (1/4, 1/2)$:

 tj. 

(d) śnieżynki Kocha,

(e) dywanu Sierpińskiego,

(f) gąbki Mengera.

[4] Rozważyć krotność stosunków.