Wprowadzenie do teorii chaosu

Cheat sheet 2

Mariusz Tarnopolski

2023/2024

Wymiary fraktalne

1. Wymiar samopodobieństwa:

$$d = \frac{\ln N}{\ln s}$$

gdzie N – liczba kopii o skali s.

2. Wymiar pudełkowy:

$$d_{\text{box}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\ln N(\varepsilon)}{\ln(1/\varepsilon)}$$

gdzie $N(\varepsilon)$ – liczba pudełek rozmiaru ε.

3. Wymiar korelacyjny:

$$d_{\text{corr}} = \lim_{r \to \infty} \frac{\ln C(r)}{\ln r}$$

gdzie

$$C(r) = \frac{2}{n(n-1)} \sum_{\substack{j=i+1 \\ i=1}}^{n} \Theta\left(r - |\mathbf{x}_i - \mathbf{y}_j|\right)$$

4. Wymiar Hausdorffa d_H:

$$\mathcal{H}^{d<d_H}(A) = \infty \quad \wedge \quad \mathcal{H}^{d>d_H}(A) = 0$$

gdzie $\mathcal{H}^d(A)$ jest d-wymiarową miarą Hausdorffa zbioru A.

5. Wymiar topologiczny:

- mały wymiar indukcyjny, *ind*:
  Zbiór X jest n-wymiarowy, jeśli może być pokryty dowolnie małymi zbiorami otwartymi o $(n-1)$-wymiarowym brzegu, przy czym $ind(\emptyset) = -1$.
- wymiar pokryciowy Lebesgue'a, *dim*:
  Zbiór X jest n-wymiarowy jeśli można go pokryć zbiorami otwartymi takimi, że dowolny $x \in X$ znajduje się w co najwyżej $(n+1)$ takich zbiorów otwartych.

$\boxed{\text{Fraktale mają wymiar Hausdorffa} \neq \text{wymiar topologiczny.}}$