

# Wprowadzenie do teorii chaosu

Cheat sheet 1

Mariusz Tarnopolski

2023/2024

## Punkty stałe $\rightarrow$ jacobian $\rightarrow$ wartości własne $\rightarrow$ stabilność

<p>Odwzorowania (układy dynamiczne z czasem dyskretnym)</p> $\mathbf{x}_{n+1} = \mathbf{M}(\mathbf{x}_n)$ <p>mają punkty stałe <math>\mathbf{x}^*</math> spełniające</p> $\boxed{\mathbf{M}(\mathbf{x}^*) = \mathbf{x}^*}$ <p>Zatem odchylenie <math>\mathbf{w}_n</math> od punktu <math>\mathbf{x}^*</math>, spełniające zlinearyzowane równanie</p> $\mathbf{w}_{n+1} = \mathbf{DM}(\mathbf{x}^*) \cdot \mathbf{w}_n,$ <p>będzie rosło z czasem <math>n</math> jeśli wartości własne <math>\lambda</math> jacobianu w punkcie <math>\mathbf{x}^*</math></p> $\mathbf{DM}(\mathbf{x}^*) = \left( \frac{\partial x_i}{\partial x_j} \right)_{i,j} \Big _{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}$ <p>spełniają <math>\boxed{ \lambda  &gt; 1}</math></p>	<p>Układy dynamiczne z czasem ciągłym</p> $\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{f}(\mathbf{x})$ <p>mają punkty stałe <math>\mathbf{x}^*</math> spełniające</p> $\boxed{\mathbf{f}(\mathbf{x}^*) = 0}$ <p>Zatem odchylenie <math>\mathbf{w}(t)</math> od punktu <math>\mathbf{x}^*</math>, spełniające zlinearyzowane równanie</p> $\dot{\mathbf{w}}(t) = \mathbf{J} \cdot \mathbf{w}(t),$ <p>będzie rosło z czasem <math>t</math> jeśli wartości własne <math>\lambda</math> jacobianu w punkcie <math>\mathbf{x}^*</math></p> $\mathbf{J}(\mathbf{x}^*) = \left( \frac{\partial f_i}{\partial x_j} \right)_{i,j} \Big _{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*}$ <p>spełniają <math>\boxed{\lambda &gt; 0}</math></p>
<p>Por. z przypadkiem 1D: <math> \delta_{n+1}  \simeq  f'(x^*)   \delta_n  \Rightarrow \delta_n</math> będzie rosło jeśli <math> f'(x^*)  &gt; 1</math>.</p>	<p>Por. z przypadkiem 1D: <math>\dot{w} = Jw \Rightarrow w(t) \simeq e^{Jt}</math> będzie rosło jeśli <math>J &gt; 0</math>.</p>

Uwagi dot. notacji: jacobian odwzorowania  $\mathbf{M}$  oznaczamy zarówno jako  $\mathbf{DM}$ , jak i  $\mathbf{J}$ , ponieważ najpierw przez  $\mathbf{J}$  oznaczyliśmy macierz podobną (do pewnej  $\mathbf{A}$ ), która nie jest jacobianem. W sytuacjach gdzie było jasne z kontekstu, używaliśmy ozn.  $\mathbf{J}$  zarówno dla odwzorowań, jak i układów z czasem ciągłym. Podobny konflikt oznaczeń miewa miejsce w przypadku wartości własnych  $\lambda$  dowolnej macierzy oraz wykładników Lapunowa  $\lambda$ . Tutaj też było to zazwyczaj jasne z kontekstu.