Andrzej Pietruszczak

Konspekt do wykładu „Logika I”*

(z dnia 06.01.2006)

Przypomnienie z poprzedniego wykładu

Na początek przypomnijmy podstawowe pojęcia z poprzedniego wykładu, które wykorzystamy również na dzisiejszym wykładzie.

Definicja. Dana grupa zdań *jest sprzeczna*, gdy nie jest możliwe, aby wszystkie zdania w tej grupie były jednocześnie prawdziwe.

Definicja. Mówimy, że dane zdania *są wzajemnie sprzeczne*, gdy utworzona z nich grupa jest sprzeczna, tzn. gdy nie jest możliwe, aby wszystkie te zdania były jednocześnie prawdziwe.

W szczególnym przypadku

Definicja. Dwa zdania *są nawzajem sprzeczne*, gdy nie jest możliwe, aby zdania te były jednocześnie prawdziwe.

Definicja. Mówimy, że zdania w danej grupie *dopełniają się*, gdy nie jest możliwe, aby wszystkie te zdania były jednocześnie fałszywe (tzn. co najmniej jedno z nich musi być prawdziwe).

Definicja. Mówimy, że zdania w danej grupie *parami dopełniają się*, gdy nie jest możliwe, aby żadne dwa z nich były jednocześnie fałszywe.

W szczególnym przypadku, gdy grupa składa się z dwóch zdań powyższe dwa pojęcia pokrywają się i otrzymujemy:

Definicja. Mówimy, że dwa zdania *dopełniają się*, gdy nie jest możliwe, aby zdania te były jednocześnie fałszywe (tzn. co najmniej jedno z nich musi być prawdziwe).

Przykładowo, poniższe dwa zdania:

Jan jest kawalerem

Jan jest żonaty

są wzajemnie sprzeczne (wykluczają się), lecz nie dopełniają się. Mogą być jednocześnie fałszywe w sytuacji, gdy Jan jest wdowcem albo jest rozwiedziony.

Zaprzeczenie

Na poprzednim wykładzie mówiliśmy również o zaprzeczeniu. Przede wszystkim przypomnijmy, że zaprzeczenie danego zdania jest pewną operacją wykonaną na tym zdaniu.

Jak poprzednio załóżmy, że ktoś wypowiedział pewien sąd, a my uważamy, że jest to sąd fałszywy. Wówczas możemy wyrazić własny sąd, który będzie zaprzeczeniem sądu tego kogoś. To nasze zaprzeczenie ma wyrażać sąd, że jest inaczej («jest odwrotnie») niż ten ktoś twierdzi.

Zauważmy, że z samej idei zaprzeczenia, dane zdanie i jego zaprzeczenie muszą mieć różne wartości. Po pierwsze, oba nie mogą być jednocześnie prawdziwe. (Jeśli mogłoby być tak, że ten ktoś mówi prawdę oraz my mówimy prawdę, to nasza wypowiedź w ogóle nie byłaby zaprzeczeniem; nasze «zaprzeczanie» mijałoby się z celem.) Po drugie, oba nie mogę być jednocześnie fałszywe. (Jeśli mogłoby być tak, że ten ktoś mówi fałsz oraz my mówimy fałsz, to nasza wypowiedź w ogóle nie spełniałaby zadania zaprzeczenia; nic by nie wnosiła.)

Może się jednak zdarzyć, że to nie my mamy rację, lecz ma rację osoba, której zaprzeczamy. Wówczas nasze zaprzeczenie będzie fałszywe.

Reasumując, dane zdanie i jego zaprzeczenie muszą spełniać dwa warunki:

1. dopełniają się,
2. wykluczają się (tzn. są wzajemnie sprzeczne).

Utożsamienie sensu pojęcia *sprzeczności* z sensem pojęcia *zaprzeczenia* jest błędem, o którym mówiliśmy na poprzednim wykładzie.

Do tej pory o zaprzeczeniu mówiliśmy tak jakby dane zdanie miało zawsze tylko jedno zaprzeczenie. Problem w tym, że dane zdanie może mieć kilka zaprzeczeń. Przykładowo, zaprzeczeniem zdania

Toruń nie jest pięknym miastem

są oba poniższe zdania:

Toruń jest pięknym miastem

Nie jest tak, że Toruń nie jest pięknym miastem

Zatem każde zdanie ma co najmniej jedno zaprzeczenie. Jest nim poprzedzenie tego zdania takimi zwrotami jak: ‘nie jest tak, że’, ‘nie jest prawdą, że’, czy ‘nieprawda, że’ (potem omówimy te zwroty, pokazując, że mają one ten sam sens).

Jeśli zatem używamy zwrotu ‘dane zdanie i jego zaprzeczenie’, to mamy na myśli jedno wybrane zaprzeczenie tego zdania (zazwyczaj to, które ma najprostszą postać).

Negacja

Czasami popełnia się błąd utożsamiając sens pojęcia *sprzeczności* z sensem pojęcia *negacji*. Porównując dwa poprzednio podane błędne wyjaśnienia pojęcia *sprzeczności* można się zastanawiać czy użyte w nich pojęcie *zaprzeczenia* i pojęcie *negacji* mają tę samą treść, czy różną?

Czasami przyjmuje się rozwiązanie przy którym pojęcie *zaprzeczenia* i pojęcie *negacji* znaczą to samo. My jednak przyjmiemy inne rozwiązanie, przy którym negacja jest specjalnym rodzajem zaprzeczenia, które uzyskujemy ze zdania wyjściowego poprzez ODPOWIEDNIE dodanie słowa ‘nie’.

Negacja kojarzy nam się zazwyczaj z użyciem słowa ‘nie’. Ale z drugiej strony można przecież zaprzeczać komuś bez użycia słowa ‘nie’, jeśli w stwierdzeniu tego kogoś było użyte to słowo.

PRZYKŁAD 1. Bierzemy dwa zdania poprzednio rozpatrywane:

1. *Toruń nie jest pięknym miastem*
2. *Toruń jest pięknym miastem*

Zadajmy kilka pytań i dajmy od razu odpowiedź:

— Czy drugie zdanie jest negacją pierwszego?

Nie, gdyż operując na pierwszym zdaniu, w ogóle nie dodaliśmy słowa ‘nie’ (wręcz przeciwnie, usunęliśmy je i nie ma w nim tego słowa).

— Czy drugie zdanie jest zaprzeczeniem pierwszego?

Tak, ponieważ oba zdania są wzajemnie sprzeczne oraz dopełniają się.

— Czy pierwsze zdanie jest zaprzeczeniem drugiego?

Tak, ponieważ oba zdania dopełniają i wykluczają się.

— Czy pierwsze zdanie jest negacją drugiego?

Tak, gdyż zaprzeczenie uzyskano poprzez (ODPOWIEDNIE) dodanie słowa ‘nie’. □

Podany przykład i sposób odpowiedzi na postawione tam pytania pokazują:

Spostrzeżenie 1. Pojęcie *zaprzeczenia* jest symetryczne, tzn.: jeśli jedno zdanie jest zaprzeczeniem drugiego, to drugie jest zaprzeczeniem pierwszego.

Dowód. Jeśli jedno zdanie jest zaprzeczeniem drugiego, to znaczy to tylko tyle, że oba dopełniają i wykluczają się. A te dwa pojęcia są symetryczne. Stąd także drugie zdanie jest zaprzeczeniem pierwszego. □

Spostrzeżenie 2. Pojęcie *negacji* jest niesymetryczne, tzn.: jedno zdanie może być negacją drugiego, a drugie nie być negacją pierwszego.

Dowód. Patrz podany przykład. Drugie zdanie nie jest negacją pierwszego, lecz pierwsze jest negacją drugiego.

Negacja polega na odpowiednim dodaniu słowa ‘nie’. Negacja negacji to kolejne dodanie słowa ‘nie’. Zatem «nie wrócimy» do stanu wyjściowego.

Jeśli pierwsze zdanie powstaje z drugiego poprzez odpowiednie dodanie słowa ‘nie’, to drugie nie powstanie w ten sposób z pierwszego. □

Jak już wspomnieliśmy negacja jest związana z odpowiednim użyciem słowa ‘nie’. Na czym ma jednak polegać to „odpowiednie użycie”?

Mianowicie, trzeba zawsze pamiętać, że negacja to szczególny rodzaj zaprzeczenia. Innymi słowy, negacja danego zdania jest także jego zaprzeczeniem. Zatem musimy uzyskać zdanie wykluczające się ze zdaniem wyjściowym oraz dopełniające się z nim. Innymi słowy, dane zdanie i jego negacja — jako szczególny rodzaj zaprzeczania — także MUSZĄ mieć różne wartości.[1]

Przykład 2. Do orzeczenia poniższego zdania:

Szekspir był dramaturgiem

dodajemy słowo ‘nie’ i otrzymujemy:

Szekspir nie był dramaturgiem

Czy otrzymano negację zdania wyjściowego? Tak, gdyż oba zdania NIE MOGĄ BYĆ jednocześnie prawdziwe, czyli wykluczają się. Ponadto, oba zdania NIE MOGĄ BYĆ jednocześnie fałszywe, czyli dopełniają się.

Oczywiście, każda negacja jest również zaprzeczeniem. Ponadto, dane zdanie i jego negacja są wzajemnie sprzeczne, gdyż wykluczają się. □

Przykład 3. Do orzeczenia zdania:

Co najmniej jeden Polak jest bogaty

dodajemy słowo ‘nie’ i otrzymujemy:

Co najmniej jeden Polak nie jest bogaty

Pytania i odpowiedzi:

— Czy otrzymano negację zdania wyjściowego?

Nie, gdyż oba zdania są prawdziwe! Drugie zdanie nie jest w ogóle zaprzeczeniem pierwszego.

— Czy są to zdania wzajemnie sprzeczne?

Nie, gdyż zdania wzajemnie sprzeczne nie mogą być łącznie prawdziwe, a te są. □

Przykład 4. Do orzeczenia zdania:

Każda kobieta jest matką

dodano słowo ‘nie’ i otrzymano:

Każda kobieta nie jest matką

[1] Podkreślmy, MUSZĄ mieć różne wartości, a nie tylko: mają różne wartości.

Pytania i odpowiedzi:
— Czy otrzymano negację zdania wyjściowego?
Nie, gdyż oba zdania są fałszywe! Drugie zdanie nie jest zaprzeczeniem pierwszego. Zdania te nie dopełniają się. Zatem również pierwsze zdanie nie jest zaprzeczeniem drugiego.
— Czy powyższe zdania są wzajemnie sprzeczne?
Tak, gdyż NIE JEST MOŻLIWE, aby łącznie były prawdziwe. □

Zauważmy pewną prawidłowość, która przyda nam się dalej.

Spostrzeżenie 3. Jeśli poprzez użycie słowa ‘nie’ nie uzyskano negacji, to nie uzyskano także zaprzeczenia.

Dowód. Przecież negacja ma być szczególnym rodzajem zaprzeczenia, które uzyskujemy poprzez odpowiednie użycie słowa ‘nie’. Zatem, gdyby otrzymano zaprzeczenie, to byłaby to także negacja. □

A teraz trudniejszy przykład. W poprzednim przykładzie zdania BYŁY fałszywe, a teraz będzie TYLKO istnieć taka możliwość.

Przykład 5. Do zdania:

Jan sądzi, że Szekspir był geniuszem

dodano słowo ‘nie’ w następujący sposób:

Jan sądzi, że Szekspir nie był geniuszem

Pytanie i odpowiedź:
— Czy otrzymano negację zdania wyjściowego?
Nie! Istnieje taka możliwość, że Jan w ogóle nic nie słyszał o Szekspirze, więc NIC o nim nie sądzi. Wówczas, w takiej sytuacji, oba zdania będą fałszywe. Innymi słowy, MOŻE BYĆ TAK, że oba zdania są fałszywe, czyli zdania te nie dopełniają się.

Można to również inaczej wyjaśnić. Wypowiadając drugie zdanie nie mamy pewności, że będzie ono prawdziwe, kiedy pierwsze jest fałszywe. Oba mogą być fałszywe. A przecież idea zaprzeczania polega na tym, że zdanie i jego zaprzeczenie MUSZĄ MIEĆ RÓŻNE WARTOŚCI. □

Powróćmy do ostatniego przykładu:

Przykład 6. Wiemy, że pomiędzy poniższymi zdaniami nie zachodzi relacja zaprzeczania:

Jan sądzi, że Szekspir był dramaturgiem
Jan sądzi, że Szekspir nie był dramaturgiem

Pytanie i odpowiedź:
— Czy są to zdania wzajemnie sprzeczne?
Tak! Zdania te chociaż mogły być razem fałszywe, to jednak razem nie nogą być prawdziwe. Tzn. wykluczają się.

Wybitny polski filozof i logik, Jan Łukasiewicz, w książce *O zasadzie sprzeczności u Arystotelesa* wyróżnił trzy zasady sprzeczności: logiczną, ontologiczną i psychologiczną. Tutaj chodzi właśnie o tę trzecią wersję, według której nie można mieć sprzecznych przeświadczeń.

Dokładniej, poniższe dwa sądy

Szekspir był dramaturgiem
Szekspir nie był dramaturgiem

są na pewno wzajemnie sprzeczne, gdyż drugi jest «czystą» negacją pierwszego. Gdyby oba zdania wyjściowe były jednocześnie prawdziwe, to Jan miałby wzajemnie sprzeczne przeświadczenia. A tak nie może być właśnie na mocy psychologicznej zasady sprzeczności.[2] □

[2] Jeśli ktoś twierdzi, że żywi wzajemnie sprzeczne przeświadczenia, to raczej należy wątpić w to, że w ogóle ma on jakieś przeświadczenia (na dany temat). Raczej udaje, że coś sądzi niż coś sądzi.

PRZYKŁAD 7. Niektóre czasowniki poprzez połączenie ze słowem 'nie' tworzą zwrot, który nabiera specyficznego znaczenia. Klasycznym przykładem jest czasownik 'lubić'. Zwrot 'nie lubić' znaczy: *mieć uczucie niechęci*. Poniższy rysunek przedstawia «spektrum»:

lubi	nie ma odczuć	nie lubi

Zatem zdanie:

Jan nie lubi Basi

nie jest negacją (zaprzeczeniem) zdania:

Jan lubi Basię

gdyż oba te zdania mogą być fałszywe (por. «stan obojętności»). Zdania te nie dopełniają się.

Sprzeczność tych zdań zostaje zachowana. Zdania te łącznie nie mogą być prawdziwe. □

PRZYKŁAD 8. Identycznie jest z parą zdań:

Lubię muzykę poważną.
Nie lubię muzyki poważnej. □

PRZYKŁAD 9. Również niektóre rzeczowniki poprzez połączenie ze słowem 'nie' tworzą zwrot, który nabiera specyficznego znaczenia. Klasycznym przykładem jest rzeczownik 'przyjaciel'. Wyraz 'nieprzyjaciel' znaczy po prostu: *wróg*. Poniższy rysunek przedstawia «spektrum»:

przyjaciel	stany pośrednie	nieprzyjaciel

Zatem zdanie:

Jan jest nieprzyjacielem Piotra

nie jest negacją (zaprzeczeniem) zdania:

Jan jest przyjacielem Piotra

gdyż oba te zdania mogą być fałszywe (por. «stany pośrednie»). Zdania te nie dopełniają się.

Sprzeczność tych zdań zostaje zachowana. Zdania te łącznie nie mogą być prawdziwe.

Oczywiście, negacją ostatniego zdania jest następujące:

Jan nie jest przyjacielem Piotra. □

Widzimy, że możemy mieć kłopoty z właściwym użyciem słowa 'nie' tak, aby uzyskać negację, czyli także zaprzeczenie. Przypomnijmy zauważoną już w spostrzeżeniu 3 prawidłowość: Jeśli poprzez użycie słowa 'nie' nie uzyskano negacji, to nie uzyskano także zaprzeczenia.

ZADANIE 1. Do zdania:

Jan wie, że 0 jest liczbą naturalną

dodano słowo 'nie' w następujący sposób:

Jan wie, że 0 nie jest liczbą naturalną

Pytanie:
a) Czy otrzymano negację zdania wyjściowego?
b) Czy oba zdania są wzajemnie sprzeczne?

Odpowiedzi:

a) Nie! Istnieje taka możliwość, że Jan nie ma żadnej wiedzy na temat liczb naturalnych. Wówczas, oba zdania będą fałszywe. Innymi słowy, MOŻE BYĆ TAK, że oba zdania są fałszywe, czyli zdania te nie dopełniają się.

b) Tak, nie można mieć sprzecznej wiedzy na dany temat. Analizowane zdania (dotyczące wiedzy) są wzajemnie sprzeczne, gdyż takie są zdania '0 jest liczbą naturalną' i '0 nie jest liczbą naturalną'. □

Zadanie 2. Czy poniższe zdania są wzajemnie sprzeczne:

Jan wie, że co najmniej jeden Polak jest bogaty
Jan wie, że co najmniej jeden Polak nie jest bogaty

Nie. Te zdania mogą być łącznie prawdziwe. Przecież wiedza Jana nie dotyczy sądów sprzecznych, lecz dotyczy sądów prawdziwych (por. przykład 3). Zatem Jan może mieć wiedzę w obu kwestiach.

Operator negacji

Logika matematyczna radzi sobie z problemem negacji w sposób prosty. Mianowicie, wprowadza sztuczny zwrot:

Nie jest tak, że …

Po słowie 'że' wolno wstawić dowolne zdanie. Jest to więc „operator" działający na wszystkie zdania. Zatem również wolno po nim wstawić zdanie zaczynające się od tego operatora, czyli gramatycznie poprawnymi formami są:

Nie jest tak, że nie jest tak, że …
Nie jest tak, że nie jest tak, że nie jest tak, że …

Operator ten wolno powtarzać dowolną liczbę razy. Mamy zatem inną sytuację niż z prostym 'nie' przed orzeczeniem bądź przed zdaniem (o ile dane zadnie w ogóle dopuszcza taką formę[3]).

Zauważmy, że tworząc operator 'nie jest tak, że …' także użyliśmy prostego 'nie' stawiając to słowo przed innym sztucznym operatorem:

Jest tak, że …

Ten ostatni operator jest zupełnie obojętny, gdyż poprzedzenie nim zdania nic nie wnosi. Otrzymujemy zdanie mówiące to samo, co zdanie wyjściowe. Spójrzmy na następujący przykład:

Ziemia jest płaska.
Jest tak, że Ziemia jest płaska.

Przecież wypowiadając pierwsze zdanie także chcemy przekazać informację, iż JEST TAK jak ono głosi, tzn. JEST TAK, ŻE Ziemia jest płaska. Z drugiej strony, dane zdanie jest prawdziwe, gdy JEST TAK jak ono głosi. Zatem trzy poniższe operatory:

Jest tak, że …
Jest prawdą, że …
Prawda, że …

mają ten sam sens.[4]

Oczywiście, dane zdanie nie jest prawdziwe, gdy NIE JEST TAK jak ono głosi. Innymi słowy, mamy trzy równoznaczne operatory:

Nie jest tak, że …
Nie jest prawdą, że …
Nieprawda, że …

---

[3] Np. poprawnymi formami są: 'Nie każde S jest M-em' i 'Nie wszystkie S-y są M-ami'; lecz nie są poprawne: 'Nie jakieś S jest M-em' i 'Nie niektóre S-y są M-ami'.

[4] Trzeci operator jest skrótem drugiego. Widzimy, że nie pełnią one funkcji informacyjno-opisowej. Pełnią zaś dwie inne role: ekspresywną i perswazyjno-sugestywną.

Spostrzeżenie 4. Poprzedzając dane zdanie dowolną z trzech form:

Nie jest tak, że …
Nie jest prawdą, że …
Nieprawda, że …

uzyskamy zaprzeczenie tego zdania.

Dowód. Z podanych wyjaśnień wynika, że dane zdanie i zdanie poprzedzone operatorem są wzajemnie sprzeczne oraz dopełniają się. □

Widzimy więc, co już zauważyliśmy na poprzednim wykładzie, że dowolne zdanie ma co najmniej jedno zaprzeczenie. Uzyskamy je np. poprzez poprzedzenie danego zdania omawianymi tu operatorami. Niektóre zdania jednak mogą nie mieć innych zaprzeczeń.

Spostrzeżenie 4 głosi, że omawiane tu operatory tworzą zaprzeczenia zdań. Tytuł tego punktu sugeruje, że zaprzeczenia te są także negacjami zdań. Poprzednio stwierdziliśmy, że negacja jest specjalnym rodzajem zaprzeczenia, które uzyskujemy ze zdania wyjściowego poprzez odpowiednie dodanie słowa ‘nie’.

Jak zauważyliśmy, zdanie p znaczy to samo, co formy:

Jest tak, że p
Jest prawdą, że p
Prawda, że p

Zatem można przyjąć, że formy:

Nie jest tak, że p
Nie jest prawdą, że p
Nieprawda, że p

są zaprzeczeniami zdania p uzyskanymi poprzez odpowiednie użycie słowa ‘nie’.

Można podejść inaczej do zagadnienia negacji i przyjąć, że właśnie za pomocą operatorów dostajemy podstawowe formy negacji zdania p, a inne formy są skróconymi postaciami. Te inne formy negacji polegają na odpowiednim dodaniu słowa ‘nie’ tak, aby uzyskać zdanie mówiące to samo, co forma standardowa. Zatem mają wykluczać się i dopełniać ze zdaniem wyjściowym (czyli być jego zaprzeczeniem uzyskanym poprzez odpowiednie dodanie słowa ‘nie’).

Nie będziemy zastanawiać się na tym, które podejście jest pierwotne. Będziemy przyjmować oba sposoby tworzenia negacji, a operatory:

Nie jest tak, że …
Nie jest prawdą, że …
Nieprawda, że …

nazwiemy *operatorami negacji*. Skoro operatory negacji znaczą to samo, więc w zapisie symbolicznym będziemy skracać je za pomocą tego samego symbolu ‘$\neg$’. Często, w miejsce przez nas przyjętego, używa się również skrótu ‘$\sim$’.

Definicja 1. *Negacją* danego zdania nazywamy dowolne zdanie, które uzyskujemy ze zdania wyjściowego na jeden z dwóch sposobów:

1. Przez poprzedzenie go operatorem negacji.
2. Przez odpowiednie dodanie słowa ‘nie’ tak, aby
   a) nic innego nie zmienić w danym zdaniu;
   b) uzyskać zaprzeczenie, tj. zdanie, które wyklucza się i dopełnia ze danym zdaniem.

Formalnie, zapis ‘$\neg p$’ ma odnosić się do pierwszego sposobu tworzenia negacji zdania p. Ten pierwszy sposób jest «niezawodny», gdyż stosując go, musimy uzyskać negację zdania p. Stosując zaś drugi sposób tworzenia negacji możemy popełnić błąd i dodając jedynie samo słowo ‘nie’ uzyskać zdanie, które nie będzie zaprzeczeniem zdania p. (Stosowne przykłady podaliśmy na poprzednim wykładzie.) Mając jednak pewność, że stosując do zdania p drugi sposób uzyskaliśmy negację, wolno także wówczas użyć symbolicznego zapisu ‘$\neg p$’.

Podwójna negacja

Tytułową podwójną negacją danego zdania ma być oczywiście negacja negacji danego zdania. Zauważmy, że w podwójnej negacji co najmniej raz musi być użyty operator negacji. Przykładowo, podwójnymi negacjami zdania:

Toruń jest pięknym miastem

są dwa poniższe zdania:

Nie jest tak, że Toruń nie jest pięknym miastem
Nie jest tak, że nie jest tak, że Toruń jest pięknym miastem

Oba zapiszemy symbolicznie jako ‘¬¬Toruń jest pięknym miastem’.

Zauważmy także, że dla zdania:

Toruń nie jest pięknym miastem

które samo jest już negacją, mamy tylko jedną podwójną negację:

Nie jest tak, że nie jest tak, że Toruń nie jest pięknym miastem

Zapiszemy je symbolicznie jako ‘¬¬¬Toruń jest pięknym miastem’.

Na poprzednim wykładzie wspomnieliśmy, że zaprzeczeniem zdania:

Toruń nie jest pięknym miastem

jest jego negacja:

Nie jest tak, że Toruń nie jest pięknym miastem

oraz zdanie

Toruń jest pięknym miastem

Jak widać, pierwsze z dwóch ostatnich zdań jest podwójną negacją drugiego z nich. Skoro oba są zaprzeczeniami wyjściowego zdania, więc podwójna negacja danego zdania MUSI MIEĆ tę samą wartość, co to zdanie.

Spostrzeżenie 5 (Prawo podwójnej negacji). Podwójna negacja danego zdania MUSI MIEĆ tę samą wartość, co to zdanie.

Symbolicznie: zdanie p MUSI MIEĆ tę samą wartość, co zdanie $\neg\neg p$, co zapisujemy jako:

$$p \equiv \neg\neg p$$

DOWÓD. Zdania p i $\neg p$ muszą mieć różne wartości. Także zdania $\neg p$ i $\neg\neg p$ muszą mieć różne wartości. Skoro są jedynie dwie wartości, więc zdania p i $\neg\neg p$ muszą mieć te same wartości.

Można to także wyliczyć w sposób «tabelkowy»:

	a	$\neg a$
p	$\neg p$	$\neg\neg p$
prawda	fałsz	prawda
fałsz	prawda	fałsz

Rozpatrujemy dwa przypadki: p jest albo prawdziwe albo fałszywe. W każdym przypadku zdania p i $\neg\neg p$ mają tę samą wartość. □

Podwójne zaprzeczenie

Tytułowym podwójnym zaprzeczeniem danego zdania ma być oczywiście zaprzeczenie zaprzeczenia danego zdania.

Spostrzeżenie 6. Podwójna negacja danego zdania jest jednym z jego podwójnych zaprzeczeń.

DOWÓD. Jest to oczywiste, skoro negacja jest szczególnym przypadkiem zaprzeczenia. □

Spostrzeżenie 7. Dane zdanie jest jednym ze swoich podwójnych zaprzeczeń.

DOWÓD. Niech zdanie q będzie zaprzeczeniem zdania p. Skoro pojęcie zaprzeczenia jest symetryczne (por. poprzedni wykład), więc również zdanie p jest zaprzeczeniem zdania q, czyli p jest zaprzeczeniem zaprzeczenia zdania p. □

Ostatnie spostrzeżenie mówi, że w praktyce jako podwójne zaprzeczenie danego zdania stosujemy je samo. W praktyce nie warto więc stosować podwójnej negacji. Ponadto otrzymujemy:

Spostrzeżenie 8 (Prawo podwójnego zaprzeczenia). Każde podwójne zaprzeczenie danego zdania MUSI MIEĆ tę samą wartość, co to zdanie.

DOWÓD. Wszystkie podwójne zaprzeczenia zdania p muszą mieć tę samą wartość. A skoro jednym z tych podwójnych zaprzeczeń jest samo zdanie p, więc mają one tę samą wartość co p. □

Zastosowania pojęć

Zastosowania rozpatrzmy w postaci przykładów i zadań.

PRZYKŁAD 10. Często kontekst naszych wypowiedzi jest taki, iż można przyjąć, że w rozważanych kwestiach mamy jakąś opinię. Przykładowo, w praktyce, w większości przypadków, forma

Nie sądzę, że Jan przyjdzie

uważana jest za równoważną z negatywną opinią:

Sądzę, że Jan nie przyjdzie[5]

Z poprzedniego wykładu wiemy, że to drugie zdanie nie jest negacją (zaprzeczeniem) zdania:

Sądzę, że Jan przyjdzie

Zatem, aby uzyskać proste zaprzeczenie ostatniego zdania musimy użyć operatora negacji:

Nie jest tak, że sądzę, iż Jan przyjdzie

W ten sposób wyrazimy alternatywę dwóch przypadków: negatywną opinię oraz nie posiadanie opinii w rozpatrywanej kwestii. Tę alternatywę wyraża także następujące zdanie:

Albo sądzę, że Jan nie przyjdzie, albo nie mam opinii w tej kwestii

Zatem to ostatnie zdanie także jest zaprzeczeniem zdania ‘Sądzę, iż Jan przyjdzie’. □

ZADANIE 3. Proszę podać dwa zaprzeczenia zdania ‘Jan lubi Basię’.

ODPOWIEDŹ. Jak pamiętamy z poprzedniego wykładu czasownik ‘lubi’ poprzez połączenie ze słowem ‘nie’ tworzy zwrot, który nabiera specyficznego znaczenia. Zwrot ‘nie lubić’ znaczy: *mieć uczucie niechęci*. Poniższy rysunek przedstawia «spektrum»:

lubi	nie ma odczuć	nie lubi

Zatem zdanie:

Jan nie lubi Basi

nie jest negacją (zaprzeczeniem) zdania ‘Jan lubi Basię’. Oczywiście, jedno z zaprzeczeń tego zdania uzyskamy stosując operator negacji:

Nie jest tak, że Jan lubi Basię

lubi	nie ma odczuć	nie lubi

Nie jest tak, że lubi

Zatem alternatywę tych dwóch sytuacji wyraża także zdanie:

Albo Jan nie lubi Basi, albo nie ma odczuć (w tej kwestii) □

ZADANIE 4. Proszę podać dwa zaprzeczenia zdania ‘Jan nie lubi Basi’.

[5] Oczywiście, nie jest tak z teoretycznego punktu widzenia.

Odpowiedź. Skoro zdanie ‘Jan nie lubi Basi’ nie jest zaprzeczeniem zdania ‘Jan lubi Basię’, więc również drugie zdanie nie jest zaprzeczeniem pierwszego. Oczywiście, jedno z zaprzeczeń pierwszego zdania uzyskamy stosując operator negacji:

Nie jest tak, że Jan nie lubi Basi

lubi	nie ma odczuć	nie lubi

Nie jest tak, że nie lubi

Zatem alternatywę tych dwóch sytuacji wyraża także zdanie:

Albo Jan lubi Basię, albo nie ma odczuć (w tej kwestii) □

Uwaga. Zgodnie z ostatnim przykładem zdania:

Jan lubi Basię
Nie jest tak, że Jan nie lubi Basi

nie znaczą tego samego. Pierwsze nie jest zaprzeczeniem zdania ‘Jan nie lubi Basi’, a drugie jest. Czyżby był to kontrprzykład na zachodzenie prawa podwójnej negacji? Nie! Skoro zdanie ‘Jan nie lubi Basi’ nie jest negacją zdania ‘Jan lubi Basię’, więc w ogóle nie można mówić tu o podwójnej negacji. □

Zadanie 5. Czy zdanie

Nie jest tak, że Jan sądzi, że Szekspir nie był geniuszem

Jest podwójną negacją (zaprzeczeniem) zdania:

Jan sądzi, że Szekspir był geniuszem

Odpowiedź. Nie. Gdyby pierwsze było podwójną negacją (podwójnym zaprzeczeniem) drugiego, to musiałyby mieć tę samą wartość. W przypadku, gdy Jan nic nie słyszał o Szekspirze, drugie zdanie jest fałszywe, a pierwsze jest prawdziwe (jako negacja fałszywego). □

Uwaga. Również ostanie zadanie nie jest kontrprzykładem na zachodzenie prawa podwójnej negacji. Po prostu zdanie ‘Jan sądzi, że Szekspir nie był geniuszem’ nie jest negacją (zaprzeczeniem) zdania ‘Jan sądzi, że Szekspir był geniuszem’.

Zaprzeczenie logiczne

Te zaprzeczenia danego zdania, które są nimi poprzez swoją formę logiczną nazywać będziemy *zaprzeczeniami logicznymi*.

Zatem na pewno zaprzeczeniem logicznym danego zdania jest poprzedzenie go operatorem negacji. Ten sposób tworzenia negacji jest «niezawodny», gdyż stosując go, musimy uzyskać negację zdania p. Innymi słowy, jednym z zaprzeczeń logicznych zdania p jest zdanie $\neg p$.

Jak pamiętamy, negację można czasami uzyskać drugim sposobem poprzez odpowiednie dodanie słowa ‘nie’ tak, aby nic innego nie zmienić w danym zdaniu oraz uzyskać zaprzeczenie. Stosując ten drugi sposób możemy popełnić błąd i dodając jedynie samo słowo ‘nie’ uzyskać zdanie, które nie będzie zaprzeczeniem zdania p. Z tego powodu można się spierać, czy negacja utworzona drugim sposobem jest otrzymana poprzez samą formę logiczną, tzn. czy jest to zaprzeczenie logiczne.

Pokażemy przykłady zaprzeczeń logicznych, które nie są negacjami.

Przykład 11. Niech S i M będą dowolnymi nazwami ogólnymi. Mamy znaleźć zaprzeczenia logiczne zdań o poniższej formie logicznej:

Każde S jest M-em

Wiemy, że na pewno nie są to zdania o formach:

Każde S nie jest M-em
Żadne S nie jest M-em

gdyż np. podstawiając w miejsce *S* i *M* odpowiednio pojęcia *kobieta* i *matka* z wszystkich trzech form otrzymamy zdania fałszywe. Zatem dwa ostatnie nie są zaprzeczeniami pierwszego (ani pierwsze nie jest zaprzeczeniem dwóch ostatnich).

Wiemy, że zaprzeczenia logiczne wyjściowego zdania na pewno uzyskamy poprzez poprzedzenie go operatorem negacji oraz poprzez poprzedzenie go słowem 'nie':

Nie jest tak, że każde S jest M-em
Nie każde S jest M-em

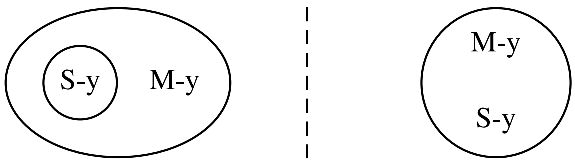
Poszukajmy jednak innego zaprzeczenia logicznego, które nie będzie już negacją (tzn. nie powstaje ani poprzez poprzedzenie go operatorem negacji, ani przez proste wpisanie słowa 'nie').

Wydawać by się mogło, że interpretacja zdań postaci 'Każde S jest M-em' nie nastręcza żadnych trudności. Jest jednak inaczej. Sytuacja komplikuje się, gdy pojęcie *S* jest puste, tzn. gdy nie ma S-ów. Wówczas mamy różne «konkurencyjne» rozwiązania dotyczące wartości logicznej zdania 'Każde S jest M-em'. Z punktu widzenia języka naturalnego najwłaściwsze wydaje się przyjęcie, że

> gdy nie ma S-ów, to sąd 'Każde S jest M-em' nie jest ani prawdziwy, ani fałszywy (bez względu na treść pojęć *S* i *M*); czyli w ogóle nie ma wartości logicznej.

Motywacja dla tej interpretacji jest następująca. Gdy nie ma S-ów, to nie chcemy uznać sądu 'Każde S jest M-em' za prawdziwy, gdyż «mówi o niczym». Trudno go jednak wówczas uznać za fałszywy, gdyż trzeba byłoby uznać za prawdziwą jego negację 'Nie każde S jest M-em'. A tu nasuwa się pytanie: *skoro nie każde S jest M-em, to które nie jest?* (nie ma przecież S-ów). Zatem jeśli nie ma S-ów, to nie warto silić się na negowanie zdania postaci 'Każde S jest M-em'. Do osoby, która takie zdanie głosi, lepiej po prostu powiedzieć: *Dlaczego twierdzisz, że każde S jest M-em? Przecież w ogóle nie ma S-ów*.[6]

Zatem najpierw jednak rozpatrzmy przypadek, gdy nazwa *S* nie jest pusta. Wówczas sąd postaci 'Każdy S jest M-em' jest prawdziwy tylko w dwóch przypadkach:



Negacje:

Nie jest tak, że każde S jest M-em
Nie każde S jest M-em

są więc prawdziwe w pozostałych czerech przypadkach, które dopełniają dwa poprzednie (zgodnie z założeniem, pojęcie *S* ma być niepuste):

---

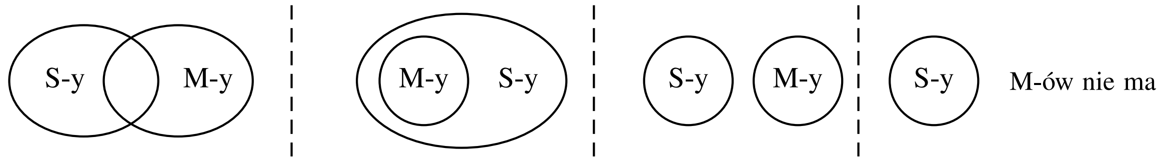
6 Podobnie, przed zadaniem komuś pytania:

Czy wszystkie przeczytane przez ciebie książki z lektury są ciekawe?

lepiej go wcześniej zapytać:

Czy przeczytałeś jakąś książkę z lektury?

Co ma ten ktoś odpowiedzieć na pierwsze pytanie w sytuacji, gdy na drugie dałby odpowiedź przeczącą? Trudno mu odpowiedzieć TAK, skoro nie przeczytał żadnej książki z lektury. Trudno mu też odpowiedzieć NIE, gdyż to pociągnie kolejne pytanie: *Która z przeczytanych przez ciebie książek z lektury nie jest ciekawa?* A nie ma przecież przeczytanych przez niego książek z lektury, które nie są ciekawe, gdyż w ogóle nie ma przeczytanych przez niego książek z lektury.



Zastanówmy się: jaką wspólną cechę mają ostatnie cztery rysunki? Oczywiście, tę wspólną cechę wyrazimy zdaniem:

Co najmniej jedno S nie jest M-em

Zatem to zdanie[7] jest logicznym zaprzeczeniem badanego zdania:

Każde S jest M-em

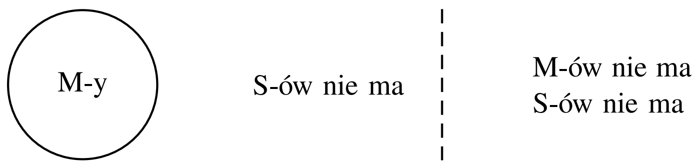
Można to również wyrazić poglądowo: co jest potrzebne, aby stwierdzić, że nie każde S jest M-em? Wystarczy zauważyć, że jakieś S nie jest M-em.[8] Innymi słowy, jeśli jakieś S nie jest M-em, to nie każde S jest M-em. Ponadto odwrotnie: jeśli nie każde S jest M-em, a w ogóle jest jakieś S, to wówczas jakieś S nie jest M-em. Po prostu, gdy pojęcie *S* nie jest puste, to zdania postaci 'Nie każde S jest M-em' oraz 'Jakieś S nie jest M-em' mają ten sam sens.

Dla pustego pojęcia *S* są dopuszczalne różne rozwiązania. Najbardziej popularne jest rozwiązanie przyjęte w logice matematycznej. Przy tym rozwiązaniu — bez względu na to czy pojęcie *S* jest puste czy też nie — zdania postaci 'Każde S jest M-em' oraz 'Jakieś S nie jest M-em' MAJĄ wartość logiczną, czyli albo są prawdziwe albo fałszywe. Ponadto, to drugie zdanie ma być nadal zaprzeczeniem pierwszego, czyli ma mieć ten sam sens, co zdanie 'Nie każde S jest M-em'. Oczywiście, przy takim rozwiązaniu, w sytuacji gdy nie ma S-ów, nie wolno uznać za prawdziwe zdania 'Jakieś S nie jest M-em' (znaczy: istnieje S, które nie jest M-em), czyli musimy uznać je za fałszywe. Zatem, fałszywe jest także zdanie 'Nie każde S jest M-em'. Otrzymujemy więc, że prawdziwe jest zdanie 'Każde S jest M-em'. Reasumując, w logice matematycznej przyjmujemy rozwiązanie:

> gdy nie ma S-ów, to sąd 'Każde S jest M-em' jest prawdziwy, a sąd 'Jakiś S nie jest M-em' jest fałszywy (bez względu na treść pojęć *S* i *M*).

Oczywiście, powyższe rozwiązanie ma odpowiednie uzasadnienie.[9]

W sytuacji, gdy pojęcie *S* jest puste mogą zajść poniższe dwa przypadki:



[7] Jego naturalnym odpowiednikiem będzie zdanie 'Jakieś S nie jest M-em'. Podobnie, naturalnym odpowiednikiem zdania 'Co najmniej jedno S jest M-em' jest zdanie 'Jakieś S jest M-em'.

[8] Konkretny przykład: Dlaczego nie każda kobieta jest matką? Dlatego, że jakaś nie jest.

[9] Mianowicie przyjmuje się, że zdanie 'Każde S jest M-em' ma znaczyć to samo, co poniższe zdanie FORMALNE:

$$\bigwedge_x (x \text{ jest S-em} \Rightarrow x \text{ jest M-em}).$$

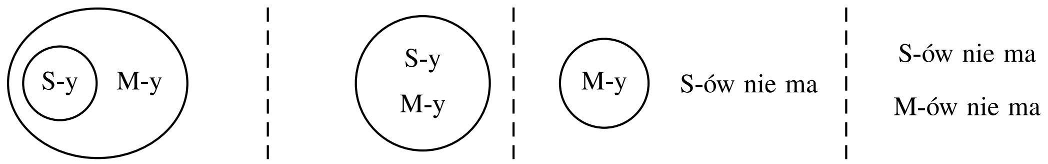
Gdy nie ma żadnego S-a, to to formalne zdanie jest prawdziwe na mocy interpretacji użytych symboli. Podkreślmy jednak istotną różnicę między sądem 'Każde S jest M-em' a jego formalnym odpowiednikiem. W pierwszej postaci pojęcie *S* występuje w podmiocie, a w postaci formalnej w orzeczeniu. W pierwszym przypadku mówimy więc o S-ach (których nie ma). W drugim zaś przypadku mówimy o dowolnie wybranym obiekcie x Z NIEPUSTEGO uniwersum rozważań. O tym x-e fałszywie orzekamy, że jest S-em, a to nie budzi naszych zastrzeżeń. Tylko dlatego, że o x-ie fałszywie orzekamy, iż jest S-em, prawdziwa jest formalna implikacja 'x jest S-em $\Rightarrow$ x jest M-em', bez względu na treść pojęcia M. Ta implikacja jest więc prawdziwa dla dowolnie wybranego x-a.

Ponadto, w logice matematycznej przyjmuje się, że zdanie 'Jakieś S nie jest M-em' ma znaczyć to samo, co poniższe zdanie FORMALNE:

$$\bigvee_x (x \text{ jest S-em i } x \text{ nie jest M-em}).$$

Tu znowu nie mówimy o S-ach, lecz o obiektach z uniwersum rozważań. Twierdzimy, że co najmniej jeden z nich jest S-em, lecz nie jest M-em. Zatem jeśli nie ma *S*-ów, to takie formalne zdanie jest fałszywe.

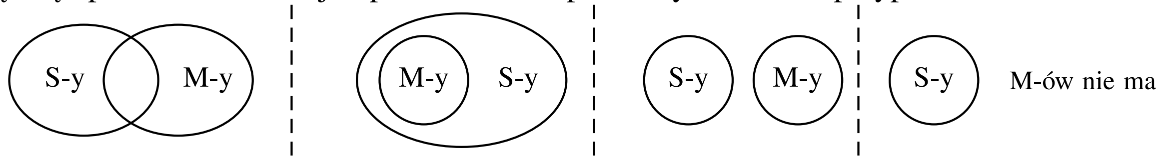
w interpretacji z języka naturalnego sąd ‘Każde S jest M-em’ nie jest ani prawdziwy, ani fałszywy. W interpretacji matematycznej te dwa przypadki dołączamy do poprzednich dwóch przy których sąd ten był prawdziwy. Zatem przy tej interpretacji mamy cztery przypadki, w których prawdziwe jest zdanie postaci ‘Każde S jest M-em’:



Negacje:

Nie jest tak, że każde S jest M-em
Nie każde S jest M-em

są więc prawdziwe — tak jak przedtem — w pozostałych czerech przypadkach:



Zatem znowu otrzymujemy, że zdanie:

Co najmniej jedno S nie jest M-em

albo inaczej

Jakieś S nie jest M-em

jest logicznym zaprzeczeniem zdania:

Każde S jest M-em

Innymi słowy, w interpretacji matematycznej zdania postaci ‘Nie każde S jest M-em’ oraz ‘Jakieś S nie jest M-em’ również mają ten sam sens. □

Aby nie komplikować wykładu będziemy rozważać jedynie zdania ze zwrotami kwantyfikatorowymi ‘każde’ i ‘jakieś’ odnoszącymi się do niepustych pojęć.

Przykład 12. Skoro zaprzeczenie jest symetryczne, więc — na podstawie przykładu z poprzedniego wykładu — logicznym zaprzeczeniem zdania:

Co najmniej jedno S nie jest M-em

jest zdanie

Każde S jest M-em

Można to również uzasadnić przeprowadzając rozumowanie biegnące w odwrotnym kierunku niż rozumowanie przeprowadzone w przykładzie 2.

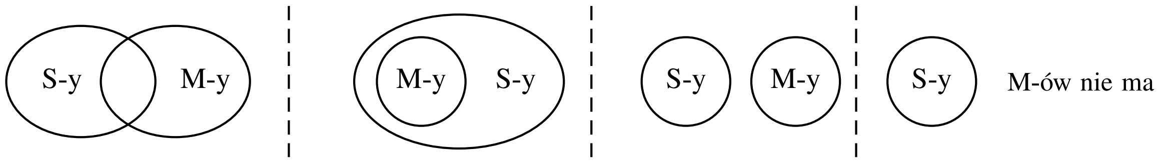
Z punktu widzenia języka naturalnego najwłaściwsze wydaje się przyjęcie, że

> gdy nie ma S-ów, to sądy ‘Jakieś S jest M-em’ oraz ‘Jakieś S nie jest M-em’ nie są ani prawdziwe, ani fałszywe (bez względu na treść pojęć *S* i *M*); czyli w ogóle nie mają wartości logicznej.[10]

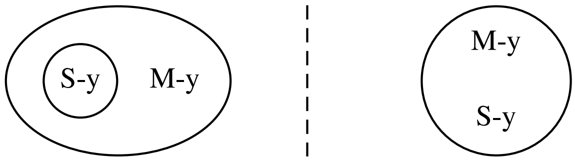
Motywacja dla tej interpretacji jest następująca: jeśli nie ma S-ów, to zdania te «mówią o niczym».

[10] Przypomnijmy, że zdania ‘Jakieś S jest M-em’ oraz ‘Jakieś S nie jest M-em’ są naturalnymi odpowiednikami zdań ‘Co najmniej jedno S jest M-em’ oraz ‘Co najmniej jedno S nie jest M-em’.

Zdanie 'Co najmniej jedno S nie jest M-em' jest prawdziwe w czerech przypadkach:



Fałszywe zaś jest w pozostałych dwóch przypadkach, które dopełniają cztery poprzednie (zgodnie z założeniem, pojęcie *S* ma być niepuste):



Zatem właśnie w tych dwóch przypadkach prawdziwa jest negacja:

Nie jest tak, że co najmniej jedno S nie jest M-em

Wspólną cechę ostatnich dwóch rysunków wyrazimy zdaniem:

Każde S jest M-em

Zatem to zdanie jest logicznym zaprzeczeniem zdania 'Co najmniej jedno S nie jest M-em'. □

Przykład 13. Niech *S* i *M* będą dowolnymi nazwami ogólnymi. Mamy znaleźć zaprzeczenia logiczne zdań o poniższej formie logicznej:

Co najmniej jedno S jest M-em

albo inaczej:

Jakieś S jest M-em

Wiemy, że na pewno nie jest to zdanie o formach:

Co najmniej jedno S nie jest M-em

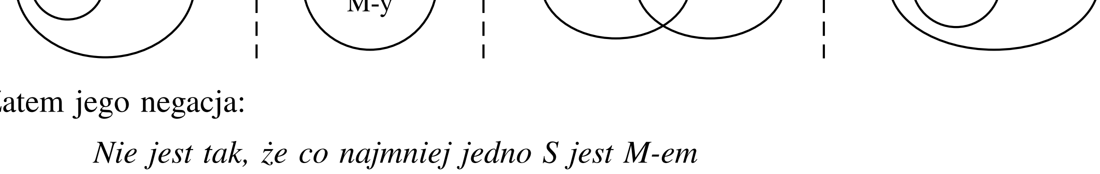
gdyż przykładowo podstawiając w miejsce *S* i *M* odpowiednio pojęcia *kobieta* i *matka* z obu form otrzymamy zdania prawdziwe.

Wiemy, że zaprzeczenie logiczne wyjściowego zdania na pewno uzyskamy poprzez poprzedzenie go operatorem negacji:

Nie jest tak, że co najmniej jedno S jest M-em

Poszukajmy jednak innego zaprzeczenia logicznego, które nie będzie już negacją. Zgodnie z wcześniejszą zapowiedzią, rozpatrywać będziemy tylko przypadki, w których pojęcie *S* jest niepuste.

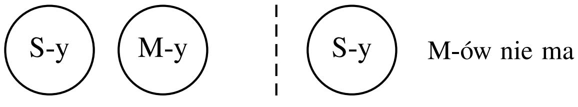
Zauważmy, że wyjściowe zdanie 'Co najmniej jedno S jest M-em' jest prawdziwe w czterech przypadkach:



Zatem jego negacja:

Nie jest tak, że co najmniej jedno S jest M-em

jest prawdziwa tylko w pozostałych dwóch przypadkach (w których pojęcie *S* jest niepuste):



Zastanówmy się: jaką wspólną cechę mają podane rysunki? Oczywiście tę wspólną cechę wyrazimy zdaniem:

Żadne S nie jest M-em

To jest zaprzeczenia wyjściowego zdania ‘Jakieś S jest M-em’. □

Przykład 14. Skoro zaprzeczenie jest symetryczne, więc — na podstawie poprzedniego przykładu — logicznym zaprzeczeniem zdania:

Żadne S nie jest M-em

jest zdanie

Co najmniej jedno S jest M-em

Można to również uzasadnić przeprowadzając rozumowanie biegnące w odwrotnym kierunku niż rozumowanie przeprowadzone w przykładzie 13. □

Uwaga. Niektórzy twierdzą, że forma ‘Żadne S nie jest M-em’ jest nielogiczna. Jako «wzorzec logiczności» podają oni angielską formę ‘No S is M’. W sposobie uzasadniania tego stanowiska kryją się jednak nieporozumienia. Spróbujemy je wyjaśnić. Obie formy oddają tę samą myśl: *nie jest tak, że co najmniej jedno S jest M-em*. Uzyskujemy to jednak innymi środkami.

(i) Jasne jest, że niewygodna w użyciu jest forma ‘Nie jest tak, że jakieś S jest M-em’. Chcemy mieć jakąś krótką formę zaprzeczenia zdań postaci ‘Jakieś S jest M-em’. Odpada niedopuszczalna forma z ‘nie jakieś’. W języku polskim «wybrano» sposób zaprzeczenia z użyciem negacji orzeczenia ‘jest M-em’. Nie może być to jednak forma ‘Jakieś S nie jest M-em’[11], należało więc użyć innej. Jako sposobu wyrażania treści zdania ‘Nie jest tak, że jakieś S jest M-em’ używamy zdania ‘Żadne S nie jest M-em’.[12]

(ii) Inaczej rzecz wygląda w języku angielskim. Niedopuszczalne połączenie ‘not some’ (‘nie jakieś’) zastąpiono przez ‘no’. Powstał w ten sposób tzw. *kwantyfikator zerowy*. Jest to odpowiednik polskiego żargonowego zwrotu ‘zero (czegoś)’ («zero podwyżki», «zero urlopu»). Zatem w angielskiej formie ‘No S is M’ występuje kwantyfikator zerowy. Jej dosłowne tłumaczenie na polski da niepoprawną formę — coś w rodzaju ‘Zero S-ów jest M-em’. Oczywiście, tłumacząc trzeba użyć poprawnej formy ‘Żadne S nie jest M-em’, która mówi to samo, co forma angielska.

(iii) Niektórzy dlatego uważają formę ‘Żadne S nie jest M-em’ za nielogiczną, gdyż podobno jest w niej podwójna negacja (które winna się zredukować, a chodzi nam przecież o zaprzeczenie). Bierze się to zapewne stąd, iż traktują oni polskie ‘żadne’ tak, jak angielskie ‘no’, czyli jako słowo zastępujące niedopuszczalne połączenie ‘nie jakieś’. Ale gdyby tak było, to słowo ‘żadne’ nie byłoby negacją, lecz kwantyfikatorem zerowym (tak jak w angielskim). Nie byłoby wówczas „podwójnej negacji”, lecz kwantyfikator zerowy niewłaściwie użyty łącznie ze słowem ‘nie’ przed orzeczeniem. Tak jednak nie jest. Słowo ‘żadne’ nie ma zastępować niedopuszczalnego połączenia ‘nie jakieś’. To raczej całość ‘Żadne S nie jest M-em’ ma zastępować niedopuszczalne ‘Nie jakieś S jest M-em’, czyli jest sposobem wyrażenia zaprzeczenia zdania ‘Jakieś S jest M-em’ z użyciem negacji orzeczenia.[13] □

---

[11] Zdania ‘Jakieś S jest M-em’ i ‘Jakieś S nie jest M-em’ nie są sprzeczne, więc nie są również wzajemnymi zaprzeczeniami. Jak pamiętamy, zdanie ‘Jakieś S nie jest M-em’ jest zaprzeczeniem zdania ‘Każde S jest M-em’.

[12] Oczywiście, dobra byłaby również forma ‘Każde S nie jest M-em’.

[13] Logika matematyczna nie wyróżnia ani rozwiązania z języka angielskiego, ani tego z naszego języka. Dokładniej, w logice matematycznej nie ma ani kwantyfikatora zerowego, ani negacji wewnętrznej. Są tylko dwa kwantyfikatory ‘$\bigwedge$’ („każde”) i ‘$\bigvee$’ („jakieś”) oraz jedna negacja przedzdaniowa ‘$\neg$’ („nie jest tak, że”).