# Logika dla archeologów
# Część 3: Elementy teorii zbiorów i relacji

Rafał Gruszczyński

Katedra Logiki
Uniwersytet Mikołaja Kopernika

2011/2012

# Spis treści


1. Zbiory

2. Pary uporządkowane

3. Relacje

# Zbiory dystrybutywne i kolektywne

- Dwa rodzaje zbiorów:
  - dystrybutywne
  - kolektywne
- Zbiory dystrybutywne są podstawowymi obiektami badanymi w matematyce.
- Przedmiotem tej części zajęć są zbiory w sensie dystrybutywnym.

# Czym są zbiory dystrybutywne?

- Kolekcje obiektów
- Obiekty abstrakcyjne

# Zbiory skończone i nieskończone

**Definicja**

Zbiorem skończonym nazywamy taki zbiór, którego liczbę elementów można wyrazić za pomocą pewnej liczby naturalnej.

**Definicja**

Zbiorem nieskończonym nazywamy zbiór, który ma co najmniej tyle elementów ile jest wszystkich liczb naturalnych.

# Singletony

- Przypomnijmy, że zgodnie ze standardową notacją, $\{x_1, \ldots, x_n\}$ jest zbiorem złożonym z obiektów $x_1, \ldots, x_n$. Jest to zbiór skończony złożony z $n$ elementów.
- $\{x\}$ jest jednoelementowym zbiorem złożonym z $x$ i jest czymś innym niż sam obiekt $x$, tzn. $x \neq \{x\}$.
- Zbiór $\{x\}$ nazywać będziemy singletonem $x$-a.

# Singletony

**Przykład**

- Liczba 1 jest czymś innym zaś jednoelementowy zbiór złożony z 1, czyli $\{1\}$: $1 \neq \{1\}$.
- Podobnie, miasto Toruń jest czymś innym niż zbiór $\{$Toruń$\}$, tzn. Toruń $\neq$ $\{$Toruń$\}$.

# Zbiór pusty

- Szczególnym zbiorem jest tzw. zbiór pusty, czyli zbiór nie mający żadnych elementów.
- Zbiór ten oznaczamy (standardowo) za pomocą symbolu '$\emptyset$'.

**Ćwiczenie**

Czym różni się $\emptyset$ od zbioru $\{\emptyset\}$?

# Elementy zbioru i operator abstrakcji

- Fakt, że obiekt $a$ należy do zbioru $A$ zapisujemy w standardowy sposób jako '$a \in A$'.
- $\{x \mid \varphi(x)\}$ jest zbiorem wszystkich obiektów spełniających pewien dany warunek $\varphi$.
- $\{\ldots \mid \ldots\}$ określamy mianem operatora abstrakcji.

# Zbiory – operator abstrakcji

## Ćwiczenie

Z jakich elementów składają się poniższe zbiory?

- $\{x \mid x$ jest człowiekiem$\}$ jest zbiorem wszystkich ludzi.
- $\{x \mid x$ jest liczbą naturalną$\}$ jest zbiorem wszystkich liczb naturalnych, zbiór ten oznaczamy za pomocą litery '$\mathbb{N}$'.
- $\{x \mid x \in \mathbb{N}$ i $x > 1$ i $x$ dzieli się tylko przez 1 oraz $x\}$ jest zbiorem wszystkich liczb pierwszych.
- $\{x \mid x$ jest studentem UMK$\}$ jest zbiorem wszystkich studentów UMK.

# Zasada ekstensjonalności dla zbiorów

## Zasada ekstensjonalności

Jeżeli zbiory $X$ oraz $Y$ mają te same elementy, to $X = Y$.

## Ćwiczenie

$$
\begin{array}{rcl}
\{2,3\} & = & \{1+1, 2+1\} \\
\{1,2\} & = & \{2,1\} \\
\{\{\emptyset\}\} & \neq & \{\emptyset\} \\
\{1,1\} & = & \{1\} \\
\{1,\{1,2\}\} & \neq & \{2,\{1,2\}\} \\
\emptyset & = & \{x \mid x \text{ jest ujemną liczbą naturalną}\}
\end{array}
$$

# Para uporządkowana

## Definicja

- Parą uporządkowaną złożoną z elementów $x$ oraz $y$ nazywamy obiekt matematyczny, w którym istotna jest kolejność owych elementów.
- Parę uporządkowaną złożoną z $x$ oraz $y$ zapisujemy jako '$\langle x, y\rangle$'.

Zgodnie z powyższą charakterystyką podstawową własność par uporządkowanych możemy wyrazić w postaci poniżej równoważności:

$$\langle x_1, y_1\rangle = \langle x_2, y_2\rangle \quad \text{wtw} \quad x_1 = x_2 \text{ oraz } y_1 = y_2\,.$$

# Para uporządkowana

## Ćwiczenie

$$
\begin{array}{ccc}
\langle 2, 3\rangle & = & \langle 1+1, 2+1\rangle \\
\langle \text{Warszawa}, \text{Polska}\rangle & \neq & \langle \text{‘Warszawa’}, \text{Polska}\rangle \\
\langle 2, 3\rangle & \neq & \langle \text{‘2’}, \text{‘3’}\rangle \\
\langle 0, 0\rangle & = & \langle 0, 0\rangle \\
\langle \emptyset, \emptyset\rangle & \neq & \langle \emptyset, \{\emptyset\}\rangle \\
\langle 2, 1\rangle & \neq & \langle 1, 2\rangle
\end{array}
$$

# Pary uporządkowane

**Uwaga**

W matematyce parę uporządkowaną złożoną z elementów $x$ oraz $y$ definiujemy w następujący sposób:

$$\langle x, y\rangle := \Big\{\{x\}, \{x, y\}\Big\}.$$

Dowodzi się, że tak dla tak zdefiniowanej pary uporządkowanej zachodzi wspomniana wcześniej własność:

$$\langle x_1, y_1\rangle = \langle x_2, y_2\rangle \quad \text{wtw} \quad x_1 = x_2 \text{ oraz } y_1 = y_2 .$$

# Pary uporządkowane

## Uwaga

- Poza pojęciem *pary uporządkowanej* definiujemy pojęcie *trójki uporządkowanej*, pojęcie *czwórki uporządkowanej* etc. etc.
- Trójkę uporządkowaną złożoną z obiektów $x$, $y$ oraz $z$ zapisujemy w postaci '$\langle x, y, z\rangle$'.
- Analogicznie, $\langle w, x, y, z\rangle$ to czwórka uporządkowana złożona z obiektów $w$, $x$, $y$ oraz $z$.

# Relacje

## Problem

Co to jest relacja?

## Matematyczne pojęcie *relacji*

- Relacją dwuargumentową nazywamy dowolny zbiór złożony z par uporządkowanych.
- Relacją $n$-argumentową nazywamy dowolny zbiór złożony z $n$-tek uporządkowanych.

## Ćwiczenie

Czy zbiór $\{\langle 1, 2\rangle, \langle 2, 3\rangle\}$ jest relacją (w sensie matematycznym)?

# Matematyczne pojęcie *relacji*

## Uwaga

- Relacja w sensie matematycznym określona jest zawsze w pewnym, z góry zadanym zbiorze.
- Zatem, mówiąc np. o dwuargumentowej relacji większości między liczbami, musimy określić o jakim zbiorze liczb mówimy.
- Tak więc mamy relację większości między liczbami naturalnymi, relację większości między liczbami wymiernymi etc. etc.

# Matematyczne pojęcie *relacji*

**Problem**

- Podaj kilka przykładów relacji dwuargumentowych.
- Podaj przykład relacji trójargumentowej.
- Podaj przykład relacji czteroargumentowej.

# Matematyczne pojęcie *relacji*

### Ćwiczenie

Ustalmy zbiór ludzi jako uniwersum rozważań. Czym są poniższe relacje?

- relacja *kochania* $:= \{\langle x, y\rangle \mid x$ kocha $y$-a$\}$
- relacja *przyjaźni* $:= \{\langle x, y\rangle \mid x$ jest przyjacielem $y$-a$\}$
- relacja *pośredniczenia*
  $:= \{\langle x, y, z\rangle \mid x$ pośredniczy między $y$-iem a $z$-em$\}$