

Andrzej Pietruszczak

# Konspekt do wykładu z logiki – socjologia niestacjonarna\*

(10.04.2010)

## 1. Związki pomiędzy spójnikami prawdziwościowymi

Na poprzednim wykładzie poznaliśmy operatory i spójniki prawdziwościowe. Poznajmy teraz różne związki zachodzące pomiędzy nimi. Związki te będą wyrażać równoważność logiczną zachodzącą pomiędzy zdaniami zbudowanymi za pomocą operatorów i spójników prawdziwościowych. Dlatego rozpoczniemy tę część wykładu od przypomnienia pojęcia *wynikania logicznego* i pojęcia *równoważności logicznej*.

### 1.1. Wynikania logiczne i równoważność logiczna

Na poprzednim wykładzie powiedziano, iż symbol ' $\models$ ' wyraża to, iż zdania stojące po obu jego stronach są LOGICZNIE RÓWNOWAŻNE, czyli prawdziwość jednego gwarantuje prawdziwość drugiego oraz odwrotnie. To gwarantowanie ma polegać na WYNIKANIU LOGICZNYM.

#### 1.1.1. Wynikanie logiczne

Mówimy, że z danych przesłanek *wynika logicznie* dany wniosek, gdy wyłącznie na mocy znaczenia stałych logicznych nie jest tak, iż wszystkie przesłanki są prawdziwe, a wniosek nie jest prawdziwy. Interpretacje pozostałych wyrażań jest tu nieistotna.

Aby wyrazić to, iż z grupy przesłanek  $\Pi$  wynika logicznie wniosek  $\beta$  piszemy:  $\Pi \models \beta$ . W przypadku, gdy grupa przesłanek  $\Pi$  jest skończona i składa się ze zdań  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$ , po prostu przed symbolem ' $\models$ ' wymieniamy te zdania, czyli używamy zapisu:  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \models \beta$ .<sup>1</sup> Zatem w szczególnym zaś przypadku, gdy grupa przesłanek  $\Pi$  jest jednoelementowa i składa się ze zdania  $\alpha$ , piszemy:  $\alpha \models \beta$ .<sup>2</sup>

Wynikanie logiczne sprowadza się to do tego, iż przesłanki i wniosek podpadają pod jakiś formalny niezawodny schemat wnioskowania.

Wynikanie logiczne zachodzące pomiędzy zdaniami zbudowanymi za pomocą operatorów i spójników prawdziwościowych można badać łatwą metodą tabelkową. Polega ona na tym, że — na podstawie tabelki dla operatorów i spójników zdaniowych — analizujemy wszystkie przypadki wartości logicznych jakie mogą przyjmować litery zdaniowe ' $p$ ', ' $q$ ', ' $r$ ', ' $s$ ' itd. Dla jednej litery mamy tylko dwa przypadki; dla dwóch liter — cztery; dla trzech liter — osiem; dla

---

\* © 2010 prawa autorskie do całości ma wyłącznie autor.

<sup>1</sup> Zatem zapis  $\alpha_1, \dots, \alpha_n \models \beta$  głosi: ze zdań  $\alpha_1, \dots, \alpha_n$  wynika logicznie zdanie  $\beta$ .

<sup>2</sup> Zatem zapis  $\alpha \models \beta$  głosi: ze zdania  $\alpha$  wynika logicznie zdanie  $\beta$ .

czterech liter — szesnaście. Ogólnie dla  $n$  liter mamy  $2^n$  przypadków. Metoda sprawdzania, czy zachodzi wynikanie logiczne polega na tym, iż badamy czy jest taki przypadek, przy którym wszystkie przesłanki są prawdziwe, a wniosek jest fałszywy. Jeśli jest, to wynikanie nie zachodzi. Jeśli nie ma takiego przypadku, to wynikanie zachodzi. Innymi słowy wynikanie zachodzi, gdy w każdym przypadku, w którym przesłanki są prawdziwe, prawdziwy jest też wniosek.<sup>3</sup>

### 1.1.2. Równoważność logiczna

Mówimy, że jedno zdanie jest *logicznie równoważne* z drugim, gdy z jednego zdania wynika logicznie drugie oraz odwrotnie. Oczywiście, relacja równoważności logicznej jest symetryczna, więc w takim przypadku wolno po prostu mówić, iż dwa zdania są logicznie równoważne.

Aby wyrazić to, iż zdanie  $\alpha$  jest logicznie równoważne ze zdaniem  $\beta$  piszemy:  $\alpha \models \beta$ . Zgodnie z definicją równoważności logicznej zapis ten znaczy, że  $\alpha \models \beta$  oraz  $\beta \models \alpha$ . Zatem symbol ' $\models$ ' ma być połączeniem symboli ' $\models$ ' i ' $\models$ '.

Równoważność logiczną zachodzącą pomiędzy zdaniami zbudowanymi za pomocą operatorów i spójników prawdziwościowych także można badać łatwą metodą tabelkową. Polega ona na tym, że — na podstawie tabel dla operatorów i spójników zdaniowych — analizujemy wszystkie przypadki wartości logicznych jakie mogą przyjmować litery zdaniowe ' $p$ ', ' $q$ ', ' $r$ ', ' $s$ ' itd. (patrz paragraf dotyczący wynikania logicznego). Sprawdzania, czy zachodzi równoważność logiczna jest w gruncie rzeczy prostsze od sprawdzania czy zachodzi wynikanie logiczne. Polega na tym, iż badamy czy we wszystkich przypadkach badane zdania mają tę samą wartość. Gdy mamy do czynienia z tabelą, to sprowadza się to do tego, czy kolumny wartości pod badanymi zdaniami są identyczne. Jeśli tak jest, to równoważność zachodzi. Jeśli tak nie jest, to przypadku, to równoważność nie zachodzi.

Istotnie — zgodnie z definicją równoważności logicznej — powyższa metoda wystarczy do stwierdzenia, czy zachodzi ona czy nie. Jeśli we wszystkich przypadkach badane zdania mają tę samą wartość, to nie ma takiego przypadku, aby jedno z nich było prawdziwe, a drugie nie. Zatem mamy oba wynikania, czyli mamy też równoważność. Jeśli zaś jest choć jeden taki przypadek, przy którym jedno ze zdań jest prawdziwe, a drugie jest fałszywy, to z jednego ze zdań nie wynika drugie, czyli nie ma też równoważności.

Dla dowolnych dań (formuł)  $\alpha$  i  $\beta$  mamy następujące zasady:

$$\sim \sim \alpha \models \alpha, \quad (1)$$

$$\alpha \models B \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \sim \alpha \models \sim \beta, \quad (2)$$

$$\sim \alpha \models \beta \quad \text{wtedy i tylko wtedy, gdy} \quad \alpha \models \sim \beta. \quad (3)$$

Pierwsza to prawo podwójnej negacji (podwójna negacja danego zdania jest logicznie równoważna z tym zdaniem). Drugie mówi, że dodanie (odp. usunięcie) negacji do zdań równoważnych zachowuje równoważność. Trzecią zasadę otrzymamy z dwóch pierwszych (głosi ona: «negację wolno przenieść na drugą stronę równoważności»):  $\sim \alpha \models \beta$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\sim \sim \alpha \models \sim \beta$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\alpha \models \sim \beta$ .

### 1.2. Prawa de Morgana

Zachodzą następujące związki pomiędzy prawdziwościową alternatywą niewykluczającą a koniunkcją wyrażone następującymi prawami de Morgana:

$$\sim(p \vee q) \models \sim p \wedge \sim q$$

<sup>3</sup> Jest to więc ta sama metoda, za pomocą której badamy czy dany formalny schemat wnioskowania jest niezawodny (odp. zawodny).

$$\begin{aligned}
 p \vee q &\models \sim(\sim p \wedge \sim q) \\
 \sim(p \wedge q) &\models \sim p \vee \sim q \\
 p \wedge q &\models \sim(\sim p \vee \sim q)
 \end{aligned}$$

Pierwsze z nich głosi, iż jednym z zaprzeczeń prawdziwościowej alternatywą niewykluczającą jest koniunkcja negacji zdań składowych. Trzecie zaś głosi, że jednym z zaprzeczeń koniunkcji jest prawdziwościowa alternatywa niewykluczająca negacji zdań składowych.<sup>4</sup>

Sprawdźmy pierwsze prawo sposobem tabelkowym:

$p$	$q$	$p \vee q$	$\sim(p \vee q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

W każdym przypadku badane zdania mają tę samą wartość, więc są one logicznie równoważne.<sup>5</sup> Stosując zasadę (3) do pierwszego prawa de Morgana otrzymujemy:

$$p \vee q \models \sim(\sim p \wedge \sim q)$$

Oczywiście można to też sprawdzić bezpośrednio metodą tabelkową:

$p$	$q$	$p \vee q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \wedge \sim q$	$\sim(\sim p \wedge \sim q)$
1	1	1	0	0	0	1
1	0	1	0	1	0	1
0	1	1	1	0	0	1
0	0	0	1	1	1	0

W każdym przypadku badane zdania mają tę samą wartość, więc są one logicznie równoważne. Udowodnimy teraz kolejne z praw de Morgana:

$$\sim(p \wedge q) \models \sim p \vee \sim q$$

$p$	$q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

W każdym przypadku badane zdania mają tę samą wartość, więc są one logicznie równoważne. Ponownie stosując zasadę (3) otrzymujemy:

$$p \wedge q \models \sim(\sim p \vee \sim q)$$

<sup>4</sup> Prawa de Morgana w pewien sposób wyjaśniają powód użycia symbolu ‘ $\wedge$ ’ dla spójnika koniunkcji. W tych prawach mamy DUALNOŚĆ tego spójnika względem spójnika alternatywy niewykluczającej, tzn. zamiana miejscami tych spójników w jednym z praw daje drugie. Zatem odwracamy «do góry nogami» symbol ‘ $\vee$ ’ (ten zaś — jak pamiętamy — pochodzi od łacińskiego ‘vel’).

<sup>5</sup> Por. punkt 1.1.2.

Oczywiście można to też sprawdzić bezpośrednio metodą tabelkową:

$p$	$q$	$p \wedge q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \vee \sim q$	$\sim(\sim p \vee \sim q)$
1	1	1	0	0	0	1
1	0	0	0	1	1	0
0	1	0	1	0	1	0
0	0	0	1	1	1	0

W każdym przypadku badane zdania mają tę samą wartość, więc są one logicznie równoważne.

### 1.3. Alternatywa wykluczająca a alternatywa niewykluczająca

Wykażemy, że zachodzi następująca równoważność logiczna:

$$p \underline{\vee} q \models (p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$$

Zatem prawdziwościową alternatywę wykluczającą da się wyrazić za pomocą prawdziwościowej alternatywy niewykluczającej, koniunkcji i negacji (lapidarnie mówiąc: dokładnie jedno to to samo, co co najmniej jedno, lecz nie oba razem). Tę równoważność sprawdzimy sposobem tabelkowym:

$p$	$q$	$p \underline{\vee} q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$(p \vee q) \wedge \sim(p \wedge q)$
1	1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0

W każdym przypadku badane zdania mają tę samą wartość, więc są one logicznie równoważne.

Dla negacji zaś mamy następujący związek:

$$\sim(p \underline{\vee} q) \models (p \wedge q) \vee (\sim p \wedge \sim q)$$

Te równoważności pokazują, że prawdziwościową alternatywę wykluczającą wolno pominąć w rozważanej teorii.

## 2. Spójnik zdaniowy ‘jeżeli ..., to’. Zdania warunkowe

### 2.1. Określenie zdań warunkowych

Wyrażenie ‘Jeżeli ..., to ...’ jest spójnikiem zdaniowym, gdyż puste miejsca mają wypełnić zdania (bądź ich równoważniki). Z jego pomocą tworzymy tzw. *zdania warunkowe* w trybie oznajmującym.<sup>6</sup> Zauważmy, że obok formy ‘Jeżeli ..., to ...’ (np. ‘Jeżeli pada, to jest mokro’) używana jest także forma: ‘..., jeżeli ...’ (np. ‘Mokro jest, jeżeli pada’). Zatem wolno zmienić kolejność zdań składowych nie zmieniając sensu całego zdania. Ponadto zauważmy, że w obu formach zamiast słowa ‘jeżeli’ wolno użyć wyrażen ‘jeśli’ i ‘o ile’, nie zmieniając sensu całości.

<sup>6</sup> Nie będziemy zajmować się tu innymi trybami zdań warunkowych, w tym zdaniami postaci ‘Jeśli  $p$ , toby  $q$ ’ (por. dalej przypis 18 w przykładzie 4, podany na s. 9).

Umowa techniczna: zdanie (bądź jego równoważnik) stojące po słowie ‘jeżeli’ (odp. ‘jeśli’) nazywamy *poprzednikiem*, a drugie zdanie składowe nazywamy *następnikiem*. Zatem:

Jeżeli poprzednik . . . . . , to następnik  
następnik , jeżeli poprzednik

Oczywiście, puste miejsca nie są wypełnione przez rzeczowniki ‘poprzednik’ i ‘następnik’, lecz przez zdania (bądź ich równoważniki), które nazywane są odpowiednio *poprzednikiem* i *następnikiem*. W podanym przykładzie poprzednikiem jest równoważnik zdaniowy ‘Pada’, a następnikiem równoważnik ‘Jest mokro’.

Nie wszystkie zdania zbudowane za pomocą podanego spójnika nazywamy *zdaniami warunkowymi*. Pod to pojęcie podpadają tylko te z nich, które spełniają następujący warunek:

*chodzi nam w nich o to, że*  
*prawdziwość poprzednika pociąga (w pewnym sensie) prawdziwość następnika.* (★)

Zauważmy, iż powyższy warunek mówi o intencjach osoby wypowiadającej dane zdanie. To, iż zdanie warunkowe ma wyrażać (★) nie znaczy od razu, że musi ono spełniać warunek:

*prawdziwość poprzednika pociąga (w pewnym sensie) prawdziwość następnika.* (★★)

W zakwalifikowaniu danego zdania do zdań warunkowych chodzi o intencje. Jeśli dane zdanie będzie wyrażać odpowiednie intencje, czyli spełniać (★), to będzie ono zdaniem warunkowym, a ponadto jeśli będzie spełniać (★★), to będzie to zdanie prawdziwe. Jeśli zaś będzie tylko spełniać (★), a nie spełniać (★★), to będzie to fałszywe zdanie warunkowe. Zdania, które w ogóle nie spełniają warunku (★), nie są zdaniami warunkowymi.

Przykładowo, nie jest zdaniem warunkowym poniższe zdanie:

*Jeżeli jesteś głodny, to jedzenie jest w lodówce.*

W tym przypadku przecież nie jest spełniony warunek (★), gdyż osobie go wypowiadającej NIE chodzi o to, iż prawdziwość poprzednika pociąga prawdziwości następnika (w żadnym możliwym sensie słowa ‘pociąga’). Tutaj mamy do czynienia jedynie z tzw. *instrukcją warunkową*.<sup>7</sup> Dokładniej, podane zdanie ma tylko pozór zdania orzekającego. W pełnej postaci mamy:

*Jeżeli jesteś głodny, to weź sobie jedzenie, które jest w lodówce!*

Wydajemy komuś polecenie, które tyczy się tego kogoś pod warunkiem, że ten ktoś jest głodny.

Dodajmy, że w sformułowaniu warunków (★) i (★★) nie chodziło nam o to, iż poprzednik jest prawdziwy. Mamy do czynienia z analogiczną sytuacją, jak w przypadku schematów niezawodnych, czy też relacji wynikania.

## 2.2. Przypomnienie: prawdziwość zdań

Przypomnijmy: mówiąc, iż dane zdanie jest prawdziwe mamy na myśli to, że w rzeczywistości jest tak, jak to zdanie głosi. W podanym pojęciu *bycia zdaniem prawdziwym* odnosimy się do aktualnej sytuacji. Zatem rzeczywistość, o której mówimy, ma być aktualną sytuacją.

<sup>7</sup> Porównaj różnego rodzaju języki programowania. Konstrukcje postaci ‘If ... then \_ \_ \_’ służą do budowy instrukcji (poleczeń) warunkowych. W tego rodzaju językach (z reguły) nie pojawiają się zdania warunkowe, chociaż mamy tam koniunkcje (budowane za pomocą ‘and’) oraz prawdziwościowe alternatywy niewykluczające (budowane za pomocą ‘or’).

Oczywiste jest to, że są takie zdania, które w jednych sytuacjach są prawdziwe, a w innych nie są prawdziwe. Oto przykłady takich zdań: ‘Deszcz pada’, ‘Jest mokro’, ‘Warszawa jest stolicą Polski’, ‘Wolno ci prowadzić mój samochód’ itp.

Moglibyśmy zatem powiedzieć ogólniej: dane zdanie jest prawdziwe w danej sytuacji, gdy w tej sytuacji jest tak, jak to zdanie głosi. Zwrot ‘zdanie prawdziwe’ jest więc skrótem zwrotu: ‘zdanie prawdziwe w aktualnej sytuacji’.

### 2.3. Prawdziwość zdań warunkowych

Wszystko to, co napisaliśmy powyżej o pojęciu *prawdziwości zdań* odnosi się także do zdań warunkowych. Są wśród nich takie, które są prawdziwe TYLKO W NIEKTÓRYCH sytuacjach. Są również takie zdania warunkowe, które są prawdziwe we WSZYSTKICH sytuacjach. Dalej zilustrujemy to odpowiednimi przykładami. Wcześniej jednak zajmijmy się wynikaniem.

### 2.4. Wynikanie

Jak wyżej wspomnieliśmy sformułowanie warunków (★) i (★★) ma związek z wynikaniem, czy też z formalnymi niezawodnymi schematami wnioskowań. W tym punkcie przypomnijmy pewne informacje, które dalej będą przydatne.

Mamy następujące trzy typy wynikania:

1. Wynikanie logiczne (zob. punkt 1.1.1).
2. Wynikanie entymematyczne — z danych przesłanek i z jakichś dodatkowych ukrytych wynika logicznie dany wniosek. Te ukryte przesłanki są zdaniami koniecznymi (pewnymi), dlatego ich nie wypowiadamy. Nazywamy je *przesłankami entymematycznymi*. W tym przypadku wynikanie sprowadza się do tego, iż pod jakiś formalny niezawodny schemat wnioskowania podpadają przesłanki, jawne i ukryte, oraz wniosek.<sup>8</sup>
3. Wynikanie ogólne — nie jest możliwe, aby zarówno przesłanki były prawdziwe, a wniosek nie był prawdziwy.

Zauważmy, że podane typy wynikania nie są rozłączne. Mianowicie, zarówno wszystkie wynikania logiczne jak i wszystkie wynikania entymematyczne są także wynikaniem w sensie ogólnym.

Istotnie, po pierwsze, założmy że z danych przesłanek wynika logicznie dany następnik. Wówczas WYŁĄCZNIE NA MOCY sensu stałych logicznych nie jest tak, iż zarazem przesłanki są prawdziwe, a wniosek nie jest. Stąd w każdej sytuacji, w której wszystkie przesłanki są prawdziwe, prawdziwy jest też wniosek, tzn. niemożliwe jest, aby przesłanki były prawdziwe, a wniosek nie był.

Po drugie, założmy że z danych przesłanek oraz z ukrytych, które są konieczne, wynika logicznie wniosek. Wówczas WYŁĄCZNIE NA MOCY sensu stałych logicznych nie jest tak, iż zarazem dane przesłanki i te ukryte są prawdziwe, a wniosek nie jest. Stąd w każdej sytuacji, w której przesłanki dane i te ukryte są prawdziwe, prawdziwy jest też następnik. Lecz te ukryte przesłanki, jako konieczne, mają być prawdziwe w każdej sytuacji. Zatem w każdej sytuacji, w której jawne przesłanki są prawdziwe, prawdziwy jest też wniosek, tzn. niemożliwe jest, aby dane przesłanki były prawdziwe, a wniosek nie był.

<sup>8</sup> W Wikipedii czytamy: „Wnioskowanie entymematyczne, także **entymemat** lub **entymem** (z gr. [...] — w umyśle) — takie wnioskowanie dedukcyjne, w którym została przemilczana któraś z przesłanek. We wnioskowaniu, w którym pominięto jakąś konieczną przesłankę, wniosek nie wynika logicznie z koniunkcji przesłanek przyjętych — mówi się wtedy jednak o wynikaniu entymematycznym.”

## 2.5. Zdania warunkowe, które są prawdziwe w każdej sytuacji

Zdania warunkowe, które są prawdziwe w każdej sytuacji to takie, dla których z poprzednika wynika następnik, w jednym z trzech następujących typów wynikania:

1. Z poprzednika wynika logicznie następnik.<sup>9</sup>
2. Z poprzednika wynika entymematycznie następnik, tzn. z poprzednika oraz z ukrytych przesłanek (koniecznych) wynika logicznie następnik.<sup>10</sup>
3. Wynikanie ogólne w następującym sensie: nie jest możliwe, aby zarówno poprzedni był prawdziwy, a następnik nie był prawdziwy.<sup>11</sup>

Zauważmy, że zgodnie z pojęciem *wynikania logicznego* oraz *wynikania entymematycznego*, zdania warunkowe, które są prawdziwe ze względu na te dwa typy wyników, są też prawdziwe ze względu na trzeci typ, czyli wynikanie ogólne. Otrzymujemy to z tego, co napisaliśmy w punkcie 2.4.

**Przykład 1.** Z pierwszym typem wynikania, czyli z wynikaniem logicznym, związane jest poniższe zdanie warunkowe:

*Jeżeli Jan jest Polakiem i jest bogaty, to jakiś Polak jest bogaty.*

Mamy następujące wynikanie logiczne (odp. formalny schemat niezawodny):<sup>12</sup>

$$\frac{\text{Jan jest Polakiem i jest bogaty}}{\text{Jakiś Polak jest bogaty}} \Pi \qquad \frac{a \text{ jest } S\text{-em} \wedge a \text{ jest } M\text{-em}}{\text{Jakiś } S \text{ jest } M\text{-em}} \Pi$$

**Przykład 2.** Z drugim typem wynikania, czyli z wynikaniem entymematycznym, związane jest poniższe zdanie warunkowe:

*Jeżeli Jan ma syna, to jest ojcem.*

Mamy następujące wynikanie entymematyczne<sup>13</sup> i związane z nim wynikanie logiczne:

$$\begin{array}{c} \text{Każdy mężczyzna, który ma syna, jest ojcem} \\ \text{Jan jest mężczyzną} \\ \hline \text{Jan ma syna} \quad \Downarrow \quad \frac{\text{Jan ma syna}}{\text{Jan jest ojcem}} \Pi \\ \text{Jan jest ojcem} \end{array}$$
  

$$\begin{array}{c} \text{Każdy } M, \text{ który jest } S\text{-em, jest } P\text{-em} \\ a \text{ jest } M\text{-em} \\ a \text{ jest } S\text{-em} \\ \hline a \text{ jest } P\text{-em} \quad \Pi \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{Każdy } Q \text{ jest } P\text{-em} \\ a \text{ jest } Q\text{-em} \\ \hline a \text{ jest } P\text{-em} \quad \Pi \end{array}$$

W pierwszym schemacie formalnym uprościliśmy strukturę logiczną przesłanek, w drugim zaś ‘Q’ zastąpiło ‘M, który ma S-a’ (‘mężczyzna, który ma syna’).

<sup>9</sup> W tym przypadku wynikanie sprowadza się do tego, iż poprzednik (jako przesłanka) oraz następnik (jako wniosek) podpadają pod jakiś formalny niezawodny schemat wnioskowania (zob. dalej przykład).

<sup>10</sup> W tym przypadku wynikanie sprowadza się do tego, iż pod jakiś formalny niezawodny schemat wnioskowania podpadają jako przesłanki — poprzednik i ukryte przesłanki, a jako wniosek — następnik (zob. dalej przykłady).

<sup>11</sup> Przykładem jest tu zdanie warunkowe ‘Jeżeli pada to jest mokro’. Nie chodzi tu o wynikanie entymematyczne. To raczej to zdanie jest przesłanką entymematyczną w innych wynikaniach. Na przykład: ze zdania ‘Pada’ wynika entymematycznie zdanie ‘Jest mokro’, gdyż po dodaniu przesłanki ‘Jeżeli pada to jest mokro’ otrzymamy wynikanie logiczne (zob. dalej przykład).

<sup>12</sup> Symbol ‘ $\vdash$ ’ wyraża wynikanie logiczne. Do schematów i zapisów rozumowań stosować będziemy «zapis pionowy»: ‘ $\Pi$ ’.

<sup>13</sup> «Pionowy symbol» ‘ $\Downarrow$ ’ ma wyrażać wynikanie entymematyczne.

Z trzecim z wymienionych typów wynikania, czyli z ogólnym wynikaniem, związana jest tzw. *interpretacja modalna* zdań warunkowych. Zgodnie z nią zdanie warunkowe:

Jeżeli  $p$ , to  $q$

znaczy tyle, co:

Niemożliwe jest to, iż zarazem  $p$  i nieprawda, że  $q$

W zapisie symbolicznym wyrazimy to jako:<sup>14</sup>

$$\sim \Diamond(p \wedge \sim q)$$

Zdanie warunkowe w interpretacji modalnej ma miano *implikacji ścisłej Lewisa*. Przy tej interpretacji zdanie ‘Jeżeli  $p$ , to  $q$ ’ zapisujemy symbolicznie jako: ‘ $p \rightarrow q$ ’.<sup>15</sup> Mamy zatem:

$$p \rightarrow q \models \sim \Diamond(p \wedge \sim q)$$

**Przykład 3.** Poniższe zdania warunkowe mają interpretację modalną:

*Jeżeli pada, to jest mokro.*

*Jeżeli ta żarówka się świeci, to dopływa do niej prąd elektryczny.*

Mają one mówić odpowiednio

*Niemożliwe jest, że zarazem pada i nie jest mokro.*

*Niemożliwe jest, że zarazem ta żarówka się świeci i nie dopływa do niej prąd elektryczny.*

Jak już wspomnieliśmy, zgodnie z pojęciem *wynikania logicznego* oraz *wynikania entymematycznego*, zdania warunkowe, które są prawdziwe ze względu na te typy wynikań, są też prawdziwe w interpretacji modalnej.

## 2.6. *Ceteris paribus*, czyli zdania warunkowe, których prawdziwość zależy od sytuacji

Teraz przejdziemy do przykładów zdań warunkowych, dla których prawdziwość istotna jest sytuacja, w których je wypowiadamy. Są one związane z tzw. ideą warunków *ceteris paribus*, z łaciny: w tych samych (poza tym), nie zmienionych warunkach, okolicznościach.<sup>16</sup> Do przesłanek *ceteris paribus* zaliczymy wybrane zdania, które opisują aktualną sytuację. Drugiego rodzaju zdania warunkowe to takie, dla których z poprzednika i z przesłanek *ceteris paribus* wynika następnik, w jednym z trzech typów wynikania wymienionych w poprzednim punkcie. Innymi słowy, następnik ma wynikać z poprzednika i z tego, że nie będą zmienione niektóre z aktualnych okoliczności.

<sup>14</sup> Por. zapisy symboliczne podane na poprzednim wykładzie.

<sup>15</sup> Oczywiście, zapis ‘ $p \rightarrow q$ ’ odczytujemy jako: „Jeżeli  $p$ , to  $q$ ”. Chodzi tylko o zaznaczenie, że chodzi o modalną interpretację zdania warunkowego.

<sup>16</sup> W *Wikipedii* czytamy: „**Ceteris paribus** to zwrot pochodzący z łaciny, oznaczający dosłownie *wszystko inne takie samo*. Na polski tłumaczy się zwykle jako *przy pozostałych warunkach równych* lub *przy tych samych okolicznościach*. Użycie tego zwrotu oznacza świadome odrzucenie, w celu uproszczenia rozumowania, możliwości zajścia pewnych wydarzeń lub warunków, mogących zaburzyć związek między przesłanką a wnioskiem.”



**Przykład 4.** Powszechnie wiadomo, że prezydent USA Kennedy został zabity w zamachu w Dallas. Osobą podejrzaną o zastrzelenie Kennedy’ego jest Oswald. Rozważy więc poniższe zdanie warunkowe:

*Jeżeli Oswald nie zabił Kennedy’ego, to zrobił to ktoś inny.*

Dzisiaj to zdanie jest prawdziwe, gdyż mamy przesłankę *ceteris paribus* mówiącą, że ktoś zabił Kennedy’ego. To zdanie warunkowe stwierdza, że prawdziwość poprzednika i przesłanki *ceteris paribus* pociągają prawdziwość następnika. Ta dodana przesłanka jest prawdziwa w aktualnej sytuacji. Czy poprzednik jest prawdziwy nie wiadomo. Ale jeśli jest prawdziwy, to prawdziwy będzie również następnik. Mianowicie mamy wynikanie logiczne, gdy jako przesłanka — obok poprzednika — dodane będzie zdanie prawdziwe w aktualnej sytuacji:<sup>17</sup>

$$\frac{\begin{array}{l} \text{Ktoś zabił Kennedy’ego.} \\ \text{Oswald nie zabił Kennedy’ego.} \end{array} \quad \Pi}{\text{Kennedy’ego zabił ktoś inny.}} \quad \Pi \qquad \frac{\begin{array}{l} x \text{ Z } a \\ \sim b \text{ Z } a \end{array} \quad \Pi}{x \neq b} \quad \Pi \qquad \frac{\begin{array}{l} \exists x(x \text{ Z } a) \\ \sim b \text{ Z } a \end{array} \quad \Pi}{\exists x(x \neq b \wedge x \text{ Z } a)} \quad \Pi$$

Oczywiście, nie można tu mówić o wynikaniu entymematycznym, gdyż dodana przesłanka nie jest konieczna, tzn. nie musiało tak się stać, że ktoś zabił Kennedy’ego.<sup>18</sup>

Podane zdanie warunkowe nie było prawdziwe przed zabójstwem Kennedy’ego. Wtedy sprawa była o tyle prosta, gdyż poprzednik był prawdziwy, a następnik fałszywy, czyli prawdziwość poprzednika na pewno nie pociągała prawdziwości następnika. •

**Przykład 5.** Wybierzmy dwie przysłowiowe osoby: Jana i Piotra. Załóżmy, że Jan dał Piotrowi dowód rejestracyjny swojego samochodu oraz że Piotr jest trzeźwy. W tej sytuacji prawdziwe będzie następujące zdanie warunkowe:

*Jeżeli Piotr ma przy sobie swoje prawo jazdy, to wolno mu prowadzić samochód Jana.*

Mamy następujące wynikanie logiczne:

Każdy kto otrzymał od kogoś dowód rejestracyjny samochodu tego kogoś, jest trzeźwy oraz ma przy sobie prawo jazdy, ma prawo prowadzić samochód tego drugiego.

Piotr otrzymał od Jana dowód rejestracyjny samochodu Jana.

Piotr jest trzeźwy.

Piotr ma przy sobie prawo jazdy.

$$\frac{\text{Piotr ma przy sobie prawo jazdy.}}{\text{Piotr ma prawo prowadzić samochód Jana.}} \quad \Pi$$

Nie sama prawdziwość prawdziwość poprzednika gwarantuje prawdziwość następnika, lecz prawdziwość poprzednika łącznie z ogólnym prawem dotyczącym pozwolenia na prowadzenie cudzego samochodu oraz z dwoma dodatkowymi przesłankami opisującymi aktualną sytuację. Te dodane zdania są właśnie przesłankami *ceteris paribus*.

<sup>17</sup> Użyty zapis ‘ $\exists x(x \text{ Z } a)$ ’ odczytujemy: jakiś obiekt, oznaczony dalej przez ‘ $x$ ’, jest taki, że  $x \text{ Z } a$ . Czyli w naszym przykładzie mamy: jakiś obiekt, oznaczony dalej przez ‘ $x$ ’, jest taki, że  $x$  zabił Kennedy’ego. A to po prostu znaczy: ktoś zabił Kennedy’ego. Podobnie zapis ‘ $\exists x(x \neq a \wedge x \text{ Z } a)$ ’ odczytujemy: jakiś obiekt, oznaczony dalej przez ‘ $x$ ’, jest taki, że  $x \neq a$  i  $x \text{ Z } a$ . Czyli w naszym przykładzie mamy: jakiś obiekt, oznaczony dalej przez ‘ $x$ ’, jest taki, że  $x$  jest różny od Oswalda oraz  $x$  zabił Kennedy’ego. A to po prostu znaczy: ktoś różny od Oswalda zabił Kennedy’ego.

<sup>18</sup> Z tego też względu za fałszywe uznamy zdanie użyte w trybie warunkowym: ‘Jeśliby Oswald nie zabił Kennedy’ego, to zrobiłby to ktoś inny’. To ostatecznie zdanie wymusza przecież konieczność («nieuchronność») tego, że ktoś zabije Kennedy’ego.

W sytuacji, w której Piotr nie jest trzeźwy podane zdanie warunkowe nie będzie prawdziwe. Wtedy prawdziwość poprzednika nie pociągnie prawdziwości następnika, gdyż brakuje jednej dodatkowej przesłanki, którą wolno przyjąć tylko wówczas, gdy jest prawdziwa.

Podobnie będzie w sytuacji, w której Jan nie dał Piotrowi dowodu rejestracyjnego swojego samochodu. •

Podaliśmy przykłady zdań warunkowych, w których prawdziwość poprzednika plus opis aktualnej sytuacji pociągały prawdziwość następnika. Następnik wynika nie z samego poprzednika, lecz poprzednika oraz pewnych zdań (prawdziwych) opisujących aktualną sytuację. Dlatego w warunkach (★) i (★★) mówiliśmy, że «w pewnym sensie» prawdziwość poprzednika pociąga prawdziwość następnika.

Można też podać przykłady prawdziwych zdań warunkowych opartych na drugim typie wynikaniu, czyli wynikaniu entymematycznym, oraz na idei *ceteris paribus*. Najwięcej zaś będzie zdań warunkowych opartych na ogólnym wynikaniu połączonej z ideą warunków *ceteris paribus*. Będzie to specyficzna interpretacja modalna, przy której zdanie warunkowe:

Jeżeli  $p$ , to  $q$

znaczy tyle, co:

Niemożliwe jest to, iż zarazem  $p$  i  $C$ , i nieprawda, że  $q$

gdzie  $C$  ma wyrażać warunki *ceteris paribus*. W zapisie symbolicznym wyrazimy to jako:

$$\sim \Diamond_C(p \wedge \sim q)$$

## 2.7. «Niepełna tabela» dla zdań warunkowych

Mamy trudności z podaniem jednolitej formalnej interpretacji zdań warunkowych języka naturalnego. Jedynie, co możemy tu powiedzieć, że zachowują się one według poniższej tabelki. W tabelce tej rozpatrujemy cztery logicznie możliwe przypadki wartości logicznych poprzednika i następnika.

$p$ poprzednik	$q$ następnik	Jeżeli $p$ , to $q$ Jeżeli <small>poprzednik</small> ..... , to <small>następnik</small> _____
1	0	0
1	1	?
0	1	?
0	0	?

Symbol ‘?’ znaczy: albo prawda, albo fałsz, w zależności od treści poprzednika i następnika. Zatem zdanie warunkowe ma wartość, lecz nie jest ona wyznaczona przez same wartości poprzednika i następnika. Do tego potrzebna jest jeszcze treść zdań składowych.<sup>19</sup>

Podana tabela uświadamia nam, że w istocie nie mamy żadnego wyznaczania wartości zdania warunkowego przez same wartości logiczne zdań składowych. (Zatem ta tabela nic nie pokazuje. Przydatna ona będzie w następnym punkcie do innych celów.)

Poniżej wyjaśnimy poszczególne cztery przypadki.

1. Zdanie warunkowe wyraża to, że następnik wynika albo z samego poprzednika, albo z poprzednika oraz pewnych przyjętych faktów. Ale skoro poprzednik jest prawdziwy, a następnik

<sup>19</sup> Oczywiście, i to nie musi być wystarczające do tego, by znać wartość zdania warunkowego. Chodzi nam o to, iż na pewno nie wystarczy znajomość samych wartości (poprzednika i następnika).

fałszywy, więc wynikanie nie zachodzi. Zatem zdania warunkowe jest fałszywe, gdyż nie ma miejsca to, co głosi.

2. Podamy dwa przykłady zdań, w których poprzedniki i następniki są prawdziwe. Jedno z nich będzie prawdziwe, a drugie fałszywe. To pokazuje, że sama wartość zdań składowych nie wyznacza wartości zdania warunkowego.

$\overbrace{\text{Jeżeli A.P. ma córkę, to A.P. jest ojcem}}^{\text{prawda}}$

$\overbrace{\text{Jeżeli A.P. jest ojcem, to A.P. ma córkę}}^{\text{fałsz}}$

3. Podamy dwa przykłady zdań, w których poprzedniki i następniki mają wartości rozpatrywane w tym przypadku. Jedno z nich będzie prawdziwe, a drugie fałszywe. To pokazuje, że sama wartość zdań składowych nie wyznacza wartości zdania warunkowego.

$\overbrace{\text{Jeżeli A.P. ma syna, to A.P. jest ojcem}}^{\text{prawda}}$

$\overbrace{\text{Jeżeli A.P. ma syna, to A.P. ma córkę}}^{\text{fałsz}}$

4. Podamy przykłady zdań, w których poprzedniki i następniki mają wartości rozpatrywane w tym przypadku. Jedno z nich będzie prawdziwe, a drugie fałszywe. To pokazuje, że sama wartość zdań składowych nie wyznacza wartości zdania warunkowego.

$\overbrace{\text{Jeżeli A.P. nie jest ojcem, to A.P. nie ma córki}}^{\text{prawda}}$

$\overbrace{\text{Jeżeli A.P. ma syna, to A.P. nie jest ojcem}}^{\text{fałsz}}$

$\overbrace{\text{Jeżeli Toruń ma tylko tysiąc mieszkańców, to Toruń ma trzy miliony mieszkańców}}^{\text{fałsz}}$

Podana tabelka jest także zgodna z interpretacją modalną, tj. z tabelkami dla operatorów: ‘ $\Diamond$ ’ i negacji, oraz spójnika koniunkcji:

$p$	$q$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\Diamond(p \wedge \sim q)$	$\sim \Diamond(p \wedge \sim q)$
1	0	1	1	1	0
1	1	0	0	?	?
0	1	0	0	?	?
0	0	1	0	?	?

Oczywiście, ta tabela nie jest dowodem, lecz pokazuje jedynie zgodność z oczekiwaniami. To że znak zapytania przechodzi w znak zapytania nie dowodzi przecież tego, że będą zachowane wartości logiczne.

## 2.8. Wynikania związane ze zadaniami warunkowymi

Sama «niepełna» tabelka wystarczy nam, aby pokazać, że dla dowolnych zdań  $p$  i  $q$  zachodzą następujące wynikania logiczne:

$$\begin{array}{c} \text{Jeżeli } p, \text{ to } q \\ \hline \frac{p}{q} \quad \Pi \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{Jeżeli } p, \text{ to } q \\ \hline \frac{\sim q}{\sim p} \quad \Pi \end{array}$$

Na podstawie podanej tabelki pokażemy, że w obu przypadkach prawdziwość przesłanek gwarantuje prawdziwość wniosku. To, że w tabelce mamy znaki zapytania nie gra tu żadnej roli. Znak zapytania nie wykluczał tego, że zdanie warunkowe ma wartość. Wręcz odwrotnie, mówimy, że zdanie warunkowe jest albo prawdziwe, albo fałszywe, ale zależy to od treści poprzednika i następnika. Wiemy jedynie, że jeśli dane zdanie warunkowe jest prawdziwe, to zachodzi któryś z trzech przypadków, które dopuszczają prawdę (tzn. któryś z przypadków 1, 2, bądź 3).

*Ad 1.* Załóżmy, że obie przesłanki są prawdziwe. Skoro pierwsza przesłanka jest prawdziwa, to dopuszczamy tylko przypadki 2, 3 i 4. Ale skoro druga przesłanka ( $p$ ) jest prawdziwa, więc jedynie dopuszczamy przypadek drugi. A w tym przypadku wniosek ( $q$ ) też jest prawdziwy. Pokazaliśmy, że nie ma przypadku, w którym przesłanki byłyby prawdziwe, a wniosek nie był. Zatem zachodzi wynikanie.

*Ad 2.* Załóżmy, że obie przesłanki są prawdziwe. Skoro pierwsza przesłanka jest prawdziwa, to dopuszczamy tylko przypadki 2, 3 i 4. Ale skoro druga przesłanka ( $\sim q$ ) jest prawdziwa, więc zdanie  $q$  jest fałszywe, czyli jedynie dopuszczamy przypadek czwarty. A w tym przypadku zdanie  $p$  też jest fałszywe, czyli wniosek ( $\sim p$ ) jest prawdziwy. Pokazaliśmy, że nie ma przypadku, w którym przesłanki byłyby prawdziwe, a wniosek nie był. Zatem zachodzi wynikanie.

Zauważmy, że zachodzenie wynikania musieliśmy udowodnić w sposób ogólny. Nie wystarczyło pokazanie tego na przykładach. Przykłady jedynie ilustrują zachodzenie danej prawdziwości. Podajmy takie ILUSTRUJĄCE przykłady:

$$\begin{array}{c} \text{Jeżeli pada, to jest mokro} \\ \hline \frac{\text{Pada}}{\text{Jest mokro}} \quad \Pi \end{array} \qquad \begin{array}{c} \text{Jeżeli pada, to jest mokro} \\ \hline \frac{\text{Nie jest mokro}}{\text{Nie pada}} \quad \Pi \end{array}$$

Drugi z podanych schematów niektórzy myślą z poniższym, który już nie przedstawia wynikania logicznego:

$$\begin{array}{c} \text{Jeżeli } p, \text{ to } q \\ \hline \frac{\sim p}{\sim q} \quad \nVdash \end{array}$$

Wystarczy znaleźć chociaż jeden przypadek, w którym przy prawdziwych przesłankach otrzymamy fałszywy wniosek. Zatem: NIE ZACHODZI WYNIKANIE LOGICZNE.

Przykładowo:

$$\begin{array}{c} \text{Jeżeli pada, to jest mokro} \\ \hline \frac{\text{Nie pada}}{\text{Nie jest mokro}} \quad \nVdash \end{array}$$

Pierwsza przesłanka jest prawdziwa w każdej sytuacji. Możliwa jest jednak sytuacja, w której nie pada, lecz jest mokro. Zatem w tej sytuacji mamy obie przesłanki prawdziwe, a wniosek fałszywy. Zatem wynikanie nie zachodzi.

Inny przykład o mojej żarówce:

$$\begin{array}{c} \text{Jeśli żarówka się świeci, to dopływa do niej prąd} \\ \hline \frac{\text{Żarówka nie świeci się.}}{\text{Nie dopływa do niej prąd}} \quad \nVdash \end{array}$$

Pierwsza przesłanka jest prawdziwa w każdej sytuacji. Łatwo wyobrazić sobie sytuację, w której do zepsutej żarówki dopływa prąd. I znowu przy prawdziwych przesłankach dostaniemy fałszywy wniosek.

Inny przykład, w którym mamy przesłanki prawdziwe i wniosek fałszywy w aktualnej sytuacji (zatem nie trzeba rozpatrywać możliwych sytuacji):

$$\frac{\begin{array}{l} \text{Jeżeli A.P. ma syna, to A.P. jest ojcem} \\ \text{A.P. nie ma syna} \end{array}}{\text{A.P. nie jest ojcem}} \not\vdash$$

Trzeci schemat jest ZAWODNY w tym sensie, że prawdziwość obu przesłanek może doprowadzić do nieprawdziwego wniosku. Zatem nie możemy stosować tego schematu do uzasadniania zdań.

Otóż, gdy nie znamy wcześniej tego, czy wniosek jest prawdziwy, to nie wolno stosować tego schematu. Przecież, jeśli ten schemat zawodzi w jakichś przypadkach, to może także zawieść w przypadku badanym. A wówczas od prawdziwych przesłanek do fałszywego wniosku. Zastosowanie trzeciego schematu NICZEGO NIE DOWODZI.

Jednakże, za pomocą przedstawionej tabelki nie udowodnimy, że zachodzi następujące logiczne wynikanie:

$$\frac{\text{Jeżeli } p, \text{ to } q}{\text{Jeżeli } \sim q, \text{ to } \sim p} \Pi$$

Istotnie, dzięki tabelce możemy wyciągać wnioski z założenia, iż zdanie warunkowe jest prawdziwe. Nie możemy natomiast stwierdzić, że dane zdanie warunkowe jest prawdziwe. Aby udowodnić, że zachodzi powyższe wynikanie musimy odwołać się do interpretacji spójnika ‘Jeżeli ..., to ...’.

Założmy, że przesłanka ‘Jeżeli  $p$ , to  $q$ ’ jest prawdziwa. Zatem ze zdania  $p$  wynika zdanie  $q$ . Rozważmy trzy przypadki.

(a) Wynikanie logiczne. Wówczas także z  $\sim q$  wynika logicznie  $\sim p$ .

(b) Wynikanie entymematyczne. Wówczas dla jakiejś grupy entymematycznych przesłanek  $\Pi$  mamy wynikanie logiczne:  $\Pi, p \models q$ . Zatem z  $\sim q$  oraz z  $\Pi$  wynika logicznie  $\sim p$  (tj.  $\Pi, \sim q \models \sim p$ ). Otrzymujemy więc także prawdziwy wniosek ‘Jeżeli  $\sim q$ , to  $\sim p$ ’.

(c) Zadanie ‘Jeżeli  $p$ , to  $q$ ’ interpretujemy modalnie, czyli mamy:  $\sim \Diamond(p \wedge \sim q)$ . Wówczas jednak mamy też:  $\sim \Diamond(\sim \sim p \wedge \sim q)$ . A przemienności koniunkcji:  $\sim \Diamond(\sim q \wedge \sim \sim p)$ . A to w tej interpretacji znaczy: Jeżeli  $\sim q$ , to  $\sim p$ .

(d) Podobną analizę przeprowadzamy przy interpretacji zdań warunkowych z warunkami *ceteris paribus*.

Teraz udowodnimy następujące wynikanie logiczne:

$$\frac{\begin{array}{l} \text{Jeżeli } p, \text{ to } q \\ \text{Jeżeli } q, \text{ to } r \end{array}}{\text{Jeżeli } p, \text{ to } r} \Pi$$

Założmy, że przesłanki są prawdziwe. Zatem ze zdania  $p$  wynika zdanie  $q$  oraz ze zdania  $q$  wynika zdanie  $r$ . Znowu rozpatrzmy trzy interpretacje wynikania:

(a) Wynikanie logiczne. Wówczas korzystamy z tego, iż jest ono przechodnie.

(b) Wynikanie entymematyczne. Wówczas dla jakichś zbiorów entymematycznych przesłanek<sup>20</sup>  $\Pi$  i  $\Lambda$  mamy:  $\Pi, p \models q$  oraz  $\Lambda, q \models r$ . Zatem  $\Pi, \Lambda, p \models r$ , czyli przy szerzej grupie

<sup>20</sup> Któryś z nich może być pusty.

ukrytych przesłanek ( $\Pi$  plus  $\Lambda$ ) ze zdania  $p$  wynika zdanie  $r$ , tzn. wniosek ‘Jeżeli  $p$ , to  $r$  jest prawdziwy.

(c) Zdania warunkowe interpretujemy modalnie. Wówczas jeśli przesłanki są prawdziwe, to mamy:  $\sim \Diamond(p \wedge \sim q)$  oraz  $\sim \Diamond(q \wedge \sim r)$ . Załóżmy nie wprost, że możliwa jest sytuacja, w której mamy  $p$  i  $\sim r$ . W takiej sytuacji, na mocy pierwszej przesłanki mamy:  $q$ , gdyż nie jest możliwe, aby łącznie było  $p$  i  $\sim q$ . na mocy zaś drugiej przesłanki mamy:  $\sim q$ , gdyż nie jest możliwe, aby łącznie było  $q$  i  $\sim r$ . Skoro z dodatkowego założenia nie wprost doszliśmy do sprzeczności, więc mamy:  $\sim \Diamond(p \wedge \sim r)$ .

(d) Podobną analizę przeprowadzamy przy interpretacji z warunkami *ceteris paribus*.

## 2.9. Wypowiedzi inferencyjne

Jak zauważa Kazimierz Ajdukiewicz<sup>21</sup> od zdań warunkowych należy odróżnić tzw. *wypowiedzi inferencyjne*, które przyjmują postać: ‘ $p$ , zatem  $q$ ’, ‘Skoro  $p$ , więc  $q$ ’, ‘Ponieważ  $p$ , więc  $q$ ’. Wypowiedzi tego typu wyrażają wiedzę mówiącego, że: (a) poprzednik  $p$  jest prawdziwy, (b) następnik  $q$  jest uznany na podstawie poprzednika  $p$ , stąd mamy wniosek (c) następnik  $q$  też jest prawdziwy. Tymczasem zdania warunkowe nie wyrażają (a) i (c).

Spójniki zdań inferencyjnych są kolejnymi przykładami spójników, który nie są prawdziwościowe. Przedstawiamy je, aby lepiej zrozumieć sens spójnika ‘Jeżeli ..., to ...’.

$p$ poprzednik	$q$ następnik	Ponieważ $p$ , więc $q$ Ponieważ <small>poprzednik</small> ..., więc <small>następnik</small> ...
1	0	0
1	1	?
0	1	0
0	0	0

Zdanie inferencyjne stwierdza, że poprzednik jest prawdziwy oraz że to pociąga prawdziwość następnika.<sup>22</sup> W przypadku 1 prawdziwość poprzednika nie pociąga prawdziwości następnika. Gdy poprzednik jest fałszywy (przypadki 3 i 4), całość także jest fałszywa. Tylko w przypadku 2 mamy prawdziwy poprzednik oraz DOPUSZCZALNE JEST, że to pociąga prawdziwość następnika.

Spójnik ‘Ponieważ ..., więc’ jest nieprawdziwościowy, chociaż w jego tabelce jest tylko jeden znak zapytania. Spójnik prawdziwościowy ma mieć tabelkę bez znaków zapytania.

To, co napisaliśmy o spójniku ‘Ponieważ ..., więc ...’ dotyczy również spójnika ‘Skoro ..., więc ...’.

Na koniec zauważmy, że spójnik ‘Ponieważ ..., więc ...’ da się następująco wyrazić:

$$\text{Ponieważ } p, \text{ więc } q \quad \models \quad p \text{ oraz jeżeli } p, \text{ to } q$$

Stąd, z tabelki koniunkcji oraz z tabelki dla zdania warunkowego otrzymamy tabelkę dla spójnika ‘Ponieważ ..., więc ...’.

<sup>21</sup> Zob. jego artykuł „Okres warunkowy a implikacja materialna”, [w:] *Język i poznanie*, t. 2, Warszawa 1956.

<sup>22</sup> Zdanie warunkowe stwierdza tylko to, że prawdziwość poprzednika pociąga (w «pewnym sensie») prawdziwość następnika, nic nie mówiąc czy poprzednik jest prawdziwy.

### 3. Implikacja materialna

#### 3.1. Określenie

Mamy jeszcze jedną interpretację zdań warunkowych. Jest nią tzw. *implikacja materialna*. Przy tej interpretacji spójnik zdania warunkowego staje się prawdziwościowy. Tę interpretację uzyskujemy zastępując w tabelce zdania warunkowego znak zapytania ('?') symbolem zdania prawdziwego: 1. Znaczy to, że tam, gdzie DOPUSZCZAMY prawdziwość zdania warunkowego, przyjmujemy prawdziwość implikacji materialnej. Zdanie warunkowe 'Jeżeli  $p$ , to  $q$ ' jako implikację materialną będziemy zapisywać jako ' $p \rightarrow q$ '.

Mamy zatem następującą tabelkę zero-jedynkową:

$p$	$q$	$p \rightarrow q$
1	0	0
1	1	1
0	1	1
0	0	1

Zauważmy, że przy każdej z podanych interpretacji spójnika 'Jeżeli ..., to ...' mamy następujący schemat niezawodny:

$$\frac{\text{Jeżeli } p, \text{ to } q}{p \rightarrow q} \Pi$$

czyli zachodzi następujące wynikanie logiczne:

$$\text{Jeżeli } p, \text{ to } q \models p \rightarrow q \quad (4)$$

Założmy, że przesłanka jest prawdziwa. Zatem dopuszczamy tylko przypadki 2, 3 i 4 z poniższej «niepełnej» tabelki

$p$	$q$	Jeżeli $p$ , to $q$
1	0	0
1	1	?
0	1	?
0	0	?

W tych przypadkach jednak prawdziwy jest także wniosek ' $p \rightarrow q$ '. Pokazaliśmy, że nie ma takiego przypadku, w którym przesłanka byłaby prawdziwa, a wniosek nie był. Zatem zachodzi wynikanie. Inny sposób: jedyny przypadek, w którym wniosek ' $p \rightarrow q$ ' jest fałszywy to przypadek 1. W tym przypadku jednak przesłanka 'Jeżeli  $p$ , to  $q$ ' też jest fałszywa. Zatem nie ma takiego przypadku, w którym przesłanka byłaby prawdziwa, a wniosek byłby fałszywy, czyli zachodzi wynikanie.

Odwrotne wynikanie logiczne nie zachodzi, czyli

$$p \rightarrow q \not\models \text{Jeżeli } p, \text{ to } q$$

Istotnie, naturalne jest uznanie za fałszywe poniższe zdanie:<sup>23</sup>

*Jeżeli Kopernik miał syna, to nie był ojcem.*

Ogólne, za fałszywe uznamy każde zdanie warunkowe, którego poprzednik wyklucza następnik. Uznaje się za fałszywy poprzednik w powyższym zdaniu. Zatem prawdziwa jest poniższa

<sup>23</sup> Podana analiza z przykładami jest zaczerpnięta z artykułu Z. Czerwińskiego, „O paradoksie implikacji”, *Studia Logica* VII (1958).

implikacja materialna:

*Kopernik miał syna  $\rightarrow$  Kopernik nie był ojcem.*

Podaliśmy więc przykład prawdziwej przesłanki i fałszywego wniosku, czyli wynikanie nie zachodzi.<sup>24</sup>

### 3.2. Wykorzystywanie implikacji materialnej

W logice matematycznej oraz w matematyce używa się implikacji materialnej zazwyczaj w połączeniu z kwantyfikatorem ogólnym, używając zdań o następującym schemacie:

$$\forall x(Fx \rightarrow Gx)$$

Chodzi o to, że dla każdego obiektów z uniwersum rozważań, gdy oznaczymy go przez ‘ $x$ ’, to ma być prawdziwa implikacja materialna postaci:  $Fx \rightarrow Gx$ . Na podstawie tabelki dla ‘ $\rightarrow$ ’, ma to formalnie wyrażać, że wszystkie obiekty mające własność  $F$  są obiektami mającymi własność  $G$ .

Dopuszczamy przy tym, iż w ogóle nie ma obiektów mających własność  $F$ . Istotnie, jeśli tak jest, to dla dowolnego obiektu oznaczonego przez ‘ $x$ ’, mamy fałszywe zdanie:  $Fx$ . Zatem — zgodnie z tabelką — prawdziwa jest implikacja materialna:  $Fx \rightarrow Gx$ . Pamiętamy jednak, iż obiekt  $x$  był dowolnie wybrany. Zatem mamy:  $\forall x(Fx \rightarrow Gx)$ .

W szczególnym przypadku, gdy ‘ $Fx$ ’ jest ‘ $x$  jest  $S$ -em’, a ‘ $Gx$ ’ jest ‘ $x$  jest  $M$ -em’, dostajemy:

$$\forall x(x \text{ jest } S\text{-em} \rightarrow x \text{ jest } M\text{-em})$$

co ma wyrażać, iż

Każdy  $S$  jest  $M$ -em

Przykładowo, niech uniwersum rozważań stanowią wszystkie zwierzęta. Rozważmy zdanie:

$$\forall x(x \text{ jest psem} \rightarrow x \text{ jest ssakiem.})$$

Ma ono formalnie wyrażać: każdy pies jest ssakiem. Istotnie, na podstawie tabelki dla ‘ $\rightarrow$ ’, gdy dowolne zwierzę oznaczymy przez ‘ $x$ ’ i prawdą będzie, że  $x$  jest psem, to prawdą też będzie, że  $x$  jest ssakiem.

Zauważmy, że chociaż prawdziwa jest poniższa implikacja materialna

*Kopernik miał syna  $\rightarrow$  Kopernik nie był ojcem,*

to fałszywe jest poniższe ogólne zdanie:

$$\forall x(x \text{ ma syna} \rightarrow x \text{ nie jest ojcem.})$$

Wystarczy wybrać (jako  $x$ -a) dowolnego mężczyznę, który ma syna. Otrzymamy wówczas poprzednik prawdziwy, a następnik fałszywy ( $x$  będzie wówczas ojcem).

W dalszej części pokażemy także wykorzystanie wynikania (4).

<sup>24</sup> Gdyby ktoś podważał źródła historyczne dotyczące Kopernika, to niech w jego miejsce weźmie dowolnego mężczyznę, który ma córkę, lecz nie ma syna. Wtedy przesłanka ‘ $p \rightarrow q$ ’ będzie prawdziwa, a wniosek ‘Jeżeli  $p$ , to  $q$ ’ będzie fałszywy.



### 3.3. Własności spójnika ‘ $\rightarrow$ ’

Mamy następujący związek pomiędzy prawdziwością alternatywy niewykluczającej a implikacją materialną. Zachodzi następująca równoważność logiczna:

$$p \rightarrow q \models \sim p \vee q$$

Jest to zgodne z podanymi tabelkami:

$p$	$q$	$\sim p$	$p \rightarrow q$	$\sim p \vee q$
1	1	0	1	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

W każdym przypadku badane zdania mają tę samą wartość. Zatem są one logicznie równoważne.

Na podstawie ostatniego wzoru można się domyśleć, iż zachodzą następujące równoważności logiczne:

$$\begin{aligned} p \vee q &\models \sim p \rightarrow q \\ &\models \sim q \rightarrow p \end{aligned}$$

Jest to zgodne z podanymi tabelkami:

$p$	$q$	$\sim p$	$\sim q$	$\sim p \rightarrow q$	$\sim q \rightarrow p$	$p \vee q$
1	1	0	0	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
0	1	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	0	0

W każdym przypadku badane zdania mają tę samą wartość. Zatem są one logicznie równoważne.

Mamy także następującą równoważność logiczną:

$$p \rightarrow q \models \sim(p \wedge \sim q)$$

Sprawdzimy ją sposobem tabelkowym:

$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$\sim q$	$p \wedge \sim q$	$\sim(p \wedge \sim q)$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1

W każdym przypadku badane zdania mają tę samą wartość, więc są one logicznie równoważne.

Można wykazać, że także w prawdziwościowym znaczeniu alternatywa wykluczająca ma związek z prawdziwością implikacją materialną. Zachodzą następujące równoważności logiczne:

$$\begin{aligned} p \vee\vee q &\models (\sim p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow \sim p) \\ &\models (\sim q \rightarrow p) \wedge (p \rightarrow \sim q) \end{aligned}$$

Wykażemy je dalej, gdy wprowadzimy równoważność materialną.

### 3.4. Implikacja ścisła Lewisa jako konieczna implikacja materialna

Zauważmy, że dzięki ostatniej równoważności mamy także następujące wyrażenia zdań warunkowych w interpretacji modalnej:

$$\begin{aligned} p \rightarrow q &\models \sim \Diamond(p \wedge \sim q) \\ &\models \Box \sim(p \wedge \sim q) \\ &\models \Box(p \rightarrow q) \end{aligned}$$

Zatem implikacja ścisła Lewisa to to samo, co konieczna implikacja materialna.

## 4. Intensjonalne alternatywy

Na ostatnim wykładzie zapowiedziano, iż „Intensjonalnymi alternatywami zajmiemy się później, gdy poznamy zdania warunkowe”. Tak jak przy prawdziwościowym znaczeniu alternatywa miała związek z implikacją materialną, tak w intensjonalnym znaczeniu alternatywa ma związek ze zdaniem warunkowym.

### 4.1. Znaczenie intensjonalne-niewykluczające

W niewykluczającym znaczeniu intensjonalnym zdanie

$$p \text{ lub } q$$

głosi to samo, co następujące zdanie warunkowe:

$$\text{Jeżeli } \sim p, \text{ to } q$$

Mamy zatem następująco okrojoną tabelkę:

$p$	$q$	$\sim p$	Jeżeli $\sim p$ , to $q$	$p \text{ lub } q$
1	1	0	?	?
1	0	0	?	?
0	1	1	?	?
0	0	1	0	0

Mamy więc do czynienia istotnie ze znaczeniem niewykluczającym. Dopuszczamy sytuację, w której przy dwóch składnikach prawdziwych całe zdanie jest prawdziwe.

W każdej interpretacji spójnik ‘lub’ ma być przemienny, czyli zdanie ‘ $p \text{ lub } q$ ’ ma znaczyć to samo, co ‘ $q \text{ lub } p$ ’. Zatem w rozpatrywanej interpretacji ma ono znaczyć także to samo, co poniższe zdanie warunkowe:

$$\text{Jeżeli } \sim q, \text{ to } p$$

Te dwa zdania warunkowe znaczą oczywiście to samo.

Zauważmy, że przy omawianej tu interpretacji spójnika ‘lub’ mamy następujący schemat niezawodny:

$$\frac{p \text{ lub } q}{p \vee q} \Pi$$

czyli zachodzi następujące wynikanie logiczne:

$$p \text{ lub } q \models p \vee q \quad (5)$$

Założmy, że przesłanka jest prawdziwa. Zatem dopuszczamy tylko przypadki 1, 2 i 3 z powyższej «niepełnej» tabelki. W tych przypadkach jednak prawdziwy jest także wniosek ' $p \vee q$ '. Pokazaliśmy, że nie ma takiego przypadku, w którym przesłanka byłaby prawdziwa, a wniosek nie był. Zatem zachodzi wynikanie. Inny sposób: jedyny przypadek, w którym wniosek ' $p \vee q$ ' jest fałszywy to przypadek 4. W tym przypadku jednak przesłanka ' $p$  lub  $q$ ' też jest fałszywa. Zatem nie ma takiego przypadku, w którym przesłanka byłaby prawdziwa, a wniosek byłby fałszywy, czyli zachodzi wynikanie.

#### 4.2. Znaczenie intensjonalne-wykluczające

W wykluczającym znaczeniu intensjonalnym zdanie:<sup>25</sup>

$$p \text{ lub } q$$

głosi to samo, co następująca koniunkcja zdań warunkowych:

$$\text{Jeżeli } \sim p, \text{ to } q \text{ oraz odwrotnie jeżeli } q, \text{ to } \sim p$$

Mamy zatem następująco okrojoną tabelkę:

$p$	$q$	$\sim p$	Jeżeli $\sim p$ , to $q$	Jeżeli $q$ , to $\sim p$	$p$ lub $q$
1	1	0	?	0	0
1	0	0	?	?	?
0	1	1	?	?	?
0	0	1	0	?	0

Mamy więc do czynienia istotnie ze znaczeniem wykluczającym. Nie dopuszczamy, iż przy dwóch składnikach prawdziwych całe zdanie jest prawdziwe.

Zgodnie z tym, co napisaliśmy w poprzednim podpunkcie, i w tym przypadku alternatywa jest przemienna, czyli zdanie ' $p$  lub  $q$ ' ma znaczyć to samo, co zdanie ' $q$  lub  $p$ ', czyli to samo, co poniższa koniunkcja zdań warunkowych:

$$\text{Jeżeli } \sim q, \text{ to } p \text{ oraz odwrotnie jeżeli } p, \text{ to } \sim q$$

W ten sposób dochodzimy do zdań obustronnie warunkowych. Wcześniej jednak rozwiązaliśmy pewne zadanie.

Zauważmy, że przy omawianej tu interpretacji spójnika 'lub' mamy następujący schemat niezawodny:

$$\frac{p \text{ lub } q}{p \vee q} \Pi$$

czyli zachodzi następujące wynikanie logiczne:

$$p \text{ lub } q \models p \vee q \quad (6)$$

Założmy, że przesłanka jest prawdziwa. Zatem dopuszczamy tylko przypadki 2 i 3 z powyższej «niepełnej» tabelki. W tych przypadkach jednak prawdziwy jest także wniosek ' $p \vee q$ '. Pokazaliśmy, że nie ma takiego przypadku, w którym przesłanka byłaby prawdziwa, a wniosek nie był. Zatem zachodzi wynikanie. Inny sposób: przypadki, w którym wniosek ' $p \vee q$ ' jest fałszywy to 1 i 4. W tych przypadkach jednak przesłanka ' $p$  lub  $q$ ' też jest fałszywa. Zatem nie ma takiego przypadku, w którym przesłanka byłaby prawdziwa, a wniosek byłby fałszywy, czyli zachodzi wynikanie.

<sup>25</sup> W nawiązaniu do symbolu ' $\vee$ ' będziemy pisać 'lub', aby podkreślić to, iż 'lub' interpretujemy w sposób wykluczający.

## 5. Zastosowania

Pokażemy pewien problem (patrz zadanie 3), który można rozwiązać zarówno przy intensionalnej, jak i prawdziwościowej interpretacji spójników zdaniowych.

**Zadanie 1.** Proszę wykazać, że zachodzi poniższe wynikanie logiczne:

$$\frac{\begin{array}{l} \text{Jeśli } p, \text{ to } r \\ \text{Jeśli } q, \text{ to } r \\ p \text{ lub } q \end{array}}{r} \Pi \qquad \frac{\begin{array}{l} \text{Jeśli } p, \text{ to } r \\ \text{Jeśli } q, \text{ to } r \\ p \text{ lub } q \end{array}}{r} \Pi$$

bez względu na to, którą z czterech interpretacji przyjmuje spójnik 'lub' (dwie niewykluczające i dwie wykluczające).

*Rozwiązanie.* Posługujemy się «niepełnymi tabelami»:

$p$	$q$	$p \text{ lub } q$	$p$	$r$	Jeżeli $p$ , to $q$	$q$	$r$	Jeżeli $q$ , to $r$
1	1	?/0/1	1	1	?	1	1	?
1	0	?/1	1	0	0	1	0	0
0	1	?/1	0	1	?	0	1	?
0	0	0	0	0	?	0	0	?

W pierwszej tabelce nie zakładamy, którą z interpretację przyjmujemy (dwie niewykluczające i dwie wykluczające).

Zakładamy, że wszystkie trzy przesłanki są prawdziwe. Skoro trzecia przesłanka ma być prawdziwa, więc wykluczamy to, aby oba zdania  $p$  i  $q$  były łącznie nieprawdziwe, tj. wykluczamy, że jednocześnie  $p = 0$  i  $q = 0$ . Czyli skreślamy dwa ostatnie wiersze w poniższej tabelce. Skoro pierwsza przesłanka ma być prawdziwa, więc wykluczamy to, aby  $p$  było prawdziwe, a  $r$  nie było, tj. wykluczamy, że jednocześnie  $p = 1$  i  $r = 0$ . Czyli skreślamy drugi i czarty wiersz w poniższej tabelce. Skoro druga przesłanka ma być prawdziwa, więc wykluczamy to, aby  $q$  było prawdziwe, a  $r$  nie było, tj. wykluczamy, że jednocześnie  $q = 1$  i  $r = 0$ . Czyli skreślamy drugi i szósty wiersz w poniższej tabelce.

$p$	$q$	$r$	Jeżeli $p$ , to $r$	Jeżeli $q$ , to $r$	$p \text{ lub } q$
1	1	1	?	?	?
1	1	0	0	0	?
1	0	1	?	?	?
1	0	0	0	?	?
0	1	1	?	?	?
0	1	0	?	0	?
0	0	1	?	?	0
0	0	0	?	?	0

Zatem przy prawdziwych przesłankach dopuszczamy jedynie wiersze (pierwszy, trzeci i piąty), w których  $r$  jest prawdziwe ( $r = 1$ ). Zatem przy prawdziwych przesłankach wniosek musi być też prawdziwy.

Zauważmy, że jeśli alternatywę będziemy interpretować wykluczająco, to jedynie odpadnie dodatkowo wiersz pierwszy (i kolejny raz drugi):

$p$	$q$	$p \text{ lub } q$	$p$	$q$	$r$	Jeżeli $p$ , to $r$	Jeżeli $q$ , to $r$	$p \text{ lub } q$
1	1	0	1	1	1	?	?	0
1	0	?/1	1	1	0	0	0	0
0	1	?/1	1	0	1	?	?	?
0	0	0	1	0	0	0	?	?
			0	1	1	?	?	?
			0	1	0	?	0	?
			0	0	1	?	?	0
			0	0	0	?	?	0

Zatem także od prawdziwych przesłanek dojdziemy do prawdziwego wniosku.

Oczywiście schemat też będzie niezawodny, gdy ‘lub’ będziemy interpretować prawdziwościowo. Wtedy jedynie w ostatniej kolumnie obu tabeli będziemy mieć ‘1’ zamiast ‘?’. Mamy więc oba poniższe wynikania logiczne:

$$\frac{\begin{array}{l} \text{Jeśli } p, \text{ to } r \\ \text{Jeśli } q, \text{ to } r \\ p \vee q \end{array}}{r} \Pi \qquad \frac{\begin{array}{l} \text{Jeśli } p, \text{ to } r \\ \text{Jeśli } q, \text{ to } r \\ p \underline{\vee} q \end{array}}{r} \Pi \qquad \bullet$$

Powyższe rozwiązanie można powtórzyć dla implikacji materialnej. Po prostu zamiast znaku zapytania ‘?’ będzie występować ‘1’. Ta zmiana będzie jedynie mówić, iż przy prawdziwych przesłankach we wierszach, które poprzednio opuszczaliśmy jako mogące być prawdziwe, teraz będziemy mieć prawdę. W nich jednak  $r$  jest prawdziwe. Zatem przy prawdziwych przesłankach wniosek musi też być prawdziwy. Pokażemy to w rozwiązaniu następnego zadania.

**Zadanie 2.** Proszę wykazać, że zachodzą poniższe wynikania logiczne:

$$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow r \\ q \rightarrow r \\ p \vee q \end{array}}{r} \Pi \qquad \frac{\begin{array}{l} p \rightarrow r \\ q \rightarrow r \\ p \underline{\vee} q \end{array}}{r} \Pi$$

*Rozwiązanie.* Posługujemy się teraz «pełnymi tabelami». Dla pierwszego schematu mamy następującą tabelę:

$p$	$q$	$p \vee q$	$p$	$r$	$p \rightarrow r$	$q$	$r$	$q \rightarrow r$
1	1	1	1	1	1	1	1	1
1	0	1	1	0	0	1	0	0
0	1	1	0	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0	0	1

$p$	$q$	$r$	$p \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$p \vee q$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1
1	0	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0
0	0	0	1	1	0

Zatem przy prawdziwych przesłankach dopuszczamy jedynie wiersze (pierwszy, trzeci i piąty), w których  $r$  jest prawdziwe ( $r = 1$ ). Zatem przy prawdziwych przesłankach wniosek musi być też prawdziwy.

Ta sama sytuacja wystąpi, gdy alternatywę będziemy interpretować wykluczająco. Mamy następującą tabelę:

$p$	$q$	$r$	$p \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$p \vee q$
1	1	1	1	1	0
1	1	0	0	0	0
1	0	1	?	1	1
1	0	0	0	1	1
0	1	1	?	1	1
0	1	0	1	0	1
0	0	1	1	1	0
0	0	0	1	1	0

Zatem także od prawdziwych przesłanek dojdziemy do prawdziwego wniosku. •

Rozwiązanie zadania 1 otrzymamy także z rozwiązania zadania 2 oraz z warunków (4), (5) i (6). Po prostu, intensjonalne zdania są mocniejsze od ich prawdziwościowych odpowiedników. Mamy więc wynikania:

$$\frac{p \text{ lub } q}{p \vee q} \Pi \qquad \frac{p \underline{\text{lub}} q}{p \vee\!\!\!\vee q} \Pi$$

$$\frac{\text{Jeżeli } p, \text{ to } r}{p \rightarrow r} \Pi \qquad \frac{\text{Jeżeli } q, \text{ to } r}{q \rightarrow r} \Pi$$

Zatem jeśli coś wynika ze słabszych przesłanek, to wynika też z mocniejszych.

**Zadanie 3.** Przyjmijmy, że mamy dwa prawdziwe (uzasadnione) zdania:

*Jeżeli ktoś ma zapalenie płuc, to trzeba mu zastosować antybiotyki*

*Jeżeli ktoś ma zapalenie oskrzeli, to trzeba mu zastosować antybiotyki*

Przyjmujemy teraz, że jesteś lekarzem i twój pacjent ma objawy wskazujące u niego na zapalenie płuc lub na zapalenie oskrzeli.

(a) Proszę udowodnić, że powyższe dane wystarczą do uzasadnienia tego, iż trzeba pacjentowi zastosować antybiotyki.

(b) Proszę pokazać, że nie ma znaczenia czy dopuszczasz dwie choroby u pacjenta, czy to wykluczasz, tzn. uważasz, iż pacjent ma tylko jedną z chorób, lecz nie wiesz którą.

*Rozwiązanie.* Wprowadźmy pomocnicze oznaczenia:

$p$ : *Nasz pacjent ma zapalenie płuc*

$q$ : *Nasz pacjent ma zapalenie oskrzeli*

$r$ : *Trzeba naszemu pacjentowi zastosować antybiotyki*

Zatem wiemy, że prawdziwe są dwa zdania warunkowe:

Jeżeli  $p$ , to  $r$

Jeżeli  $q$ , to  $r$

oraz alternatywa:

$p$  lub  $q$

bez względu na interpretację spójnika 'lub'.<sup>26</sup> Pokazaliśmy, że zachodzi poniższe wynikanie logiczne:

$$\frac{\begin{array}{l} \text{Jeśli } p, \text{ to } r \\ \text{Jeśli } q, \text{ to } r \\ p \text{ lub } q \end{array}}{r} \Pi$$

Skoro przy przyjętym podstawieniu przesłanki są prawdziwe, więc także prawdziwy jest wniosek. Dla badanego zdania wskazaliśmy trzy inne zdania prawdziwe, z których ono wynika. Zatem badane zdanie jest dedukcyjnie uzasadnione.

Zauważmy, że gdyby lekarz uważał, iż pacjent ma tylko jedną chorobę, a okazało się, iż pacjent ma obie, to nie byłoby błędu w uzasadnieniu (że trzeba stosować antybiotyki). Przecież wynikanie zachodzi przy każdym z czterech rozumieniu spójnika 'lub'. Nie byłoby także błędu w uzasadnieniu, gdyby lekarz dopuszczał obie choroby u pacjenta, a ten miałby tylko jedną. Wtedy przecież trzecia przesłanka też byłaby prawdziwa. •

**Zadanie 4.** Proszę wykazać, że zachodzi poniższe wynikanie logiczne:

$$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow r \\ q \rightarrow s \\ p \vee q \end{array}}{r \vee s} \Pi$$

*Rozwiązanie.* Posługujemy się «pełnymi tabelami». Jednakże mamy teraz 16 przypadków. Warto zatem zastanowić się nad jakąś uproszczoną metodą. Wystarczy przecież sprawdzić tylko te przypadki, w których wniosek jest fałszywy. Jeśli dla każdego z nich co najmniej jedna przesłanka będzie też fałszywa, to wykażemy, że zachodzi wynikanie logiczne (nie będzie przecież takiego przypadku, w którym wszystkie przesłanki są prawdziwe, a wniosek fałszywy).

Sprawdzamy kiedy wniosek jest fałszywy:

<sup>26</sup> Może być ona wykluczająca bądź nie, jak również prawdziwościowa bądź nie.

$r$	$s$	$r \vee s$
1	1	1
1	0	1
0	1	1
0	0	0

$p$	$q$	$r$	$s$	$p \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$p \vee q$
1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1
0	0	0	0	1	1	0

Zatem w każdym przypadku, w którym wniosek jest fałszywy nie wszystkie przesłanki są prawdziwe. Wynikanie zachodzi

Zauważmy, że stosując «niepełne» tabelki dla spójników intensjonalnych nie da się wykazać zachodzenie następującego wynikania:

$$\frac{\begin{array}{l} \text{Jeżeli } p, \text{ to } r \\ \text{Jeżeli } q, \text{ to } s \\ p \text{ lub } q \end{array}}{r \text{ lub } s} \Pi$$

Można wykorzystać zadanie 4 oraz następującą zasadę:<sup>27</sup>

Jeśli wszystkie przesłanki i wniosek są zbudowane za pomocą spójników prawdziwościowych i schemat jest niezawodny, to niezawodny jest również schemat, gdy spójniki prawdziwościowe zastąpimy ich intensjonalnymi wersjami.

Zastępując w schemacie w zadaniu 4 spójniki prawdziwościowe ich intensjonalnymi odpowiednikami uzyskamy ostatnio analizowany schemat. Zatem, na mocy powyższej zasady, jest on niezawodny.

**Zadanie 5.** Zbadać czy poniższy schemat jest niezawodny:

$$\frac{\begin{array}{l} p \rightarrow r \\ q \rightarrow s \\ p \underline{\vee} q \end{array}}{r \underline{\vee} s}$$

*Rozwiązanie.* Posługujemy się «pełnymi tabelami». Jednakże mamy teraz 16 przypadków. Warto zatem zastanowić się nad jakąś uproszczoną metodą. Wystarczy przecież sprawdzić tylko te przypadki, w których wniosek jest fałszywy. Jeśli dla każdego z nich co najmniej jedna przesłanka będzie też fałszywa, to wykażemy, że zachodzi wynikanie logiczne (nie będzie przecież takiego przypadku, w którym wszystkie przesłanki są prawdziwe, a wniosek fałszywy).

Sprawdzamy kiedy wniosek jest fałszywy:

<sup>27</sup> Nie będziemy tutaj uzasadniać tej zasady.



$r$	$s$	$r \vee s$
1	1	0
1	0	1
0	1	1
0	0	0

Zatem kontynuujemy tabelę z zadania 4:

$p$	$q$	$r$	$s$	$p \rightarrow r$	$q \rightarrow r$	$p \vee q$
1	1	0	0	0	0	1
1	0	0	0	0	1	1
0	1	0	0	1	0	1
0	0	0	0	1	1	0
1	1	1	1	1	1	0
1	0	1	1	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
0	0	1	1	1	1	0

W przypadkach 6 i 7 wszystkie przesłanki są prawdziwe, a wniosek jest fałszywy. Zatem wywnioskowanie nie zachodzi. Schemat jest zawodny.

Uwaga! Zamiast całej tabelki wystarczyło wypisać jeden wiersz: 6 albo 7. •

Ostatnie zadanie pokazuje nam, że poniższy schemat jest także zawodny:

$$\frac{\begin{array}{l} \text{Jeżeli } p, \text{ to } r \\ \text{Jeżeli } q, \text{ to } s \\ p \text{ lub } q \end{array}}{r \text{ lub } s} \quad \nVdash$$

Wystarczy znaleźć prawdziwe przesłanki takie, że  $p$ ,  $r$  i  $s$  są zdaniem prawdziwymi, a  $q$  jest fałszywe, albo takie prawdziwe przesłanki, że  $q$ ,  $r$  i  $s$  są zdaniem prawdziwymi, a  $p$  jest fałszywe. Przy pewnych ograniczeniach mamy także następującą zasadę:<sup>28</sup>

Jeśli wszystkie przesłanki i wniosek są zbudowane za pomocą spójników prawdziwościowych i schemat jest zawodny, to zawodny jest również schemat, gdy spójniki prawdziwościowe zastąpimy ich intensjonalnymi wersjami.

## 6. Spójnik zdaniowy ‘wtedy i tylko wtedy, gdy’.

### Zdania obustronnie warunkowe

#### 6.1. Określenie zdań obustronnie warunkowych

Najpierw podkreślmy, że w zdaniach postaci:

$$p \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } q$$

<sup>28</sup> Nie będziemy tutaj uzasadniać tej zasady, ani podawać ograniczeń jej stosowania.

nie należy słowu ‘wtedy’ nadawać czasowej konotacji. Należy tak samo je interpretować, jak zdania następującej postaci:

$$p \text{ jeżeli i tylko jeżeli } q$$

Zajmijmy się teraz tymi drugimi.<sup>29</sup> Oczywiście jest, że głoszą one to samo, co koniunkcja:

$$(p \text{ jeżeli } q) \wedge (p \text{ tylko jeżeli } q)$$

Pierwszy ze składników koniunkcji mówi, że zajście  $q$  stanowi WYSTARCZAJĄCY warunek dla zajścia  $p$ . A więc mówi: jeżeli  $q$ , to  $p$ . Drugi ze składników koniunkcji mówi, że zajście  $q$  stanowi KONIECZNY warunek dla zajścia  $p$ . A to mówi: jeżeli  $p$ , to  $q$ . Zatem — po zamianie kolejności składników — z tej ostatniej koniunkcji dostajemy:

$$(\text{Jeżeli } p, \text{ to } q) \wedge (\text{jeżeli } q, \text{ to } p)$$

Teraz wróćmy do zdań postaci:

$$p \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } q$$

Najpierw rozkładamy je na koniunkcję:

$$(p \text{ wtedy, gdy } q) \wedge (p \text{ tylko wtedy, gdy } q)$$

Także teraz pierwszy ze składników koniunkcji ma mówić, że zajście  $q$  stanowi WYSTARCZAJĄCY warunek dla zajścia  $p$ .<sup>30</sup> A więc mówi tylko tyle, że: jeżeli  $q$ , to  $p$ . Zatem mamy:

$$\begin{aligned} p \text{ wtedy, gdy } q &\models p, \text{ jeżeli } q \\ &\models \text{Jeżeli } q, \text{ to } p \end{aligned}$$

Drugi ze składników mówi, że zajście  $q$  stanowi KONIECZNY warunek dla zajścia  $p$ . A to mówi tylko tyle, że jeżeli  $p$ , to  $q$ . Zatem mamy:

$$p \text{ tylko wtedy, gdy } q \models \text{Jeżeli } p, \text{ to } q$$

Reasumując otrzymujemy:

$$p \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } q \models (\text{Jeżeli } p, \text{ to } q) \text{ oraz } (\text{jeżeli } q, \text{ to } p)$$

Zatem badane zdanie mówi to samo, co koniunkcja zdania warunkowego prostego i odwrotnego. Stąd nazywamy je *obustronnie warunkowym*.

Opierając się na ostatnim wzorze oraz tabelkach dla zdania warunkowego i koniunkcji otrzymujemy tabelkę dla zdania obustronnie warunkowego.

$p$	$q$	Jeżeli $p$ , to $q$	Jeżeli $q$ , to $p$	$p$ wtedy i tylko wtedy, gdy $q$
1	1	?	?	?
1	0	0	?	0
0	1	?	0	0
0	0	?	?	?

<sup>29</sup> Jest ono „kalką językową” zdań występujących w anglojęzycznej literaturze: ‘ $p$  if and only if  $q$ ’.

<sup>30</sup> Jak już pisaliśmy, nie należy tutaj wiązać konotacji czasowej ze słowem ‘wtedy’.

Poniżej wyjaśnimy poszczególne cztery przypadki. W przypadku drugim i trzecim co najmniej jedno ze zdań warunkowych jest fałszywe. Zatem ich koniunkcja też jest fałszywa. W przypadkach pierwszym i czwartym zdania warunkowe mają wartości zależne od treści zdań składowych. Zatem tak samo będzie z połączeniem tych zdań. Sama wartość zdań składowych nie wyznacza wartości zdania obustronnie warunkowego.

Można także podawać dla tych przypadków odpowiednie przykłady prawdziwych zdań oraz fałszywych zdań obustronnie warunkowych (tak, jak dla zdań warunkowych).

Widzimy więc, że spójnik zdaniowy ‘wtedy i tylko wtedy, gdy’ jest kolejnym spójnikiem nieprawdziwościowym (intensjonalnym).

Mamy równoważność logiczną:

$$p \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \sim q \models \sim p \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } q$$

Bierze się ona stąd, że:  $p \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \sim q \models \text{jeżeli } p, \text{ to } \sim q \wedge \text{jeżeli } \sim q, \text{ to } p$   
 $\models \text{jeżeli } q, \text{ to } \sim p \wedge \text{jeżeli } \sim p, \text{ to } q \models \sim p \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } q$ .

## 6.2. Związek z intensjonalną alternatywą wykluczającą

Z tego co podaliśmy wynika, że w wykluczającym znaczeniu intensjonalnym zdanie:

$$p \text{ lub } q$$

głosi to samo, co następujące, równoważne, zdania obustronnie warunkowe:

$$\sim p \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } q$$

$$p \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \sim q$$

## 6.3. Wynikania związane ze zadaniami obustronnie warunkowymi

Sama tabelka wystarczy, aby pokazać, że poniższe schematy są niezawodne:

$$\frac{p \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } q}{\frac{p}{q}} \Pi \qquad \frac{\boxed{\text{Jeżeli } p, \text{ to } q} \text{ oraz jeżeli } q, \text{ to } p}{\frac{p}{q}} \Pi$$

Pierwszy schemat: Załóżmy, że obie przesłanki są prawdziwe. Skoro pierwsza przesłanka jest prawdziwa, to zachodzi albo pierwszy albo ostatni z przypadków występujących w tabelce. Ale skoro druga przesłanka ( $p$ ) jest prawdziwa, więc zachodzi pierwszy przypadek. A zatem także wniosek ( $q$ ) jest prawdziwy. Pokazaliśmy, że nie ma przypadku, w którym przesłanki byłyby prawdziwe, a wniosek nie był. Zatem schemat jest niezawodny.

Drugi schemat: Obok pokazujemy, że niezawodność schematu można oprzeć na tym, że z samego prostego zdania warunkowego (w ramce) i z drugiej przesłanki wynika wniosek.<sup>31</sup>

Także sama tabelka wystarczy, aby pokazać, że poniższe schematy są niezawodne:

$$\frac{p \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } q}{\frac{\text{nie-}p}{\text{nie-}q}} \Pi \qquad \frac{\text{Jeżeli } p, \text{ to } q \text{ oraz } \boxed{\text{jeżeli } q, \text{ to } p}}{\frac{\text{nie-}p}{\text{nie-}q}} \Pi$$

<sup>31</sup> Z tego też względu nie jest interesujący podany schemat wynikania dla zdania obustronnie warunkowego (gdyż jedno ze zdań warunkowych jest zbędne dla zachodzenia wynikania).

Pierwszy schemat: Załóżmy, że obie przesłanki są prawdziwe. Skoro pierwsza przesłanka jest prawdziwa, to zachodzi albo pierwszy albo ostatni z przypadków występujących w tabelce. Ale skoro druga przesłanka (nie- $p$ ) jest prawdziwa, więc zdanie  $p$  jest fałszywe, czyli zachodzi ostatni przypadek. A w tym przypadku zdanie  $q$  też jest fałszywe, czyli wniosek (nie- $q$ ) jest prawdziwy. Pokazaliśmy, że nie ma przypadku, w którym przesłanki byłyby prawdziwe, a wniosek nie był. Zatem schemat jest niezawodny.

Drugi schemat: Obok pokazujemy, że zachodzenie wynikania można oprzeć na tym, że z samego odwrotnego zdania warunkowego (w ramce) i z drugiej przesłanki wynika wniosek.<sup>32</sup>

Przeprowadzenie podobnej analizy pokazuje, że niezawodne są poniższe schematy:

$$\frac{p \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } q}{\frac{\text{nie-}q}{\text{nie-}p}} \Pi \qquad \frac{\boxed{\text{Jeżeli } p, \text{ to } q} \text{ oraz jeżeli } q, \text{ to } p}{\frac{\text{nie-}q}{\text{nie-}p}} \Pi$$

*Uwaga.* Ci, którzy błędnie sądzą, że niezawodny jest poniższy schemat:

$$\frac{\text{Jeżeli } p, \text{ to } q}{\frac{\text{nie-}p}{\text{nie-}q}} \nVdash$$

zapewne nie odróżniają zdań warunkowych od zdań obustronnie warunkowych. Innymi słowy, błędnie sądzą, że zdanie warunkowe ‘Jeżeli  $p$ , to  $q$ ’ ma taką samą tabelkę, jak zdanie obustronnie warunkowe ‘ $p$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $q$ ’. Zatem mylą powyższy błędny schemat z poniższym niezawodnym (poprawnym):

$$\frac{p \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } q}{\frac{\text{nie-}p}{\text{nie-}q}} \Pi$$

Ale ten ostatni schemat jest poprawny dzięki odwrotnemu zdaniu warunkowemu: Jeżeli  $q$ , to  $p$ .

## 7. Równoważność materialna

Przypomnijmy, zdanie obustronnie warunkowe jest koniunkcją dwóch zdań warunkowych: prostego i odwrotnego. Podobnie, tworzą nowy sztuczny spójnik równoważności materialnej, przyjmujemy, że ma ona wyrażać to samo, co koniunkcja dwóch implikacji materialnych: prostej i odwrotnej. Stąd dla tego spójnika przyjmujemy oznaczenie:  $\leftrightarrow$ . Chcemy mieć więc następującą równoważność:

$$p \leftrightarrow q \models (p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)$$

Otrzymujemy więc tabelkę:

$p$	$q$	$p \rightarrow q$	$q \rightarrow p$	$p \leftrightarrow q$
1	1	1	1	1
1	0	0	1	0
0	1	1	0	0
0	0	1	1	1

Zatem równoważność materialna stwierdza jedynie równość wartości zdań składowych, a nie ich równoważność. Spójnik ‘ $\leftrightarrow$ ’ jest kolejnym przykładem spójnika prawdziwościowego.

<sup>32</sup> Por. ostatni przypis.

### 7.1. Wykorzystywanie równoważności materialnej

Podobnie, jak w przypadku implikacji materialnej, w logice matematycznej oraz w matematyce używa się równoważności materialnej zazwyczaj w połączeniu z kwantyfikatorem ogólnym, używając zdań o następującym schemacie:

$$\forall x(Fx \leftrightarrow Gx)$$

Chodzi o to, że dla każdego obiektów z uniwersum rozważań, gdy oznaczymy go przez 'x', to ma być prawdziwa równoważność materialna postaci:  $Fx \leftrightarrow Gx$ . Na podstawie tabelki dla ' $\leftrightarrow$ ', ma formalnie wyrażać, że obiekty mające własność  $F$  oraz obiekty mające własność  $G$  są dokładnie tymi samymi obiektami.

Przykładowo, niech uniwersum rozważań stanowią wszystkie zwierzęta. Rozważmy zdanie:

$$\forall x(x \text{ ma serce} \leftrightarrow x \text{ ma nerki.})$$

Ma ono formalnie wyrażać: zwierzęta mające serce oraz zwierzęta mające nerki są dokładnie tymi samymi (odkryto to w biologii). Istotnie, na podstawie tabelki dla ' $\leftrightarrow$ ', gdy dowolne zwierzę oznaczymy przez 'x', to zdania 'x ma serce' i 'x ma nerki' mają tę samą wartość.

### 7.2. Własności spójnika ' $\leftrightarrow$ '

Dla spójnika ' $\leftrightarrow$ ' mamy następujące równoważności:

$$\begin{aligned}\sim(p \leftrightarrow q) &\models p \leftrightarrow \sim q \\ &\models \sim p \leftrightarrow q\end{aligned}$$

Mówią one, że zanegowanie równoważności materialnej to to samo, co podanie równoważności z zanegowanym jednym składnikiem. Sprawdźmy je sposobem tabelkowym:

$p$	$q$	$p \leftrightarrow q$	$\sim(p \leftrightarrow q)$	$\sim p$	$\sim q$	$p \leftrightarrow \sim q$	$\sim p \leftrightarrow q$
1	1	1	0	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1	1
0	1	0	1	1	0	1	1
0	0	1	0	1	1	0	0

W każdym przypadku badane zdania mają tę samą wartość, więc są one logicznie równoważne.

Analogicznej własności nie ma intensjonalne zdanie obustronnie warunkowe. Negacja tego zdania mówi o fałszywości intensjonalnego zdania obustronnie warunkowego. Natomiast zdania ' $p$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $\sim q$ ' i ' $\sim p$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $q$ ' mówią o równoważności jednego ze składników z negacją drugiego. Mamy równoważność:

$$p \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \sim q \models \sim p \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } q$$

Ponadto, równoważność materialna ma związek z alternatywą niewykluczającą. Zachodzą następujące równoważności:

$$\begin{aligned}p \vee q &\models \sim(p \leftrightarrow q) \\ &\models p \leftrightarrow \sim q \\ &\models \sim p \leftrightarrow q\end{aligned}$$

Pierwszą z nich sprawdzimy sposobem tabelkowym:

$p$	$q$	$p \vee q$	$p \leftrightarrow q$	$\sim(p \leftrightarrow q)$
1	1	0	1	1
1	0	1	0	0
0	1	1	0	0
0	0	0	1	1

W każdym przypadku badane zdania mają tę samą wartość, więc są one logicznie równoważne.

### 7.3. Interpretacja modalna zdań obustronnie warunkowych a równoważność materialna

Jak pamiętamy jedną z interpretacji zdania warunkowego

Jeżeli  $p$ , to  $q$

jest interpretacja modalna, przy której znaczy ono tyle, co:

$$\sim \Diamond(p \wedge \sim q)$$

Przypomnijmy, iż ma ono także znaczyć to samo, co:

$$\Box(p \rightarrow q)$$

gdyż z dwóch równoważności:  $\sim \Diamond p \models \Box \sim p$  oraz  $\sim(p \wedge \sim q) \models p \rightarrow q$ , dostaniemy:  $\sim \Diamond(p \wedge \sim q) \models \Box \sim(p \wedge \sim q) \models \Box(p \rightarrow q)$ .

Przypomnijmy też, że zdanie warunkowe w interpretacji modalnej nazywane jest *implikacją ścisłą Lewisa*. Przy tej interpretacji zdanie ‘Jeżeli  $p$ , to  $q$ ’ zapisujemy symbolicznie jako:  $p \rightarrow_3 q$ . Mamy zatem:

$$\begin{aligned} p \rightarrow_3 q &\models \sim \Diamond(p \wedge \sim q) \\ &\models \Box(p \rightarrow q) \end{aligned}$$

Możemy również modalnie interpretować zdania obustronnie warunkowe. Przy tej interpretacji zdanie ‘ $p$  wtedy i tylko wtedy, gdy  $q$ ’ nosi miano *równoważności ścisłej Lewisa* i zapisujemy jej symbolicznie jako:  $p \leftrightarrow_3 q$ .

Zauważmy, że operator konieczności ‘ $\Box$ ’ jest rozdzielny względem koniunkcji, zatem mamy

$$\Box(p \wedge q) \models \Box p \wedge \Box q$$

Zatem konieczność zajścia dwóch sytuacji łącznie jest równoważna temu, iż obie są konieczne. Stąd i z poprzednich wzorów otrzymujemy:

$$\begin{aligned} p \leftrightarrow_3 q &\models (p \rightarrow_3 q) \wedge (q \rightarrow_3 p) \\ &\models \Box(p \rightarrow q) \wedge \Box(q \rightarrow p) \\ &\models \Box((p \rightarrow q) \wedge (q \rightarrow p)) \\ &\models \Box(p \leftrightarrow q) \end{aligned}$$