

Andrzej Pietruszczak

# Konspekt do wykładu z logiki – socjologia niestacjonarna\*

(20.03.2010)

Na poprzednim wykładzie zajmowaliśmy się analizą języka naturalnego pod względem syntaktycznym (tj. składni). Teraz zajmiemy się jego analizą semantyczną (czyli znaczeniem wybranych wyrażeń). Na początek zajmiemy się spójnikami.

## 1. Operatory i spójniki zdaniowe

### 1.1. Operatory zdaniowe

*Operatorem zdaniowym* nazwiemy dowolne wyrażenie językowe, które działając na jedno zdanie tworzy nowe zdanie. Zatem operatory zdaniowe mają następujący indeks (albo inaczej: wskaźnik):

$$\frac{s}{s}$$

Są one więc jednoargumentowymi funktorami zdaniotwórczymi od argumentu zdaniowego.

Do operatorów zdaniowych zaliczymy zwroty związane z negacją:

Nie jest tak, że      } symbolicznie:  $\sim$   
Nieprawda, że

oraz różne zwroty modalne:

Jest możliwe to, że      – symbolicznie:  $\Diamond$

Nie jest możliwe to, że

Konieczne jest to, że      – symbolicznie:  $\Box$

Nie jest konieczne to, że

Dla wygody te negatywne zwroty możemy traktować jako połączenie negacji i pozytywnego zwrotu modalnego:

Nie jest tak, iż jest możliwe to, że      – symbolicznie:  $\sim \Diamond$

Nie jest tak, iż jest konieczne to, że      – symbolicznie:  $\sim \Box$

Do operatorów zdaniowych zaliczymy także różne zwroty deontyczne:

Dozwolone jest to, że

Nakazane jest to, że

Zakazane jest to, że

---

\* © 2010 prawa autorskie do całości ma wyłącznie autor.

jak również różnego typu zwroty epistemiczne:

$a$  wie, że – symbolicznie:  $\mathbb{K}_a$   
 $a$  sądzi, że – symbolicznie:  $\mathbb{B}_a$

gdzie w miejscu litery ‘ $a$ ’ stoi nazwa danej osoby (tzw. *agenta*)

## 1.2. Spójniki zdaniowe

*Spójnikiem zdaniowym* ma być dowolne wyrażenie językowe, które łącząc dwa lub więcej zdań tworzy nowe zdanie. Z tego powodu operatorów zdaniowych nie zaliczyliśmy do spójników zdaniowych (choć niektórzy autorzy tak robią).

Dwuczłonowe spójniki zdaniowe mają indeks:

$$\frac{s}{s \quad s}$$

Są one więc dwuargumentowymi funktorami zdaniotwórczymi od dwóch argumentów zdaniowych. Nie wykluczamy wieloczłonowych spójników zdaniowych o indeksach:

$$\frac{s}{s \quad s \quad s} \qquad \frac{s}{s \quad s \quad s \quad s}$$

Do tej kwestii wrócimy później.

## 2. Prawdziwościowość

### 2.1. Operatory prawdziwościowe

Wśród operatorów zdaniowych wyróżnimy tzw. *operatory prawdziwościowe*. Nazywa je się także *ekstensjonalnymi*.

**Definicja 1.** *Operator prawdziwościowy* to operator zdaniowy mający następującą własność:

wartość logiczna dowolnego zdania zbudowanego za pomocą tego operatora jest całkowicie wyznaczona przez wartość logiczną zdania składowego.

Przykładem operatora prawdziwościowego jest operator negacji, mający tabelkę:

$p$	$\sim p$	$p$	$\sim p$
prawdziwe	fałszywe	1	0
fałszywe	prawdziwe	0	1

Innym przykładem będzie tzw. *operator asercji* ‘Jest tak, że’, mający następującą tabelkę:

$p$	Jest tak, że $p$
1	1
0	0

Jak widać w logice dwuwartościowej jest on zbędny. Dlatego nie mamy dla niego żadnego oznaczenia symbolicznego.

Teoretycznie możliwe są jeszcze dwa rodzaje operatorów prawdziwościowych. Pierwsze — zawsze dające zdanie fałszywe, oraz drugie — zawsze dające prawdę:

$p$	$O_1p$	$O_2p$
1	0	1
0	0	1

Przykładem pierwszego mógłby być operator ‘Jest i nie jest tak, że’, a przykładem drugiego mógłby być operator ‘Jest lub nie jest tak, że’. Jak widać, nie są to ciekawe przykłady.

## 2.2. Operatory nieprawdziwościowe

Pozostałe z wymienionych operatorów zdaniowych nie są prawdziwościowe. Mówimy o nich, że są *intensjonalne*.

Operatory modalne będą miały następujące „okrojone” tabelki w standardowej interpretacji:

$p$	$\Diamond p$	$\sim \Diamond p$	$\Box p$	$\sim \Box p$
1	1	0	?	?
0	?	?	0	1

To co jest prawdziwe jest też możliwe, a to co jest fałszywe nie jest konieczne. Tam gdzie stoi znak zapytania wartość logiczna całości jest wyznaczona przez treść zdania  $p$ , a nie tylko przez jego wartość. Są fałszywe zdania, które jednak opisują możliwe sytuacje. Są też inne zdania fałszywe, które opisują sytuacje niemożliwe. Przykład takiego zdania:

*Jakiś kawaler jest żonaty.*

Ponadto, są takie prawdziwe zdania opisujące sytuacje, które nie są konieczne. Są też inne zdania prawdziwe, które opisują sytuacje konieczne. Przykład takiego zdania:

*Każdy kawaler jest żonaty.*

Stąd otrzymujemy podane „okrojone” tabelki.

Widzimy więc, iż mamy następujące niezawodne schematy wnioskowania:

$$\frac{\Box p}{p} \qquad \frac{p}{\Diamond p} \qquad \frac{\Box p}{\Diamond p}$$

Pomiędzy operatorami modalnymi zachodzi związki wyrażone przez następujące równoważności logiczne<sup>1</sup>:

$$\begin{aligned} \sim \Diamond p &\models \Box \sim p \\ \Diamond p &\models \sim \Box \sim p \\ \sim \Box p &\models \Diamond \sim p \\ \Box p &\models \sim \Diamond \sim p \end{aligned}$$

Wyrażamy je lapidarnie w następujący sposób:

- to, że dana sytuacja nie jest możliwa znaczy, iż konieczne jest, aby było inaczej;
- to, że dana sytuacja jest możliwa znaczy, iż nie jest konieczne, aby było inaczej;
- to, że dana sytuacja nie jest konieczna znaczy, iż jest możliwe, aby było inaczej;
- to, że dana sytuacja jest konieczna znaczy, iż nie jest możliwe, aby było inaczej.

<sup>1</sup> Symbol ‘ $\models$ ’ wyraża to, iż zdania stojące po obu jego stronach są logicznie równoważne, czyli prawdziwość jednego gwarantuje prawdziwość drugiego oraz odwrotnie.

Jest to zgodne z podanymi do tej pory tabelkami:

$p$	$\sim p$	$\Box p$	$\sim \Box p$	$\Box \sim p$	$\sim \Box \sim p$	$\Diamond p$	$\sim \Diamond p$	$\Diamond \sim p$	$\sim \Diamond \sim p$
1	0	?	?	0	1	1	0	?	?
0	1	0	1	?	?	?	?	1	0

Oczywiście, ta tabela nie jest dowodem, lecz pokazuje jedynie zgodność z oczekiwaniami. To że znak zapytania przechodzi w znak zapytania nie dowodzi przecież tego, że będą zachowane wartości logiczne.

Przejdźmy teraz do spójników epistemicznych. Mają one następujące „okrojone” tabelki:

$p$	$\mathbb{K}_a p$	$\mathbb{B}_a p$
1	?	?
0	0	?

Współcześnie, przyjmuje się, iż na wiedzę składają się wyłącznie zdania prawdziwe. Zatem mówiąc lapidarnie: gdy do naszej „wiedzy” zaliczymy jakieś zdanie fałszywe, to jedynie WYDAJE NAM SIĘ, że to wiemy. Ponadto, każdy „agent” zna jakieś prawdy, lecz nie wszystkie. To, że zdanie  $p$  jest prawdą, wcale nie znaczy, iż  $a$  wie, że  $p$ . Jednakże, jeśli  $a$  wie, że  $p$ , to  $p$  jest prawdą. Mamy zatem tabelkę operatora ‘ $\mathbb{K}_a$ ’, a z niej następujący schemat niezawodny:

$$\frac{\mathbb{K}_a p}{p}$$

Istotnie, jeśli przesłanka jest prawdziwa, tzn.  $a$  wie, że  $p$ , to  $p$  jest prawdziwe, gdyż gdyby było inaczej, to — na podstawie tabelki — przesłanka też byłaby fałszywa.

*Uwaga.* W nawiązaniu do ostatniego schematu niezawodnego zauważmy:

(i) Nigdy nie było tak, aby ludzie wiedzieli, że Ziemia jest płaska. Jedynie kiedyś w historii **wydawało im się**, iż wiedzą, że tak jest.

(ii) Podany schemat może skłaniać niektórych filozofów do „rewizji teorii prawdy”, według następującego rozumowania: «skoro wiemy, że coś jest, więc musimy to zaliczyć do prawdy». Ten schemat jednak powinien jedynie skłaniać do „rewizji naszej wiedzy”: «skoro coś nie jest prawdą, więc nie należy to do naszej wiedzy, chociaż tak sądziliśmy». Mówiąc obrazowo: «to nie nasza wiedza generuje prawdę», lecz «prawda weryfikuje naszą wiedzę».

Z ostatniego schematu otrzymamy dwa inne schematy niezawodne:

$$\frac{\mathbb{K}_a p}{\sim \mathbb{K}_a \sim p} \qquad \frac{\mathbb{K}_a \sim p}{\sim \mathbb{K}_a p}$$

Istotnie, przy założeniu, że  $\mathbb{K}_a p$  musimy otrzymać, iż  $\sim \mathbb{K}_a \sim p$ . Pokażemy to za pomocą dedukcji nie wprost:

- |                          |  |
|--------------------------|--|
| 1. $\mathbb{K}_a p$      | założenie  |
| 2. $\mathbb{K}_a \sim p$ | założenie nie wprost   |
| 3. $p$                   | wniosek z 1. za pomocą wnioskowania $\frac{\mathbb{K}_a p}{p}$           |
| 4. $\sim p$              | wniosek z 2. za pomocą wnioskowania $\frac{\mathbb{K}_a \sim p}{\sim p}$ |

Mamy więc sprzeczność. Analogiczna dedukcja nie wprost pokazuje niezawodność trzeciego z podanych schematów.

Dla pierwszego wiersza tabeli operatora ' $\mathbb{B}_a$ ' mamy podobną analizę, jak dla operatora ' $\mathbb{K}_a$ ': każdy „agent” ma jakieś prawdziwe przekonania, lecz nie wszystkie prawdy należą do jego przekonań. Odnośnie drugiego wiersza zauważmy, że przekonania „agenta” mogą składać się także ze zdań fałszywych. Na szczęście jednak, nie ze wszystkich. Zatem mamy także znak zapytania w drugim wierszu. Stąd dopuszczamy przypadek, w którym  $a$  sądzi, że  $p$ , lecz  $p$  okazuje się być zdaniem fałszywym.

Zatem odpowiednik, rozpatrywanego wyżej, pierwszego z trzech schematów dla wiedzy będzie schematem zawodnym. Niezawodne będą jednak odpowiedniki dwóch pozostałych schematów:

$$\frac{\mathbb{B}_a p}{\sim \mathbb{B}_a \sim p} \qquad \frac{\mathbb{B}_a \sim p}{\sim \mathbb{B}_a p}$$

Nie otrzymamy ich jednak na podstawie „okrojonej” tabelki operatora ' $\mathbb{B}_a$ '. Ich niezawodność wypływa z tzw. „psychologicznej zasady niesprzeczności” głoszącej, że nie można mieć sprzecznych przekonań. Wprowadził ją do filozofii wybitny polski filozof Jan Łukasiewicz, w dziele *O zasadzie sprzeczności u Arystotelesa*. Na podstawie tej zasady mamy ogólniejszy schemat niezawodny:

$$\frac{\mathbb{B}_a p}{\sim \mathbb{B}_a \text{nie-}p}$$

gdzie  $\text{nie-}p$  jest dowolnym zaprzeczeniem zdania  $p$ . Z tego ogólniejszego mamy dwa poprzednie. Po pierwsze, negacja zdania  $p$  jest także zaprzeczeniem zdania  $p$ . Po drugie, zamiast  $p$  bierzemy  $\sim p$ . Zaprzeczeniem tego drugiego jest  $p$ , tj.  $p = \text{nie-}(\sim p)$ . Zatem od  $\mathbb{B}_a \sim p$  przechodzimy do  $\sim \mathbb{B}_a p$ .

### 2.3. Spójniki prawdziwościowe

Także wśród spójników zdaniowych wyróżnimy *spójniki prawdziwościowe* (inaczej: *ekstensjonalne*). Mają one podobną definicję do operatorów prawdziwościowych.

**Definicja 2.** *Spójnik prawdziściowy* to spójnik zdaniowy mający następującą własność:

wartość logiczna dowolnego zdania zbudowanego za pomocą tego spójnika jest całkowicie wyznaczona przez wartości logiczne zdań składowych.

Dalej poznamy różne przykłady spójników prawdziwościowych oraz nieprawdziwościowych. O tych drugich mówimy, że są *intensjonalne*.

## 3. Spójnik 'i'

Spójnik 'i' jest używany zarówno jako spójnik zdaniowy, jak i jako łączący inne wyrażenia. Mogą to być części mowy (przymiotniki, np. 'piękny i mądry'; rzeczowniki, np. 'poeta i malarz') oraz części zdania (np. orzeczenia: 'jest bogaty i ma syna'; frazy podmiotowe: np. 'Jan i Paweł', 'każdy Polak i każdy Niemiec').

Najpierw zajmiemy się spójnikiem 'i', gdy pełni on funkcję spójnika zdaniowego (czyli łącząc zdania tworzy nowe zdanie złożone).

### 3.1. Spójnik 'i' jako spójnik zdaniowy

Spójnik 'i' jako spójnik zdaniowy ma różne znaczenia. Tylko jedno z nich jest prawdziwościowe. Jest spójnikiem prawdziściowym, gdy używamy go jako spójnika tzw. *koniunkcji zdań*.

### 3.1.1. Spójnik ‘i’ jako spójnik koniunkcji zdań

Słowo ‘koniunkcja’ znaczy mniej więcej tyle, co słowo ‘połączenie’. Jeśli jednak mówimy, że spójnik zdaniowy ‘i’ został użyty jako spójnik koniunkcji, to nie chodzi o samo połączenie zdań, gdyż każdy spójnik zdaniowy spaja zdania. W przypadku koniunkcji chodzi o łączenie informacji zawartych w zdaniach składowych. Koniunkcja to takie łączenie tych informacji, przy którym nie powstaje żadna nowa informacja, której *explicite* nie byłoby w zdaniach składowych.

Oczywiście, jak wszystkie zdania, koniunkcje przekazują informacje tylko wówczas, gdy są niesprzeczne. Podobnie też jak w przypadku innych zdań, koniunkcje mogą przekazywać fałszywe informacje. Przykłady koniunkcji:

- (a)  $2 + 2 = 4$  i  $7 < 11$ .
- (b)  $22 + 24 = 46$  i *Toruń jest stolicą Polski*.
- (c) *Warszawa leży nad Wisłą* i *Toruń leży nad Wisłą*.
- (d) *Kościuszko jest bohaterem narodowym* i *Piłsudski jest bohaterem narodowym*.
- (e) *Byłem w Tatrach* i *byłem nad Bałtykiem*.

Skoro koniunkcja ma przekazywać wyłącznie SUMĘ informacji zawartych w zdaniach składowych, więc musi być przemienna, tzn. nie jest istotna kolejność zdań składowych. Stąd płynie wniosek: *Jeśli w połączeniu zdań spójnikiem ‘i’ istotna jest kolejność składników, to nie jest to koniunkcja*. Przykłady:

- (f) *Anna ukończyła studia* i *wróciła do rodzinnego miasta*.
- (g) *Anna wróciła do rodzinnego miasta* i *ukończyła studia*.
- (h) *Zabili go* i *uciekł*.
- (i) *Jan potknął się* i *złamał nogę*.
- (j) *Wyłączono prąd* i *zgasło światło*.

W zdaniu (f) *implicite* zawarta jest informacja, że sytuacja opisana w pierwszym zdaniu składowym zaszła przed sytuacją opisaną w drugim. Ponadto, zawarta jest *implicite* jeszcze jedna informacja, że Anna odbyła studia poza rodzinnym miastem. Zupełnie sprzeczne dodatkowe informacje przekazuje zdanie po zmianie kolejności zdań składowych, czyli zdanie (g).

W zdaniu (h) spójnik ‘i’ użyty jest w sensie zwrotu ‘a potem’. Zatem — obok informacji zawartych *explicite* w zdaniach składowych — mamy również informację, że wcześniej go zabili niż uciekł. A skoro tylko żywi ludzie mogą uciekać, więc powyższe zdanie NIE MOŻE BYĆ prawdziwe. Dwie jawne informacje nie mogą być łącznie prawdziwe z trzecią, która *implicite* zawarta jest w tym zadaniu. Zatem «suma» tych trzech informacji nie przedstawia żadnej informacji. Te jawne informacje — zawarte bezpośrednio w zdaniach ‘Zabili go’ i ‘Uciekł’ — nie są sprzeczne. Przecież mogło być tak, że wcześniej uciekł, a potem go zabili. Wówczas oba zdania składowe będą prawdziwe. Z tego też względu po zmianie kolejności zdań składowych otrzymamy już wypowiedź niesprzeczną.

W zdaniu (i) dodatkowe informacje dotyczą kolejności zajścia opisanych faktów oraz tego, że pierwszy z nich był przyczyną, a drugi skutkiem.<sup>2</sup> W tym zdaniu spójnik ‘i’ użyty jest w sensie zwrotu ‘i wskutek tego’. Zmiana kolejności zdań składowych zmienia sens zdania. Podobna analiza dotyczy zdania (j).

W zapisie symbolicznym spójnik ‘i’ użyty jako spójnik koniunkcji zastąpimy symbolem ‘ $\wedge$ ’. (Używa się również symbolu ‘ $\&$ ’.) Warunki prawdziwości koniunkcji opisuje poniższa tabelka.

<sup>2</sup> Oczywiście, nie chodzi tu o to, że z pierwszego zdania wynika drugie. Można się przecież potknąć, lecz nie złamać nogi (i tak na ogół bywa).

$p$	$q$	koniunkcja $p \wedge q$
prawda	prawda	prawda
prawda	fałsz	fałsz
fałsz	prawda	fałsz
fałsz	fałsz	fałsz

W tabelce tej poszczególne wiersze opisują jaką wartość ma koniunkcja w zależności od wartości zdań składowych. W wierszu pierwszym rozpatrujemy przypadek, w którym oba zdania składowe są jednocześnie prawdziwe. Istotne jest jednak to, że koniunkcja nie przekazuje żadnej innej informacji poza informacjami zawartymi w zdaniach składowych. Skoro te informacje są prawdziwe, więc ich suma też jest prawdziwa, czyli koniunkcja jest prawdziwa. W pozostałych trzech przypadkach co najmniej jedna z sumowanych informacji jest fałszywa. Zatem ich suma również jest fałszywa, czyli koniunkcja jest fałszywa.

Widzimy więc, że ‘i’ jako spójnik koniunkcji jest spójnikiem prawdziwościowym.

Reasumując, koniunkcje spełniają poniższą zasadę:

- *Dana koniunkcja jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy oba składniki ma prawdziwe.*

Powyższe zdanie obustronnie warunkowe wyraża to samo, co łącznie poniższe dwa zdania warunkowe. Pierwsze z nich oddaje czytanie tabelki «z lewa do prawa», a drugie «z prawa do lewa»:

(†) *Jeśli koniunkcja ma oba składniki prawdziwe, to ona także jest prawdziwa.*

(‡) *Jeśli koniunkcja jest prawdziwa, to oba składniki ma prawdziwe.*

Dodajmy, że spójnik ‘i’ użyty w sensie koniunkcji jest synonimiczny ze spójnikiem ‘oraz’.

### 3.1.2. Inne użycia spójnika zdaniowego ‘i’

Gdy spójnik ‘i’ nie jest użyty jako spójnik koniunkcji, to z podanej dla koniunkcji zasady odpada fragment (†). Tzn. na podstawie samej prawdziwości obu składników nie można stwierdzić jaką wartość ma zdanie. Przykładowo, zdanie ‘Anna wróciła do rodzinnego miasta i ukończyła studia’ może być fałszywe przy dwóch prawdziwych składnikach: ‘Anna wróciła do rodzinnego miasta’ oraz ‘Anna ukończyła studia’, gdyż była inna kolejność opisanych faktów.

Z zasady podanej dla koniunkcji pozostaje jedynie fragment (‡). Innymi słowy, otrzymujemy jedynie «częściową» tabelkę:

$p$	$q$	nie jest koniunkcją $p \text{ i } q$
prawda	prawda	?
prawda	fałsz	fałsz
fałsz	prawda	fałsz
fałsz	fałsz	fałsz

?: zdanie jest prawdziwe bądź fałszywe w zależności od tego czy wszystkie niejawne informacje zawarte w zdaniu ‘ $p \text{ i } q$ ’ także są prawdziwe.

Przykłady (f)–(j) pokazują, że dla prawdziwości całości nie wystarcza prawdziwość zdań składowych. Jeśli zdanie postaci ‘ $p \text{ i } q$ ’ nie jest koniunkcją, to zawarta w nim informacja jest sumą więcej niż dwóch informacji: dwóch ze zdań składowych oraz dodatkowych informacji, otrzymanych *implicite*. Zatem na to aby zdanie postaci ‘ $p \text{ i } q$ ’ było prawdziwe konieczne jest, aby wszystkie informacje, jawne i niejawne, były prawdziwe. Pierwszy wiersz nic nam nie mówi o wartości dodatkowych informacji. Zatem nic nie wiemy o wartości zdania ‘ $p \text{ i } q$ ’. W pozostałych trzech przypadkach co najmniej jedna z sumowanych jawnych informacji jest fałszywa. Zatem suma wszystkich informacji również jest fałszywa.

Zauważmy, że podana tabela spełnia «częściową» zasadę:

- *Jeśli zdanie postaci ' $p \text{ i } q$ ' jest prawdziwe, to oba składniki ma prawdziwe.*

Istotnie, znak zapytania '?' stoi tylko w wierszu, gdzie oba składniki są prawdziwe. Ponadto, mówi on, że zdanie ' $p \text{ i } q$ ' ma wartość zależną od tego czy także prawdziwe są pozostałe informacje przekazywane przez całe zdanie. Reasumując: jeśli całe zdanie jest prawdziwe, to wszystkie informacje muszą być prawdziwe, czyli również te zawarte w zdaniach składowych.

Ostatnią tabelkę można uszczegółowić w przypadku, gdy spójnik 'i' jest użyty w sensie zwrotów: 'i następnie', 'i potem', 'a potem' itp. (por. przykłady (f), (g) i (h)). Pierwszy wiersz, w którym mamy '?', rozbija się na dwa podprzypadki:

$p$	$q$	przypadek	jako 'a potem' $p \text{ i } q$
prawda	prawda	fakt opisany w $p$ zaszedł przed faktem opisanym w $q$	prawda
prawda	prawda	fakt opisany w $p$ nie zaszedł przed faktem opisanym w $q$	fałsz
prawda	fałsz		fałsz
fałsz	prawda		fałsz
fałsz	fałsz		fałsz

W pierwszym przypadku prawdziwa jest dodatkowa informacja, że fakt opisany w pierwszym zdaniu zaszedł przed faktem opisanym w drugim zdaniu. Zatem mamy sumę trzech prawdziwych informacji. W drugim przypadku ta dodatkowa informacja jest fałszywa. Zatem też jest fałszywa suma informacji. W pozostałych trzech przypadkach co najmniej jedna z sumowanych jawnych informacji jest fałszywa. Zatem nie ma potrzeby rozpatrywania kolejności zajścia faktów (gdyż nie ma faktów). Suma wszystkich zawartych w zdaniu informacji jest fałszywa.

Analogiczną tabelkę otrzymamy dla zdań, w których spójnik 'i' jest synonimem zwrotów 'i wskutek tego', 'i w wyniku tego' itp. (por. przykłady (i) oraz (j)).

$p$	$q$	przypadek	jako 'i wskutek tego' $p \text{ i } q$
prawda	prawda	fakt opisany w $q$ zaszedł na skutek faktu opisanego w $p$	prawda
prawda	prawda	było inaczej	fałsz
prawda	fałsz		fałsz
fałsz	prawda		fałsz
fałsz	fałsz		fałsz

W pierwszym przypadku prawdziwa jest dodatkowa informacja, że fakt opisany w drugim zdaniu zaszedł na skutek faktu opisanego w pierwszym zdaniu. Zatem mamy sumę trzech prawdziwych informacji. W drugim przypadku ta dodatkowa informacja jest fałszywa. Zatem też jest fałszywa suma informacji. W pozostałych trzech przypadkach co najmniej jedna z sumowanych jawnych informacji jest fałszywa. Zatem nie ma potrzeby rozpatrywania kolejności zajścia faktów (gdyż nie ma faktów). Suma wszystkich zawartych w zdaniu informacji jest fałszywa.

*Uwaga.* Nasuwa się pytanie: dlaczego w logice matematycznej zajmujemy się spójnikiem zdaniowym 'i' tylko jako spójnikiem koniunkcji, a pomijamy inne jego znaczenia? W teoriach matematycznych badamy obiekty abstrakcyjne. Zatem nie ma potrzeby analizowania spójnika 'i' jako skrótu dla 'i następnie', gdyż obiekty matematyczne są bezczasowe. Nie ma również potrzeby



analizowania ‘i’ jako skrótu dla ‘i wskutek tego’, gdyż obiekty matematyczne nie są fizyczne, a tylko pomiędzy zjawiskami fizycznymi zachodzą relacje przyczynowo-skutkowe.

### 3.2. Spójnik ‘i’ jako spójnik niezdaniowy

Powiedzmy coś teraz o niezdaniowym użyciu spójnika ‘i’, gdy łączy on różne części mowy bądź różne części zdań. Zatem gdy łączy on: czasowniki, przymiotniki, różnego rodzaju nazwy, jak również orzeczenia.

Niektórzy uważają, że każde użycie spójnika ‘i’ można zamienić koniunkcją. Bardzo często tak jest, lecz **nie zawsze**. Przykładowo, zdanie:

*Jan jest poetą i malarzem*

mówi to samo (jest równoważne), co poniższa koniunkcja:

*Jan jest poetą i Jan jest malarzem*

(Nie jest istotne jaką wartość mają powyższe zdania, tzn. czy są prawdziwe, czy fałszywe. Z pierwszego wynika drugie oraz z drugiego wynika pierwsze.) Zatem w prostym przypadku, gdy spójnik ‘i’ raz łączy dwa pojęcia ogólne, a drugi raz dwa zdania:

$a$  jest  $S$ -em i  $M$ -em  
 $a$  jest  $S$ -em i  $a$  jest  $M$ -em

gdzie  $a$  jest nazwą indywidualną, dwa zdania mówią to samo.

Lecz takie przejście nie jest ogólną zasadą. Świadczy o tym podany niżej przykład. Rozpa-  
 trzmy dwa poniższe schematy zdaniowe:

Jakiś  $P$  jest  $S$ -em i  $M$ -em  
 Jakiś  $P$  jest  $S$ -em i jakiś  $P$  jest  $M$ -em

Czy takie zdania mają to samo głosić? Wystarczy postawić:

za  $P$  – liczba  
 za  $S$  – ujemna  
 za  $M$  – dodatnia

Z pierwszego schematu otrzymamy zdanie fałszywe (zero nie jest ani ujemne ani dodatnie!), a z drugiego prawdziwe. To drugie będzie przecież koniunkcją dwóch zdań prawdziwych.

$\underbrace{\text{Jakaś liczba jest dodatnia i ujemna}}_{\text{fałsz}}$   
 $\underbrace{\text{Jakaś liczba jest dodatnia}}_{\text{prawda}} \text{ i } \underbrace{\text{jakaś liczba jest ujemna}}_{\text{prawda}}$   
 $\underbrace{\hspace{10em}}_{\text{prawda}}$

Nie ma takiej liczby, która jednocześnie byłaby dodatnia i ujemna. W drugim zdaniu mamy koniunkcję dwóch zdań prawdziwych. Są przecież liczby dodatnie i są liczby ujemne (wyraz ‘jakaś’ w obu zdaniach składowych odnosi się do innej liczby). Zatem, skoro badane zdania złożone mają różne wartości, więc także wyrażają coś innego.

Aby w tym przykładzie niezdaniowe użycie ‘i’ przetransformować w zdaniowe, należy zmie-  
 nić schemat

Jakiś  $P$  jest  $S$ -em i  $M$ -em

na następujący schemat formalny:

$$\exists x(x \text{ jest } P\text{-em} \wedge (x \text{ jest } S\text{-em} \wedge x \text{ jest } M\text{-em}))$$

w którym ‘i’ jest już spójnikiem zdaniowym (spójnikiem koniunkcji). Całość nie jest jednak koniunkcją.

Zauważmy, że drugi schemat:

$$\text{Jakiś } P \text{ jest } S\text{-em i jakiś } P \text{ jest } M\text{-em}$$

ma następujący — różny od poprzedniego — formalny zapis:

$$\exists x(x \text{ jest } P\text{-em} \wedge x \text{ jest } S\text{-em}) \wedge \exists x(x \text{ jest } P\text{-em} \wedge x \text{ jest } M\text{-em})$$

Całość jest więc koniunkcją.

Zauważmy jednak dwa poniższe schematy zdaniowe:

$$\begin{aligned} &\text{Każdy } P \text{ jest } S\text{-em i } M\text{-em} \\ &\text{Każdy } P \text{ jest } S\text{-em i każdy } P \text{ jest } M\text{-em} \end{aligned}$$

głoszą to samo. Później udowodnimy, że są one logicznie równoważne.

Aby w podanym przykładzie niezdaniowe użycie ‘i’ przetransformować w zdaniowe, należy zmienić schemat

$$\text{Każdy } P \text{ jest } S\text{-em i } M\text{-em}$$

na następujący schemat formalny:

$$\forall x(x \text{ jest } P\text{-em} \rightarrow (x \text{ jest } S\text{-em} \wedge x \text{ jest } M\text{-em}))$$

w którym ‘i’ jest już spójnikiem zdaniowym (spójnikiem koniunkcji). Całość nie jest jednak koniunkcją.

Zauważmy, że drugi schemat:

$$\text{Każdy } P \text{ jest } S\text{-em i każdy } P \text{ jest } M\text{-em}$$

ma następujący, różny od poprzedniego, formalny zapis:

$$\forall x(x \text{ jest } P\text{-em} \rightarrow x \text{ jest } S\text{-em}) \wedge \forall x(x \text{ jest } P\text{-em} \rightarrow x \text{ jest } M\text{-em})$$

Całość jest więc koniunkcją.

W podanych schematach zdaniowych użycie orzeczeń imiennych (‘jest S-em itp.’) nie jest istotne. Zamiast nich możemy rozważać dwa poniższe ogólne schematy:

$$\begin{aligned} &\forall x(Fx \rightarrow (Gx \wedge Hx)) \\ &\forall x(Fx \rightarrow Gx) \wedge \forall x(Fx \rightarrow Hx) \end{aligned}$$

Inne problemy wiążą się z ‘i’ występującym w podmiocie zdania. Wówczas tworzymy orzeczenie w liczbie mnogiej.

Przykładowo, mówimy ‘Jan i Piotr są przyjaciółmi’ zamiast ‘Jan jest przyjacielem Piotra’, gdyż z tego drugiego zdania wynika zdanie ‘Piotr jest przyjacielem Jana’, skoro relacyjne pojęcie

*bycia przyjacielem* jest symetryczne.<sup>3</sup> Podobnie mówimy ‘Jan, Piotr i Paweł są przyjaciółmi’ zamiast ‘Jan jest przyjacielem Piotra, Jan jest przyjacielem Pawła i Piotr jest przyjacielem Pawła’. Można opuścić ‘Piotr jest przyjacielem Jana, Paweł jest przyjacielem Jana i Paweł jest przyjacielem Piotra’. Zauważmy, że nie wystarczy powiedzieć ‘Jan i Piotr są przyjaciółmi Pawła’, gdyż pojęcie *bycia przyjacielem* nie jest przechodnie. Zdania ‘Jan i Piotr są przyjaciółmi Pawła’ oraz ‘Jan, Piotr i Paweł są przyjaciółmi’ nie mówią tego samego.

Inna sytuacja będzie występować w przypadku pojęć przechodnich. Np. gdy pojęcie *bycia przyjacielem* zastąpimy relacyjnym pojęciem *bycia rówieśnikiem*.

## 4. Różne użycia spójników ‘lub’, ‘albo’ i ‘bądź’

### 4.1. Wykluczające użycie spójników ‘lub’, ‘albo’ i ‘bądź’

Niektórzy sądzą, że tytułowe spójniki ‘lub’, ‘albo’ i ‘bądź’ mają odmienne użycia w języku naturalnym. Postaram się pokazać, że mają one te same użycia, tylko tych użyć jest kilka.

Rozpatrzmy polecenie wydane nam przez lekarza:

*Zażyj lekarstwo rano lub wieczorem!*

Nie będziemy się przecież dopytywać lekarza: Jak mamy rozumieć tutaj użyty spójnik ‘lub’? Czy, jego polecenie miałooby znaczyć co innego, gdyby w miejsce ‘lub’ użył spójnika ‘albo’ lub ‘bądź’? Przecież oczywiste jest, że po takiej zamianie otrzymalibyśmy polecenie to samo mówiące: iż mamy zażyć lekarstwo tylko raz dziennie, w odpowiedniej dla nas porze.

Mamy zatem do czynienia z tzw. *wykluczającym* użyciem spójnika ‘lub’. Dlatego wykluczającym, iż wyklucza zajęcie dwóch alternatywnych działań.

Podobnie wykluczające byłoby użycie spójników ‘albo’ i ‘bądź’ w poleceniach lekarza:

*Zażyj lekarstwo rano albo wieczorem!*

*Zażyj lekarstwo rano bądź wieczorem!*

Będą one to samo znaczyć, co to ze spójnikiem ‘lub’.

W tych przykładach o wykluczającym użyciu tych spójników wiemy z kontekstu ich użycia. Specjalnie użyliśmy zdania rozkazującego, gdyż w takim typie zdań najlepiej jest widoczne użycie wykluczające.

### 4.2. Niewykluczające użycie spójników ‘lub’, ‘albo’ i ‘bądź’

Przejdźmy teraz do drugiego użycia spójników ‘lub’, ‘albo’ i ‘bądź’. Rozpatrzmy zeznanie świadka zdarzenia drogowego:

*Kierowca był pijany lub kierownica była poluzowana.*

Założmy, iż potem okazało się, iż zaszło jedno i drugie, czyli: kierowca był pijany i kierownica była poluzowana. Czy świadek będzie ukarany za składanie fałszywych zeznań? Pewnie nie, przecież jego wypowiedź tego NIE WYKLUCZAŁA. Świadek w swojej wypowiedzi DOPUSZCZAŁ to, iż zaszły łącznie obie sytuacje.

<sup>3</sup> Oczywiście, gdybyśmy mieli Jana i Annę, to w języku polskim należałoby zmienić rodzaj męski na rodzaj żeński, a w liczbie mnogiej pisać ‘przyjaciółmi’.

Podobnie jest w przypadku relacyjnego pojęć *bycia bratem*, które jest symetryczne w zakresie mężczyzn.

Czy, zeznanie świątko miałoby znaczyć co innego, gdyby w miejsce ‘lub’ użył spójnika ‘albo’ lub ‘bądź’? Oczywiście jest, że po takiej zamianie otrzymalibyśmy zeznanie o tej samej treści.

Mamy zatem do czynienia z tzw. *niewykluczającym* użyciem spójnika ‘lub’. Dlatego niewykluczającym, iż nie wyklucza zajścia dwóch alternatywnych sytuacji.

Podobnie niewykluczające byłoby użycie spójników ‘albo’ i ‘bądź’ w zeznaniu świątko:

*Kierowca był pijany albo kierownica była poluzowana.*

*Kierowca był pijany bądź kierownica była poluzowana.*

Będą one to samo znaczyć, co to ze spójnikiem ‘lub’.

W tych przykładach o niewykluczającym użyciu tych spójników wiemy z kontekstu ich użycia. Przecież świadek nie mógł wykluczyć łącznego zajścia obu sytuacji.

### 4.3. Podziały znaczeń spójników ‘lub’, ‘albo’ i ‘bądź’

Do tej pory podzieliliśmy znaczenia spójników zdaniowych ‘lub’, ‘albo’ i ‘bądź’ na wykluczające i niewykluczające. Można te znaczenia podzielić także na prawdziwościowe i intensjonalne. Na koniec można połączyć te podziały. Intensjonalnymi alternatywami zajmujemy się później, gdy poznamy zdania warunkowe.

### 4.4. Prawdziwościowe alternatywy

Alternatywa ma też znaczenie prawdziwościowe.

Jeśli spójnik ‘lub’ jest interpretowany prawdziwościowo i niewykluczająco, to zamieniamy go na symbol:  $\vee$  (od łacińskiego ‘vel’).

Jeśli spójnik ten interpretowany będzie prawdziwościowo i wykluczająco, to zastępujemy go symbolem:  $\vee$ .

Przy znaczeniach prawdziwościowych mamy następujące tabelki:

$p$	$q$	$p \vee q$	$p \vee q$
1	1	1	0
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

Widzimy więc, że w każdej interpretacji alternatywa dwóch zdań fałszywych jest także fałszywa.

### 4.5. Trzecie znaczenie – dysjunkcja Sheffera

Można dopatrywać się także trzeciego znaczenia spójnika zdaniowego ‘lub’. Widzimy je w następującej zapowiedzi rodzica skierowanej do jego dziecka:

*Będziesz grzeczne lub dostaniesz lanie.*

W przyszłości może okazać się, iż dziecko nie było grzeczne oraz nie dostało lania. Przeważnie w takiej sytuacji rodzic nie będzie miał wyrzutów sumienia, iż wprowadził swoje dziecko w błąd. Tym bardziej dziecko nie będzie miało pretensji do swego rodzica o to, iż nie dotrzymało obietnicy.

Zatem oboje rozumieli omawianą zapowiedź następująco:

*Nie będzie tak, iż (zarówno) będziesz grzeczne i dostaniesz lanie.*

Na marginesie, nie można się dziwić, że tak rozumiana zapowiedź rodzica nie zrobiła na dziecku żadnego wrażenia.

Podobnego znaczenia spójnika ‘lub’ można doszukać się także w następującej wypowiedzi gracza w Toto Lotka:

*Wygram dużo lub przegram mało.*

Przecież gracz wie o tym, iż może „trafić trójkę”, a wówczas nie zajdzie ani jedno, ani drugie. Wypowiedź gracza należy rozumieć następująco:

*Nie będzie tak, iż (zarówno) wygram dużo i przegram mało.*

Wydaje się, iż podobnie będziemy interpretować ostatnie dwa przykłady, gdy zamiast spójnika ‘lub’ użyjemy spójnika ‘albo’ lub ‘bądź’. Też przybiorą one te trzecie znaczenie.

Zadanie zbudowane ze spójnikiem ‘lub’ przy tym trzecim znaczeniu nazywa się *dysjunkcją Sheffera*.

Niektórzy nazywają go po prostu *dysjunkcją*. Nie powinno się tak jednak robić, gdyż w angielskojęzycznej literaturze słowo ‘disjunction’ jest odpowiednikiem polskiego słowa ‘alternatywa’.

Widzimy, że dysjunkcja Sheffera jest po prostu negacją koniunkcji, tj. mówi to samo, co zdanie postaci

$$\sim(p \wedge q)$$

co możemy odczytać jako:

Nie jest tak, iż zarazem  $p$  i  $q$ .

Z tego względu, spójnik zdaniowy ‘lub’ w sensie dysjunkcji Sheffera jest zastępowany m.in. przez symbol:  $\uparrow$ . Zapewne ma to symbolizować przekreślony symbolu koniunkcji:  $\wedge$ . Zatem

$$p \uparrow q \text{ ma znaczyć to samo, co } \sim(p \wedge q)$$

Używa się też innych symboli. Najczęściej jest to:  $|$ .

Zatem, zgodne z podanymi do tej pory tabelkami, mamy:

$p$	$q$	$p \wedge q$	$\sim(p \wedge q)$	$p \uparrow q$
1	1	1	0	0
1	0	0	1	1
0	1	0	1	1
0	0	0	1	1

#### 4.6. Niezdaniowe a zdaniowe użycie spójników: ‘lub’, ‘albo’, ‘bądź’

Użycie spójnika ‘lub’ (‘albo’, ‘bądź’) w sensie dysjunkcji Sheffera jest jedynie tzw. *użyciem zdaniowym*, tzn. spójnik ten łączy zdania tworząc nowe zdanie.

Zauważmy jednak, iż spójniki ‘lub’, ‘albo’ i ‘bądź’ w interpretacji wykluczającej i niewykluczającej mogą łączyć także różne części mowy bądź różne części zdań. Zatem mogą one łączyć: czasowniki, przymiotniki, różnego rodzaju nazwy, jak również orzeczenia.

Może się wydawać, że mamy „automatyczne” przetłumaczenie niezdanowych użyc tych spójników na ich użycie zdaniowe.

Jest tak w najprostszych przypadkach, w których spójnik ‘lub’ raz łączy dwa pojęcia ogólne, a drugi raz dwa zdania:

$a$  jest  $S$ -em lub  $M$ -em  
 $a$  jest  $S$ -em lub  $a$  jest  $M$ -em

gdzie  $a$  jest nazwą indywidualną. Te dwa zdania mówią to samo w obu interpretacjach spójnika ‘lub’.

Niestety, nie jest to ogólna zasada. Świadczą o tym podane niżej przykłady. Analogiczne przykłady można podać dla ‘lub’ łączącego inne części mowy, czy też orzeczenia.

Rozpatrzmy dwa poniższe schematy zdaniowe:

Każdy  $P$  jest  $S$ -em lub  $M$ -em  
 Każdy  $P$  jest  $S$ -em lub każdy  $P$  jest  $M$ -em

Czy takie zdania mają to samo głosić? Wystarczy postawić:

za  $P$  – liczba całkowita  
 za  $S$  – ujemna  
 za  $M$  – nieujemna

Beż względu na przyjętą interpretację z pierwszego schematu otrzymamy zdanie prawdziwe (zero jest nieujemne!), a z drugiego fałszywe. To drugie będzie przecież alternatywą dwóch zdań fałszywych. Jest ona więc fałszywa zarówno jako wykluczająca, jak i niewykluczająca.

Jednakże we współczesnej logice formalnej analizujemy zazwyczaj spójnik ‘lub’ jedynie jako spójnik zdaniowy. Aby niezdanowe użycie ‘lub’ przetransformować w zdaniowe, należy zmienić schemat

Każdy  $P$  jest  $S$ -em lub  $M$ -em

na następujący schemat formalny:

$\forall x(x \text{ jest } P\text{-em} \rightarrow (x \text{ jest } S\text{-em} \text{ lub } x \text{ jest } M\text{-em}))$

w którym ‘lub’ jest już spójnikiem zdaniowym. Całość nie jest jednak alternatywą.

Zauważmy, że drugi schemat:

Każdy  $P$  jest  $S$ -em lub każdy  $P$  jest  $M$ -em

ma następujący, różny od poprzedniego, formalny zapis:

$\forall x(x \text{ jest } P\text{-em} \rightarrow x \text{ jest } S\text{-em}) \text{ lub } \forall x(x \text{ jest } P\text{-em} \rightarrow x \text{ jest } M\text{-em})$

Całość jest więc alternatywą.

Rozpatrzmy ciekawszy przykład, związany dwoma poniższymi schematami zdaniowymi:

Jakiś  $P$  jest  $S$ -em lub  $M$ -em  
 Jakiś  $P$  jest  $S$ -em lub jakiś  $P$  jest  $M$ -em

To czy te zdania mówią to samo zależy od sensu spójnika ‘lub’.

Można zauważyć, że przy niewykluczającym użyciu ‘lub’ te zdania to samo znaczą. Później na wykładzie udowodnimy, że są dedukcyjnie równoważne, czyli są też logicznie równoważne.

Przy wykluczającym użyciu ‘lub’ będzie jednak inaczej. Wystarczy postawić:

za  $P$  – człowiek

za  $S$  – kobieta

za  $M$  – mężczyzna

Otrzymamy pierwsze zdanie prawdziwe, a drugie fałszywe. To drugie będzie przecież alternatywą wykluczającą dwóch zdań prawdziwych.

Aby niezdaniove użycie ‘lub’ przetransformować w zdaniowe, należy zmienić schemat

Jakiś  $P$  jest  $S$ -em lub  $M$ -em

na następujący schemat formalny:

$$\exists x(x \text{ jest } P\text{-em} \wedge (x \text{ jest } S\text{-em} \text{ lub } x \text{ jest } M\text{-em}))$$

w którym ‘lub’ jest już spójnikiem zdaniowym. Całość nie jest jednak alternatywą.

Zauważmy, że drugi schemat:

Jakiś  $P$  jest  $S$ -em lub jakiś  $P$  jest  $M$ -em

ma następujący, różny od poprzedniego, formalny zapis:

$$\exists x(x \text{ jest } P\text{-em} \wedge x \text{ jest } S\text{-em}) \text{ lub } \exists x(x \text{ jest } P\text{-em} \wedge x \text{ jest } M\text{-em})$$

Całość jest więc alternatywą.

## 5. Przemienność i łączność spójników

### 5.1. Przemienność

Mówimy, że dany dwuargumentowy (dwuczłonowy) spójnik  $S$  jest *przemienny*, gdy zachodzi dla niego następująca równoważność logiczna:

$$p S q \models q S p$$

Patrząc na tabelki spójników koniunkcji, obu alternatyw i równoważności materialnej łatwo zauważyć, że są one przemienne. Łatwo też zauważyć, że spójnik implikacji materialnej nie jest przemienny.

### 5.2. Łączność spójników. Określenie, przykłady

Mówimy, że dany dwuargumentowy (dwuczłonowy) spójnik  $S$  jest *łączny*, gdy zachodzi dla niego następująca równoważność logiczna:

$$p S (q S r) \models (p S q) S r$$

Patrząc na tabelki spójników koniunkcji, obu alternatyw i równoważności materialnej zauważamy, że są one łączne. Wystarczy spojrzeć na podane dalej tabele. Istotnie, dla każdego z tych spójników, w każdym z ośmiu przypadków badane zdania mają tę samą wartość.

$p$	$q$	$r$	$q \wedge r$	$p \wedge (q \wedge r)$	$p \wedge q$	$(p \wedge q) \wedge r$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0	0
1	0	0	0	0	0	0
0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0	0
0	0	0	0	0	0	0

  

$p$	$q$	$r$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$
1	1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1	1
1	0	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0

  

$p$	$q$	$r$	$q \underline{\vee} r$	$p \underline{\vee} (q \underline{\vee} r)$	$p \underline{\vee} q$	$(p \underline{\vee} q) \underline{\vee} r$
1	1	1	0	1	0	1
1	1	0	1	0	0	0
1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	0	1	1	1
0	1	1	0	0	1	0
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	1	1	0	1
0	0	0	0	0	0	0

### 5.3. Wnioski wypływające z własności łączności

Własność łączności spójnika  $S$  jest bardzo ważna. Dzięki niej okazuje się, że dla dowolnej liczby wystąpień tego spójnika nie jest istotny układ nawiasów (oczywiście musi on być prawidłowy). Przy każdym z tych układów otrzymujemy formuły logicznie równoważne.

Przykładowo pokażemy to w przypadku występowania trzech egzemplarzy spójnika  $S$ , który jest łączny. Mamy pięć możliwych prawidłowych układów nawiasów:

$$\begin{aligned}
 & p S (q S (r S s)) \\
 & p S ((q S r) S s) \\
 & ((p S (q S r)) S s) \\
 & ((p S q) S r) S s \\
 & (p S q) S (r S s)
 \end{aligned}$$

Dla łącznego spójnika  $S$ , wszystkie te zapisy są logicznie równoważne. Istotnie, stosując łączność otrzymamy:

$$\begin{aligned}
 p S (q S (r S s)) & \models (p S q) S (r S s) \\
 & \models ((p S q) S r) S s
 \end{aligned}$$



Następnie, wewnątrz nawiasu, jeszcze raz wykorzystujemy łączność spójnika  $S$ .

Analogiczne rozważania można powtórzyć dla dowolnej liczby wystąpień łącznego spójnika  $S$  i dowolnego prawidłowego układu nawiasów. Nie będziemy tego robić z uwagi na to, że byłoby to żmudne.

## 6. Wieloczłonowe koniunkcje i alternatywy

Zachodzi następujące pytanie: *Czy wieloczłonowe koniunkcje i alternatywy dają się wyrazić odpowiednio za pomocą dwuargumentowych spójników koniunkcji i alternatywy?* Okazuje się, że jest tak w przypadkach koniunkcji i alternatywy niewykluczających. W przypadku zaś alternatywy wykluczającej odpowiedź jest negatywna.

### 6.1. Wieloczłonowa koniunkcja

Ogólnie, *koniunkcję* nazwiemy zdanie złożone, które głosi, iż wszystkie jego zdania składowe (człony) są prawdziwe.

Przypomnijmy, że dane zdanie jest prawdziwe wtedy i tylko wtedy, gdy jest tak jak ono głosi. Zatem dana koniunkcja jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy ma prawdziwe wszystkie zdania składowe.

Do tej pory zajmowaliśmy się wyłącznie dwuczłonowymi koniunkcjami zbudowanymi za pomocą dwuargumentowego spójnika zdaniowego ' $\wedge$ '. Teraz zajmiemy się przypadkiem wieloczłonowych koniunkcji.

Zachodzi pytanie: *Czy do ich wyrażenia musimy użyć jakiegoś wieloargumentowego spójnika, czy wystarczy nam wielokrotne użycie dwuargumentowego spójnika koniunkcji?*

Zacznijmy od przypadku trójczłonowej koniunkcji postaci:

$$p, q \text{ i } r$$

Ma ona głosić, że wszystkie trzy zdania składowe są prawdziwe. Na podstawie pierwszej tabeli widzimy, że wyrażają to także poniższe dwie równoważne formuły:

$$\begin{aligned} p \wedge (q \wedge r) \\ (p \wedge q) \wedge r \end{aligned}$$

Są one zbudowane za pomocą dwuargumentowego spójnika ' $\wedge$ ', czyli są to dwuczłonowe koniunkcje, które jako jeden z członów mają dwuczłonową koniunkcję.

Widzimy więc, że aby w naszym systemie formalnym wyrazić trójczłonową koniunkcję nie musimy wprowadzać dodatkowego trójargumentowego spójnika zdaniowego. Wprowadzamy następującą umowę: zapis

$$p \wedge q \wedge r$$

który nie jest «oficjalną» formułą w naszym systemie, będzie wyrażał trójczłonową koniunkcję, czyli zdanie głoszące, iż wszystkie jego składniki są prawdziwe. Oficjalnie możemy go traktować jako jedną z dwóch poprzednio podanych równoważnych formuł, w których opuściliśmy nawiasy, gdyż ich układ nie jest istotny dla obliczania wartości całości (przy obu układach nawiasów otrzymamy tę samą wartość w każdym z ośmiu przypadków).

Podobnie, zapis

$$p \wedge q \wedge r \wedge s$$

który nie jest «oficjalną» formułą w naszym systemie, będzie wyrażał czwórczłonową koniunkcję. Oficjalnie możemy go traktować jako jedną z pięciu poniższych równoważnych formuł:

$$p \wedge (q \wedge (r \wedge s))$$

$$p \wedge ((q \wedge r) \wedge s)$$

$$(p \wedge q) \wedge (r \wedge s)$$

$$((p \wedge q) \wedge r) \wedge s$$

$$((p \wedge (q \wedge r)) \wedge s$$

w których opuściliśmy nawiasy, gdyż ich układ nie jest istotny dla obliczania wartości całości (przy wszystkich tych układach nawiasów otrzymamy tę samą wartość w każdym z szesnastu przypadków).

Ogólnie zapis postaci:

$$\alpha_1 \wedge \alpha_2 \wedge \dots \wedge \alpha_n$$

będzie wyrażał  $n$ -członową koniunkcję ( $n > 1$ ), czyli zdanie głoszące, iż zdania  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  są prawdziwe. Oficjalnie możemy go traktować jako jedną z wielu równoważnych formuł utworzonych za pomocą dwuargumentowego spójnika ‘ $\wedge$ ’ oraz nawiasów. Te formuły są logicznie równoważne, na mocy łączności tego spójnika.

## 6.2. Wieloczłonowe alternatywa niewykluczająca

Ogólnie, *alternatywą niewykluczającą* nazwiemy zdanie złożone, które głosi, iż co najmniej jedno z jego zdań składowych (członów) jest prawdziwe.

Zatem dana alternatywa niewykluczająca jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy ma prawdziwe co najmniej jedno zdania składowe.

Do tej pory zajmowaliśmy się wyłącznie dwuczłonowymi alternatywami niewykluczającymi zbudowanymi za pomocą dwuargumentowego spójnika zdaniowego ‘ $\vee$ ’.

Teraz zajmiemy się przypadkiem wieloczłonowych alternatyw niewykluczających. Zachodzi pytanie: *Czy do ich wyrażenia musimy użyć jakiegoś wieloargumentowego spójnika, czy wystarczy nam wielokrotne użycie dwuargumentowego spójnika alternatywy niewykluczającej?*

Zacznijmy od przypadku trójcłonowej alternatywy wykluczającej postaci:

$$p, (\text{lub}) q \text{ lub } r$$

Ma ona głosić, że co najmniej jedno ze zdań składowych jest prawdziwe. Na podstawie drugiej z pokazanych tabel widzimy, że wyrażają to także poniższe dwie równoważne formuły:

$$p \vee (q \vee r)$$

$$(p \vee q) \vee r$$

Są one zbudowane za pomocą dwuargumentowego spójnika ‘ $\vee$ ’, czyli są to dwuczłonowe alternatywy niewykluczające, które jako jeden z członów mają dwuczłonową alternatywę niewykluczającą.

Widzimy więc, że aby w naszym systemie formalnym wyrazić trójczłonową alternatywę niewykluczającą nie musimy wprowadzać dodatkowego trójargumentowego spójnika zdaniowego. Wprowadzamy następującą umowę: zapis

$$p \vee q \vee r$$

który nie jest «oficjalną» formułą w naszym systemie, będzie wyrażał trójczłonową alternatywę niewykluczającą, czyli zdanie głoszące, iż co najmniej jeden jego składnik jest prawdziwy. Oficjalnie możemy go traktować jako jedną z dwóch poprzednio podanych równoważnych formuł, w których opuściliśmy nawiasy, gdyż ich układ nie jest istotny dla obliczania wartości całości (przy obu układach nawiasów otrzymamy tę samą wartość w każdym z ośmiu przypadków).

Podobnie, zapis

$$p \vee q \vee r \vee s$$

który nie jest «oficjalną» formułą w naszym systemie, będzie wyrażał czwórczłonową alternatywę niewykluczającą. Oficjalnie możemy go traktować jako jedną z pięciu poniższych równoważnych formuł:

$$\begin{aligned} p \vee (q \vee (r \vee s)) \\ p \vee ((q \vee r) \vee s) \\ (p \vee q) \vee (r \vee s) \\ ((p \vee q) \vee r) \vee s \\ ((p \vee (q \vee r)) \vee s \end{aligned}$$

w których opuściliśmy nawiasy, gdyż ich układ nie jest istotny dla obliczania wartości całości (przy wszystkich tych układach nawiasów otrzymamy tę samą wartość w każdym z szesnastu przypadków).

Ogólnie zapis postaci:

$$\alpha_1 \vee \alpha_2 \vee \dots \vee \alpha_n$$

będzie wyrażał  $n$ -członową alternatywę niewykluczającą ( $n > 1$ ), czyli zdanie głoszące, iż co najmniej jedno ze zdań  $\alpha_1, \alpha_2, \dots, \alpha_n$  jest prawdziwe.

Oficjalnie możemy go traktować jako jedną z wielu równoważnych formuł utworzonych za pomocą dwuargumentowego spójnika ‘ $\vee$ ’ oraz nawiasów. Te formuły są logicznie równoważne, na mocy łączności tego spójnika.

### 6.3. Wieloczłonowe alternatywa wykluczająca

Ogólnie, *alternatywą wykluczającą* nazwiemy zdanie złożone, które głosi, iż dokładnie jedno z jego zdań składowych (członów) jest prawdziwe.

Zatem dana alternatywa wykluczająca jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy ma prawdziwe dokładnie jedno zdania składowe.

Do tej pory zajmowaliśmy się wyłącznie dwuczłonowymi alternatywami wykluczającymi zbudowanymi za pomocą dwuargumentowego spójnika zdaniowego ‘ $\vee$ ’. Teraz zajmiemy się przypadkiem wieloczłonowych alternatyw wykluczających. Zachodzi pytanie: *Czy do ich wyrażenia musimy użyć jakiegoś wieloargumentowego spójnika, czy wystarczy nam wielokrotne użycie dwuargumentowego spójnika alternatywy wykluczającej?*

W przypadku alternatywy wykluczającej odpowiedź na to pytanie będzie inna niż w przypadku koniunkcji i alternatywy niewykluczającej.

Zacznijmy od przypadku trójcłonowej alternatywy wykluczającej postaci:

$$p, (\text{lub}) q \text{ lub } r$$

W nawiązaniu do symbolu ' $\vee$ ' będziemy pisać 'lub', aby podkreślić to, iż 'lub' interpretujemy w sposób wykluczający. Ma ona głosić, że dokładnie jedno ze zdań składowych jest prawdziwe. Na podstawie trzeciej z pokazanych tabel widzimy, że **nie** wyrażają tego poniższe dwie równoważne formuły:

$$p \vee (q \vee r)$$

$$(p \vee q) \vee r$$

Mianowicie, są one prawdziwe także wtedy, gdy wszystkie składniki są prawdziwe.

Ze względu na powyższe spostrzeżenie zapis

$$p \vee q \vee r$$

można rozumieć na dwa sposoby (niektórym może się wydawać, że te dwa sposoby mówią to samo, lecz jest inaczej).

Z jednej strony możemy go traktować jako zapis trójcłonowej alternatywy wykluczającej. Wtedy musielibyśmy uznać, że zapis ' $\dots \vee \dots \vee \dots$ ' symbolizuje w naszym systemie trójargumentowy spójnik zdaniowy alternatywy wykluczającej, wyrażony następującą tabelką: Spójnik

$p$	$q$	$r$	$p \vee q \vee r$
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

ten musiałby być wprowadzony do naszego systemu.

Z drugiej strony jednak «kłóci» się to z ogólną zasadą, iż zapisanie czegoś z użyciem jednego ze spójników koniunkcji bądź alternatywy, lecz bez nawiasów, mówi o tym, iż je opuściliśmy z pewnych względów.

Zatem według tej zasady zapis ' $p \vee q \vee r$ ' ma wskazywać na którąś z dwóch formuł równoważnych: ' $p \vee (q \vee r)$ ' bądź ' $(p \vee q) \vee r$ ' (a przecież nie o to nam chodziło).

Zauważmy jeszcze, że formuła

$$(p \vee q) \vee (r \vee s)$$

jest prawdziwa także w przypadku, gdy ma prawdziwe trzy składniki. Zatem nie może wyrażać czwórcłonowej alternatywy wykluczającej. Oczywiście, jest tak również dla czterech pozostałych równoważnych układów nawiasów. Zatem znówu opuszczenie nawiasów może wprowadzić w błąd.

Czy zatem w naszym systemie nie da się wyrazić wieloczłonowych alternatyw wykluczających? Można, jednak nie za pomocą jakiegoś spójnika alternatywy wykluczającej. Trójczłonową alternatywę wykluczającą wyrazimy następująco:

$$(p \vee q \vee r) \wedge \sim(p \wedge q) \wedge \sim(p \wedge r) \wedge \sim(q \wedge r)$$

tj. zachodzi co najmniej jedno, lecz nie zachodzą żadne dwa z nich łącznie. Według tej zasady wolno zapisywać alternatywę wykluczającą o dowolnej liczbie członów. Przykładowo formuła

$$(p \vee q \vee r \vee s) \wedge \sim(p \wedge q) \wedge \sim(p \wedge r) \wedge \sim(p \wedge s) \wedge \sim(q \wedge r) \wedge \sim(q \wedge s) \wedge \sim(r \wedge s)$$

wyraża czwórczłonową alternatywę wykluczającą.

Powyższe «kłopoty» z alternatywą wykluczającą oraz inne, spowodowały to, iż spójników alternatywy wykluczającej w ogóle nie bada w systemach formalnych. Do tych innych «kłopotów» zaliczymy np. ten, że — jak to już wcześniej pokazaliśmy — zdania postaci:

$$\begin{aligned} &\text{Jakiś } P \text{ jest } S\text{-em } \underline{\text{lub}} \text{ } M\text{-em} \\ &\text{Jakiś } P \text{ jest } S\text{-em } \underline{\text{lub}} \text{ } \text{jakiś } P \text{ jest } M\text{-em} \end{aligned}$$

nie głoszą tego samego, gdy spójnik 'lub' rozumiemy wykluczająco.

To, co ma wyrażać alternatywa wykluczająca zapisujemy wyłącznie za pomocą alternatywy niewykluczającej, negacji i koniunkcji.