

Andrzej Pietruszczak

Konspekt do wykładu „Logika I”*

(z dnia 20.01.2006)

Prawa de Morgana, czyli zaprzeczanie koniunkcji oraz zaprzeczanie alternatywie niewykluczającej

Założmy, że ktoś wypowiedział koniunkcję:

Byłem w Tatrach i byłem nad Bałtykiem

tnz. informuje nas, że zaszły oba opisane fakty, lecz nic nie mówi na temat ich kolejności.

Przedstawimy jakie są zaprzeczenia tego zdania. Pierwszym jest oczywiście jego negacja przedzdaniowa:

Nie jest tak, że zarówno byłem w Tatrach i byłem nad Bałtykiem

Zwrot ‘zarówno’ pełni rolę znaku interpunkcyjnego. Mówi, że negacja odnosi się do całej koniunkcji, a nie nie tylko do pierwszego jej członu.¹ Poszukajmy jednak innego zaprzeczenia logicznego, które nie będzie już negacją przedzdaniową. W tym celu odwołamy się do zawartości semantycznej zdań. Poszukamy zdania, które będzie miało tę samą zawartość semantyczną, co negacja przedzdaniowa podanej koniunkcji, czyli będzie przekazywać tę samą informację.

Jak pamiętamy zawartość semantyczną danego zdania otrzymujemy analizując tzw. opisy możliwych stanów rzeczy związanych z tym zdaniem. Z interesującym nas zdaniem związane są cztery możliwe stany rzeczy (w dwóch wymiarach logicznych). Oto ich opisy:

1. byłem w Tatrach i byłem nad Bałtykiem
2. byłem w Tatrach i nie byłem nad Bałtykiem
3. nie byłem w Tatrach i byłem nad Bałtykiem
4. nie byłem w Tatrach i nie byłem nad Bałtykiem

Pokażemy, że w każdym możliwym stanie rzeczy zdania:

Byłem w Tatrach i byłem nad Bałtykiem

Nie byłem w Tatrach i/lub nie byłem nad Bałtykiem

muszą mieć różną wartość logiczną, tzn. że są wzajemnie sprzeczne (tj. razem nie mogą być prawdziwe) oraz dopełniają się (tj. razem nie mogą być fałszywe).

Przypomnijmy, bardzo przydatne w logice, pojęcie *wartościowania sądów*.

D . Wartościowaniem danej grupy sądów nazywamy dowolną funkcję, która każdemu sądowi z tej grupy przyporządkowuje jedno z pojęć: *prawdę* bądź *fałsz*.

* © 2006, prawa autorskie do całości ma wyłącznie autor, Andrzej Pietruszczak.

¹ Zwrot ‘zarazem’ nie byłby potrzebny, gdyby nasz przykład miał postać skróconą ‘Byłem w Tatrach i nad Bałtykiem’. Wówczas ‘i’ nie łączyłoby zdań. Oczywiście, ostatnie zdanie byłoby równoważne wyjściowej koniunkcji. Jednak nie zawsze tak jest. Przykładowo zdanie postaci ‘Co najmniej jedno P jest S-em i M-em’ nie mówi tego samego, co ‘Co najmniej jedno P jest S-em & co najmniej jedno P jest M-em’ (proszę podstawić: P/zwierzę, S/pies, M/kot; otrzymamy fałszywe pierwsze zdanie, a koniunkcja będzie prawdziwa).

Intuicyjnie: przyporządkowanie to ma polegać na tym, iż poszczególne sądy z danej grupy uznajemy za prawdziwe bądź fałszywe. Każdemu z nich przypisujemy dokładnie jedną wartość. Robimy to zupełnie «teoretycznie», bez względu na to jaka jest zależność pomiędzy sądami w grupie. Np. dwa sądy mogą wzajemnie się wykluczać, a mimo tego przypiszemy im wartość *prawda*. Z drugiej strony dwa sądy mogą się wzajemnie dopełniać, a mimo tego przypiszemy im wartość *fałsz*. W części skryptu poświęconej rozwiązywaniu zadań dotyczących zawartości semantycznej widzieliśmy jakie korzyści przynosi takie teoretyczne podejście.

Łatwo policzyć, że gdy grupa złożona jest z n sądów, to wartościowań jest 2^n . Tyle jest matematycznych funkcji określonych na zbiorze n -elementowym i przyjmujących wartości w zbiorze dwuelementowym $\{prawda, fałsz\}$.

W każdym możliwym stanie rzeczy poszczególne sądy są albo prawdziwe albo fałszywe. Zatem możliwe stany rzeczy wyznaczają wartościowania rozpatrywanych sądów. Może się przy tym zdarzyć, że różne stany wyznaczają to samo wartościowanie. Ponadto, mogą istnieć wartościowania nie wyznaczone przez możliwe stany rzeczy. Takie wartościowania opisują stany rzeczy.

W naszym przypadku mamy uproszczoną sytuację. Mamy cztery możliwe stany rzeczy oraz cztery wartościowania ($2^2 = 4$). Zatem dla dwóch sądów prostych rozpatrywanych w tym punkcie mamy następujące wartościowania wyznaczone przez cztery możliwe stany rzeczy:

nr stanu	<i>Byłem w Tatrach</i>	<i>Byłem nad Bałtykiem</i>	nr wartościowania
1	prawda	prawda	1
2	prawda	fałsz	2
3	fałsz	prawda	3
4	fałsz	fałsz	4

Przyjmijmy następujące oznaczenia pomocnicze (aby skrócić zapis):

p dla sądu: *Byłem w Tatrach*

q dla sądu: *Byłem nad Bałtykiem*

1 dla: prawda oraz 0 dla: fałsz

Badane sądy:

Byłem w Tatrach i byłem nad Bałtykiem

Nie byłem w Tatrach i/lub nie byłem nad Bałtykiem

będą miały odpowiednio następujące formy:

$p \ \& \ q$

$\neg p \vee \neg q$

Sprawdzimy czy
wartość logiczną.

sądy o powyższych formach mają różną

			P	Q	$P \vee Q$
p	q	$p \ \& \ q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
1	1	1	0	0	0
1	0	0	0	1	1
0	1	0	1	0	1
0	0	0	1	1	1

Górny wiersz pokazuje, jak policzyć wartość sądu złożonego stosując oznaczenia pomocnicze. Sprawdzenie wypadło pozytywnie. Zatem badane sądy (**wyróżnione**) muszą mieć różną wartość, czyli jeden z nich jest drugim.

Zastanówmy się teraz, czy powyższy wynik zależy od tego jakie sądy stoją w miejscach liter ‘p’ i ‘q’?

Gdybyśmy w miejsce tych liter postawili inne sądy, to co najwyżej mogłaby ulec zmianie liczba możliwych stanów rzeczy. Jednak jakie by one nie były mogą wyznaczyć co najwyżej cztery wartościowania. W każdym możliwym stanie rzeczy albo dane zdanie jest prawdziwe, albo jest fałszywe. Zatem gdy mamy dane dwa zdania, to dostaniemy co najwyżej cztery wartościowania pary zdań.

Zatem jeśli przy wszystkich wartościowaniach dwa zdania muszą mieć różne wartości, to także we wszystkich możliwych stanach rzeczy muszą mieć różne wartości, czyli jedno jest zaprzeczeniem drugiego.

Skoro, otrzymaliśmy to na podstawie samej formy logicznej badanych zdań, to jest to zaprzeczenie logiczne.

Reasumując: **logicznym zaprzeczeniem koniunkcji**, czyli zdania o formie:

$$p \& q$$

jest alternatywa niewykluczająca negacji zdań składowych, czyli zdanie o formie:

$$\neg p \vee \neg q$$

Jest to treść pierwszego z M .²

Uwaga 1. To pierwsze prawo de Morgana nie zachodzi, gdy spójnik ‘i’ nie jest spójnikiem koniunkcji. W takich przypadkach, zdanie postaci ‘ $\neg p \vee \neg q$ ’ nie jest zaprzeczeniem zdania ‘ $p \text{ i } q$ ’ (np. zdań postaci: ‘ p i potem q ’ oraz ‘ p i wskutek tego q ’). To ostatnie może być fałszywe także przy obu składnikach prawdziwy (alternatywa negacji też będzie fałszywa). Przykładowo, fałszywość zdania ‘Potknął się i złamał nogę’ może być związana z tym, że chociaż zaszły oba fakty, to nie ma jednak żadnego związku pomiędzy nimi. □

Na podstawie poprzednich rozważań łatwo się domyśleć, że zaprzeczeniem alternatywy niewykluczającej, czyli sądu postaci:

$$p \vee q$$

będzie koniunkcja negacji:

$$\neg p \& \neg q$$

Można do tego dojść na podstawie następującej prostej analizy. Zdanie

$$p \vee q$$

zastępujemy zdaniem

$$\neg \neg p \vee \neg \neg q$$

gdy skorzystamy z prawa podwójnej negacji. To ostanie ma jednak przecież formę:

$$\neg P \vee \neg Q$$

gdzie wielkie litery ‘P’ i ‘Q’ ukryły negacje ‘ $\neg p$ ’ i ‘ $\neg q$ ’. Wiemy jednak, że zaprzeczeniem logicznym ostatniego zdania jest koniunkcja (zaprzeczenie jest symetryczne):

$$P \& Q$$

Wracając zaś do poprzednich oznaczeń otrzymamy:

$$\neg p \& \neg q$$

Reasumując: **logicznym zaprzeczeniem alternatywy niewykluczającej**, czyli sądu postaci:

$$p \vee q$$

jest koniunkcja negacji zdań składowych, czyli sąd postaci:

$$\neg p \& \neg q$$

Jest to treść drugiego z M .

² Liczebnik nie jest istotny. Omawiane prawa de Morgana nie mają ustalonej kolejności.

Widzimy więc „dualność” dwóch praw de Morgana: zmieniając miejscami w jednym z nich symbole ‘&’ i ‘ \vee ’ otrzymamy drugie. Pewnie z tego względu przyjęło się oznaczać koniunkcję symbolem ‘ \wedge ’.³

Drugie z praw de Morgana łatwo także sprawdzić metodą tabelkową, analizując wszystkie wartościowania.

			P	Q	P & Q
p	q	$p \vee q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \& \neg q$
1	1	1	0	0	0
1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1

Badane zdania (**wyróżnione**) przy dowolnym wartościowaniu mają różną wartość, czyli jedno jest drugiego. Badane zdania , ’ różną wartość.

Uwaga 2. To drugie prawo de Morgana nie zachodzi, gdy spójnik ‘lub’ jest rozumiany w sposób wykluczający. Zdanie postaci ‘ $\neg p \& \neg q$ ’ nie zaprzeczeniem zdania ‘ $\neg p \vee \neg q$ ’.

			P	Q	P & Q
p	q	$p \vee q$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \& \neg q$
1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	1	0
0	1	1	1	0	0
0	0	0	1	1	1

Zatem badane zdania (**wyróżnione**) przy pewnym wartościowaniu mają tę samą wartość (oba są fałszywe przy prawdziwych zdaniach stojących w miejscu liter ‘p’ i ‘q’). Zatem jedno nie jest logicznym zaprzeczeniem drugiego. Badane zdania , ’ różnej wartości.

Zaprzeczeniem alternatywy wykluczającej ‘ $p \vee q$ ’ jest inna alternatywa wykluczająca: ‘ $(p \& q) \vee (\neg p \& \neg q)$ ’ (albo oba składniki są prawdziwe, albo oba są fałszywe).

			K	K_n	$K \vee K_n$
p	q	$p \vee q$	$p \& q$	$\neg p \& \neg q$	$(p \& q) \vee (\neg p \& \neg q)$
1	1	0	1	0	1
1	0	1	0	0	0
0	1	1	0	0	0
0	0	0	0	1	1

Badane zdania (**wyróżnione**) przy dowolnym wartościowaniu mają różną wartość, czyli jedno jest drugiego. Badane zdania , ’ różną wartość. \square

Mamy także uogólnione prawa de Morgana. Pierwsze z nich głosi, że **zaprzeczeniem n członowej koniunkcji**:

$$p_1 \wedge \cdots \wedge p_n$$

jest n członowa niewykluczająca alternatywa negacji zdań składowych:

$$\neg p_1 \vee \cdots \vee \neg p_n$$

³ Widać, że jest to odwrócony symbol alternatywy ‘ \vee ’. Przypomnijmy, że ten ostatni bierze się z łacińskiego słowa ‘vel’, które znaczy ‘lub’ w sensie niewykluczającym.

Po prostu stosujemy $n-1$ razy «zwykłe» prawo. Zaprzeczając zdaniu $p_1 \wedge (p_2 \wedge \dots \wedge p_n)$ otrzymamy $\neg p_1 \vee \neg(p_2 \wedge \dots \wedge p_n)$. Skoro negacja jest też zaprzeczeniem, więc mamy $\neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg(p_3 \wedge \dots \wedge p_n)$, a po wielokrotnym stosowaniu dostaniemy: $\neg p_1 \vee \dots \vee \neg p_n$.

Drugie z uogólnionych praw de Morgana głosi, że **zaprzeczeniem n członowej niewykluczająca alternatywa:**

$$p_1 \vee \dots \vee p_n$$

jest n członowa koniunkcja negacji zdań składowych:

$$\neg p_1 \wedge \dots \wedge \neg p_n$$

Po prostu stosujemy $n-1$ razy «zwykłe» prawo. Zaprzeczając zdaniu $p_1 \vee (p_2 \vee \dots \vee p_n)$ otrzymamy $\neg p_1 \wedge \neg(p_2 \vee \dots \vee p_n)$. Skoro negacja jest też zaprzeczeniem, więc mamy $\neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg(p_3 \vee \dots \vee p_n)$, a po wielokrotnym stosowaniu dostaniemy: $\neg p_1 \wedge \dots \wedge \neg p_n$.

Równoważność zdań

W części poświęconej zadaniom wprowadziliśmy pojęcie *logicznej równoważności*. Pokazaliśmy tam, że wszystkie sądy logicznie równoważne mają tę samą zawartość semantyczną.

Przypomnijmy:

D 1. Mówimy, że dwa sądy są *logicznie równoważne*, gdy przy wszystkich wartościowaniach mają tę samą wartość.

T 1. *Jeśli sądy są logicznie równoważne, to mają także tę samą zawartość semantyczną.*

D ´. Załóżmy, że przy wszystkich wartościowaniach sądy mają tę samą wartość. Zatem mają również tę samą wartość przy wszystkich wartościowaniach wyznaczonych przez możliwe stany rzeczy. A to znaczy, że sądy te potwierdzone są przez te same możliwe stany rzeczy, czyli także wykluczone są przez te same stany. Stąd, na mocy definicji, sądy te mają tę samą zawartość semantyczną. □

Uwaga 3. Twierdzenie 1 nie jest odwracalne, tzn. istnieją sądy o identycznej zawartości semantycznej, lecz które nie są logicznie równoważne. Przykładowo, takimi są:

Wypadła reszka

Nie wypadł orzeł

Mamy dwa możliwe stany rzeczy: 1. wypadła reszka; 2. wypadł orzeł. Oba zdania są potwierdzone tylko przez pierwszy z tych stanów. Zatem ich zawartość semantyczna jest identyczna. Jednak sądy te mają różną wartość przy dwóch wartościowaniach:

i)	<i>Wypadła reszka</i> $\mapsto 1$	<i>Wypadł orzeł</i> $\mapsto 1$,
ii)	<i>Wypadła reszka</i> $\mapsto 0$	<i>Wypadł orzeł</i> $\mapsto 0$,

które nie odpowiadają możliwym stanom rzeczy. □

Pojęcie *równoważności logicznej* ma jeszcze jedno zastosowanie:

T 2. *Jeśli sądy są logicznie równoważne, to mają także tę samą wartość logiczną, tzn. albo oba są prawdziwe, albo oba są fałszywe.*

D ´. Załóżmy, że sądy są logicznie równoważne, tzn. przy wszystkich wartościowaniach mają tę samą wartość. Zatem mają tę samą wartość również przy wartościowaniu wyznaczonym przez faktyczny stan rzeczy⁴, tj. mają tę samą wartość logiczną (w aktualnym stanie). □

⁴ Faktyczny (inaczej: rzeczywisty) stan rzeczy jest jednym z możliwych stanów rzeczy.

Uwaga 4. Twierdzenie 2 nie jest odwracalne, tzn. istnieją sądy o tej samej wartości logicznej, lecz które nie są logicznie równoważne. Przykładowo, takimi są sądy z uwagi 3. Są one albo jednocześnie prawdziwe, albo jednocześnie fałszywe (skoro mają identyczną zawartość semantyczną; patrz następne twierdzenie 3). Nie są jednak logicznie równoważne (zob. uwagę 3).

Inny przykład, sądy ‘Toruń jest stolicą Polski’ i ‘Kraków jest stolicą Polski’ są fałszywe, lecz nie są logicznie równoważne (przecież kiedyś drugi sąd był prawdziwy, a pierwszy był zawsze fałszywy). □

Twierdzenie 2 wynika również z poniższego:

T 3. *Jeśli sądy mają identyczną zawartość semantyczną, to mają tę samą wartość logiczną.*

D . Załóżmy, że sądy mają identyczną zawartość semantyczną. Wtedy są potwierdzane przez te same możliwe stany rzeczy. Zatem mają tę samą wartość przy wszystkich wartościowaniach wyznaczonych przez te stany. Stąd wynika, że mają tę samą wartość również przy wartościowaniu wyznaczonym przez faktyczny stan rzeczy, gdyż należy on do stanów możliwych. □

Uwaga 5. Twierdzenie 3 nie jest odwracalne, tzn. istnieją sądy o tej samej wartości logicznej, lecz o różnej zawartości semantycznej. Przykładowo, takimi są sądy z uwagi 4: ‘Toruń jest stolicą Polski’ i ‘Kraków jest stolicą Polski’. Oba są fałszywe, lecz są potwierdzane przez inne możliwe stany rzeczy. Zatem sądy te wykluczają inne stany, czyli mają różną zawartość semantyczną. □

Uwaga 6. Ostatnie trzy twierdzenia i uwagi można zilustrować graficznie:



□

Pojęcie logicznej równoważności jest: zwrotne, symetryczne i przechodnie. Tzn. odpowiednio zachodzą trzy poniższe twierdzenia:

T 4. *Każde zdanie jest logicznie równoważne z sobą samym.*

T 5. *Jeśli jedno zdanie jest logicznie równoważne z drugim, to drugie jest logicznie równoważne z pierwszym.*

T 6. *Jeśli jedno zdanie jest logicznie równoważne z drugim, a drugie jest logicznie równoważne z trzecim, to pierwsze jest logicznie równoważne z trzecim.*

Inne sformułowanie praw de Morgana

Stosując pojęcie *logicznej równoważności* można w inny sposób niż poprzednio sformułować prawa de Morgana. Przypomnijmy, że dotyczyły one odpowiednio logicznych zaprzeczeń koniunkcji oraz alternatywy niewykluczającej. Zauważmy jednak, że zachodzi ogólne:

T 7. *Dany sąd jest logicznym zaprzeczeniem drugiego sądu wtedy i tylko wtedy, gdy jest logicznie równoważny z negacją tego drugiego sądu.*

D . Załóżmy, że dany sąd jest logicznym zaprzeczeniem drugiego sądu. Zatem oba mają różne wartości przy każdym wartościowaniu. Stąd przy każdym wartościowaniu pierwszy ma tę samą wartość co negacja drugiego, tzn. pierwszy jest logicznie równoważny z negacją drugiego.

Odwrotnie, jeśli przy każdym wartościowaniu dany sąd ma tę samą wartość co negacja drugiego, to pierwszy i drugi sąd muszą mieć różną wartość przy każdym wartościowaniu. □

Zatem logiczne zaprzeczenie danego sądu ma mówić to samo, co jego negacja przedzdaniowa.

Twierdzenie 7 potwierdza poprzednio podana tabelka, która sprawdzała pierwsze z praw de Morgana. Widzimy, że logiczne zaprzeczenie koniunkcji, czyli niewykluczająca alternatywa negacji składników:

$$\neg p \vee \neg q$$

jest logicznie równoważna z negacją koniunkcji, czyli zdaniem o formie:⁵

$$\neg(p \& q)$$

Łatwo to sprawdzić metodą tabelkową, analizując wszystkie wartościowania.

		K	$\neg K$	P	Q	$P \vee Q$
p	q	$p \& q$	$\neg(p \& q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \vee \neg q$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	0	1	0	1	1
0	1	0	1	1	0	1
0	0	0	1	1	1	1

Badane sądy (**wyróżnione**) przy każdym wartościowaniu mają te same wartości, czyli są logicznie równoważne. A skoro są logicznie równoważne, to również mówią to samo (mają tę samą zawartość semantyczną).

Pierwsze z praw de Morgana wolno więc sformułować także w następującej postaci:

Negacja koniunkcji jest logicznie równoważna z niewykluczającą alternatywą negacji zdań składowych.⁶

Symbolicznie zapiszemy to jako:

$$\neg(p \wedge q) \equiv \neg p \vee \neg q$$

Symbol ‘ \equiv ’ zastępuje zwrot ‘jest logicznie równoważne z’, co ma znaczyć, że zdania o wskazanych formach (łączone przez symbol ‘ \equiv ’) mają tę samą wartość logiczną. Skoro, zdanie postaci ‘ $\neg p \vee \neg q$ ’ ma tę samą wartość, co zdanie postaci ‘ $\neg(p \wedge q)$ ’, więc pierwsze ma inną wartość od zdania ‘ $p \wedge q$ ’. Innymi słowy, logicznym zaprzeczeniem koniunkcji jest niewykluczająca alternatywa negacji zdań składowych.

Mamy uogólnione prawo:

$$\neg(p_1 \wedge \dots \wedge p_n) \equiv \neg p_1 \vee \dots \vee \neg p_n$$

Można zastosować $n - 1$ razy poprzednie prawo:

$$\neg(p_1 \wedge (p_2 \wedge \dots \wedge p_n)) \equiv \neg p_1 \vee \neg(p_2 \wedge \dots \wedge p_n) \equiv \neg p_1 \vee \neg p_2 \vee \neg(p_3 \wedge \dots \wedge p_n) \equiv \dots \equiv \neg p_1 \vee \dots \vee \neg p_n$$

⁵ Chodzi o to, że zapis postaci ‘ $\neg p \& q$ ’ formalnie jest koniunkcją członów ‘ $\neg p$ ’ oraz ‘ q ’, a nie negacją koniunkcji ‘ $p \& q$ ’. W zapisie formalnym zwrot interpunkcyjny ‘zarazem’ oddawany jest przez nawiasy. Stosujemy postać ‘ $\neg(p \& q)$ ’ jako zapis negacji koniunkcji.

⁶ Niektórzy mylą negację koniunkcji z koniunkcją negacji mówiąc, że jest to to samo. Proszę tylko zwrócić uwagę na to, że w zwrocie ‘negacja koniunkcji’ wyraz ‘negacja’ użyty jest w liczbie pojedynczej, a w zwrocie ‘koniunkcja negacji’ — w mnogiej.

Chyba nikt nie myli brata żony x -a z żoną brata x -a. Chociaż syn dziadka x -a może być tą samą osobą, co dziadek syna x -a. Może, ale nie musi. Mianowicie, może to być ojciec x -a, o ile x ma syna i jego dziadek ma syna. Z drugiej strony możliwe są sytuacje, w których: syn dziadka x -a jest bratem ojca x -a; dziadek syna x -a to ojciec żony x -a; itp.

Ponadto, drugie z praw de Morgana wolno sformułować w następującej postaci:

Negacja alternatywy niewykluczającej jest logicznie równoważna z koniunkcją negacji zdań składowych

co jest innym sformułowaniem drugiego z praw de Morgana. Symbolicznie zapiszemy to jako:

$$\neg(p \vee q) \equiv \neg p \wedge \neg q$$

Słownie: zdanie postaci $\neg p \wedge \neg q$ jest logicznie równoważne ze zdaniem postaci $\neg(p \vee q)$, tzn. że oba zdania mają tę samą wartość logiczną. Stąd zaś dostajemy, że pierwsze z nich ma inną wartość od zdania $p \vee q$. Innymi słowy, logicznym zaprzeczeniem alternatywy niewykluczającej jest koniunkcja negacji zdań składowych.

W powyższym sformułowaniu drugie prawo de Morgana łatwo także sprawdzić metodą tabelkową, analizując wszystkie wartościowania.

		A	$\neg A$	P	Q	$P \wedge Q$
p	q	$p \vee q$	$\neg(p \vee q)$	$\neg p$	$\neg q$	$\neg p \wedge \neg q$
1	1	1	0	0	0	0
1	0	1	0	0	1	0
0	1	1	0	1	0	0
0	0	0	1	1	1	1

Badane (**wyróżnione**) zdania przy każdym wartościowaniu mają te same wartości, czyli są równoważne. A skoro są logicznie równoważne, to również mają tę samą zawartość semantyczną, czyli mówią to samo.

Mamy uogólnione prawo:

$$\neg(p_1 \vee \dots \vee p_n) \equiv \neg p_1 \wedge \dots \wedge \neg p_n$$

Można zastosować $n - 1$ razy poprzednie prawo:

$$\neg(p_1 \vee (p_2 \vee \dots \vee p_n)) \equiv \neg p_1 \wedge \neg(p_2 \vee \dots \vee p_n) \equiv \neg p_1 \wedge \neg p_2 \wedge \neg(p_3 \vee \dots \vee p_n) \equiv \dots \equiv \neg p_1 \wedge \dots \wedge \neg p_n$$

Prawa de Morgana formułuje się w jeszcze innych postaciach:

$$p \wedge q \equiv \neg(\neg p \vee \neg q)$$

$$p \vee q \equiv \neg(\neg p \wedge \neg q)$$

Można je sprawdzić tabelkowo albo wyprowadzić z poprzednich postaci oraz prawa podwójnej negacji:

$$\begin{aligned} \underbrace{\neg(\neg p \vee \neg q)}_{\neg(P \vee Q)} &\equiv \underbrace{\neg \neg p \wedge \neg \neg q}_{\neg P \wedge \neg Q} \equiv p \wedge q \\ \underbrace{\neg(\neg p \wedge \neg q)}_{\neg(P \wedge Q)} &\equiv \underbrace{\neg \neg p \vee \neg \neg q}_{\neg P \vee \neg Q} \equiv p \vee q \end{aligned}$$

Dzięki zwrotności, symetryczności i przechodniości, logiczną równoważność można stosować tak jak znak równości.

Alternatywa wykluczająca

Alternatywa wykluczająca jest dlatego teoretycznie zbędna, gdyż jest logicznie równoważna z pewną koniunkcją.

$$p \vee\vee q \equiv (p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$$

Intuicyjnie: stwierdzenie, że zachodzi dokładnie jedna z dwóch sytuacji ($p \vee\vee q$) znaczy to samo, co stwierdzenie, że zachodzi co najmniej jedna z nich ($p \vee q$), lecz nie obie jednocześnie ($\neg(p \wedge q)$).

Udowodnimy powyższe prawo metodą tabelkową:

			A	K	$\neg K$	$A \wedge \neg K$
p	q	$p \vee\vee q$	$p \vee q$	$p \wedge q$	$\neg(p \wedge q)$	$(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$
1	1	0	1	1	0	0
1	0	1	1	0	1	1
0	1	1	1	0	1	1
0	0	0	0	0	1	0

Badane zdania (**wyróżnione**) przy dowolnym wartościowaniu mają te same wartości, czyli jedno jest prawdziwe, a drugie fałszywe. Badane zdania $p \vee\vee q$ i $(p \vee q) \wedge \neg(p \wedge q)$ tę samą wartość.

Poprzednio pokazaliśmy, że logicznym zaprzeczeniem alternatywy wykluczającej $p \vee\vee q$ jest inna alternatywa wykluczająca: $(p \wedge q) \vee\vee (\neg p \wedge \neg q)$ (albo oba składniki są prawdziwe, albo oba są fałszywe). Zatem — zgodnie z ogólnym twierdzeniem 7 — to ostatnie zdanie jest logicznie równoważne z negacją alternatywy wykluczającej. Symbolicznie:

$$\neg(p \vee\vee q) \equiv (p \wedge q) \vee\vee (\neg p \wedge \neg q)$$

Można to również łatwo sprawdzić metodą tabelkową.

Wyrażenie implikacji materialnej za pomocą negacji i alternatywy niewykluczającej

Przypomnijmy, że tzw. implikacja materialna była właśnie tak sformułowana, aby otrzymać następujące prawo:

$$p \Rightarrow q \equiv \neg p \vee q$$

Intuicyjnie: implikacja materialna głosi – albo pierwsze jest fałszywe i/lub drugie jest prawdziwe.

Sprawdźmy to prawo metodą tabelkową (choćby podkreślmy, że właśnie taką tabelkę przyporządkowaliśmy implikacji materialnej, aby to prawo zachodziło):

			N	$N \vee q$
p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg p$	$\neg p \vee q$
1	1	1	0	1
1	0	0	0	0
0	1	1	1	1
0	0	1	1	1

Badane zdania (**wyróżnione**) przy dowolnym wartościowaniu mają te same wartości, czyli jedno jest prawdziwe, a drugie fałszywe. Badane zdania $p \Rightarrow q$ i $\neg p \vee q$ tę samą wartość.

Wyrażenie implikacji materialnej za pomocą negacji i koniunkcji

Zgodnie z tabelkami implikacji materialnej, negacji i koniunkcji otrzymujemy następujące prawo:

$$p \Rightarrow q \equiv \neg(p \wedge \neg q)$$

Intuicyjnie: implikacja materialna głosi – nie jest tak, że zarazem, pierwsze jest prawdziwe, a drugie fałszywe.

Sprawdźmy to prawo metodą tabelkową:

			N	K	$\neg K$
p	q	$p \Rightarrow q$	$\neg q$	$p \wedge \neg q$	$\neg(p \wedge \neg q)$
1	1	1	0	0	1
1	0	0	1	1	0
0	1	1	0	0	1
0	0	1	1	0	1

Badane zdania (**wyróżnione**) przy dowolnym wartościowaniu mają te same wartości, czyli jedno jest prawdziwe z drugim. Badane zdania $\neg(p \wedge \neg q)$ i $\neg(p \wedge \neg q)$ tę samą wartość.

Zauważmy, że dzięki pierwszemu z praw de Morgana oraz prawu podwójnej negacji ostatnie dwa prawa są wzajemnie wyprowadzalne:

$$\begin{aligned}
 p \Rightarrow q &\equiv \underbrace{\neg(p \wedge \neg q)}_{\neg(p \wedge Q)} \equiv \underbrace{\neg p \vee \neg \neg q}_{\neg p \vee \neg Q} \equiv \neg p \vee q \\
 p \Rightarrow q &\equiv \neg p \vee q \equiv \underbrace{\neg p \vee \neg \neg q}_{\neg p \vee \neg Q} \equiv \underbrace{\neg(p \wedge \neg q)}_{\neg(p \wedge Q)}
 \end{aligned}$$

Dzięki zwrotności, symetryczności i przechodniości, logiczną równoważność można stosować tak jak znak równości.

Mówiąc lapidarnie, negację wolno przenosić z jednej strony równoważności na drugą. Otrzymujemy więc następujące prawo:

$$\neg(p \Rightarrow q) \equiv p \wedge \neg q$$

Oczywiście, można je łatwo sprawdzić metodą tabelkową (por. ostatnią tabelkę).

Równoważność materialna a implikacja materialna

Zgodnie z tabelkami implikacji materialnej, równoważności materialnej i koniunkcji otrzymujemy następujące prawo:

$$p \Leftrightarrow q \equiv (p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$$

Sprawdźmy to prawo metodą tabelkową:

			I1	I2	$I1 \wedge I2$
p	q	$p \Leftrightarrow q$	$p \Rightarrow q$	$q \Rightarrow p$	$(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$
1	1	1	1	1	1
1	0	0	0	1	0
0	1	0	1	0	0
0	0	1	1	1	1

Badane zdania (**wyróżnione**) przy dowolnym wartościowaniu mają te same wartości, czyli jedno jest prawdziwe z drugim. Badane zdania $(p \Rightarrow q) \wedge (q \Rightarrow p)$ i $p \Leftrightarrow q$ tę samą wartość.

Prawa de Morgana dla kwantyfikatorów

Mamy następujące prawa de Morgana dla kwantyfikatorów:

$$\neg \bigwedge_x W(x) \equiv \bigvee_x \neg W(x),$$

$$\neg \bigvee_x W(x) \equiv \bigwedge_x \neg W(x).$$

Nazwa tych praw bierze się stąd, że kwantyfikator ogólny („każde”) traktuje się jako uogólnioną koniunkcję, a kwantyfikator szczegółowy („co najmniej jedno”) jako uogólnioną alternatywę niewykluczającą.

Pierwsze z podanych praw głosi:

Nie każdy obiekt w uniwersum spełnia warunek $W(x)$
 jest logicznie równoważne z
 Jakiś obiekt w uniwersum nie spełnia warunku $W(x)$.

Drugie zaś mówi:

Nieprawda, że jakiś obiekt w uniwersum spełnia warunek $W(x)$
 jest logicznie równoważne z
 Każdy obiekt w uniwersum nie spełnia warunku $W(x)$.

Stosując te prawa oraz prawo podwójnej negacji otrzymamy:

$$\bigwedge_x W(x) \equiv \neg \bigvee_x \neg W(x),$$

$$\bigvee_x W(x) \equiv \neg \bigwedge_x \neg W(x).$$

Pierwsze z podanych praw głosi:

Każdy obiekt w uniwersum spełnia warunek $W(x)$
 jest logicznie równoważne z
 Nieprawda, że jakiś obiekt w uniwersum nie spełnia warunku $W(x)$.

Drugie zaś mówi:

Jakiś obiekt w uniwersum spełnia warunek $W(x)$
 jest logicznie równoważne z
 Nieprawda, że każdy obiekt w uniwersum nie spełnia warunku $W(x)$.

Istotnie:

$$\neg \bigvee_x \neg W(x) \equiv \bigwedge_x \neg \neg W(x) \equiv \bigwedge_x W(x).$$

Ponadto

$$\neg \bigwedge_x \neg W(x) \equiv \bigvee_x \neg \neg W(x) \equiv \bigvee_x W(x).$$