

Andrzej Pietruszczak

Konspekt do wykładu „Logika I”*

(z dnia 13.01.2006)

Cd. zaprzeczenie logiczne

Uwaga. Wyjaśnienia dotyczące słowa ‘żadne’ lepiej będą widoczne na przykładzie, w którym występuje ono w orzeczeniu zdania. Przykładowo załóżmy, że chcemy zaprzeczyć zdaniu:

Jan zna jakiegoś ministra

Oczywiście, można po prostu użyć jego negacji przedzdaniowej:

Nie jest tak, że Jan zna jakiegoś ministra

To rozwiązanie jednak raczej «sztucznie» wygląda w języku naturalnym. Wolimy użyć jakiejś skróconej formy zaprzeczenia. Nie może to być jednak zdanie ‘Jan nie zna jakiegoś ministra’, gdzie słowo ‘nie’ działa jedynie na sam czasownik ‘zna’, a nie na całe orzeczenie:

<u>Jan</u>	<u>nie zna</u>	<u>jakiegoś ministra</u>
podmiot	zanegowany czasownik	dopełnienie orzeczenia
└──────────────────┘ orzeczenie		

Zatem zdania ‘Jan zna jakiegoś ministra’ i ‘Jan nie zna jakiegoś ministra’ w ogóle nie są sprzeczne, gdyż oba mogą być jednocześnie prawdziwe (można znać jednego ministra, a nie znać innego).

Skróconą formą negacji zdania ‘Jan zna jakiegoś ministra’ jest zdanie:

Jan nie zna żadnego ministra

Świadczy o tym właśnie łączne użycie wyrazów ‘nie’ oraz ‘żaden’. Oddaje to w strukturze powierzchniowej zanegowanie orzeczenia, tj. wyraża: NIE [zna jakiegoś ministra].

Oczywiście powstaje pytanie: Czy forma ‘Jan nie zna każdego ministra’ jest w ogóle poprawna, a jeśli tak, to co ma znaczyć? Czy wyraża ona to samo, co zdanie ‘NIE KAŻDEGO ministra Jan zna’? Jeśli tak, to rozpatrywane zdanie znaczyłoby to samo, co ‘Jan nie zna jakiegoś ministra’. Rozwiązanie to wydaje się raczej dziwne, gdyż słowa ‘każde’ i ‘jakieś’ pełniłyby tę samą rolę. Zatem, jeśli w ogóle forma ‘Jan nie zna każdego ministra’ jest poprawna, to czy ma ona znaczyć to samo, co ‘Jan nie zna żadnego ministra’? Takie rozwiązanie też rodzi niejasności.¹ Lepiej więc tej formy w ogóle nie używać, lecz mówić ‘Nie każdego ministra Jan zna’ albo ‘Nie wszystkich ministrów Jan zna’. □

Uwaga. Zobaczmy teraz jak zachowuje się słowo ‘żadne’ w dopełnieniu relatywnego orzeczenia imiennego. Rozpatrzmy zdanie z dwoma kwantyfikatorami, które ma powierzchnową formę ‘Każde S jest P-em’:

* © 2006, prawa autorskie do całości ma wyłącznie autor, Andrzej Pietruszczak.

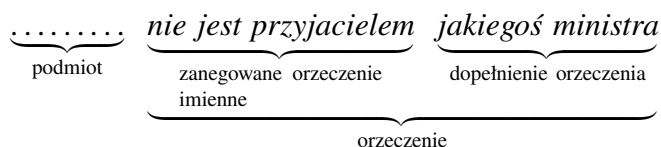
¹ Można się wówczas dziwić dlaczego na dworcu Poznań Główny informuje się podróżnych, że dany „pociąg nie zatrzymuje się na każdej stacji”. Przy takim rozwiązaniu znaczyłoby to, że dany pociąg nie zatrzymuje się na żadnej stacji. Na dworcu w Poznaniu przyjęto zapewne pierwsze rozwiązanie, według którego chodzi o to, że NIE NA WSZYSTKICH stacjach dany pociąg zatrzymuje się. I w tej formie raczej należałoby informować podróżnych, gdyż to wyraża zaprzeczenie zdania ‘Dany pociąg zatrzymuje się na każdej stacji’.

Każdy Polak jest przyjacielem jakiegoś ministra

Jest to zdanie fałszywe, więc prawdziwa jest jego negacja przedzdaniowa:

Nie jest tak, że każdy Polak jest przyjacielem jakiegoś ministra

Chcemy ją zapisać w skróconej formie z użyciem negacji orzeczenia. Nie może to być jednak zdanie ‘Każdy Polak nie jest przyjacielem jakiegoś ministra’². Nie jest to również zdanie ‘Jakiś Polak nie jest przyjacielem jakiegoś ministra’³. W obu przypadkach słowo ‘nie’ działa jedynie na relatywne orzeczenie imienne ‘jest przyjacielem’, a nie na całe orzeczenie:



Skróconą formą negacji jest zdanie:

Jakiś Polak nie zna żadnego ministra

Właśnie świadczy o tym łączne użycie wyrazów ‘nie’ oraz ‘żaden’. Oddaje to w strukturze powierzchniowej zanegowanie orzeczenia, tj. wyraża: NIE [*jest przyjacielem jakiegoś ministra*].

Powyższy przykład pokazuje jak w strukturze powierzchniowej mamy wyrażać następujące tzw. *struktury głębokie*:

Jakiś S NIE [orzeczenie]

Każde S NIE [orzeczenie]

Przedstawimy ogólny sposób dla dwóch specjalnych przypadków.

Przypadek pierwszy: orzeczenie ma postać:

jest R-em jakiegoś M-a

to NIE [*orzeczenie*] w strukturze powierzchniowej będzie miało postać:

nie jest R-em żadnego M-a

Zatem otrzymujemy zdania, które w strukturze powierzchniowej będą miały formy:

Jakieś S nie jest R-em żadnego M-a

Każde S nie jest R-em żadnego M-a

To drugie zdanie można również zapisać jako:

Żadne S nie jest R-em żadnego M-a

Przypadek drugi: orzeczenie ma postać:

jest R-em każdego M-a

to NIE [*orzeczenie*] w strukturze powierzchniowej będzie miało postać:

nie jest R-em jakiegoś M-a

Mamy więc dwie możliwe struktury powierzchniowe:

Jakieś S nie jest R-em jakiegoś M-a

Każde S nie jest R-em jakiegoś M-a

Nie otrzymamy formy ‘*Żadne S nie jest R-em jakiegoś M-a*’, która w ogóle nie jest dopuszczalna.⁴

² To zdanie nie dopełnia zdania wyjściowego, gdyż może być również fałszywe, gdy znajdziemy takiego Polaka, który jest przyjacielem wszystkich ministrów. To zdanie nie jest także sprzeczne ze zdaniem wyjściowym, gdyż logicznie możliwe jest, że oba jednocześnie są prawdziwe.

³ To zdanie nie jest także sprzeczne ze zdaniem wyjściowym, gdyż logicznie możliwe jest, że oba jednocześnie są prawdziwe.

⁴ Jeśli ktoś uważa, że postać ‘*Żadne S nie jest R-em jakiegoś M-a*’ jest w ogóle zrozumiała, to zapewne znaczy ona dla niego to samo, co sztuczne zdanie ‘*Jakieś M jest takie, że żadne S nie jest jego R-em*’ (np. ‘Jakiś Niemiec jest taki, że żaden Polak nie jest jego przyjacielem’). Ale przecież nie o to chodzi w wyjściowej formie głębokiej ‘*Każde S NIE [jest R-em każdego M-a]*’ (‘Każdy Polak nie jest przyjacielem jakiegoś Niemca’).

Zatem nie jest prawdą to, co niektórzy głoszą, że gdy przed orzeczeniem występuje słowo ‘nie’, to ZAWSZE w podmiocie ma występować słowo ‘żadne’, w miejsce słowa ‘każde’.

Oczywiście powyższe problemy nie występują, gdy mamy do czynienia z nierelatywnym orzeczeniem imiennym postaci ‘jest M-em’. Wówczas struktury głębokie:

Jakiś S NIE [jest M-em]

Każde S NIE [jest M-em]

mają prostą postać

Jakiś S nie jest M-em

Każde S nie jest M-em

a tę ostatnią można zastąpić przez:

Żadne S nie jest M-em

Podobne rozważania można przeprowadzić, gdy orzeczenie zbudowane jest nie z orzeczenia imiennego, lecz z czasownika (przechodniego bądź nie). □

W poniższych zadaniach nie jest istotna wartość logiczna rozpatrywanych zdań. Wszystkie mają to samo polecenie: **Proszę podać zaprzeczenie podanego zdania, które nie jest negacją przedzdaniową.**

ZADANIE 1. *Każdy student przeczytał każdą książkę z lektury*

ROZWIĄZANIE. Chodzi nam o zdanie, które mam mówić to samo, co negacja:

Nie jest tak, że każdy student przeczytał każdą książkę z lektury

NIE [*Każdy student przeczytał każdą książkę z lektury*]

Stąd mamy kolejno:

Jakiś student NIE [przeczytał każdą książkę z lektury]

Jakiś student nie przeczytał jakiejs książki z lektury

Dwukrotnie zastosowaliśmy przejście: nie każdy → jakiś nie.⁵ □

ZADANIE 2. *Każdy student przeczytał jakiś podręcznik z logiki*

ROZWIĄZANIE. Chodzi nam o zdanie, które mam mówić to samo, co negacja:

Nie jest tak, że każdy student przeczytał jakiś podręcznik z logiki

NIE [*Każdy student przeczytał jakiś podręcznik z logiki*]

Stąd mamy kolejno:

Jakiś student NIE [przeczytał jakiś podręcznik z logiki]

Jakiś student nie przeczytał żadnego podręcznika z logiki □

ZADANIE 3. *Jakiś student przeczytał każdą książkę z lektury*

ROZWIĄZANIE. Chodzi nam o zdanie, które mam mówić to samo, co negacja:

Nie jest tak, że jakiś student przeczytał każdą książkę z lektury

NIE [*Jakiś student przeczytał każdą książkę z lektury*]

Stąd mamy kolejno:

Każdy student NIE [przeczytał każdą książkę z lektury]

Każdy student nie przeczytał jakiejs książki z lektury

UWAGA! Nie można było zastosować w podmiocie zwrotu ‘żaden’, gdyż forma:

Żaden student nie przeczytał jakiejs książki z lektury

o ile w ogóle jest poprawna, znaczyłaby to samo, co forma:

Jakaś książka z lektury nie jest przeczytana przez żadnego studenta

Tutaj ten nieprzeczytany podręcznik jest wspólny dla wszystkich studentów. Inaczej jest w otrzymanym zdaniu ‘*Każdy student nie przeczytał jakiejs książki z lektury*’, gdzie wskazanie nieprze-

⁵ Łatwiej to widać, gdy ostatnie dwie „formy głębokie” zapiszemy odpowiednio jako zdania: ‘*Jakiś student nie każdy zalecany podręcznik przeczytał*’ oraz ‘*Jakiś student jakiegos zalecanego podręcznika nie przeczytał*’

czytanego podręcznika zależy od wybranego studenta. Zatem zdanie ze zwrotem ‘każdy’ znaczy co innego niż zdanie ze zwrotem ‘żadne’. To ostatnie znaczyłoby to samo, co poniższe dwa to znaczące to samo:

Żaden student nie przeczytał pewnej książki z lektury

Pewna książka z lektury nie jest przeczytana przez żadnego studenta

Wydaje się, że zdania o układzie zwrotów kwantyfikatorowych ‘żaden ... jakiś ...’ są niepoprawne. Skoro drugi kwantyfikator nie jest w nich zależny od pierwszego, więc lepiej zastąpić go układem ‘żaden ... pewien ...’.⁶

Zatem formę ‘NIE [Jakiś S ...]’ zmieniamy na ‘Żaden S NIE[...]’ tylko wówczas, gdy albo w orzeczeniu w ogóle nie ma kwantyfikatora, albo jest kwantyfikator ‘jakiś’, który przekształcimy na ‘żaden’. Gdy jest inaczej formę ‘NIE [Jakiś S ...]’ zmieniamy na ‘Każdy S NIE[...]’.

ZADANIE 4. *Jakiś Polak jest krewnym jakiegoś króla*

ROZWIĄZANIE. Chodzi nam o zdanie, które mam mówić to samo, co negacja:

Nie jest tak, że jakiś Polak jest krewnym jakiegoś króla

NIE [Jakiś Polak jest krewnym jakiegoś króla]

Stąd mamy kolejno:

Żaden Polak NIE [jest krewnym jakiegoś króla]

Żaden Polak nie jest krewnym żadnego króla.

W podmiocie wstawiliśmy ‘żaden’, gdyż było wiadomo, że w orzeczeniu będzie również występować to słowo kwantyfikujące. Można byłoby pozostać przy:

Każdy Polak nie jest krewnym żadnego króla

byłby jednak «trochę gorszy styl».

Sprzeczność logiczna

Wypowiedź LOGICZNIE sprzeczna to wypowiedź sprzeczna na mocy swojej FORMY LOGICZNEJ.⁷ Wypowiedzi sprzeczne nie na mocy swojej formy logicznej, lecz na mocy użytych w nich specyficznych słów nazywamy sprzecznymi POZALOGICZNIE.

PRZYKŁAD 1. Przykładami wypowiedzi sprecznych pozallogicznie są:

Jestem za. Jestem przeciw

Jan jest ojcem Piotra. Piotr jest ojcem Jana

Pierwsza wypowiedź jest sprzeczna na mocy sensu słów ‘za’ i ‘przeciw’, druga zaś na mocy sensu słowa ‘ojciec’.

Oczywiście, zamiast o wypowiedziach będziemy mówić o grupach zdań.

Do tej pory zajmowaliśmy się logicznie sprzecznymi grupami zdań, chociaż nie odwoływaliśmy się bezpośrednio do formy logicznej zdań tworzących grupę.

Spostrzeżenie 1. Zdania p i $\neg p$ są wzajemnie logicznie sprzeczne.

⁶ Przypomnijmy przykład wskazujący różnicę pomiędzy kwantyfikatorami ‘jakiś’ a ‘pewien’:

Codziennie nad moim domem przelatuje jakaś czapla

Codziennie nad moim domem przelatuje pewna czapla

W pierwszym przypadku czapla zależna jest od dnia. W drugim nie ma tej zależności — ma to być ta sama czapla.

⁷ Oczywiście frazy ‘logicznie sprzeczne’ nie należy rozumieć jako: sprzeczne i logiczne (to byłby zupełny bezsens, gdyż sprzeczne ma być nielogiczne). Podobnie jest ze zwrotem ‘sprzeczność logiczna’: ma to być sprzeczność na mocy samej formy logicznej.

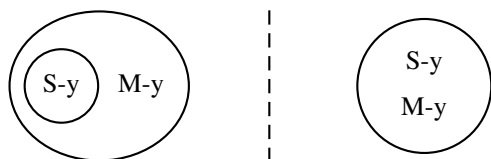
Dowód. Oczywiście, na mocy samej definicji, zdanie p i jego negacja $\neg p$ są wzajemnie sprzeczne. Skoro jest to sprzeczność wyznaczona przez samą formę (a nie treść zdania p), więc jest to sprzeczność logiczna. \square

Spostrzeżenie 2. Niech S i M symbolizują jakieś nazwy ogólne. Dla większej precyzji załóżmy, że pojęcie S na pewno nie jest puste. Wówczas grupa złożona z trzech poniższych zdań:

Coś jest S-em
Każde S jest M-em
Każde S nie jest M-em

jest logicznie sprzeczna.⁸

Dowód. Bez względu na treść pojęć S i M zdania pierwsze i drugie łącznie są prawdziwe tylko w dwóch przypadkach:



Pierwsze i trzecie zdania są zaś łącznie prawdziwe tylko w dwóch przypadkach:



Zatem nie ma takiej możliwości, aby trzy podane zdania były razem prawdziwe, czyli są one wzajemnie sprzeczne. Jest tak na mocy formy logicznej, więc jest to sprzeczność logiczna. \square

Widzimy więc, że pojęcie logicznej sprzeczności jest bardzo przydatne. Jeśli wykazemy, że dana grupa zdań jest logicznie sprzeczna, to wszelkie grupy zdań o tej samej formie są logicznie sprzeczne, czyli także są sprzeczne. Ponadto wiemy czym jest spowodowana ta sprzeczność.

Zajmiemy się teraz sprzecznościami dotyczącymi tzw. *logiki przekonań* oraz *logiki wiedzy*.

Spostrzeżenie 3. Niech x symbolizuje nazwę jakiegoś człowieka, a p i q jakieś zdania wzajemnie sprzeczne. Wtedy zdania o formach:

x sądzi, że p
 x sądzi, że q

są również wzajemnie sprzeczne.

Ogólnie: jeśli zbiór zdań $\{p_1, \dots, p_n\}$ ($n \geq 1$) jest sprzeczny, to jest taki również zbiór złożony z poniższych zdań:

x sądzi, że p_1
 \vdots
 x sądzi, że p_n

Dowód. Jak wspomnieliśmy na poprzednim wykładzie, Łukasiewicz wykazał, że nie można mieć sprzecznych przeświadczeń. Gdyby badane zdania były jednocześnie prawdziwe, to x miałby wzajemnie sprzeczne przeświadczenia: p_1, \dots, p_n . A tak nie może być właśnie na mocy psychologicznej zasady sprzeczności. \square

Spostrzeżenie 3 można wykorzystać do szczególnego przypadku, gdy zdanie q jest negacją zdania p . (Otrzymamy uogólnienie przykładu 6.)

⁸ Jak pamiętamy z poprzednich wykładów, w interpretacji matematycznej dla pustego pojęcia S zdania drugie i trzecie są prawdziwe (z punktu widzenia języka potocznego jest to «sztuczne» rozwiązanie). Dlatego dodaliśmy pierwsze zdanie 'Coś jest S-em', aby spostrzeżenie 2 było prawdziwe nawet w matematycznej interpretacji.

Spostrzeżenie 4. Niech x symbolizuje nazwę jakiegoś człowieka, a p jakieś zdanie. Wtedy zdania o formach:

x sądzi, że p

x sądzi, że $\neg p$

są wzajemnie logicznie sprzeczne.

Dowód. Na mocy samej definicji, zdanie p i jego negacja $\neg p$ są wzajemnie sprzeczne. Zatem również analizowane zdania są wzajemnie sprzeczne. Skoro uzyskaliśmy to z samej formy logicznej zdań, więc jest to sprzeczność logiczna. \square

ZADANIE 5. Niech x symbolizuje nazwę jakiegoś człowieka, a S i M symbolizują jakieś nazwy ogólne. Proszę wykazać, że wtedy zdania postaci:

x sądzi, że coś jest S -em

x sądzi, że każde S jest M -em

x sądzi, że każde S nie jest M -em

są wzajemnie logicznie sprzeczne.

ROZWIĄZANIE. Na mocy spostrzeżenia 2, logicznie sprzeczna jest grupa złożona z trzech poniższych zdań:

$\text{Coś jest } S\text{-em}$

$\text{Każde } S \text{ jest } M\text{-em}$

$\text{Każde } S \text{ nie jest } M\text{-em}$

Teraz korzystamy ze spostrzeżenia 3 dla $n = 3$ (nie można mieć sprzecznych przeświadczeń). \square

Spostrzeżenie 5. Niech x symbolizuje nazwę jakiegoś człowieka, a p jakieś zdanie. Wtedy zdania o formach:

x wie, że p

x wie, że $\neg p$

są wzajemnie logicznie sprzeczne.

Dowód. Na mocy samej definicji, zdanie p i jego negacja $\neg p$ są wzajemnie sprzeczne. Nie można jednak mieć sprzecznej wiedzy. Zatem analizowane zdania nie mogą być jednocześnie prawdziwe. Skoro uzyskaliśmy to z samej ich formy logicznej, więc jest to sprzeczność logiczna. \square

Aby lepiej poznać pojęcia *zaprzeczenia logicznego* oraz *sprzeczności logicznej* musimy lepiej poznać samo pojęcie *formy logicznej*. Będziemy analizować formy związane ze spójnikami zdaniowymi ‘i’ oraz ‘lub’.

Spójnik ‘i’ jako spójnik koniunkcji

Słowo ‘koniunkcja’ znaczy mniej więcej tyle, co słowo ‘połączenie’. Jeśli jednak mówimy, że spójnik zdaniowy ‘i’ został użyty jako spójnik koniunkcji, to nie chodzi o samo połączenie zdań, gdyż każdy spójnik zdaniowy spaja zdania. W przypadku koniunkcji chodzi o łączenie informacji zawartych w zdaniach składowych. Koniunkcja to takie łączenie tych informacji, przy którym nie powstaje żadna nowa informacja, której *explicite* nie byłoby w zdaniach składowych.

Oczywiście, jak wszystkie zdania, koniunkcje przekazują informacje tylko wówczas, gdy są niesprzeczne. Podobnie też jak w przypadku innych zdań, koniunkcje mogą przekazywać fałszywe informacje. Przykłady koniunkcji:

(a) $22 + 24 = 46$ i Toruń jest stolicą Polski

(b) Warszawa leży nad Wisłą i Toruń leży nad Wisłą

(c) Kościuszko jest bohaterem narodowym i Piłsudski jest bohaterem narodowym

(d) Byłem w Tatrach i byłem nad Bałtykiem

Skoro koniunkcja ma przekazywać wyłącznie SUMĘ informacji zawartych w zdaniach składowych, więc musi być przemienna, tzn. nie jest istotna kolejność zdań składowych. Stąd pływnie wniosek: *Jeśli w połączeniu zdań spójnikiem ‘i’ istotna jest kolejność składników, to nie jest to koniunkcja*. Przykłady:

(e) Anna ukończyła studia i wróciła do rodzinnego miasta

(f) Zabili go i uciekł

(g) Jan potknął się i złamał nogę

(h) Wyłączono prąd i zgasło światło

W zdaniu (e) *implicite* zawarta jest informacja, że sytuacja opisana w pierwszym zdaniu składowym zaszła przed sytuacją opisaną w drugim. Ponadto, zawarta jest *implicite* jeszcze jedna informacja, że Anna odbyła studia poza rodzinnym miastem. Zupełnie sprzeczne dodatkowe informacje przekazuje zdanie po zmianie kolejności zdań składowych.

W zdaniu (f) spójnik ‘i’ użyty jest w sensie zwrotu ‘a potem’. Zatem — obok informacji zawartych *explicite* w zdaniach składowych — mamy również informację, że wcześniej go zabili niż uciekł. A skoro tylko żywi ludzie mogą uciekać, więc powyższe zdanie NIE MOŻE BYĆ prawdziwe. Dwie jawne informacje nie mogą być łącznie prawdziwe z trzecią, która *implicite* zawarta jest w tym zdaniu. Zatem «suma» tych trzech informacji nie przedstawia żadnej informacji. Te jawne informacje — zawarte bezpośrednio w zdaniach ‘Zabili go’ i ‘Uciekł’ — nie są sprzeczne. Przecież mogło być tak, że wcześniej uciekł, a potem go zabili. Wówczas oba zdania składowe będą prawdziwe. Z tego też względu po zmianie kolejności zdań składowych otrzymamy już wypowiedź niesprzeczną.

W zdaniu (g) dodatkowe informacje dotyczą kolejności zajścia opisanych faktów oraz tego, że pierwszy z nich był przyczyną, a drugi skutkiem.⁹ W tym zdaniu spójnik ‘i’ użyty jest w sensie zwrotu ‘i wskutek tego’. Zmiana kolejności zdań składowych zmienia sens zdania. Podobna analiza dotyczy zdania (h).

W zapisie symbolicznym spójnik ‘i’ użyty jako spójnik koniunkcji zastąpimy symbolem ‘&’. (Używa się również symbolu ‘^’.) Warunki prawdziwości koniunkcji opisuje poniższa tabelka.

p	q	$p \& q$
prawda	prawda	prawda
prawda	fałsz	fałsz
fałsz	prawda	fałsz
fałsz	fałsz	fałsz

W tabelce tej poszczególne wiersze opisują jaką wartość ma koniunkcja w zależności od wartości zdań składowych. W wierszu pierwszym rozpatrujemy przypadek, w którym oba zdania składowe są jednocześnie prawdziwe. Istotne jest jednak to, że koniunkcja nie przekazuje żadnej innej informacji poza informacjami zawartymi w zdaniach składowych. Skoro te informacje są prawdziwe, więc ich SUMA też jest prawdziwa, czyli koniunkcja jest prawdziwa. W pozostałych trzech przypadkach co najmniej jedna z sumowanych informacji jest fałszywa. Zatem ich suma również jest fałszywa, czyli koniunkcja jest fałszywa.

Aby skrócić zapis w tabelce przyjmujemy: 1 dla: prawda; 0 dla: fałsz. Otrzymamy tzw. *tabelkę zero-jedynkową*:

p	q	$p \& q$
1	1	1
1	0	0
0	1	0
0	0	0

⁹ Oczywiście, nie chodzi tu o to, że z pierwszego zdania wynika drugie. Można się przecież potknąć, lecz nie złamać nogi (i tak na ogół bywa).

Reasumując, koniunkcje spełniają poniższą zasadę:

- *Dana koniunkcja jest prawdziwa wtedy i tylko wtedy, gdy oba składniki ma prawdziwe.*

Powyższe podwójne zdanie warunkowe wyraża to samo, co łącznie poniższe dwa zdania warunkowe. Pierwsze z nich oddaje czytanie tabelki „z lewa do prawa”, a drugie „z prawa do lewa”:

(†) *Jeśli koniunkcja ma oba składniki prawdziwe, to ona także jest prawdziwa.*

(‡) *Jeśli koniunkcja jest prawdziwa, to oba składniki ma prawdziwe.*

Dodajmy, że spójnik ‘i’ użyty w sensie koniunkcji jest synonimiczny ze spójnikiem ‘oraz’.

Inne użycia spójnika zdaniowego ‘i’

Gdy spójnik ‘i’ NIE jest użyty jako spójnik koniunkcji, to z podanej dla koniunkcji zasady odpada fragment (†). Tzn. na podstawie samej prawdziwości obu składników nie można stwierdzić jaką wartość ma zdanie. Przykładowo, może być fałszywe zdanie ‘Anna wróciła do rodzinnego miasta i ukończyła studia’ przy dwóch prawdziwych składnikach: ‘Anna wróciła do rodzinnego miasta’ oraz ‘Anna ukończyła studia’, gdyż była inna kolejność opisanych faktów.

Z zasady podanej dla koniunkcji pozostaje jedynie fragment (b). Innymi słowy, otrzymujemy jedynie «częściową» tabelkę:

p	q	$p \text{ i } q$
prawda	prawda	prawda/fałsz
prawda	fałsz	fałsz
fałsz	prawda	fałsz
fałsz	fałsz	fałsz

prawda/fałsz: zdanie jest prawdziwe bądź fałszywe w zależności od tego czy wszystkie niejawne informacje zawarte w zdaniu ‘ $p \text{ i } q$ ’ także są prawdziwe.

Przykłady (e)–(h) pokazują, że dla prawdziwości całości nie wystarcza prawdziwość zdań składowych. Jeśli zdanie postaci ‘ $p \text{ i } q$ ’ nie jest koniunkcją, to zawarta w nim informacja jest sumą więcej niż dwóch informacji: dwóch ze zdań składowych oraz dodatkowych informacji, otrzymanych *implicite*. Zatem na to aby zdanie postaci ‘ $p \text{ i } q$ ’ było prawdziwe konieczne jest, aby wszystkie informacje, jawne i niejawne, były prawdziwe. Pierwszy wiersz nic nam nie mówi o wartości dodatkowych informacji. Zatem nic nie wiemy o wartości zdania ‘ $p \text{ i } q$ ’. W pozostałych trzech przypadkach co najmniej jedna z sumowanych jawnych informacji jest fałszywa. Zatem suma wszystkich informacji również jest fałszywa.

Zauważmy, że podana tabela spełnia «częściową» zasadę:

- *Jeśli zdanie postaci ‘ $p \text{ i } q$ ’ jest prawdziwe, to oba składniki ma prawdziwe.*

Istotnie, znak ‘prawda/fałsz’ stoi tylko w wierszu, gdzie oba składniki są prawdziwe. Ponadto, mówi on, że zdanie ‘ $p \text{ i } q$ ’ ma wartość zależną od tego czy także prawdziwe są pozostałe informacje przekazywane przez całe zdanie. Reasumując: jeśli całe zdanie jest prawdziwe, to wszystkie informacje muszą być prawdziwe, czyli również te zawarte w zdaniach składowych.

Ostatnią tabelkę można uszczegółowić w przypadku, gdy spójnik ‘i’ jest użyty w sensie zwrotów: ‘a potem’, ‘i następnie’ itp. (por. przykłady (g) i (h)). Pierwszy wiersz, w którym mamy alternatywną ‘prawda/fałsz’, rozbija się na dwa podprzypadki:

p	q	przypadek	p , a potem q
prawda	prawda	fakt opisany w p zaszedł przed faktem opisanym w q	prawda
prawda	prawda	fakt opisany w p nie zaszedł przed faktem opisanym w q	fałsz
prawda	fałsz		fałsz
fałsz	prawda		fałsz
fałsz	fałsz		fałsz

W pierwszym przypadku prawdziwa jest dodatkowa informacja, że fakt opisany w pierwszym zdaniu zaszedł przed faktem opisanym w drugim zdaniu. Zatem mamy sumę trzech prawdziwych informacji. W drugim przypadku ta dodatkowa informacja jest fałszywa. Zatem też jest fałszywa suma informacji. W pozostałych trzech przypadkach co najmniej jedna z sumowanych jawnych informacji jest fałszywa. Zatem nie ma potrzeby rozpatrywania kolejności zajścia faktów (gdyż nie ma faktów). Suma wszystkich zawartych w zdaniu informacji jest fałszywa.

Analogiczną tabelkę otrzymamy dla zdań, w których spójnik ‘i’ jest synonimem zwrotów ‘i wskutek tego’, ‘i w wyniku tego’ itp. (por. przykłady (g) i (h)).¹⁰

Spójniki zdaniowe ‘lub’, ‘albo’ i ‘bądź’

Tak jak w przypadku spójnika ‘i’ także tytułowe trzy spójniki używane są do spajania różnych części zdania. Tu zajmiemy się jednak nimi jako spójnikami zdaniowymi.

W zależności od kontekstu użycia spójniki zdaniowe ‘lub’, ‘albo’ i ‘bądź’ mają różne znaczenia. Jednak w danym kontekście spójniki te są synonimiczne. Znaczy to, że zamieniając je w jakimś zdaniu otrzymamy zdania mówiące to samo.

Ilustruje to poniższy przykład wypowiedzi lekarza skierowanych do pacjenta. Bez względu na użyty spójnik otrzymujemy rozkazy mówiące to samo:

Zażywaj lekarstwo rano lub wieczorem!

Zażywaj lekarstwo rano albo wieczorem!

Zażywaj lekarstwo rano bądź wieczorem!

Lekarz każe pacjentowi zażywać lekarstwo dokładnie raz dziennie (pacjent może wybrać porę).

Podobna sytuacja jest w poniższym przykładzie, w którym oświadczamy komuś że zamierzamy wybrać się do niego na kolację:

Przyjdę na kolację w czwartek lub w piątek

Z kontekstu wynika, że zapowiadamy swoje przyjście tylko na jedną kolację. Będzie tak również wtedy, gdy zamiast ‘lub’ użyjemy ‘albo’ lub ‘bądź’.

W obu przypadkach użyliśmy tzw. *wykluczającego* (inaczej: *rozłącznego*) znaczenia spójników ‘lub’, ‘albo’ i ‘bądź’. Wiadomo jednak, że w logice matematycznej preferowane jest tzw. *niewykluczające* użycie spójnika ‘lub’. Niektórzy mówią nawet, że spójnik ten jest taki że «swej natury». Jest to mniemanie zupełnie błędne. Ciekawie wyglądałoby nasze przyjście na kolację w czwartek i w piątek, oraz tłumaczenie gospodarzom na drugiej kolacji, że przecież użyty przez nas spójnik ‘lub’ nie wykluczał przyjścia na obie kolacje („czyż byście nie znali logiki? Nie znacie tabelki alternatywy?”).

Oczywiście, w języku naturalnym spotykamy niewykluczające ‘lub’, lecz mamy także niewykluczające spójniki ‘albo’ i ‘bądź’. Zauważmy, że w trzy poniższe wypowiedzi świadka kolizji drogowej mówią to samo i nie wykluczają tego, że zaszły obie sytuacje opisane w zdaniach składowych:

Kierowca był pijany lub kierownica była niesprawna

Kierowca był pijany albo kierownica była niesprawna

Kierowca był pijany bądź kierownica była niesprawna

Inne przykłady wykluczających bądź niewykluczających użyć spójników ‘lub’, ‘albo’ i ‘bądź’ podaliśmy w zadaniach do rozdziału 2. Z tamtego tekstu przypomnijmy tylko, że niekiedy w tekstach pisanych, gdy zależy nam, aby czytelnik zrozumiał ‘lub’ w sposób niewykluczający,

¹⁰ Nasuwa się pytanie: dlaczego w logice matematycznej zajmujemy się spójnikiem zdaniowym ‘i’ tylko jako spójnikiem koniunkcji, a pomijamy inne jego znaczenia? W teoriach matematycznych badamy obiekty abstrakcyjne. Zatem nie ma potrzeby analizowania spójnika ‘i’ jako skrótu dla ‘i następnie’, gdyż obiekty matematyczne są bezczasowe. Nie ma również potrzeby analizowania ‘i’ jako skrótu dla ‘i wskutek tego’, gdyż obiekty matematyczne nie są fizyczne, a tylko pomiędzy zjawiskami fizycznymi zachodzą relacje przyczynowo-skutkowe.

używamy sztucznego spójnika ‘i/lub’, co ma w sposób obrazowy pokazać, że dopuszczamy to, iż oba zdania składowe są prawdziwe («albo oba są prawdziwe, albo tylko jedno»).

Tak jak w zadaniach do rozdziału 2 w zapisie symbolicznym spójniki ‘lub’, ‘albo’ i ‘bądź’ przy niewykluczającym rozumieniu zastąpimy symbolem ‘ \vee ’. Oznaczenie bierze się stąd, iż w łacinie analogicznie rozumiany spójnik ma postać ‘vel’. (Przy wykluczającym znaczeniu w łacinie używany jest spójnik ‘aut’.) Przy wykluczającym rozumieniu spójniki ‘lub’, ‘albo’ i ‘bądź’ zastąpimy symbolem ‘ $\underline{\vee}$ ’.

Otrzymujemy więc dwie tabelki:

p	q	$p \vee q$	$p \underline{\vee} q$
prawda	prawda	prawda	fałsz
prawda	fałsz	prawda	prawda
fałsz	prawda	prawda	prawda
fałsz	fałsz	fałsz	fałsz

W tzw. postaci zero-jedynkowej powyższe tabelki ma postać:

p	q	$p \vee q$	$p \underline{\vee} q$
1	1	1	0
1	0	1	1
0	1	1	1
0	0	0	0

Reasumując:

- W znaczeniu niewykluczającym zdanie mówi, że zaszła co NAJMNIEJ jedna z opisywanych sytuacji.
- W znaczeniu wykluczającym zdanie mówi, że zaszła DOKŁADNIE jedna z opisywanych sytuacji.

Biorąc pod uwagę to, że zdanie jest prawdziwe, gdy jest tak jak ono głosi otrzymujemy podane tabelki dla obu znaczeń rozpatrywanych spójników.

Iteracje spójników. Spójniki wieloargumentowe

Argumentami danego spójnika nazywamy zdania, które spaja on w jedno zdanie.¹¹ Takie spójniki jak ‘jeżeli..., to’ oraz ‘...wtedy i tylko wtedy, gdy ...’ są dwuargumentowe wprost ze swojej natury (czyli łączą dwa zdania, tworząc jedno zdanie). Narzuca się pytanie: *Czy wszystkie spójniki są dwuargumentowe? Albo inaczej: Czy wszystkie spójniki można wyrazić używając tylko spójników dwuargumentowych?*

W logice matematycznej na powyższe pytania padają odpowiedzi twierdzące. Spójnik ‘i’ jest używany tylko w znaczeniu koniunkcji (symbolicznie: ‘&’ albo ‘ \wedge ’). Ponadto, spójniki ‘lub’, ‘albo’ i ‘bądź’ są używane jedynie w sensie alternatywy niewykluczającej. Pokażemy, że nie potrzebna jest ani trójargumentowa koniunkcja, ani trójargumentowa alternatywa niewykluczająca.

Zachodzi analogiczna sytuacja do dodawania i mnożenia. Oba są działaniami dwuargumentowymi. Mimo to rozumiemy zapisy ‘ $8 + 2 + 5$ ’ oraz ‘ $8 \cdot 2 \cdot 5$ ’, gdyż użyte działania są łączne. Pierwszy zapis można interpretować w ten sposób, że do 2 dodaliśmy do 8, a do otrzymanej sumy dodaliśmy 5, tj. jako zapis ‘ $(8 + 2) + 5$ ’. Wolno również traktować zapis ‘ $8 + 2 + 5$ ’ w ten sposób, że do 2 dodaliśmy 5, a następnie tę sumę dodaliśmy do 8, tj. jako zapis ‘ $8 + (2 + 5)$ ’. Wolna tak czynić, gdyż operacja dodawania jest łączna, czyli dla dowolnych liczb x i y : $(x+y)+z = x+(y+z)$. Analogicznie jest z operacją mnożenia. Nie są więc potrzebne trójargumentowe odpowiedniki opisanych operacji.

Trójargumentowa koniunkcja zapisywana w formie ‘ p, q i r ’ ma tabelkę:

¹¹ Jest to odpowiednik matematycznego pojęcia *argumentu funkcji*.

p	q	r	$\&_3(p, q, r)$
prawda	prawda	prawda	prawda
siedem przypadków	pozostałych		fałsz

Spostrzeżenie 6 (Trójargumentowa koniunkcja). Trójargumentowa koniunkcja MUSI MIEĆ tę samą wartość, co złożenie dwóch dwuargumentowych koniunkcji:

$$\&_3(p, q, r) \equiv (p \& q) \& r$$

Symbol ‘ \equiv ’ zastępuje zwrot ‘jest logicznie równoważne z’, co ma znaczyć, że zdania o wskazanych formach (łączone przez symbol ‘ \equiv ’) MUSZĄ mieć tę samą wartość logiczną.

Dowód. Można to także wyliczyć w sposób «tabelkowy»:

				K	$K \& r$
p	q	r	$\&_3(p, q, r)$	$p \& q$	$(p \& q) \& r$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	0	1	0
1	0	1	0	0	0
1	0	0	0	0	0
0	1	1	0	0	0
0	1	0	0	0	0
0	0	1	0	0	0
0	0	0	0	0	0

W każdym przypadku mamy tę samą wartość. □

Spostrzeżenie 7. Kolejność członów w złożeniu dwóch dwuargumentowych koniunkcji nie jest istotna, czyli niezależnie od układu nawiasów musimy mieć tę samą wartość:

$$(p \& q) \& r \equiv p \& (q \& r)$$

Oznacza to, że koniunkcja jest łączna.

Dowód. Sprawdzamy to tak jak poprzednio metodą tabelkową. Obie strony są prawdziwe tylko w jednym przypadku, gdy trzy składniki są prawdziwe. □

Skoro koniunkcja jest łączna, więc w zapisie nawiasy można opuszczać. Zapis

$$p \& q \& r$$

zastępuje oba złożenia dwóch koniunkcji. Zastępuje również koniunkcję trójargumentową, czyli jest ona teoretycznie zbędna.

Ogólnie: skoro koniunkcja jest łączna, więc zapis:

$$p_1 \& p_2 \& \dots \& p_n \quad (n > 1)$$

zastępuje dowolne złożenie $n - 1$ koniunkcji.¹² Zastępuje również koniunkcję n -argumentową, czyli jest ona teoretycznie zbędna.

Inna jest jednak sytuacja, gdy spójnik ‘i’ jest użyty w sensie ‘i następnie’. Przykład:

Anna ukończyła studia, wróciła do rodzinnego miasta i wyszła za mąż

To zdanie nie ma formy ‘ $(p$ i następnie $q)$ i następnie r ’. Przecież fakt opisany w zdaniu r ma zajść po fakcie opisanym w zdaniu q , a nie po tym co jest ujęte w nawiasie. W zdaniu ‘ p i

¹² Przykładowo dla $n = 4$ mamy: ‘ $((p \& q) \& r) \& s$ ’, ‘ $(p \& (q \& r)) \& s$ ’, ‘ $(p \& q) \& (r \& s)$ ’, ‘ $p \& ((q \& r) \& s)$ ’ i ‘ $p \& (q \& (r \& s))$ ’. Wszystkie te koniunkcje muszą mieć tę samą wartość.

następnie q ’ nie jest opisane fakt (złożony), lecz opisane są dwa fakty plus zachodzący pomiędzy nimi stosunek czasowy. Oczywiście, nie ma też sensu złożenie ‘ p i następnie (q i następnie r)’.

Jest tak również, gdy spójnik ‘i’ używamy w sensie ‘i wskutek tego’. Przykład:

Potknął się, złamał nogę i nie przystąpił do egzaminu.

To zdanie nie ma formy ‘(p i wskutek tego q) i wskutek tego r ’. Przecież fakt opisany w zdaniu r ma zajść na skutek faktu opisanego w zdaniu q , a nie na skutek tego co jest opisane w nawiasie. W zdaniu ‘ p i następnie q ’ nie jest opisane fakt (złożony), lecz opisane są dwa fakty plus zachodzący pomiędzy nimi związek przyczynowo-skutkowy. Oczywiście, nie ma też sensu złożenie ‘ p i wskutek tego (q i wskutek tego r)’.

Zatem w znaczeniach innych niż koniunkcja spójnik ‘i’ ma tyle argumentów ile łączy zdań. Oczywiście, w pewnych sytuacjach można mieszać znaczenia spójnika ‘i’. Przykłady:

*Ukończyła studia, wróciła do rodzinnego miasta, wyszła za mąż i żyli długo i szczęśliwie
Potknął się i złamał nogę, a potem wyzdrowiał*

Pierwszym zdaniu ostatnie ‘i’ jest koniunkcją, a wcześniejsze to ‘i następnie’. Nie będziemy podawać ogólnej teorii takich łączów.

Teraz zauważymy:

Spostrzeżenie 8. Kolejność członów w złożeniu dwóch dwuargumentowych alternatyw wykluczających nie jest istotna, czyli niezależnie od układu nawiasów musimy mieć tę samą wartość:

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

Oznacza to, że alternatywa wykluczająca jest łączna.

Dowód. Można to także wyliczyć w sposób «tabelkowy»:

			A	$A \vee r$	B	$p \vee B$
p	q	r	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$	$q \vee r$	$p \vee (q \vee r)$
1	1	1	0	1	0	1
1	1	0	0	0	1	1
1	0	1	1	0	1	0
1	0	0	1	1	0	1
0	1	1	1	0	0	0
0	1	0	1	1	1	1
0	0	1	0	1	1	1
0	0	0	0	0	0	0

W każdym przypadku mamy tę samą wartość. □

Sprawdzając złożenie dwóch wykluczających alternatyw odkryliśmy, że są prawdziwe również wtedy, gdy trzy człony mają prawdziwe. Zatem nie mogą one zastąpić trójargumentowej alternatywy wykluczającej mówiącej, że dokładnie jeden składnik jest prawdziwy, czyli wykluczonej następującą tabelką:

p	q	r	$\vee_3(p, q, r)$
1	1	1	0
1	1	0	0
1	0	1	0
1	0	0	1
0	1	1	0
0	1	0	1
0	0	1	1
0	0	0	0

Mamy zatem:

$$\vee_3(p, q, r) \not\equiv (p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

Symbol ‘ $\not\equiv$ ’ zastępuje zwrot ‘nie jest logicznie równoważne z’, co ma znaczyć, że zdania łączone przez symbol ‘ $\not\equiv$ ’ NIE MUSZĄ mieć tej samej wartości logicznej (nie znaczy to, że łączone zdania muszą mieć różną wartość; w siedmiu przypadkach mają tę samą wartość, a w jednym nie).

Alternatywa wykluczająca nie ma ustalonej ilości argumentów. W każdym przypadku ma mieć tyle argumentów ile zdań połączono:

- mówi ona, że zaszła DOKŁADNIE jedna z opisywanych sytuacji.

Otrzymujemy odpowiednie tabelki z faktu, że zdanie jest prawdziwe, gdy jest tak jak ono głosi.

Z opisanych powodów alternatywa wykluczająca nie jest używana w logice matematycznej. Inaczej jest z alternatywą niewykluczającą, która zachowuje się podobnie jak koniunkcja.

Trójargumentowa alternatywa niewykluczająca zapisywana w formie ‘ p, q lub r ’ ma tabelkę:

p	q	r	$\vee_3(p, q, r)$
fałsz	fałsz	fałsz	fałsz
siedem pozostałych przypadków			prawda

Spostrzeżenie 9 (Trójargumentowa alternatywa niewykluczająca). Trójargumentowa alternatywa niewykluczająca MUSI MIEĆ tę samą wartość, co złożenie dwóch dwuargumentowych alternatyw niewykluczających:

$$\vee_3(p, q, r) \equiv (p \vee q) \vee r$$

Symbol ‘ \equiv ’ zastępuje zwrot ‘jest logicznie równoważne z’, co ma znaczyć, że zdania o wskazanych formach (łączone przez symbol ‘ \equiv ’) MUSZĄ mieć tę samą wartość logiczną.

Dowód. Można to także wyliczyć w sposób «tabelkowy»:

				A	$A \vee r$
p	q	r	$\vee_3(p, q, r)$	$p \vee q$	$(p \vee q) \vee r$
1	1	1	1	1	1
1	1	0	1	1	1
1	0	1	1	1	1
1	0	0	1	1	1
0	1	1	1	1	1
0	1	0	1	1	1
0	0	1	1	0	1
0	0	0	0	0	0

W każdym przypadku mamy tę samą wartość. □

Spostrzeżenie 10. Kolejność członów w złożeniu dwóch dwuargumentowych alternatyw niewykluczających nie jest istotna, czyli niezależnie od układu nawiasów musimy mieć tę samą wartość:

$$(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$$

Oznacza to, że alternatywa niewykluczająca jest łączna.

Dowód. Sprawdzamy to tak jak poprzednio metodą tabelkową. Obie strony są fałszywe tylko w jednym przypadku, gdy trzy składniki są fałszywe. □

Skoro koniunkcja jest łączna, więc w zapisie nawiasy można opuszczać. Zapis

$$p \vee q \vee r$$

zastępuje oba złożenia dwóch alternatyw niewykluczających. Zastępuje również trójargumentową alternatywę niewykluczającą, czyli jest ona teoretycznie zbędna.

Ogólnie: skoro alternatywa niewykluczająca jest łączna, więc zapis:

$$p_1 \vee p_2 \vee \cdots \vee p_n \quad (n > 1)$$

zastępuje dowolne złożenie $n - 1$ alternatyw niewykluczających. Zastępuje również n -argumentową alternatywę niewykluczającą, czyli jest ona teoretycznie zbędna.