

Andrzej Pietruszczak

Konspekt do wykładu z „Logiki I”*

(15 i 22.12.2006 oraz 5 i 12.01.2007)

Dokończenie tematu „Uzasadnianie przez analogię”

Na początku wykładu powróciliśmy do omawiania uzasadnienia przez analogię i porównania go z uzasadnieniem przez indukcję enumeracyjną niezupełną. Odpowiedni materiał jest zamieszczony w poprzednim konspekcie (tj. materiał do wykładów z 1 i 8 grudnia 2006).

Powrót do tematu „Uzasadnianie dedukcyjne”

Nauki dedukcyjne

Zaczęliśmy od przypomnienia definicji zamieszczonej w materiale do wykładów z 1 i 8 grudnia 2006).

Definicja. Dane zdanie jest uzasadnione dedukcyjne wtedy i tylko wtedy, gdy znajdziemy dla niego grupę innych zdań, która spełnia następujące warunki:

- (a) grupa składa się ze zdań wcześniej uzasadnionych (bezpośrednio bądź pośrednio),
- (b) z tej grupy wynika dane zdanie.

O zdaniu, które jest dedukcyjnie uzasadnione mówimy również, że jest udowodnione (ma dowód).

Przyjmujemy, że wynikanie jest relacją obiektywną¹. W ten sposób rozwiązujemy problem z punktem (b) w podanej definicji. Mamy jednak pewien problem z punktem (a). Mianowicie występuje w nim pojęcie *uzasadnienia*: mówimy, że zdania w rozpatrywanej grupie mają być wcześniej uzasadnione. Mogą być uzasadnione bezpośrednio bądź pośrednio, a w tym drugim przypadku nie wykluczamy, że są właśnie uzasadnione dedukcyjnie.

Można przyjąć, że mamy do czynienia z tzw. definicją rekurencyjną. Aby można ją w pełni zastosować trzeba mieć tzw. warunki wyjściowe. W tym przypadku warunkami wyjściowymi będą pewne zdania uzasadnione bezpośrednio.

Uwaga 1. Aby lepiej zrozumieć postać definicji rekurencyjnych spójrzmy na następujące «określenie» pojęcia *bycia matematykiem* (oczywiście, podana definicja jest żartem):

1. Matematykiem jest ten i tylko ten, kogo inny matematyk uważa za matematyka.
2. Euklides jest matematykiem.

Aby punkt pierwszy mógł «zacząć pracować» musimy zacząć od jakiegoś matematyka. I właśnie drugi punkt wskazuje nam tego «wyjściowego» matematyka. Ten wyjściowy matematyk wskazuje innych matematyków; ci zaś kolejnych; ci kolejni znowu kolejnych itd.

* © 2006, 2007 prawa autorskie do całości ma wyłącznie autor, Andrzej Pietruszczak.

¹ Tzn. „jest niezależne od czyichś poglądów”. Przynajmniej takie ma być tzw. wynikanie logiczne (zajmujemy się nim szczegółowo na kolejnym wykładzie).

Nie znaczy to jednak, że Euklides ma być pierwszym matematykiem w historii. Euklides mógł przecież uważać za matematyków jakichś wcześniejszych od niego myślicieli. Sądzę, że równie dobrze, zamiast Euklidesa można byłoby wziąć np. Hilberta. Ten drugi zapewne uważał tego pierwszego za matematyka, więc w drugim kroku zaczynamy «wyliczankę» od Euklidesa. Z drugiej strony wychodząc od Euklidesa dojdziemy po iluś tam krokach do Hilberta.² □

Aby można było zastosować w danej nauce definicję uzasadnienia dedukcyjnego trzeba mieć w tej nauce wcześniej jakieś zdania uzasadnione bezpośrednio. W tzw. naukach dedukcyjnych (np. matematyce), w których jedynym dopuszczalnym pośrednim uzasadnieniem jest uzasadnianie dedukcyjne musimy wyjść od pewnych zdań nazywanych *aksjomatami*. Grają one rolę zdań bezpośrednio uzasadnionych. Niektóre z tych aksjomatów wyrażają jedynie przyjęte konwencje terminologiczne, tzn. konwencje te uzasadniają ich prawdziwość.³) Zdania te nazywamy definicjami. Prawdziwość pozostałych aksjomatów może być różnie uzasadniana, np. ich oczywistością.⁴

Dedukcja raz jeszcze

Na poprzednich dwóch wykładach omawiając wynikanie i uzasadnienie dedukcyjne zajmowaliśmy się następującym sloganem:

„Dedukcja prowadzi od ogółu do szczegółu”.

Powiedzieliśmy, że chodzi o to, że przy wynikaniu wniosków ma wydobywać pewne szczegóły, które są uwikłane w różne informacje zawarte w przesłankach. Innymi słowy, wniosek «wysupłuje» z przesłanek pełną (maksymalną) informację na temat tego o czym jest mowa we wniosku.

Pokazaliśmy, że nie każde wynikanie ma powyższą właściwość. Może się zdarzyć, że na temat występujących we wniosku „jednostek sensu” wniosek przekazuje mniejszą informację niż przesłanki. Przykładowo, takie są poniższe wynikania:

$$\frac{a \text{ jest S-em}}{a \text{ jest S i/lub M-em}} \downarrow \qquad \frac{a \text{ jest M-em}}{a \text{ jest S i/lub M-em}} \downarrow$$

Trudno jednak odrzucać powyższe wynikania, gdyż przydatne są one przy uzasadnieniu zachodzenia poniższego wynikania:

$$\frac{\begin{array}{l} \text{Każde S jest M-em} \\ \text{Każde P jest Q-em} \\ a \text{ jest S-em i/lub P-em} \end{array}}{a \text{ jest M i/lub Q-em}} \downarrow$$

Ma ono opisywaną własność: wniosek wydobywa («wysupłuje») z przesłanek maksymalną szczegółową informację dotyczącą tylko obiektu *a*, M-ów oraz Q-ów.⁵

Pokażmy teraz, iż zachodzi powyższe wynikanie. Załóżmy, że trzy przesłanki są prawdziwe. Na podstawie trzeciej z nich prawdziwy jest co najmniej jeden z dwóch przypadków (i) *a* jest S-em; (ii) *a* jest P-em.

² Oczywiście, ten żart można przekształcić w «określenie» pojęcia *bycia filozofem*. Trzeba tylko jakoś dobrać «wyjściowego» filozofa. Też zapewne nie powinno być z tym problemu.

³ Np. ‘Każda liczba parzysta jest naturalna i podzielna przez 2, oraz odwrotnie każda liczba naturalna podzielna przez 2 jest parzysta’, ‘Każdy kawaler jest mężczyzną, który nigdy się nie ożenił, oraz odwrotnie’.

⁴ Np. do takich aksjomatów zaliczymy zdanie mówiące o przechodniości, zachodzącej wśród liczb, relacji *bycia większą*: jeśli jedna liczba jest większa od drugiej, a ta druga jest większa od trzeciej, to ta pierwsza jest większa od trzeciej’. Innym przykładem aksjomatu jest zdanie stwierdzające przemienność dodawania liczb ‘dla dowolnych liczb *x* i *y*: $x + y = y + x$ ’.

⁵ Można to pokazać za pomocą odpowiednich modeli (tak jak na poprzednim wykładzie). Nie będziemy tego jednak robić, gdyż jest bardzo dużo modeli, w których prawdziwe są przesłanki.

W przypadku (i), na podstawie pierwszej przesłanki mamy:

$$\frac{\begin{array}{l} \text{Każde S jest M-em} \\ a \text{ jest S-em} \end{array}}{a \text{ jest M-em}} \downarrow$$

Zatem wnioskując według poprzednio podanego schematu:

$$\frac{a \text{ jest M-em}}{a \text{ jest M i/lub Q-em}} \downarrow$$

W przypadku (ii), na podstawie drugiej przesłanki mamy:

$$\frac{\begin{array}{l} \text{Każde P jest Q-em} \\ a \text{ jest P-em} \end{array}}{a \text{ jest Q-em}} \downarrow$$

Zatem wnioskując według poprzednio podanego schematu:

$$\frac{a \text{ jest Q-em}}{a \text{ jest M i/lub Q-em}} \downarrow$$

W obu alternatywnych przypadkach otrzymujemy wniosek: a jest M i/lub Q-em. Zatem wynika on z podanych przesłanek.

Podobna sytuacja dotyczy wynikania:

$$\frac{\begin{array}{l} \text{Jeżeli } p, \text{ to } r \\ \text{Jeżeli } q, \text{ to } s \\ p \vee q \end{array}}{r \vee s} \downarrow$$

Ma ono opisywaną własność: wniosek wydobywa («wysupłuje») z przesłanek maksymalną szczegółową informację dotyczącą tylko zdań r i s .

Zachodzenie powyższego wynikanie można wykazać następująco. Załóżmy, że trzy przesłanki są prawdziwe. Na podstawie trzeciej z nich zachodzi co najmniej jeden z dwóch przypadków (i) zdanie p jest prawdziwe; (ii) zdanie q jest prawdziwe.

W przypadku (i), na podstawie pierwszej przesłanki mamy wynikanie:

$$\frac{\begin{array}{l} \text{Jeżeli } p, \text{ to } r \\ p \end{array}}{r} \downarrow$$

Zatem wnioskując według schematu:

$$\frac{r}{r \vee s} \downarrow$$

W przypadku (ii), na podstawie drugiej przesłanki mamy:

$$\frac{\begin{array}{l} \text{Jeżeli } q, \text{ to } s \\ q \end{array}}{s} \downarrow$$

Zatem wnioskując według poniższego schematu:

$$\frac{s}{r \vee s} \downarrow$$

W obu alternatywnych przypadkach otrzymujemy wniosek: ' $r \vee s$ '. Zatem wynika on z podanych przesłanek.

W podanym dowodzie użyliśmy jednak wynikań:

$$\frac{r}{r \vee s} \downarrow \qquad \frac{s}{r \vee s} \downarrow$$

które nie spełniają omawianej własności (tj. «nie zachowują informacji» z przesłanki). Przy wynikaniu nie zwracamy jednak uwagi na zachowywanie informacji. Interesuje nas tylko zachowywanie prawdy (tj. prawdziwość przesłanek ma gwarantować prawdziwość wniosku).

Weryfikacja hipotez

Założmy, że nasza wiedza zgromadzona jest w pewnej grupie zdań W (zaliczamy do nich także różne konwencje terminologiczne). Oczywiście, zdania w grupie W muszą być odpowiednio uzasadnione. Zatem naturalne jest przyjęcie, że wszystkie one są prawdziwe.⁶

Przyjmijmy teraz, że pewnego zdania h nie potrafimy uzasadnić (ani bezpośrednio, ani pośrednio⁷). Oczywiście, stąd wynika, że zdania h nie zaliczyliśmy do grupy W . Nie znaczy to jednak, że tylko na tej podstawie wolno nam uznać zdanie h za fałszywe. W danym momencie ani nie wiemy czy zdanie h jest prawdziwe⁸, ani nie wiemy czy h jest fałszywe, gdyż w tej kwestii jeszcze nic nie zrobiliśmy. Zatem traktujemy zdanie h jako hipotezę.

Sprawdzanie hipotezy polega na próbie jej sfalsyfikowania (tj. pokazania, że jest fałszywa). Jeśli ta próba się powiedzie, to oczywiście przestaniemy uważać zdanie h za hipotezę.

Sprawdzanie (weryfikację) hipotez często się myli z bezpośrednim falsyfikowaniem zdań ogólnych. Dlatego na początku zajmiemy się tym drugim tematem.

Bezpośrednie falsyfikowanie zdań ogólnych

Założmy, że zastanawiamy się nad prawdziwością zdania ogólnego ‘Każda kobieta jest matką’.⁹ Weźmy jednak pod uwagę Panią Martę, jedną z obecnych na wykładzie studentek. Mamy uzasadnione dwa zdania: ‘Marta jest kobietą’ i ‘Marta nie jest matką’. Ponieważ zachodzi wynikanie:

$$\begin{array}{c} \text{Marta jest kobietą} \\ \text{Marta nie jest matką} \\ \hline \text{Nie każda kobieta jest matką} \end{array} \downarrow$$

więc wniosek jest uzasadniony dedukcyjnie, czyli bezpośrednio sfalsyfikowaliśmy zdanie ogólne ‘Każda kobieta jest matką’.

W podanym przykładzie podane zdanie ogólne trudno w ogóle uznać za hipotezę. Zadanie ogólne można nazwać *hipotezą*, jeśli falsyfikujący przypadek, o ile w ogóle istnieje, jest trudny do znalezienia.

Ogólnie, zastanawiamy się nad prawdziwością zdania postaci ‘Każde S jest M -em’. Znajdujemy jednak pewien obiekt a , który jest S -em, lecz nie jest M -em. Przeprowadzamy więc uzasadnienie dedukcyjne oparte na następującym schemacie wynikania:

$$\begin{array}{c} a \text{ jest } S\text{-em} \\ a \text{ nie jest } M\text{-em} \\ \hline \text{Nie każdy } S \text{ jest } M\text{-em} \end{array} \downarrow$$

Skoro przesłanki mamy uzasadnione oraz zachodzi wynikanie, więc mamy do czynienia z uzasadnieniem dedukcyjnym. Falsyfikujemy więc bezpośrednio wyjściowe zdanie ‘Każde S jest M -em’.

Podobnie bezpośrednio falsyfikujemy zdania ogólne postaci ‘Żadne S nie jest M -em’. Znajdujemy jednak pewien obiekt a , który jest S -em i M -em. Przeprowadzamy więc uzasadnienie dedukcyjne oparte na następującym schemacie wynikania:

$$\begin{array}{c} a \text{ jest } S\text{-em} \\ a \text{ jest } M\text{-em} \\ \hline \text{Nie jest tak, że żaden } S \text{ nie jest } M\text{-em} \end{array} \downarrow$$

⁶ Inaczej nie uznalibyśmy ich za składniki naszej wiedzy. Można przy tym dopuścić, że później okaże się, iż wśród zdań w grupie W jest jakieś fałszywe (tj. wystąpiło jego błędne uzasadnienie). Dopóki jednak uznajemy grupę W za naszą wiedzę, to musimy uznawać wszystkie zdania w tej grupie za prawdziwe.

⁷ Przypomnijmy, że uzasadnienie pośrednie danego zdania polega na uzasadnieniu go na podstawie innych zdań wcześniej uzasadnionych, czyli na podstawie jakichś zdań z grupy W (tj. naszej wiedzy).

⁸ Przecież nie potrafimy go uzasadnić.

⁹ Oczywiście, przykład jest trywialny i służy jedynie za ilustrację rozważań ogólnych.

Skoro przesłanki mamy uzasadnione oraz zachodzi wynikanie, więc mamy do czynienia z uzasadnieniem dedukcyjnym. Falsyfikujemy więc wyjściowe zdanie ‘Żaden S nie jest M-em’.

Przykładowo, wskazując na swoją matkę sfalsyfikujesz zdanie ‘Żadna kobieta nie jest matką’. Na poprzednim wykładzie mieliśmy do czynienia z uzasadnieniem:

To jest kawałek miedzi	
To jest przewodnik prądu	
Nie jest tak, że żaden kawałek miedzi nie jest przewodnikiem prądu	↓

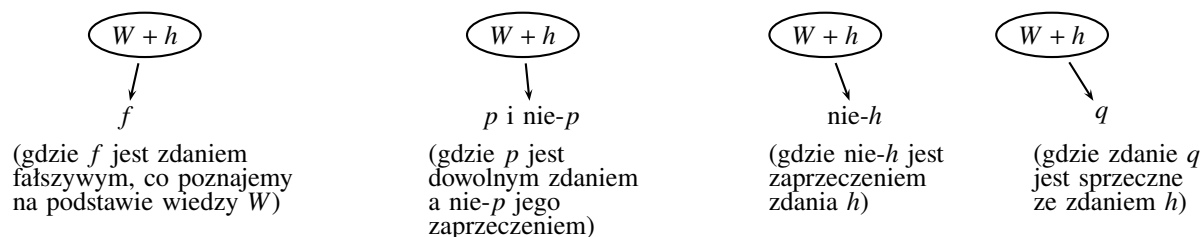
Zatem omawialiśmy bezpośrednie sfalsyfikowanie ‘Żaden kawałek miedzi nie jest przewodnikiem prądu’.

Weryfikacja (sprawdzanie) hipotez

Powróćmy do naszego wyjściowego zdania h , które nie potrafimy uzasadnić na podstawie naszej wiedzy W . Zakładamy, że nie potrafimy też go bezpośrednio sfalsyfikować. Spróbujemy jednak zbadać, czy zdanie h musimy uznawać za hipotezę. Zbadamy, czy nie okaże się, że zdanie h jest jednak fałszywe. Wtedy je odrzucimy, a naszą wiedzę poszerzymy o negację zdania h .

Rozszerzamy grupę W o naszą hipotezę h . Oznaczamy tę grupę przez $W + h$ (nie jest to już nasza wiedza, a jedynie wiedza plus hipoteza). Z grupy $W + h$ wynikają różne wnioski.

Interesują nas cztery przypadki wniosków, które ewentualnie mogą wynikać z grupy $W + h$. Interesujące nas przypadki przedstawimy graficznie w następujący sposób:



1. W pierwszym przypadku napotkaliśmy jakiś wniosek f , którego fałszywość poznajemy na podstawie wiedzy W . Np. do grupy W należy zdanie $\text{nie-}f$, tj. zaprzeczenie zdania f . Skoro w grupie W są same zdania prawdziwe, więc $\text{nie-}f$ jest prawdziwe, czyli f jest fałszywe.¹⁰

Skorzystamy z opisanej już wcześniej zasady:

Jeżeli z danej grupy zdań wynika jakiś fałszywy wniosek, to co najmniej jedno zdanie w tej grupie jest fałszywe.

Istotnie, gdyby wszystkie zdania w danej grupie były prawdziwe, to wynikający z niej wniosek też byłby prawdziwy (gdyż przy wynikaniu prawdziwość przesłanek gwarantuje prawdziwość wniosku).

Skoro z grupy $W + h$ wynika fałszywe zdanie f , więc — na podstawie powyższej przypomnianej zasady — co najmniej jedno zdanie w grupie $W + h$ musi być fałszywe. Racjonalnym jest przyjęcie, że to właśnie zdanie h jest fałszywe. Przecież wszystkie zdania z grupy W uznaliśmy za prawdziwe.

2. W drugim przypadku zdanie ‘ p i $\text{nie-}p$ ’ jest fałszywe, jako zadanie wewnętrznie sprzeczne. Postępujemy więc analogicznie, jak w przypadku pierwszy. Zatem co najmniej jedno zdanie w grupie $W + h$ musi być fałszywe. Podobnie jak wyżej przyjmujemy, że jest nim właśnie zdanie h .

3. W trzecim przypadku także musimy odrzucić zdanie h . Gdyby było ono prawdziwe, to jego zaprzeczenie, tj. zdanie $\text{nie-}h$, byłoby fałszywe. Po wtóre jednak, grupa $W + h$ składałaby się ze zdań prawdziwych. Zatem ze zdań prawdziwych miałyby wynikać jakieś zdanie fałszywe, a to przeczy definicji wynikania. Zatem zdanie h nie może być prawdziwe.

¹⁰ Może się także zdarzyć przypadek, że jedynie grupa $W + f$ jest sprzeczna, czyli nie jest możliwe, aby wszystkie jej składniki były prawdziwe. Skoro w grupie W są same zdania prawdziwe, więc f nie jest prawdziwe.

4. Czwarty przypadek jest podobny do trzeciego. Także musimy odrzucić zdanie h . Gdyby było ono prawdziwe, to zdanie q , które jest sprzeczne z h , musiałoby być nieprawdziwe.¹¹ Z drugiej strony jednak, grupa $W + h$ składałaby się ze zdań prawdziwych. Zatem ze zdań prawdziwych miałyby wynikać jakieś zdanie nieprawdziwe, a to przeczy definicji wynikania. Zatem zdanie h nie może być prawdziwe.

Przykłady odrzucania hipotez z zastosowaniem sposobów 3 i 4 zostaną pokazane na następnym wykładzie.

Uwaga 2. (a) Zauważmy, że nie można twierdzić, iż w trzecim i czwartym przypadku otrzymujemy sprzeczność w sposób absolutny. Otrzymujemy sprzeczność jedynie przy założeniu, że zdanie h jest prawdziwe. Z tego też powodu odrzucamy jego prawdziwość.

(b) Analogiczna sytuacja była w przypadku drugim. Nie otrzymujemy sprzeczności na podstawie samej naszej wiedzy W , lecz na podstawie wiedzy z dołączoną hipotezą, czyli $W + h$. Z tego powodu odrzucamy tę hipotezę h .

(c) W trzecim przypadku uzyskany wniosek nie jest fałszywy (tak, jak to było w dwóch pierwszych przypadkach). To analiza całej sytuacji zmusza nas do odrzucenia zdania h , gdyż inaczej otrzymamy sprzeczność (wniosek nie- h jest więc prawdziwy).

W czwartym przypadku o wartości wniosku nie można ogólnie nic powiedzieć. Może być także fałszywy.¹² To analiza całej sytuacji zmusza nas do odrzucenia zdania h , gdyż inaczej otrzymamy sprzeczność. □

Zatem we wszystkich opisanych czterech sytuacjach zdanie h przestaje być hipotezą. Odrzucamy to zdanie.

Uwaga 3. Nie możemy wykluczyć, że odrzucona przez nas — w wyniku weryfikacji — hipoteza h , w przyszłości okaże się prawdziwa. Nadal jednak będzie ona sprzeczna z wiedzą W . Wówczas musimy „zrewidować” naszą wiedzę W i znaleźć w niej fałszywe ogniwo (por. przypis 6).

Jeśli W ma stanowić wiedzę zgromadzoną w jakiejś nauce, to ma to miejsce w przypadku przełomowych odkryć naukowych (tzw. „rewolucji naukowych”). □

Zastanówmy się jednak, jak interpretować przypadek, gdy pewna grupa ludzi (albo pojedynczy człowiek) nie potrafi w powyżej opisany sposób obalić danego zdania na podstawie swojej wiedzy. Czy ma to znaczyć, że zdanie to przestaje być hipotezą i należy je uznać za prawdziwe? Oczywiście, NIE!

Przecież to, że z grupy $W + h$ wynikają (do tej pory) same wnioski prawdziwe, nie znaczy, że w grupie $W + h$ są same prawdziwe przesłanki. Sama definicja wynikania nie wyklucza, że przy fałszywej przesłance może wynikać prawdziwy wniosek.

Zastanówmy się również z jakich powodów mogliśmy nie obalić sprawdzanej hipotezy h . Mogliśmy nie obalić tego zdania z dwóch powodów:

- Zdanie h da się potencjalnie obalić na gruncie naszej wiedzy W , tzn. z grupy $W + h$ wynika jakiś wniosek z nią sprzeczny.¹³ Nie potrafiliśmy tego jednak dokonać.
- Z grupy $W + h$ nie wynika żaden wniosek z nią sprzeczny. Wówczas zdanie h jest niesprzeczne z naszą wiedzą. Tzn. istnieje możliwość, że — obok naszej wiedzy — prawdziwe jest zdanie h .

W drugim przypadku, jeśli ponadto zdanie h nie wynika z naszej wiedzy W , to będzie ono niezależne od naszej wiedzy. Obok opisanej wyżej, będziemy mieć także drugą możliwość: prawdziwa jest nasza wiedza oraz zdanie nie- h . Nie wiemy jednak, które z dwóch zdań h i nie- h jest prawdziwe.

¹¹ Pamiętajmy, że zdania wzajemnie sprzeczne łącznie nie mogą być jednocześnie prawdziwe.

¹² Przypomnijmy, że zdania sprzeczne nie mogą być łącznie prawdziwe, lecz dopuszczalne jest, aby dwa zdania sprzeczne łącznie były fałszywe. Np. zdania w parze ‘Jan jest kawalerem’ i ‘Jan jest żonaty’ mogą łącznie być fałszywe, a zdania w ‘Każda kobieta jest matką’ i ‘Żadna kobieta nie jest matką’ są fałszywe.

¹³ Tzn. z grupy $W + h$ wynika jakiś wniosek poprzednio opisany (patrz czterech przypadki).

Z reguły trudno odróżnić oba przypadki. Zdanie h staje się hipotezą, gdyż ani nie potrafimy go uzasadnić, ani nie potrafimy go obalić.

Przykład 1. Przykładem takiej hipotezy jest tzw. *hipoteza Goldbacha*. Jest ona jednym z najstarszych nierozwiązanych problemów w teorii liczb, liczy sobie ponad 250 lat. Problem dotyczy liczb pierwszych¹⁴:

*Każda liczba parzysta większa od 2 jest sumą dwóch
składników będących liczbami pierwszymi.*

Oczywiście, żadna ze sprawdzanych liczb parzystych większych od 2 nie falsyfikuje tej hipotezy, a sprawdzono komputerowo to zdanie dla wszystkich liczb parzystych od 4 do 2^{19} , tj. każdą z nich przedstawiono jako sumę dwóch składników będących liczbami pierwszymi.¹⁵ □

Reasumując, weryfikując (sprawdzając) hipotezę h można co najwyżej ją odrzucić. Nie można jej przyjąć za prawdziwą, czyli zmienić w tezę.

Jak już pisaliśmy sprawdzanie (weryfikację) hipotez często się myli z bezpośrednim falsyfikowaniem zdań ogólnych. Może jednak ktoś podać przykład negatywnej weryfikacji hipotezy w sytuacji, gdy można ją bezpośrednio sfalsyfikować.

Przykład 2. Tak jak poprzednio weźmy jednak pod uwagę Panią Martę, jedną z obecnych na wykładzie studentek. W skład naszej wiedzy wchodzi dwa zdania: ‘Marta jest kobietą’ i ‘Marta nie jest matką’. Wiemy, że falsyfikują one bezpośrednio zdanie ‘Każda kobieta jest matką’.

$$\begin{array}{c} \text{Marta jest kobietą} \\ \text{Marta nie jest matką} \\ \hline \text{Nie każda kobieta jest matką} \end{array} \downarrow$$

Mimo to może ktoś twierdzić, że będzie weryfikować jako hipotezę zdanie h = ‘Każda kobieta jest matką’.

Już samo podane powyżej wynikanie da się «podciągnąć» pod sprawdzanie hipotez. Z naszej wiedzy wyciągnęliśmy wniosek będący zaprzeczeniem hipotezy h . Problem w tym, że przy wyciąganiu wniosku w ogóle nie była nam potrzebna hipoteza h .

Można zatem przedstawić inne rozumowanie, w którym użyjemy hipotezy h . Z hipotezy i naszej wiedzy wyciągamy wniosek:

$$\begin{array}{c} \text{Każda kobieta jest matką} \\ \text{Marta jest kobietą} \\ \hline \text{Marta jest matką} \end{array} \downarrow$$

Wniosek ten zaprzecza naszej wiedzy, gdyż wiemy, że Marta nie jest matką. Zatem odrzucamy naszą hipotezę.

Widać jednak, że jest to «sztuczne podeście» do problemu, gdyż podane zdanie ogólne można obalić bezpośrednio. □

¹⁴ Przypomnijmy: liczba pierwsza to taka liczba naturalna, która jest podzielna przez **dokładnie dwie** liczby.

Mamy: 1 nie jest liczbą pierwszą (gdyż jest podzielne tylko przez jedną liczbę); 0 nie jest liczbą pierwszą (gdyż jest podzielne przez nieskończenie wiele liczb); 2 jest jedyną parzystą liczbą pierwszą. Zatem w hipotezie Goldbacha pomijamy parzystą liczbę 2, gdyż mamy jedynie rozkłady: $2 = 1 + 1$ i $2 = 2 + 0$, czyli 2 nie jest sumą dwóch składników pierwszych. Mówimy o dwóch składnikach sumy, a nie o dwóch liczbach pierwszych, gdyż $4 = 2 + 2$ i jest to jedyny sposób przedstawienia liczby 4 jako sumy dwóch składników pierwszych.

Oczywiście, z podanej definicji wynika, że skoro dowolna liczba pierwsza ma dokładnie dwa dzielniki, więc jest podzielna przez 1 i siebie samą. Jest to zgodne ze «starą» konwencją, stosowaną za czasów Goldbach: liczba pierwsza to liczba naturalna podzielna jedynie przez 1 oraz przez samą siebie. Według tej starej konwencji liczba 1 była pierwsza. Zatem w starym sformułowaniu podana hipoteza wyglądała trochę inaczej: dotyczyła wszystkich liczb parzystych dodatnich. Przy starej definicji liczb pierwszych można także zadać pytanie: *Czy każda dodatnia liczba parzysta jest sumą dwóch (różnych) liczb pierwszych?* Teraz dopuszczamy sumę: $4 = 1 + 3$.

¹⁵ Autorem hipotezy Goldbacha nie jest Goldbach, lecz Euler. Ten pierwszy sformułował inną hipotezę: *Każda liczba naturalna większa od 5 jest sumą trzech składników będących liczbami pierwszymi*. Euler uprościł oryginalną hipotezę Goldbacha do postaci dla liczb parzystych. Wersja Euler jest jednak znana jako hipoteza Goldbacha.

Przykład weryfikacji hipotezy:***Zbiór wszystkich liczb pierwszych jest skończony***

Poprzednio podaliśmy przykład negatywnej weryfikacji hipotezy, którą można było bezpośrednio sfalsyfikować. Na pewno nie jest taką następującą hipotezą dotyczącą liczb pierwszych (choćby z tego powodu, że nie jest ona zdaniem ogólnym typu ‘Każde S ...’):

Hipoteza (odrzucona). *Zbiór wszystkich liczb pierwszych jest skończony.*

Wiedza. Zaliczamy do niej to, co wiemy o liczbach naturalnych, a m.in. następujące zdanie: *Każda liczba naturalna większa od 1 jest podzielna przez jakąś liczbę pierwszą.*

Przeprowadzimy negatywną weryfikację tej hipotezy w oparciu o naszą wiedzę o liczbach. Przeprowadzimy tę weryfikację na dwa sposoby. Pierwszy przeprowadzimy najpierw nieformalnie, tj. bez używania pomocniczych symboli.

P (). Załóżmy naszą hipotezę. Skoro zbiór wszystkich liczb pierwszych ma być według niej skończony, więc możemy pomnożyć przez siebie wszystkie liczby pierwsze. Do otrzymanego iloczynu dodajemy liczbę 1. Otrzymana w ten sposób liczba jest większa od 1 (gdyż 0 nie jest liczbą pierwszą, więc iloczyn wszystkich liczb pierwszych jest większy od 0). Skonstruowana liczba nie jest jednak podzielna przez żadną z liczb pierwszych. Istotnie, przy dzieleniu tej liczby przez dowolną z liczb pierwszych zawsze otrzymamy resztę 1.

Znaleźliśmy zatem liczbę naturalną większą od 1, która nie jest podzielna przez żadną liczbę pierwszą. Stąd otrzymujemy: Nie każda liczba naturalna jest podzielna przez jakąś liczbę pierwszą.¹⁶ A to jest zaprzeczeniem naszej wiedzy. Odrzucamy hipotezę, gdyż doprowadziła nas do wniosku będącego zaprzeczeniem naszej wiedzy. □

P (). Z naszej hipotezy wynika, że dla pewnej dodatniej liczby naturalnej n wszystkie liczby pierwsze dadzą się ponumerować od liczbami od 1 do n . Oznaczmy te liczby pierwsze przez:

$$p_1, \dots, p_n.$$

Pomnóżmy przez siebie wszystkie liczby pierwsze, a do iloczynu dodajmy 1:

$$p_1 \cdot \dots \cdot p_n + 1.$$

Łatwo zauważyć, że po pierwsze, $p_1 \cdot \dots \cdot p_n + 1 > 1$, gdyż $p_1 \cdot \dots \cdot p_n > 0$. Po drugie, liczby p_1, \dots, p_n nie dzielą liczby $p_1 \cdot \dots \cdot p_n + 1$. Przecież dzielenie liczby $p_1 \cdot \dots \cdot p_n + 1$ odpowiednio przez liczby p_1, \dots, p_n zawsze daje resztę 1.

Znaleźliśmy zatem liczbę naturalną większą od 1, która nie jest podzielna przez żadną liczbę pierwszą, gdyż liczby p_1, \dots, p_n są wszystkimi liczbami pierwszymi. Stąd otrzymujemy: Nie każda liczba naturalna jest podzielna przez jakąś liczbę pierwszą. A to jest zaprzeczeniem naszej wiedzy. Odrzucamy hipotezę, gdyż doprowadziła nas do wniosku będącego zaprzeczeniem naszej wiedzy. □

Bardziej znany jest drugi sposób obalenia podanej hipotezy (częściowo pokrywa on się z pierwszym, lecz zrobimy powtórzenie, aby mieć całość wywodu):

D (). Z naszej hipotezy wynika, że dla pewnej dodatniej liczby naturalnej n wszystkie liczby pierwsze dadzą się ponumerować od liczbami od 1 do n . Oznaczmy te liczby pierwsze przez:

$$p_1, \dots, p_n.$$

¹⁶ Zdanie ‘Nie każda liczba naturalna jest podzielna przez jakąś liczbę pierwszą’ mówi to samo, co zdanie ‘Jakaś liczba naturalna nie jest podzielna przez żadną liczbę pierwszą’.

Pomnóżmy przez siebie wszystkie liczby pierwsze, a do iloczynu dodajmy 1:

$$p_1 \cdot \dots \cdot p_n + 1.$$

Łatwo zauważyć, że po pierwsze, $p_1 \cdot \dots \cdot p_n + 1 > 1$, gdyż $p_1 \cdot \dots \cdot p_n > 0$. Po drugie, liczby p_1, \dots, p_n nie dzielą liczby $p_1 \cdot \dots \cdot p_n + 1$. Przecież dzielenie liczby $p_1 \cdot \dots \cdot p_n + 1$ odpowiednio przez liczby p_1, \dots, p_n zawsze daje resztę 1.

Korzystając z naszej wiedzy otrzymujemy wniosek: liczba $p_1 \cdot \dots \cdot p_n + 1$ musi być podzielna przez jakąś liczbę pierwszą. Zatem oprócz liczb pierwszych p_1, \dots, p_n musi istnieć jeszcze inna liczba pierwsza.

W trakcie wywodu otrzymaliśmy dwa wnioski:

liczby p_1, \dots, p_n są wszystkimi liczbami pierwszymi,
liczby p_1, \dots, p_n nie są wszystkimi liczbami pierwszymi.

Do tej sprzeczności doprowadziła nas przyjęta hipoteza. Zatem odrzucamy ją. □

Odrzucając tę hipotezę dostajemy jej zaprzeczenie, czyli następującą tezę:

Teza. *Zbiór wszystkich liczb pierwszych nie jest skończony.*

Widzimy zatem, że negatywne sprawdzanie hipotez możemy wykorzystać do tzw. dowodów nie wprost. Mamy udowodnić tezę t . Przyjmujemy hipotezę $h = \text{nie-}t$. Negatywnie weryfikujemy tę hipotezę. Zatem ją odrzucamy, czyli przyjmujemy jako naszą tezę zdanie t .

Mógłby nam ktoś zarzucić, że dowodząc nie wprost naszej tezy wykonywaliśmy jakieś «podejrzane sztuczki». Mógłby nam zarzucić, że posługiwaliśmy się «liczbami, które nie istnieją», np.: iloczyn wszystkich liczb pierwszych, albo liczba oznaczona w dowodzie przez ‘ n ’. Te zarzuty byłyby bezpodstawne. Przecież pokazywaliśmy tylko, co by było, gdyby hipoteza była prawdziwa. Hipotetyczny charakter dowodu byłby bardziej widoczny, gdybyśmy używali w nim sformułowań w tzw. trybie warunkowym. Przykładowo, zamiast zwrotów ‘jest’ i ‘nie jest’ stosowali ‘byłaby’ i ‘nie byłaby’.

Zauważmy jednak, że dyskusja nad poprawnością dowodu nie wprost jest zupełnie zbędna. Drugi sposób obalania hipotezy dotyczącej skończoności zbioru wszystkich liczb pierwszych wskazuje, że podaną tezę można także dowieść wprost, opierając się na poniższym twierdzeniu pomocniczym:

Lemat 1. *Dla każdego skończonego zbioru liczb pierwszych istnieje taka liczba pierwsza, która nie należy do tego zbioru.*

Dowód. Bierzemy dowolny skończony zbiór liczb pierwszych $\{p_1, \dots, p_n\}$. Z jego elementów tworzymy liczbę:

$$p_1 \cdot \dots \cdot p_n + 1.$$

Łatwo zauważyć, że po pierwsze, $p_1 \cdot \dots \cdot p_n + 1 > 1$, gdyż $p_1 \cdot \dots \cdot p_n > 0$. Po drugie, liczby p_1, \dots, p_n nie dzielą liczby $p_1 \cdot \dots \cdot p_n + 1$. Przecież dzielenie liczby $p_1 \cdot \dots \cdot p_n + 1$ odpowiednio przez liczby p_1, \dots, p_n zawsze daje resztę 1.

Korzystając z naszej wiedzy otrzymujemy wniosek: liczba $p_1 \cdot \dots \cdot p_n + 1$ musi być podzielna przez jakąś liczbę pierwszą. Zatem oprócz liczb pierwszych p_1, \dots, p_n musi istnieć jeszcze inna liczba pierwsza. □

Z tego lematu (pomocniczego twierdzenia) wynika bezpośrednio następujący wniosek:

Wniosek 1. *Żaden skończony zbiór liczb pierwszych nie jest zbiorem wszystkich liczb pierwszych.*

Stąd zaś dostajemy naszą Tezę.

Przykłady weryfikacji hipotez: metoda przekątniowa

Zajmiemy się pewnymi hipotezami dotyczącymi przeliczalności pewnych zbiorów. Te hipotezy także negatywnie zweryfikujemy za pomocą tzw. *metody przekątniowej Cantora*¹⁷ (albo inaczej: *diagonalnej*). To pokaże, że istnieją co najmniej dwa rodzaje nieskończoności: przeliczalna (taka jak w przypadku liczb naturalnych) oraz nieprzeliczalna.

Poruszamy ten temat ponieważ sama metoda przekątniowa jest bardzo ciekawa, a ponadto stosowana jest do badania bardzo interesujących pojęć dotyczących nieskończoności.

Równoliczność zbiorów

Zastanówmy się na początek: *Czy nie umiając liczyć można porównać liczebność dwóch pudełek zapalek?* Tak, wystarczy wyjmować po jednej zapalce z każdego pudełka i układać zapalke w pary. Mamy trzy możliwe sytuacje (pudełka oznaczmy prze P_1 i P_2):

1. Z pudełka P_1 wyrwaliśmy ostatnią zapalke i połączyliśmy ją w parę z ostatnią zapalką z pudełka P_2 . Mówimy wówczas, że w obu pudełkach zbiory zapalek są *równoliczne*. (Oczywiście, nie wiemy po ile zapalek liczą te pudełka.)
2. Z pudełka P_1 wyrwaliśmy ostatnią zapalke i połączyliśmy ją w parę z zapalką pudełka P_2 , lecz w tym drugim pudełku zastała jeszcze co najmniej jedna zapalke. Mówimy wówczas, że w pudełku P_2 jest *więcej* zapalek niż w pudełku P_1 . (Oczywiście, znowu nie wiemy ile zapalek mają te pudełka.)
3. Tak jak wyżej, lecz zmieniając P_1 na P_2 i odwrotnie.

Oczywiście, gdy umiemy liczyć porównanie liczebności pudełek zapalek można dokonać innym sposobem. Liczymy zapalke w pudełku P_1 . Otrzymujemy liczbę n_1 zapalek w pudełku P_1 . Następnie liczymy zapalke w pudełku P_2 . Otrzymujemy liczbę n_2 zapalek w pudełku P_2 . Porównujemy otrzymane liczby. Jeśli $n_1 = n_2$, to liczebność obu pudełek jest identyczna.

Zauważmy, że i w tym drugim sposobie porównywania liczebności pudełek zapalek, w gruncie rzeczy, wykorzystaliśmy pojęcie *równoliczności*. Zbadaliśmy równoliczność pudełka P_1 ze zbiorem $\{1, \dots, n_1\}$ oraz równoliczność pudełka P_2 ze zbiorem $\{1, \dots, n_2\}$. Pudełka P_1 i P_2 są równoliczne, gdy są równoliczne z tym samym zbiorem liczbowym, tj. $n_1 = n_2$.

Przestawiony dalej wniosek 2 formalnie wyrazi równoważność obu sposobów badania równoliczności zbiorów skończonych. Drugie podejście nie jest jednak przydatne, gdy chcemy porównać liczebność zbiorów nieskończonych. Nie znajdziemy przecież takich liczb naturalnych, które by wyrażały liczebność zbiorów skończonych. W następnym punkcie wprowadzimy pojęcie równoliczności przydatne również dla zbiorów nieskończonych.

Pojęcie równoliczności

Pojęcie *równoliczności zbiorów* jest relacyjne, dotyczy dwóch zbiorów. Wzorując się na przykładzie z pudełkami zapalek, zastanówmy się, co to znaczy, że dwa zbiory są *równoliczne*. Samo ujęcie zagadnienia pokazuje, że pojęcie *równoliczności dwóch zbiorów* ma być symetryczne.¹⁸ Nie byłoby sensu sformułowanie ‘zbiory A i B są równoliczne’, gdyby zależało to od kolejności wymienienia zbiorów A i B .

¹⁷ Niektórzy autorzy uważają, że metoda ta jest błędna. Oczywiście, jest tu pewne nieporozumienie. Obiekcje tych autorów powinny raczej dotyczyć poprawności pewnego typu dowodów nie wprost, a nie samej metody diagonalnej. Jest tu analogiczna sytuacja, jak przy obalaniu hipotezy głoszącej skończoność zbioru wszystkich liczb pierwszych. Mógłby ktoś tam zarzucić, że w dowodzie nie wprost stwierdzamy istnienie liczb, których w istocie nie ma. Przekształcaliśmy więc dowód nie wprost na dowód wprost, w którym nie odwołujemy się do takich «sztuczek».

Także metodę diagonalną możemy zastosować do dowodów wprost. Wówczas nie ma co zarzucić tej metodzie.

¹⁸ Przykładowo, mówimy ‘Jan i Piotr są braćmi’ zamiast ‘Jan jest bratem Piotra’, gdyż z tego drugiego zdania wynika zdanie ‘Piotr jest bratem Jana’, skoro relacyjne pojęcie *bycia bratem* jest symetryczne w zakresie mężczyzn. Podobnie mówimy ‘Jan, Piotr i Paweł są braćmi’ zamiast ‘Jan jest bratem Piotra, Jan jest bratem Pawła i Piotr jest bratem Pawła’. Można opuścić ‘Piotr jest bratem Jana, Paweł jest bratem Jana i Paweł jest bratem Piotra’. Zauważmy, że nie wystarczy powiedzieć ‘Jan i Piotr są braćmi Pawła’, gdyż pojęcie *bycia bratem* nie jest przechodnie.

Inna sytuacja będzie występować w przypadku pojęcia równoliczności, gdyż będzie ono przechodnie.

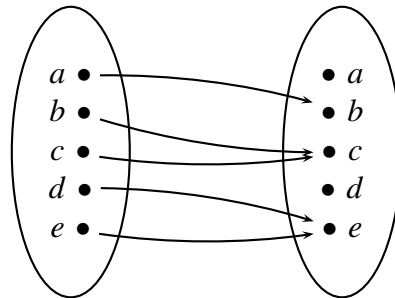
Weźmy dwa niepuste zbiory A i B . Stwierdzenie ‘zbiór A jest równoliczny ze zbiorem B ’ ma znaczyć: istnieje funkcja określona na zbiorze A i o wartościach w zbiorze B , która jest różnowartościowa i na zbiór B .¹⁹

Podstawowe wiadomości o funkcjach

Dla dowolnych niepustych zbiorów A i B funkcją ze zbioru A w zbiór B jest dowolne przyporządkowanie każdemu elementowi zbioru A dokładnie jednego elementu ze zbioru B . (Uwaga: nie musimy «wykorzystać» przy tym wszystkich elementów zbioru B .) Mówimy wtedy, że funkcja jest określona na zbiorze A i przyjmuje wartości w zbiorze B . W przyjętej definicji dopuszczamy ten przypadek, gdy zbiór, na którym jest określona funkcja był identyczny ze zbiorem, w którym przyjmuje ona swoje wartości, tj. jest dopuszczalne, że $A = B$.

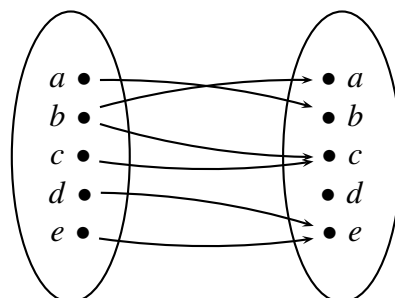
Jeżeli F jest funkcją określoną na zbiorze A i przyjmującą wartości w zbiorze B (piszemy w skrócie: $F: A \rightarrow B$), to dla dowolnego elementu x zbioru A jedyny element ze zbioru B , który został przyporządkowany x -owi, nazywamy *wartością funkcji F na x -ie* i oznaczamy symbolicznie: $F(x)$. Funkcję F można formalnie zapisać: $A \ni x \mapsto F(x) \in B$ (słownie: dowolnemu elementowi x ze zbioru A przyporządkowano wartość $F(x)$ ze zbioru B); albo prościej: $x \mapsto F(x)$.

Przykładowo przyporządkowanie podane poniżej jest funkcją określoną na zbiorze $A = \{a, b, c, d, e\}$ i przyjmującą wartości w zbiorze A :



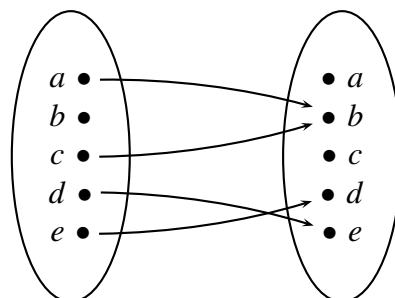
Tutaj mamy: $F(a) = b$, $F(b) = c$, $F(c) = c$, $F(d) = e$ i $F(e) = e$.

Poniższe przyporządkowanie



nie jest funkcją, gdyż b przyporządkowano dwa obiekty ($F(b)$ nie jest jednoznaczne).

Także poniższe przyporządkowanie



¹⁹ Oczywiście, zbiory niepuste to takie które mają co najmniej jeden element. Zbiór pusty nie mający żadnego elementu. Jest dokładnie jeden taki zbiór; dlatego wolno go oznaczyć symbolem indywidualnym ‘ \emptyset ’.

Pojęcie *funkcji* stosuje się jedynie do zbiorów niepustych. Dla zbioru pustego \emptyset sprawa jest prosta: jest on równoliczny tylko z samym sobą.

nie jest funkcją, gdyż dla b nie przyporządkowano żadnego obiektu ($F(b)$ nie jest w ogóle wyznaczone).

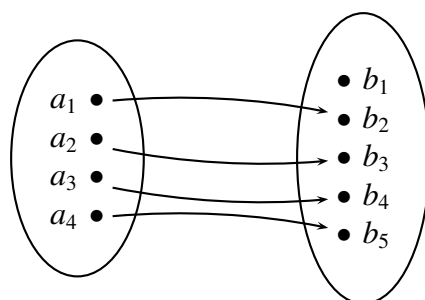
Dowolną funkcję określoną na zbiorze skończonym możemy wyrazić za pomocą odpowiedniej tabelki. Przykładowo, poprzednio podaną funkcję określają poniższe tabelki:

argument: x	a	b	c	d	e
wartość: $F(x)$	b	c	c	e	e

Podana funkcja nie jest różnowartościowa, gdyż $F(b) = F(c)$ (oraz $F(d) = F(e)$).

To, że funkcja $F: A \rightarrow B$ jest **różnowartościowa** ma znaczyć: dla różnych elementów z A funkcja f przyjmuje różne wartości. Formalnie: dla dowolnych $x, y \in A$ takich, że $x \neq y$ mamy: $f(x) \neq f(y)$.

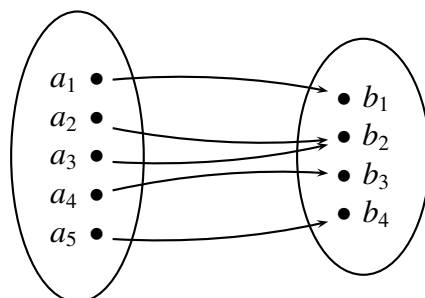
Przykładowo przyporządkowanie podane poniżej jest funkcją różnowartościową $F: A \rightarrow B$:



Funkcja ta nie jest funkcją „na”, gdyż do b_1 nie dochodzi żadna strzałka. Podobnie jest z funkcją podaną na poprzedniej stronie.

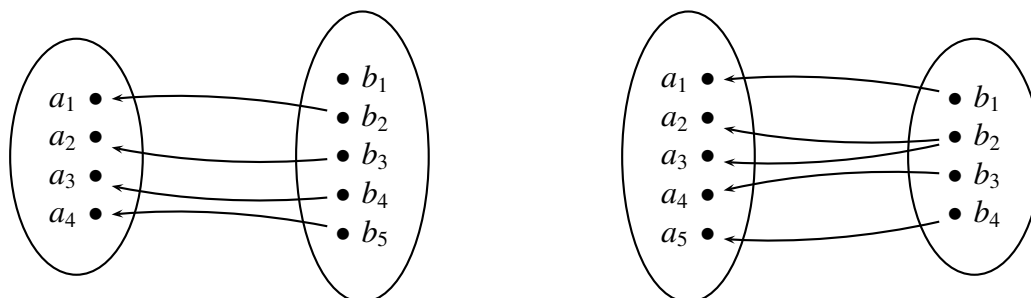
To, że funkcja $F: A \rightarrow B$ jest **na** zbiór B , ma znaczyć: zbiór wartości funkcji F jest równy (wyczerpuje) zbiór B . Formalnie: dla dowolnego y z B istnieje takie x w A , że $y = f(x)$.

Przykładowo przyporządkowanie podane poniżej jest funkcją $F: A \rightarrow B$ na zbiór B :



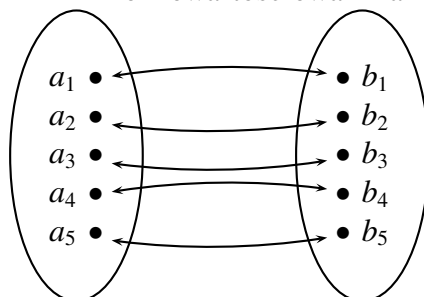
Nie jest to funkcja różnowartościowa, gdyż $F(a_2) = F(a_3)$.

Obrazowo przedstawimy, co to znaczy, że dana funkcję można odwrócić. Chodzi o to, że po «odwróceniu strzałek» znowu otrzymamy funkcję. Odwróćmy strzałki na ostatnim diagramie:



W pierwszym przypadku dla b_1 nie przyporządkowano żadnego obiektu w A . W drugim przypadku, element b_2 przeszedł na dwa obiekty w A . Zatem w obu przypadkach nie otrzymamy funkcji.

Warunkiem koniecznym i wystarczającym na to, aby funkcję («strzałki») można było odwrócić jest to, aby funkcja była $F: A \rightarrow B$ różnowartościowa i na zbiór B . Przykład:



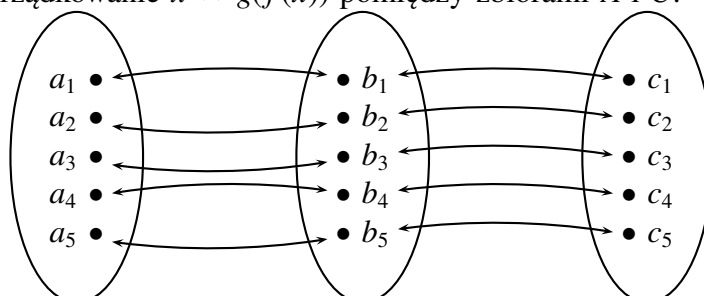
Widzimy więc, że istnienie funkcji $f: A \rightarrow B$ różnowartościowej i na zbiór B odpowiada temu, co poprzednio nazywaliśmy ustawieniem elementów A i B w pary. Ustawiamy elementy zbiorów A i B w pary według przepisu: $x \leftrightarrow F(x)$, dla $x \in A$.

Własności pojęcia równoliczności

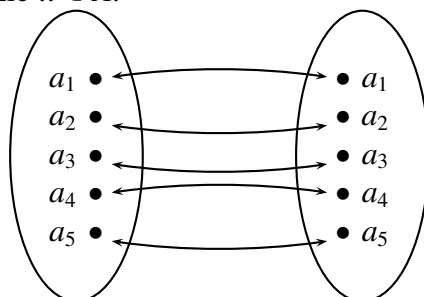
Oczywiście, zbiór pusty \emptyset nie jest równoliczny z żadnym zbiorem niepustym (i odwrotnie: żaden zbiór niepusty nie jest równoliczny ze zbiorem \emptyset). W nawiązaniu do przypisu 19 przyjmujemy, że zbiór pusty jest równoliczny z sobą samą. Zatem dopuszczamy też przypadek: $A = \emptyset = B$.

Skoro funkcje różnowartościowe i „na” są odwracalne, więc pojęcie *równoliczności* jest symetryczne. Jeśli $F: A \rightarrow B$ jest różnowartościowa i na zbiór B , to funkcja $\check{F}: B \rightarrow A$ też jest różnowartościowa i na zbiór B . Mamy przyporządkowanie: $x \leftrightarrow F(x)$, dla $x \in A$. Zatem możemy mówić, że zbiory A i B są równoliczne.

Złożenie dwóch funkcji różnowartościowych i „na” też jest funkcją różnowartościową i „na”. Zatem pojęcie *równoliczności* jest przechodnie: jeśli zbiór A jest równoliczny ze zbiorem B oraz zbiór B jest równoliczny ze zbiorem C , to zbiór A jest równoliczny ze zbiorem C . Istotnie, jeśli mamy przyporządkowania $x \leftrightarrow f(x) = y$ i $y \leftrightarrow g(y)$ pomiędzy parami zbiorów A i B oraz B i C , to stosujemy przyporządkowanie $x \leftrightarrow g(f(x))$ pomiędzy zbiorami A i C .



Na koniec, zauważmy — co jest oczywiste — że pojęcie *równoliczności* jest zwrotne, tzn. każdy zbiór jest równoliczny z sobą samym. Istotnie, dla niepustego zbioru A bierzemy funkcję identycznościową $f(x) = x$, gdzie $x \in A$.



Liczby naturalne i liczby całkowite

Liczbami naturalnymi nazywamy liczby: 0, 1, 2, 3, 4, Ich zbiór oznaczamy przez ' \mathbb{N} '. Zatem liczbę 0 zaliczamy do liczb naturalnych. Jest to jedyna liczba naturalna, która nie jest dodatnia. *Dodatnimi liczbami naturalnymi* nazywamy liczby: 1, 2, 3, Ich zbiór oznaczamy przez ' \mathbb{N}^+ '.

Jeszcze w latach sześćdziesiątych ubiegłego stulecia liczba 0 nie było zaliczana do liczb naturalnych.²⁰ W niektórych przypadkach ta konwencja jest nawet wygodniejsza. Współcześnie jednak przyjmuje się tę konwencję, według której 0 jest zaliczane do liczb naturalnych.²¹

Bez względu na przyjmowaną konwencję, liczby ze zbioru \mathbb{N}^+ są *dodatnimi liczbami całkowitymi*.

Te ostatnie liczby nazywamy także *dodatnimi liczbami całkowitymi*. Ich zbiór oznaczamy symbolem ‘ \mathbb{N} ’.

Poniższe stwierdzenia są oczywiste, lecz warto je sobie uświadomić, przy dalszych teoretycznych rozważaniach o zbiorach nieskończonych.

Fakt 1. Dla dowolnych liczb dodatnich liczb naturalnych n i m :

Jeśli $n \neq m$, to zbiory $\{1, \dots, n\}$ i $\{1, \dots, m\}$ nie są równoliczne.

Fakt 2. Dla dowolnej dodatniej liczby n : zbiory $\{1, \dots, n\}$ i $\{0, \dots, n-1\}$ są równoliczne. Mamy przecież następujące przyporządkowanie:

$$\begin{array}{cccc} 0 & 1 & \dots & n-1 \\ \updownarrow & \updownarrow & \dots & \updownarrow \\ 1 & 2 & \dots & n \end{array}$$

«Dla wprawy» rozwiążemy poniższe zadanie, które będzie przydatne przy badaniu równoliczności różnych zbiorów.

Zadanie 1. Niech A , B i C będą zbiorami niepustymi, przy czym zbiory B i C są równoliczne, a ponadto są rozłączne ze zbiorem A (tzn. A i B nie mają żadnego wspólnego elementu ze zbiorem A). Wówczas równoliczne są zbiory $A \cup B$ i $A \cup C$.

Rozwiązanie. Skoro zbiory B i C są równoliczne, więc mamy funkcję $F: B \rightarrow C$ równoważnościową i na C . Na podstawie tej funkcji musimy określić funkcję $G: A \cup B \rightarrow A \cup C$, która będzie różnowartościowa i na zbiór $A \cup C$, czyli wyznacza równoliczność zbiorów. Funkcję G określamy poniższym warunkiem:

$$G(x) = \begin{cases} x & \text{gdy } x \in A \\ F(x) & \text{gdy } x \in B \end{cases}$$

Po pierwsze, jest ona różnowartościowa. Istotnie, ze zbioru $A \cup B$ bierzemy dowolne elementy x i y takie, że $x \neq y$. Rozważamy cztery możliwe przypadki.

1. Oba x, y należą do A : Wówczas $G(x) = x \neq y = G(y)$.
2. x należy do A i y należy do B . Wówczas $G(y)$ należy do C , gdyż $G(x) = F(x) \in C$. Ponadto, $G(x)$ należy do A , skoro $G(x) = x$. Ponieważ zbiory A i C są rozłączne, więc $G(x) \neq G(y)$.
3. x należy do B i y należy do A . Analogicznie jak w 2.
4. Oba x, y należą do B : Wówczas $G(x) = F(x) \neq F(y) = G(y)$, gdyż funkcja F jest różnowartościowa.

W każdym przypadku: jeśli $x \neq y$, to $G(x) \neq G(y)$. Zatem G jest różnowartościowa.

Po drugie, funkcja G jest na zbiór $A \cup C$. Istotnie, bierzemy dowolny element y z $A \cup C$. Rozważamy dwa przypadki.

1. y należy do A . Wówczas mamy $G(y) = y$.
2. y należy do C . Wówczas, skoro funkcja F jest na zbiór C , więc istnieje w B takie x , że $F(x) = y$. Ale $G(x) = F(x)$.

W obydwu przypadkach dla elementu y znaleźliśmy takie x w $A \cup B$, że $G(x) = y$ (w pierwszym przypadku $x = y$). Zatem funkcja G jest na zbiór $A \cup C$. \square

²⁰ Por. np. znane książki: H. Rasiowa, *Wstęp do matematyki współczesnej*, Warszawa 1968; K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, Warszawa 1955.

²¹ Tak naprawdę, to nie jest istotne, którą konwencję przyjmujemy.

Zbiory skończone

Korzystając z pojęcia *równoliczności zbiorów* możemy zdefiniować pojęcie *bycia zbiorem skończonym*. Stwierdzenie ‘zbiór A jest skończony’ ma znaczyć:

albo A jest pusty,

albo dla jakiejś dodatniej liczby naturalnej n : zbiory A i $\{1, \dots, n\}$ są równoliczne.

Innymi słowy, do zbiorów skończonych zaliczamy: zbiór \emptyset oraz każdy zbiór, który jest równoliczny ze zbiorem $\{1, \dots, n\}$, dla jakiejś dodatniej liczby naturalnej n . W drugim przypadku można to zobrazować następująco:

$$\begin{array}{cccc} x_1 & x_2 & \dots & x_n \\ \updownarrow & \updownarrow & \dots & \updownarrow \\ 1 & 2 & \dots & n \end{array}$$

To połączenie w pary jest zarazem numeracją elementów zbioru A . Zatem elementy niepustego zbioru skończonego można **ponumerować** od 1 do n , dla jakiejś dodatniej liczby naturalnej n .

Powyżej zastosowaliśmy jakąś wybraną numerację elementów zbioru A , aby w ogóle mówić o elementach tego zbioru. Zastosowane przyporządkowanie jest w sumie zbędne, gdyż i tak odwołujemy się do jakiejś numeracji elementów zbioru A tworząc zapis tego zbioru: $\{x_1, \dots, x_n\}$. Wszystkich numeracji elementów zbioru A jest $n!$ (czytaj: „ n silnia”, $n! = 1 \cdot \dots \cdot n$).

Uwaga 4. W ogóle nie wykorzystaliśmy liczby 0. Nie można twierdzić, że zbiór pusty \emptyset jest równoliczny ze zbiorem $\{0\}$, gdyż ten ostatni ma jeden element (zbiory $\{0\}$ i $\{1\}$ są równoliczne).

Ze względu na fakt 2, jeśli ktoś chce, to może zacząć numerację od 0 do $n - 1$, lecz nie jest to naturalny sposób. \square

Liczba elementów zbioru skończonego

To, że zbiór {Toruń, Bydgoszcz, Włocławek} ma trzy elementy ma znaczyć tyle, że elementy tego zbioru można połączyć w pary z elementami zbioru $\{1, 2, 3\}$, czyli że te dwa zbiory są równoliczne. Można to następująco zobrazować następująco:

$$\begin{array}{ccc} \text{Toruń} & \text{Bydgoszcz} & \text{Włocławek} \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow \\ 1 & 2 & 3 \end{array}$$

To połączenie w pary jest zarazem numeracją elementów (oczywiście, można zastosować inną numerację, np. alfabetyczną; wszystkich numeracji jest sześć: $3! = 1 \cdot 2 \cdot 3 = 6$).

Ogólnie, niech n będzie daną (dowolną) dodatnią liczbą naturalną. Zastanówmy się teraz: *Co to znaczy, że dany zbiór A ma n elementów?* Znaczy to tyle, że elementy zbioru A można połączyć w pary z elementami zbioru $\{1, \dots, n\}$, czyli że zbiory A i $\{1, \dots, n\}$ są równoliczne.

Oczywiście, oba zbiory $\{1, \dots, n\}$ i $\{0, \dots, n - 1\}$ mają po n elementów (por. uwagę 4).

Mamy jeden przypadek szczególny — zbiór pusty \emptyset . Skoro zbiór \emptyset nie ma elementów (jest pusty!), więc zbiór \emptyset ma zero elementów. Każdy zbiór niepusty ma co najmniej jeden element.

Zatem wszystkie liczby naturalne są «skończone» w tym sensie, że wskazują na ilość elementów zbiorów skończonych (0 jest liczbą elementów zbioru pustego \emptyset).

Każdemu zbiorowi skończonemu możemy przyporządkować jakąś liczbę naturalną: liczbę jego elementów. Ze względu na fakt 1, liczba ta jest określona w sposób jednoznaczny.

Fakt 3. Wszystkie skończone zbiory równoliczne mają tę samą liczbę elementów.

Dowód. Istotnie, założmy, że skończone zbiory A i B są równoliczne. Jeśli $A = \emptyset = B$, A i B mają po zero elementów. Założmy więc, że A i B są niepuste oraz że A ma n elementów. Zatem elementy zbiorów A i B można ustawić w pary oraz istnieje numeracja elementów zbioru A liczbami od 1 do n . Tę numerację można więc przenieść na numerację elementów zbioru B według przepisu: $y \leftrightarrow x \leftrightarrow i$, dla elementów $y \in B$, $x \in A$ oraz liczby $i \in \{1, \dots, n\}$. \square

Fakt 4. Wszystkie zbiory skończone, które mają tę samą liczbę elementów, są równoliczne.

Dowód. Istotnie, Niech A i B mają po n elementów, dla pewnego $n \geq 0$. Jeśli $n = 0$, to A i B są puste, czyli są równoliczne. Załóżmy więc, że $n > 0$. Zatem elementy zbioru A można ustawić w pary z elementami zbioru $\{1, \dots, n\}$. Podobnie jest dla zbioru B . Stosujemy połączenie w pary elementy zbiorów A i B : $x \leftrightarrow i \leftrightarrow y$, dla elementów x z A , y z B oraz liczby i z $\{1, \dots, n\}$. A to znaczy, że zbiory A i B są równoliczne. (Można było też skorzystać z przechodniości relacji równoliczności). \square

Otrzymujemy więc wniosek:

Wniosek 2. Dla dowolnych zbiorów skończonych A i B :

Zbiory A i B są równoliczne wtedy i tylko wtedy, gdy liczba elementów zbioru A jest równa liczbie elementów zbioru B .

Powyższy wniosek sformułowaliśmy tylko dla zbiorów skończonych, gdyż tylko dla nich mamy (jak na razie) wprowadzone pojęcie *liczby elementów*. Do tej pory przecież do wskazywania liczby elementów zbioru posługiwaliśmy się tylko liczbami naturalnymi. Po wprowadzeniu liczb nieskończonych²² można będzie mówić o liczbie elementów zbiorów nieskończonych. Wprowadzając liczby nieskończone posługujemy się zasadą będącą odpowiednikiem wniosku 2.²³

Zbiory potęgowe

Dalej przydatne będzie pewien znany fakt dotyczący zbiorów skończonych.

Przez $\mathcal{P}(A)$ oznaczmy rodzinę wszystkich podzbiorów zbioru A .²⁴ Dla zbiorów skończonych znany jest następujący fakt:

Fakt 5. Jeśli zbiór A ma n elementów, to rodzina zbiorów $\mathcal{P}(A)$ ma 2^n elementów.

Z tego względu rodzinę $\mathcal{P}(A)$ nazywamy *zbiorem potęgowym zbioru A* i często oznaczamy przez 2^A . Sprawdźmy:

1. Zbiór pusty \emptyset ma 0 elementów. Mamy $\mathcal{P}(\emptyset) = \{\emptyset\}$, czyli rodzina jest jednoelementowa ($2^0 = 1$).
2. Zbiór $\{0\}$ ma 1 elementy. Rodzina $\mathcal{P}(\{0\})$ składa się dwóch zbiorów: \emptyset i $\{0\}$ ($2^1 = 2$).
3. Zbiór $\{0, 1\}$ ma 2 elementy. Rodzina $\mathcal{P}(\{0, 1\})$ składa się z czterech zbiorów: \emptyset , $\{0\}$, $\{1\}$ i $\{0, 1\}$ ($2^2 = 4$).
4. Zbiór $\{0, 1, 2\}$ ma 3 elementy. Rodzina $\mathcal{P}(\{0, 1, 2\})$ składa się z ośmiu zbiorów: \emptyset , $\{0\}$, $\{1\}$, $\{2\}$, $\{0, 1\}$, $\{1, 2\}$, $\{0, 2\}$ i $\{0, 1, 2\}$ ($2^3 = 8$).

Skoro $n < 2^n$, dla dowolnej liczby naturalnej n , więc dowolny zbiór skończony A ma mniej elementów niż rodzina jego podzbiorów $\mathcal{P}(A)$.

Zbiory nieskończone

Oczywiście, dany zbiór A jest nieskończony, gdy nie jest skończony, tzn. nie jest pusty oraz nie ma takiej dodatniej liczby naturalnej n , dla której zbiory A i $\{1, \dots, n\}$ byłyby równoliczne.

²² Nie nazywa ich się już *liczbami naturalnymi*, lecz *liczbami kardynalnymi*. Wszystkie liczby naturalne zaliczamy do liczb kardynalnych.

²³ Jest to zgodne ze znaczeniem słowa ‘równoliczne’.

²⁴ Zbiór złożony z samych zbiorów nazywamy *rodziną zbiorów*.

Przypomnijmy: stwierdzenie ‘zbiór X jest podzbiorem zbioru A ’ znaczy: każdy element zbioru X jest elementem zbioru A . Skoro truizmem jest stwierdzenie, że każdy element zbioru A jest elementem zbioru A , więc zbiór A jest swoim podzbiorem. Zatem A jest elementem rodziny $\mathcal{P}(A)$.

Podzbiory zbioru A różne od niego nazywamy jego *podzbiórami właściwymi*.

Zbiór pusty \emptyset nie ma żadnego elementu. Innymi słowy, nazwa ‘element zbioru \emptyset ’ jest pusta. Zatem przy matematycznej interpretacji słowa ‘każdy’ otrzymujemy: każdy element zbioru \emptyset jest elementem zbioru A . A to znaczy, że zbiór \emptyset należy do rodziny $\mathcal{P}(A)$.

Podaliśmy już dwa przykłady zbiorów nieskończonych: zbiór wszystkich dodatnich liczb naturalnych $\mathbb{N}^+ = \{1, 2, 3, 4, \dots\}$ oraz zbiór wszystkich liczb naturalnych $\mathbb{N} = \{0, 1, 2, 3, 4, \dots\}$. Jest oczywiste, że nie można ustawić w pary wszystkich elementów zbioru \mathbb{N}^+ z elementami zbioru $\{1, 2, \dots, n\}$, dla jakiejś liczby naturalnej n . W tym pierwszym zawsze pozostaną bez pary jakieś elementy.²⁵ Podobnie jest dla zbioru \mathbb{N} .

Zauważmy, że mamy następujące ustawienie w pary:

$$\begin{array}{cccccccc} 0 & 1 & 2 & \dots & n-1 & n & n+1 & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & n+2 & \dots \end{array}$$

Zatem wyliczamy w kolejności wszystkie liczby naturalne. Może wydać się to niespodziewane, że zbiory \mathbb{N}^+ i \mathbb{N} są równoliczne (funkcja: czyli funkcję $\mathbb{N} \ni n \mapsto n+1 \in \mathbb{N}^+$, która jest różnowartościowa i „na”). Dlatego może wydać się to niespodziewane, gdyż zbiór \mathbb{N}^+ jest podzbiorem właściwym zbioru \mathbb{N} . Zatem wydawałoby się, że pierwszy «ma mniej» elementów od drugiego (do zbioru \mathbb{N}^+ nie należy przecież liczba 0).

Uwaga 5. Widzimy, że zdefiniowane powyżej pojęcie *równoliczności* tylko przy stosowaniu do zbiorów skończonych ściśle odpowiada naszemu rozumieniu słowa ‘równoliczność’.

Dopuszczalna jest sytuacja, że ktoś nadal będzie twierdził, że zbiór \mathbb{N}^+ ma mniej elementów od zbioru \mathbb{N} , gdyż wszystkie elementy pierwszego są elementami drugiego oraz ponadto 0 należy do drugiego, a nie należy do pierwszego.

Nie trzeba rozumieć dosłownie wyrazu ‘równoliczność’, gdy stosujemy go do zbiorów nieskończonych. „Równoliczność” zbiorów nieskończonych wolno traktować jako posiadanie przez nie tego samego *typu nieskończoności*.

W znanej książce K. Kuratowskiego i A. Mostowskiego²⁶ liczby kardynalne są wprost traktowane jako *typy relacyjne* pewnych bardzo prostych systemów relacyjnych. Chodzi tu o typy relacyjne systemów postaci $\langle A, A \times A \rangle$, czyli mających relację pełną na uniwersum (tj. jest równą $A \times A$). Ponieważ relacja pełna «nic nie wnosi» do systemu²⁷, więc system z relacją pełną wolno traktować jako sam zbiór A .²⁸ Zatem typ relacyjny systemu $\langle A, A \times A \rangle$ sprowadza się

- do liczby elementów zbioru A , jeśli jest to zbiór skończony;
- do typu nieskończoności odpowiadającemu zbiorowi A , jeśli nie jest to zbiór skończony.

Oczywiście, nie wszystkie zbiory nieskończone mają ten sam typ nieskończoności, czyli — w przejętej terminologii — nie wszystkie zbiory nieskończone są „równoliczne”. \square

Ale tych «niespodzianek» jest więcej. Przykładowo zbiór liczb parzystych $\{0, 2, 4, \dots\}$ jest równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych \mathbb{N} .²⁹ Mamy przecież przyporządkowanie:

$$\begin{array}{cccccc} 0 & 2 & 4 & \dots & 2n & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots & \updownarrow & \dots \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n & \dots \end{array}$$

czyli funkcję $\mathbb{N} \ni n \mapsto 2n$. Mamy też przyporządkowanie:

²⁵ Oczywiście, bierzemy pod uwagę wszystkie ustawienia w pary, a nie tylko następujące (tożsamościowe):

$$\begin{array}{cccccc} 1 & 2 & \dots & n-1 & n & n+1 & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \dots & \updownarrow & \updownarrow & \dots & \dots \\ 1 & 2 & \dots & n-1 & n & & \end{array}$$

²⁶ *Teoria mnogości*, wyd. 3, Warszawa 1978 (zob. s. 98 i 176).

²⁷ W tym sensie, że nie wyróżnia żadnych zależności pomiędzy elementami zbioru A .

²⁸ Systemy $\langle A, A \times A \rangle$ i $\langle B, B \times B \rangle$ mają ten sam typ relacyjny wtedy i tylko wtedy, gdy są izomorficzne, a to się sprowadza do tego, że zbiory A i B są „równoliczne”. *Ibidem*, s. 98 i 176.

²⁹ Nie musimy traktować tego faktu jako «niespodzianki», jeśli „równoliczność” zbiorów nieskończonych sprowadzamy do posiadania przez nie tego samego *typu nieskończoności*.

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 2 & 4 & \dots & 2(n-1) & 2n & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots & \updownarrow & \updownarrow & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n & n+1 & \dots \end{array}$$

czyli funkcję $\mathbb{N}^+ \ni n \mapsto 2(n-1)$. Tzn. wyliczamy w wszystkie kolejne liczby parzyste.

Łatwo pokazać, że analogiczna sytuacja zachodzi dla zbioru liczb nieparzystych $\{1, 3, 5, \dots\}$:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & 3 & 5 & \dots & 2n+1 & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots & \updownarrow & \dots \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n & \dots \end{array}$$

Mam funkcję $\mathbb{N} \ni n \mapsto 2n+1$.

Widzimy zatem, że zbiór wszystkich liczb naturalnych ma takie podzbiory właściwe, z którymi jest równoliczny. Oczywiście, te podzbiory muszą też być nieskończone.

Jest oczywiste, że żaden zbiór skończony nie jest równoliczny z żadnym ze swoich podzbiorów właściwych.³⁰

Znajdźmy teraz nadzbiory³¹ zbioru liczb naturalnych, które są równoliczne ze zbiorem \mathbb{N} (czyli mają ten sam typ nieskończoności, co zbiór \mathbb{N}). Pierwszym będzie zbiór wszystkich liczb całkowitych $\mathbb{Z} = \{0, 1, -1, 2, -2, 3, -3, \dots\}$. Równoliczność zbiorów \mathbb{Z} i \mathbb{N} widać już z samego zapisu zbioru \mathbb{Z} (wymieniamy jego elementy w pewnej ustalonej kolejności, czyli mamy jego równoliczność ze zbiorem \mathbb{N}^+):

$$\begin{array}{cccccccccccc} 0 & 1 & -1 & 2 & -2 & 3 & -3 & \dots & n & -n & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots & \updownarrow & \updownarrow & \dots \\ 0 & 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & \dots & 2n-1 & 2n & \dots \end{array}$$

Mamy funkcję $F: \mathbb{N} \rightarrow \mathbb{Z}$ różnowartościową i na \mathbb{Z} , która jest określona wzorem:

$$F(n) = \begin{cases} \frac{n+1}{2} & \text{gdy } n \text{ jest nieparzyste} \\ -\frac{n}{2} & \text{gdy } n \text{ jest parzyste} \end{cases}$$

Teraz pokażemy, że zbiór wszystkich liczb wymiernych \mathbb{Q} jest równoliczny ze zbiorem liczb naturalnych \mathbb{N} . Zaskakujące jest w tym to, że zbiór liczb wymiernych jest gęsty, w tym sensie, że pomiędzy dwie **dowolne** liczby wymierne można wstawić trzecią. Ale to znaczy, że pomiędzy pierwszą i trzecią można wstawić czwartą, a pomiędzy pierwszą i czwartą wstawić piątą.³² Mimo tej własności, okazuje się, że można podać sposób na ponumerowanie elementów zbioru \mathbb{Q} . Tworzymy nieskończoną tablicę ułamków:³³

	1	-1	2	-2	3	-3	...	n	-n	...
1	$\frac{1}{1}$	$-\frac{1}{1}$	$\frac{1}{2}$	$-\frac{1}{2}$	$\frac{1}{3}$	$-\frac{1}{3}$...	$\frac{1}{n}$	$-\frac{1}{n}$...
2	$\frac{2}{1}$	$-\frac{2}{1}$	$\frac{2}{2}$	$-\frac{2}{2}$	$\frac{2}{3}$	$-\frac{2}{3}$...	$\frac{2}{n}$	$-\frac{2}{n}$...
3	$\frac{3}{1}$	$-\frac{3}{1}$	$\frac{3}{2}$	$-\frac{3}{2}$	$\frac{3}{3}$	$-\frac{3}{3}$...	$\frac{3}{n}$	$-\frac{3}{n}$...
4	$\frac{4}{1}$	$-\frac{4}{1}$	$\frac{4}{2}$	$-\frac{4}{2}$	$\frac{4}{3}$	$-\frac{4}{3}$...	$\frac{4}{n}$	$-\frac{4}{n}$...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮
n	$\frac{n}{1}$	$-\frac{n}{1}$	$\frac{n}{2}$	$-\frac{n}{2}$	$\frac{n}{3}$	$-\frac{n}{3}$...	$\frac{n}{n}$	$-\frac{n}{n}$...
⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮	⋮

³⁰ To, że zbiór wszystkich liczb naturalnych ma takie podzbiory właściwe, z którymi jest równoliczny, nie świadczy jeszcze o tym, że każdy zbiór nieskończony jest równoliczny z jakimś swoim podzbiorem właściwym. Po przyjęciu w teorii zbiorów tzw. aksjomat wyboru da się to udowodnić.

³¹ To, że zbiór A jest nadzbiorem zbioru B znaczy: zbiór B jest podzbiorem zbioru A .

³² Zatem zaskakujące jest tutaj również to, że zbiory \mathbb{Q} i \mathbb{N} mają mieć ten sam typ nieskończoności. Przecież zbiór \mathbb{N} nie jest gęsty w opisanym sensie.

³³ Równoliczność zbiorów \mathbb{Q} i \mathbb{N} można udowodnić na różne sposoby. Wcześniej można udowodnić pewne ogólne stwierdzenia dotyczące pojęcia równoliczności, z których będzie wynikać równoliczność zbiorów \mathbb{Q} i \mathbb{N} .

W tabeli tej mamy zapisane w postaci ułamków wszystkie liczby wymierne oprócz 0 (wszystkie te liczby są zapisane wielokrotnie; skracanie ułamków). Ustawiamy liczby wymierne w następujący ciąg:

$$0; 1; -1, -2, 2; \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, -3, 3; -\frac{1}{2}, -\frac{3}{2}, -4, 4; \dots$$

Tworzymy go według następującej zasady: Wybieramy bez powtórzeń liczby z kolejnych kwadratów zaczynając od (jedynego) rogu. Tzn. najpierw z kwadratu 1×1 ; potem 2×2 ; potem 3×3 itd. w nieskończoność (wybory z kolejnych kwadratów wyróżniliśmy średnikiem). Możemy również numerować liczby «po przekątnych» tych kwadratów («z prawa na lewo»):

$$0; 1; -1, 2; \frac{1}{2}, -2, 3; -\frac{1}{2}, -3, 4; \dots$$

Zatem czy wszystkie zbiory nieskończone są równoliczne ze zbiorem \mathbb{N} ? Innymi słowy: czy istnieje tylko jeden rodzaj nieskończoności? W następnym punkcie pokażemy, że odpowiedź na to pytanie jest przecząca.

Przykład zbioru nieskończonego i nierównolicznego z \mathbb{N}

Przykładem tym będzie zbiór wszystkich nieskończonych ciągów zero-jedynkowych, czyli nieskończonych ciągów, których wyrazami są liczby 0 i 1. Właśnie użyjemy do tego metody przekątniowej Cantora.³⁴

Ciągiem nieskończonym nazywamy dowolną funkcję określoną na zbiorze \mathbb{N}^+ . Innymi słowy, ciągiem nieskończonym nazywamy coś, co da się ponumerować dodatnimi liczbami naturalnymi. Poszczególne wyrazy w ciągu mogą się powtarzać (pod różnymi numerami).

Nieskończonym ciągiem zero-jedynkowym nazywamy dowolną funkcję określoną na zbiorze \mathbb{N}^+ i przyjmującą wartości w zbiorze $\{0, 1\}$. Oczywiście mamy tylko dwa nieskończone ciągi stałe: jeden złożony z samych zer: $\mathbf{0} = (0, 0, 0, \dots)$, drugi złożony z samych jedynek: $\mathbf{1} = (1, 1, 1, \dots)$. Niech $C^{0,1}$ będzie zbiorem złożonym ze wszystkich nieskończonych ciągów zero-jedynkowych (w tym dwóch ciągów stałych).

Zbiór $C^{0,1}$ jest nieskończony. Wystarczy wziąć pod uwagę tylko te ciągi, które na n -tym miejscu mają 1, a na pozostałych miejscach 0:

$$\begin{array}{l} 1, 0, 0, 0, \dots \\ 0, 1, 0, 0, \dots \\ 0, 0, 1, 0, \dots \\ 0, 0, 0, 1, \dots \\ \vdots \end{array}$$

Zatem tym bardziej nieskończony jest cały zbiór $C^{0,1}$.

Udowodnimy, że zbiory $C^{0,1}$ i \mathbb{N}^+ mają różny typ nieskończoności.

Fakt 6. Zbiór $C^{0,1}$ nie jest równoliczny ze zbiorem \mathbb{N}^+ .

Potrzebny nam będzie do tego następujący lemat:

Lemat 2. Dla każdego podzbioru zbioru $C^{0,1}$, który jest równoliczny ze zbiorem \mathbb{N}^+ , istnieje taki ciąg ze zbioru $C^{0,1}$, który nie należy do tego podzbioru.

³⁴ Przykład ten nie jest jedynie «ciekawostką» (choć nawet gdyby był nią tylko i tak wart by był analizy). Nieskończone ciągi zero — jedynkowe mają dużą «siłę wyrazu». Pokażemy, że za pomocą takich ciągów można „zakodować” wszystkie podzbiory liczb naturalnych. Zbiór tych ciągów jest równoliczny ze zbiorem potęgowym $\mathcal{P}(\mathbb{N})$, czyli z rodziną wszystkich podzbiorów zbioru \mathbb{N} . Jest też równoliczny z $\mathcal{P}(\mathbb{N}^+)$.

Można też wspomnieć o zapisie liczb naturalnych w systemie dwójkowym (czyli za pomocą cyfr ‘0’ i ‘1’). Są też inne sposoby kodowania za pomocą ciągów zero-jedynkowych. Np. 21, 412 i 100 zapiszemy jako 00101, 0000101001 i 0111. Widzimy, że ‘1’ służy jako «przerywnik» pomiędzy układami zer, których ilość wskazuje na zakodowywaną cyfrę.

Dowód. Bierzemy dowolny podzbiór \mathcal{A} zbioru $C^{0,1}$, który jest równoliczny ze zbiorem \mathbb{N}^+ . Innymi słowy, zbiór \mathcal{A} ponumerować:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \leftrightarrow & c^1 \\ 2 & \leftrightarrow & c^2 \\ 3 & \leftrightarrow & c^3 \\ \vdots & & \vdots \\ n & \leftrightarrow & c^n \\ n+1 & \leftrightarrow & c^{n+1} \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Lecz w każdym ciągu należącym do podzbioru \mathcal{A} wyrazy są już ponumerowane:

$$c^i = a_1^i, a_2^i, a_3^i, \dots, a_n^i, \dots$$

gdzie indeks górny jest numerem danego ciągu, a indeks dolny to numer danego wyrazu w tym ciągu (oczywiście każdy wyraz ciągu c^i jest równy 0 albo 1).

Z poprzedniego przyporządkowania otrzymujemy więc nieskończoną tablicę zero-jedynkową:

$$\begin{array}{ccccccc} 1 & \leftrightarrow & a_1^1 & a_2^1 & a_3^1 & \dots & a_n^1 & \dots \\ 2 & \leftrightarrow & a_1^2 & a_2^2 & a_3^2 & \dots & a_n^2 & \dots \\ 3 & \leftrightarrow & a_1^3 & a_2^3 & a_3^3 & \dots & a_n^3 & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \\ n & \leftrightarrow & a_1^n & a_2^n & a_3^n & \dots & a_n^n & \dots \\ n+1 & \leftrightarrow & a_1^{n+1} & a_2^{n+1} & a_3^{n+1} & \dots & a_n^{n+1} & \dots \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \ddots \end{array}$$

Tworzymy ciąg d stojący na przekątnej tablicy (ciąg diagonalny) o następujących wyrazach:

$$a_1^1, a_2^2, a_3^3, \dots, a_n^n, a_{n+1}^{n+1}, \dots$$

Teraz tworzymy «negatyw» \bar{d} ciągu przekątniowego d , tzn. tam gdzie w ciągu d stało 1 bierzemy 0 oraz odwrotnie. Zatem ciąg \bar{d} ma następujące wyrazy:

$$1 - a_1^1, 1 - a_2^2, 1 - a_3^3, \dots, 1 - a_n^n, 1 - a_{n+1}^{n+1}, \dots$$

Można też je zapisać jako:

$$\bar{d}_i = \begin{cases} 0 & \text{gdy } a_i^i = 1 \\ 1 & \text{gdy } a_i^i = 0 \end{cases}$$

Skoro ciąg d należał do zbioru $C^{0,1}$, więc także ciąg \bar{d} («negatyw» ciągu d) należy do $C^{0,1}$. Jak łatwo zauważyć, ciąg \bar{d} nie należy do podzbioru \mathcal{A} .³⁵ Gdyby należał, to miałby jakiś numer w przyjętej numeracji zbioru \mathcal{A} . Oznaczmy ten numer przez ' \bar{n} '. Jego \bar{n} -tym wyrazem musiałoby z jednej strony liczba $a_{\bar{n}}^{\bar{n}}$, a z drugiej strony liczba $1 - a_{\bar{n}}^{\bar{n}}$, gdyż tak utworzyliśmy ciąg \bar{d} . Skoro $a_{\bar{n}}^{\bar{n}} = 1 - a_{\bar{n}}^{\bar{n}}$, więc $a_{\bar{n}}^{\bar{n}} = \frac{1}{2}$. Zatem ciąg \bar{d} nie należy do $C^{0,1}$. Mamy więc sprzeczność.³⁶ \square

Widzimy, że w trakcie przeprowadzania dowodu lematu 2 negatywnie zweryfikowaliśmy następującą hipotezę: «negatyw» \bar{d} ciągu diagonalnego d należy do podzbioru \mathcal{A} . (Gdyby \bar{d} należał do \mathcal{A} , to otrzymujemy sprzeczność: \bar{d} należy i nie należy do zbioru $C^{0,1}$; albo jeden z jego wyrazów jest jednocześnie równy 0 i 1.)

Z powyższego lematu wyciągamy poniższy wniosek, z którego wynika już fakt 6:

Wniosek 3. *Każdy podzbiór zbioru $C^{0,1}$, który jest równoliczny ze zbiorem \mathbb{N}^+ , jest różny od zbioru $C^{0,1}$.*

³⁵ Skoro nie wykluczaliśmy tego, że ciąg d jest ciągiem stałym (tj. ma albo same zera albo same jedynki), więc nie możemy również tego wykluczyć dla ciągu \bar{d} .

³⁶ Inna sprzeczność: $0 = a_{\bar{n}}^{\bar{n}} = 1$.

Najczęściej fakt 6 dowodzi się poprzez negatywną weryfikację następującej hipotezy (będącej zaprzeczeniem faktu 6):

Hipoteza 1 (odrzucona). Zbiory $C^{0,1}$ i \mathbb{N}^+ są równoliczne.

Aby być w zgodzie z tematem punktu zweryfikujemy negatywnie powyższą hipotezę.³⁷

(Negatywna) weryfikacja hipotezy. Zakładamy, że zbiory $C^{0,1}$ i \mathbb{N}^+ są równoliczne. Dla zbioru $C^{0,1}$ przeprowadzamy te same rozważania, co dla zbioru \mathcal{A} w dowodzie lematu 2. Na podstawie przyjętej hipotezy otrzymujemy sprzeczność: znajdujemy taki ciąg \bar{d} , który jednocześnie należy i nie należy do $C^{0,1}$ (albo ma wyraz, który jest jednocześnie zerem i jedyką). \square

Pewne problemy

Z dowodem lematu 2 związane są pewne ciekawe problemy.

Zadanie 2. Niech $C_{\star}^{0,1}$ będzie zbiorem wszystkich nieskończonych ciągów zero-jedynkowych z wyłączeniem dwóch ciągów stałych złożonych odpowiednio z samych zer i samych jedynek, czyli bez ciągów $\mathbf{0} = (0, 0, 0, 0, \dots)$ i $\mathbf{1} = (1, 1, 1, 1, \dots)$.

(a) Czy pozostanie poprawny dowód lematu 2, gdy zmienimy zbiór $C^{0,1}$ na $C_{\star}^{0,1}$? Innymi słowy, czy w podany sposób można udowodnić, że:

Dla każdego podzbioru zbioru $C_{\star}^{0,1}$, który jest równoliczny z $C_{\star}^{0,1}$, istnieje taki ciąg ze zbioru $C_{\star}^{0,1}$, który nie należy do tego podzbioru.

(b) Czy pozostanie poprawna negatywna weryfikacja hipotezy, gdy zmienimy zbiór $C^{0,1}$ na $C_{\star}^{0,1}$? Innymi słowy, czy w podany sposób można obalić hipotezę:

Zbiory $C_{\star}^{0,1}$ i \mathbb{N}^+ są równoliczne.

Rozwiązanie. (a) Nie! Wskazuje na to uwaga podana w przypisie 35 na str. 20. Istotnie, w podanym dowodzie lematu 2 nie jest wykluczone, że ciąg diagonalny \mathbf{d} jest ciągiem stałym. Wówczas «negatyw» $\bar{\mathbf{d}}$ też byłby ciągiem stałym. A wówczas $\bar{\mathbf{d}}$ nie należałby do zbioru $C_{\star}^{0,1}$. Zatem w ten sposób nie udowodnimy nowej wersji lematu 2.

(b) Nie! Odpowiedź analogiczna jak w (a). \square

Zadanie 3. W nawiązaniu do poprzedniego zadania, udowodnij poniższy fakt:

Fakt 7. Zbiory $C_{\star}^{0,1}$ i \mathbb{N}^+ nie są równoliczne.

Dowód faktu 7. Zakładamy, że zbiory $C_{\star}^{0,1}$ i \mathbb{N}^+ są równoliczne. Pokażemy, że wynika stąd, iż także zbiory $C^{0,1}$ i \mathbb{N}^+ są równoliczne (a to jest sprzeczne z faktem 6).

Gdyby zbiór $C_{\star}^{0,1}$ był równoliczny z \mathbb{N}^+ , to jego elementy moglibyśmy ponumerować:

$$c_1, c_2, c_3, \dots, c_n, \dots$$

Wówczas także elementy zbioru $C^{0,1}$ moglibyśmy ponumerować następująco:

$$\mathbf{0}, \mathbf{1}, c_1, c_2, c_3, \dots, c_n, \dots$$

Innymi słowy, ciągom stałym przydzielamy numery 1 i 2, a ciągom ze zbioru $C_{\star}^{0,1}$ zwiększamy numery o 2. \square

Zadanie 4. W nawiązaniu do faktów 6 i 7, udowodnij poniższy fakt:

Fakt 8. Zbiory $C^{0,1}$ i $C_{\star}^{0,1}$ są równoliczne.

Zauważmy, że nie wynika to z faktów 6 i 7. Równoliczność tych zbiorów nie powinna nas zaskakiwać, gdyż zbiory te różnią się jedynie dwoma elementami (ciągami stałymi). Dowód faktu 8 jest jednak trudny, gdyż mamy do czynienia ze zbiorami, elementów których nie da się ponumerować. Przedstawiony dowód pokazuje technikę dowodu ogólnego faktu, że zbiory

³⁷ Por. uwagę o tego typu dowodach podaną na str. 9 oraz w przypisie 17.

nieskończone różniące się tylko skończoną liczbą elementów są równoliczne. Technika dowodu polega na wybieraniu jakiegoś podzbioru, który jest równoliczny ze zbiorem \mathbb{N}^+ .

Dowód faktu 8. Na str. 19 zajmowaliśmy się przeliczalnym i nieskończonym zbiorem ciągów:

$$\begin{array}{l} 1, 0, 0, 0, \dots \\ 0, 1, 0, 0, \dots \\ 0, 0, 1, 0, \dots \\ 0, 0, 0, 1, \dots \\ \vdots \end{array}$$

Na n -tym miejscu mają 1, a na pozostałych miejscach 0. Oznaczmy zbiór tych ciągów przez \mathcal{X} . Zbiór ten jest równoliczny ze zbiorem \mathbb{N}^+ . Ponadto, niech \mathcal{B} będzie poszerzeniem zbioru \mathcal{X} o dwa ciągi stałe: $\mathbf{0} = 0, 0, 0, 0, \dots$ i $\mathbf{1} = 1, 1, 1, 1, \dots$, tzn. $\mathcal{B} = \mathcal{X} \cup \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\}$. Zbiór \mathcal{B} jest również równoliczny ze zbiorem \mathbb{N}^+ :

$$\begin{array}{l} 0, 0, 0, 0, \dots \\ 1, 1, 1, 1, \dots \\ 1, 0, 0, 0, \dots \\ 0, 1, 0, 0, \dots \\ 0, 0, 1, 0, \dots \\ 0, 0, 0, 1, \dots \\ \vdots \end{array}$$

Numer 1 ma ciąg $\mathbf{0}$, numer 2 — ciąg $\mathbf{1}$, a inne ciągi mają numer postaci $n + 2$, gdzie n to miejsce występowania jedynki.

Stosujemy zadanie 1 ze str. 14 do zbiorów $A = C_{\star}^{0,1} \setminus \mathcal{X}$, $B = \mathcal{B}$ i $C = \mathcal{X}$. Oczywiście, zbiory A i C są rozłączne. Ponadto, zbiory A i B są rozłączne, gdyż ciągi stałe nie należą do $C_{\star}^{0,1}$.

Mamy $C^{0,1} = C_{\star}^{0,1} \cup \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\} = (C_{\star}^{0,1} \setminus \mathcal{X}) \cup \mathcal{X} \cup \{\mathbf{0}, \mathbf{1}\} = (C_{\star}^{0,1} \setminus \mathcal{X}) \cup \mathcal{B} = A \cup B$. Na mocy zadania 1, zbiór $A \cup B$ jest równoliczny ze zbiorem $A \cup C$. Lecz $A \cup B = C^{0,1}$, a $A \cup C = (C_{\star}^{0,1} \setminus \mathcal{X}) \cup \mathcal{X} = C_{\star}^{0,1}$. Zatem zbiory $C^{0,1}$ i $C_{\star}^{0,1}$ są równoliczne. \square

Zadanie 5. Niech $C^{0,\dots,9}$ będzie zbiorem wszystkich ciągów nieskończonych o wartościach w zbiorze $\{0, 1, \dots, 9\}$. Stosując metodę przekątniową Cantora udowodnij poniższy fakt analogiczny do faktu 6.

Fakt 9. Zbiór $C^{0,\dots,9}$ nie jest równoliczny ze zbiorem \mathbb{N}^+ .

Dowód faktu 9 przebiega analogicznie do dowodu faktu 6. Fragment będący w istocie powtórzeniem dowodu faktu 6 zapiszemy mniejszą czcionką.

Dowód faktu 9. Potrzebny nam będzie do tego następujący lemat:

Lemat 3. Dla każdego podzbioru zbioru $C^{0,\dots,9}$, który jest równoliczny ze zbiorem \mathbb{N}^+ , istnieje taki ciąg ze zbioru $C^{0,\dots,9}$, który nie należy do tego podzbioru.

Dowód. Bierzemy dowolny podzbiór \mathcal{A} zbioru $C^{0,\dots,9}$, który jest równoliczny ze zbiorem \mathbb{N}^+ . Innymi słowy, zbiór \mathcal{A} ponumerować:

$$\begin{array}{ccc} 1 & \leftrightarrow & \mathbf{c}^1 \\ 2 & \leftrightarrow & \mathbf{c}^2 \\ 3 & \leftrightarrow & \mathbf{c}^3 \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ n & \leftrightarrow & \mathbf{c}^n \\ n+1 & \leftrightarrow & \mathbf{c}^{n+1} \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{array}$$

Lecz w każdym ciągu należącym do podzbioru \mathcal{A} wyrazy są już ponumerowane:

$$\mathbf{c}^i = a_1^i, a_2^i, a_3^i, \dots, a_n^i, \dots$$

gdzie indeks górny jest numerem danego ciągu, a indeks dolny to numer danego wyrazu w tym ciągu (oczywiście każdy wyraz ciągu c^i jest równy 0, 1, ..., albo 9).

Z poprzedniego przyporządkowania otrzymujemy więc nieskończoną tablicę zero-jedynkową:

1	\leftrightarrow	a_1^1	a_2^1	a_3^1	\dots	a_n^1	\dots
2	\leftrightarrow	a_1^2	a_2^2	a_3^2	\dots	a_n^2	\dots
3	\leftrightarrow	a_1^3	a_2^3	a_3^3	\dots	a_n^3	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\ddots
n	\leftrightarrow	a_1^n	a_2^n	a_3^n	\dots	a_n^n	\dots
$n+1$	\leftrightarrow	a_1^{n+1}	a_2^{n+1}	a_3^{n+1}	\dots	a_n^{n+1}	\dots
\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\vdots	\ddots	\vdots	\ddots

Tworzymy ciąg d stojący na przekątnej tablicy (ciąg diagonalny) o następujących wyrazach:

$$a_1^1, a_2^2, a_3^3, \dots, a_n^n, a_{n+1}^{n+1}, \dots$$

Teraz tworzymy zero-jedynkowy ciąg \bar{d} w ten sposób, że tam gdzie w ciągu d stało zero bierzemy jeden, a tam gdzie nie było zera bierzemy zero. Można też je zapisać jako:

$$\bar{d}_i = \begin{cases} 0 & \text{gdy } a_i^i \neq 0 \\ 1 & \text{gdy } a_i^i = 0 \end{cases}$$

Ciąg \bar{d} należy do $C^{0,1} \subset C^{0,\dots,9}$. Jak łatwo zauważyć, ciąg \bar{d} nie należy do podzbioru \mathcal{A} . Gdyby należał, to miałby jakiś numer w przyjętej numeracji zbioru \mathcal{A} . Oznaczmy ten numer przez ' \bar{n} '. Jego \bar{n} -tym wyraz $a_{\bar{n}}^{\bar{n}}$, gdyby był zerem, to byłby też jedynką; a gdyby nie był zerem, to byłby zerem. A to daje sprzeczność: ten wyraz ma być jednocześnie jest i nie zerem. \square

Z powyższego lematu wyciągamy poniższy wniosek, z którego wynika już fakt 9:

Wniosek 4. Każdy podzbiór zbioru $C^{0,\dots,9}$, który jest równoliczny ze zbiorem \mathbb{N}^+ , jest różny od zbioru $C^{0,\dots,9}$. \square

Zadanie 6. Udowodnij, że zbiory $C^{0,1}$ i $C^{0,\dots,9}$ są równoliczne.

Równoliczność zbiorów $C^{0,1}$ i $\mathcal{P}(\mathbb{N})$

W przypisie 34 wspomnieliśmy już, że za pomocą elementów zbioru $C^{0,1}$ można „zakodować” elementy rodziny $\mathcal{P}(\mathbb{N}^+)$.

Fakt 10. Zbiory $C^{0,1}$ i $\mathcal{P}(\mathbb{N}^+)$ są równoliczne.

Stąd, skoro zbiór $C^{0,1}$ nie jest równoliczny ze zbiorem \mathbb{N}^+ (fakt 6) oraz pojęcie równoliczności jest przechodnie, więc zbiory \mathbb{N}^+ i $\mathcal{P}(\mathbb{N}^+)$ też nie są równoliczne.

Dowód faktu 10. Niech A będzie dowolnym podzbiorem zbioru \mathbb{N}^+ . Zbiorowi A przyporządkowujemy następujący nieskończony ciąg c^A należący do zbioru $C^{0,1}$, który ma następujące poszczególne wyrazy dla $n \in \mathbb{N}^+$:

$$c_n^A = \begin{cases} 1 & \text{gdy } n \in A \\ 0 & \text{gdy } n \notin A \end{cases}$$

Słownie: na n -tym miejscu ciągu c^A stoi liczba 1, jeśli $n \in A$, w przeciwnym razie, na n -tym miejscu tego ciągu mamy liczbę 0. Ciąg c^A nazywamy *ciągami charakterystycznym* zbioru A .

Oczywiście, ciągiem charakterystycznym zbioru pustego \emptyset jest ciąg stały $\mathbf{0} = (0, 0, 0, 0, \dots)$ (gdyż żadna liczba nie należy do \emptyset); a ciągiem charakterystycznym zbioru \mathbb{N}^+ jest ciąg stały $\mathbf{1} = (1, 1, 1, 1, \dots)$ (gdyż każda liczba dodatnia należy do \mathbb{N}^+).

Zatem zbiory z rodziny $\mathcal{P}(\mathbb{N}^+)$ i ciągi ze zbioru $C^{0,1}$ można ustawić w pary:

$$A \leftrightarrow c^A$$

Oczywiście, to przyporządkowanie jest różnowartościowe i „na”, gdyż ciąg ze zbioru $C^{0,1}$ wyznacza jakiś podzbiór zbioru \mathbb{N}^+ (jest ciągiem charakterystycznym jakiegoś podzbioru). Istotnie, biorąc ciąg c z $C^{0,1}$ otrzymamy zbiór: $A = \{n \in \mathbb{N}^+ : c_n = 1\}$, czyli do zbioru A należą te i tylko te dodatnie liczby naturalne, które są numerami jedynek w ciągu c . \square

Wniosek 5. *Zbiory \mathbb{N}^+ i $\mathcal{P}(\mathbb{N}^+)$ nie są równoliczne.*

Dowód. Po pierwsze, zbiór \mathbb{N} jest równoliczny z \mathbb{N}^+ . (fakt 6). Po drugie, zbiór $\mathcal{P}(\mathbb{N}^+)$ jest równoliczny z $C^{0,1}$ (fakt 10). Po trzecie, pojęcie *równoliczności* jest przechodnie. Zatem zbiór \mathbb{N}^+ nie jest równoliczny z $\mathcal{P}(\mathbb{N}^+)$. \square

Zadanie 7. Wykazać, że rodzina $\mathcal{P}(\mathbb{N}^+)$ jest równoliczna z rodziną $\mathcal{P}(\mathbb{N}^+) \setminus \{\emptyset, \mathbb{N}^+\}$, czyli z rodziną niepustych podzbiorów właściwych zbioru \mathbb{N}^+ .

Wskazówka. Dowód faktu 10 pokazuje, że rodzina $\mathcal{P}(\mathbb{N}^+) \setminus \{\emptyset, \mathbb{N}^+\}$ jest równoliczna ze zbiorem $C_{\star}^{0,1}$. Ten ostatni zaś zbiór jest równoliczny ze zbiorem $C^{0,1}$ (zob. fakt 8). Teraz korzystamy z faktu 10 i z tego, że równoliczność jest przechodnia. \square

Równoliczność zbiorów potęgowych zbiorów równolicznych

Pokażemy, że rodziny $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ i $\mathcal{P}(\mathbb{N}^+)$ są równoliczne. Może wydawać się to zaskakujące z tego względu, że «zdaje się», iż rodzin w pierwszej rodzinie jest «dwa razy więcej» od zbiorów w drugiej rodzinie.³⁸

Jak pamiętamy funkcja $F(n) = n + 1$ wskazywała równoliczność zbiorów \mathbb{N} i \mathbb{N}^+ :

$$\begin{array}{ccccccc} 0 & 1 & 2 & \dots & n & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots & \updownarrow & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n+1 & \dots \end{array}$$

Zatem podzbiworowi X zbioru \mathbb{N} przyporządkowujemy podzbiór $X^* = \{n + 1 : n \in X\}$ zbioru \mathbb{N}^+ . Przykładowo $\emptyset^* = \emptyset$, $\mathbb{N}^* = \mathbb{N}^+ \setminus \{1, 6\}^* = \{2, 7\}$. Przyporządkowanie to jest różnowartościowe i „na”. Zatem ustala równoliczność rodzin $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ i $\mathcal{P}(\mathbb{N}^+)$.

Wniosek 6. *Zbiory \mathbb{N} i $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nie są równoliczne.*

Dowód. Po pierwsze, zbiór \mathbb{N}^+ jest równoliczny z \mathbb{N} . Po drugie, zbiór $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ jest równoliczny z $\mathcal{P}(\mathbb{N}^+)$. Po trzecie, zbiór \mathbb{N}^+ nie jest równoliczny z $\mathcal{P}(\mathbb{N}^+)$ (wniosek 5). Po czwarte, pojęcie *równoliczności* jest przechodnie. Zatem zbiór \mathbb{N} nie jest równoliczny z $\mathcal{P}(\mathbb{N})$. \square

To nam pokazuje jak udowodnić następujący ogólny fakt:

Fakt 11. *Jeśli zbiory A i B są równoliczne, to równoliczne są rodziny $\mathcal{P}(A)$ i $\mathcal{P}(B)$.*

Dla zbiorów skończonych powyższy fakt wynika po prostu z wniosku 2 oraz faktu 5. Istotnie, jeśli skończone zbiory są równoliczne, to mają tę samą liczbę elementów, powiedzmy n . Wówczas ich zbiory potęgowe mają po 2^n elementów. Zatem są równoliczne.

Podany dowód dotyczy zarówno przypadku zbioru skończonych, jak i nieskończonych.

Dowód. Załóżmy, że zbiory A i B są równoliczne. Zatem istnieje funkcja $F: A \rightarrow B$ różnowartościowa i „na”. Tworzymy nową funkcję $F^*: \mathcal{P}(A) \rightarrow \mathcal{P}(B)$ następującym warunkiem: $F^*(X) = \{F(x) : x \in X\}$. Łatwo pokazać, że funkcja F jest różnowartościowa i na $\mathcal{P}(B)$. Zatem wyznacza równoliczność rodzin $\mathcal{P}(A)$ i $\mathcal{P}(B)$. \square

³⁸ Rodzina $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ składa się ze zbiorów z rodziny $\mathcal{P}(\mathbb{N}^+)$ oraz z tych zbiorów z dodaną liczbą 0.

To jednak nie powinno nas dziwić, gdy przypomnimy sobie o równoliczności zbioru wszystkich liczb naturalnych i zbioru wszystkich liczb parzystych.

Zbiory przeliczalne

Mamy więc przynajmniej dwa rodzaje nieskończoności. Jedną tworzą zbiory równoliczne ze zbiorem \mathbb{N}^+ (i \mathbb{N}). Elementy zbiorów tego rodzaju można ponumerować, albo inaczej mówiąc «przeliczać». Jest tu sytuacja podobna ze zbiorami skończonymi. Elementy tych ostatnich też można ponumerować (z ostatnim numerem) albo policzyć.

Zatem zbiory skończone oraz te, które są równoliczne ze zbiorem \mathbb{N}^+ podpadają pod jedno pojęcie *bycia zbiorem przeliczalnym*. Elementy niepustych zbiorów przeliczalnych da się ponumerować liczbami naturalnymi, tj. można je liczyć. Stąd bierze się zapewne nazwa ‘zbiór przeliczalny’.

Mówimy, że dany zbiór *jest przeliczalny*, gdy albo jest skończony, albo jest równoliczny ze zbiorem wszystkich dodatnich liczb naturalnych, \mathbb{N}^+ .³⁹

Jak widzieliśmy istnieją również zbiory nieprzeliczone. Mówiąc obrazowo, w zbiorach nieprzeliczalnych mamy tak dużą liczbę elementów, iż nie można ich ponumerować. Przykładowo, zbiorami nieprzeliczalnymi są następujące zbiory równoliczne: $C^{0,1}$, $C_\star^{0,1}$, $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ i $\mathcal{P}(\mathbb{N}^+)$. Dalej pokażemy, że równoliczny z nimi jest zbiór wszystkich liczb rzeczywistych \mathbb{R} .

Oczywiście, w definicji pojęcia *przeliczalności* mogliśmy użyć zbioru wszystkich liczb naturalnych, \mathbb{N} . Zbiory \mathbb{N} i \mathbb{N}^+ są przecież równoliczne, a relacja równoliczności jest przechodnia. Zatem dany zbiór jest przeliczalny, gdy albo jest skończony, albo jest równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb naturalnych, \mathbb{N} .

Udowodnimy przydatny dalej fakt:

Fakt 12. *Każdy podzbiór danego zbioru przeliczalnego jest także przeliczalny.*

Powyższy fakt jest oczywisty dla zbiorów skończonych: *Każdy podzbiór zbioru skończonego jest skończony*. Istotny problem stanowią tylko nieskończone zbiory przeliczalne: *Każdy podzbiór nieskończonego zbioru przeliczalnego jest albo skończony albo równoliczny ze zbiorem \mathbb{N}^+ (czyli jest przeliczalny)*.

Dowód. Bierzemy dowolny nieskończony i przeliczalny zbiór A oraz dowolny jego podzbiór A . Jeśli A jest zbiorem skończonym, to jest on również przeliczalny. Rozważmy więc przypadek, gdy A jest zbiorem nieskończonym.

Założyliśmy, że zbiór A jest równoliczny ze zbiorem \mathbb{N}^+ , tzn. mamy numerację elementów zbioru A :

$$\begin{array}{ccccccc} a_1 & a_2 & a_3 & \dots & a_{n-1} & a_n & \dots \\ \updownarrow & \updownarrow & \updownarrow & \dots & \updownarrow & \updownarrow & \dots \\ 1 & 2 & 3 & \dots & n-1 & n & \dots \end{array}$$

Na tej podstawie skonstruujemy numerację elementów zbioru X . W powyżej podanej numeracji szukamy pierwszego elementu zbioru A , który jest zarazem elementem zbioru X . Temu elementowi nadajemy numer 1. Inaczej mówiąc, szukamy najmniejszej liczby i takiej, że $a_i \in X$. Element a_i przemianowujemy na x_1 . Następnie, szukamy kolejnego numeru j ($j > i$) takiego, że $a_j \in X$. Elementowi a_j nadajemy numer 2, czyli $x_2 = a_j$. Postępowanie nasze kontynuujemy w nieskończoność, gdyż z założenia zbiór X jest nieskończony (tj. nie może być równoliczny ze zbiorem $\{1, \dots, n\}$, dla jakiejś liczby naturalnej n).⁴⁰ \square

³⁹ W literaturze anglojęzycznej stosowane są dwa nierównoznaczne przymiotniki: ‘denumerable’ i ‘countable’. Pierwszy dotyczy tylko zbiorów równolicznych ze zbiorem \mathbb{N}^+ . Drugi przymiotnik odnosi się zarówno do nich oraz do zbiorów skończonych. Obu angielskim przymiotnikom odpowiada jeden przymiotnik polski: ‘przeliczalny’. Może zatem powstać nieporozumienie w stosowaniu tego przymiotnika. W naszym przypadku przymiotnik ‘przeliczalny’ odpowiada angielskiemu ‘countable’ (jest to standardowe rozwiązanie przyjmowane w literaturze polskiej).

W literaturze polskiej nie wprowadza się przymiotnika ‘numerowalny’, który odpowiadałby angielskiemu przymiotnikowi ‘denumerable’.

⁴⁰ Zauważmy, że gdyby sam zbiór A nie był przeliczalny, tzn. nie był ponumerowany liczbami 1, 2, ..., itd., to nie można byłoby zastosować podanego algorytmu szukania najmniejszego numeru.

Liczby pozaskończone

Nie ma takiej liczby naturalnej, które określałaby ilość elementów zbioru wszystkich liczb naturalnych. Wprowadzamy więc taką liczbę. Jest nią \aleph_0 (czytaj: „alef zero”; ‘ \aleph ’ jest pierwszą literą alfabetu hebrajskiego). Innymi słowy, \aleph_0 jest liczbą elementów zbioru \mathbb{N} . Jest to liczba *pozaskończona* (albo inaczej: «nieskończona»), gdyż wskazuje na ilość elementów pewnego zbioru nieskończonego.⁴¹

Jak już wspomnieliśmy po wniosku 2, wszystkim zbiorom chcemy przyporządkować liczbę ich elementów (dla zbiorów nieskończonych mają to być liczby pozaskończone). Wszystkie liczby naturalne (skończone) oraz wszystkie liczby pozaskończone nazywamy *liczbami kardynalnymi*. Dla dowolnego zbioru A niech $\text{Card}(A)$ będzie liczbą (kardynalną) jego elementów.⁴² Zatem:

$$\text{Card}(\mathbb{N}) = \aleph_0.$$

Przyporządkowanie zbiorom liczb kardynalnych ma spełniać zasadę, która ma taką samą postać, jak wniosek 2, lecz bez założenia o skończoności zbiorów.

Zasada. Dla dowolnych zbiorów A i B :

Zbiory A i B są równoliczne wtedy i tylko wtedy, gdy $\text{Card}(A) = \text{Card}(B)$.

Wszystkie nieskończone zbiory przeliczalne są równoliczne ze zbiorem \mathbb{N} . Zatem — według przyjętej zasady — wszystkim tym zbiorom przyporządkowujemy liczbę \aleph_0 . Innymi słowy, \aleph_0 to liczba elementów dowolnego nieskończonego zbioru przeliczalnego.

Zauważmy, że \aleph_0 jest najmniejszą z pozaskończonych liczb. Wynika to z faktu 12.⁴³ Każdy podzbiór zbioru przeliczalnego ma albo skończoną liczbę elementów, albo ma \aleph_0 elementów.

Nieprzeliczalnej rodzinie $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ — i wszystkim zbiorom z nią równolicznym — przyporządkujemy liczbę kardynalną oznaczaną przez 2^{\aleph_0} . Oznaczamy tak ją przez analogię z liczbą elementów zbiorów potęgowych dla zbiorów skończonych (por. fakt 5). Zatem

$$\text{Card}(\mathcal{P}(\mathbb{N})) = 2^{\aleph_0}.$$

Ogólnie, przyjmujemy następujące przyporządkowanie liczb pozaskończonych zbiorom potęgowym zbiorów nieskończonych. Dla każdego zbioru nieskończonego A :

$$\text{Card}(\mathcal{P}(A)) = 2^{\text{Card}(A)}.$$

Dla zbiorów skończonych jest to po prostu fakt 5. Na mocy faktu 11, przyporządkowanie to spełnia podana powyżej zasadę przyporządkowania zbiorom ich liczb kardynalnych. Istotnie, jeśli zbiory A i B są równoliczne, to także równoliczne są rodziny $\mathcal{P}(A)$ i $\mathcal{P}(B)$, czyli przyporządkowujemy im te same liczby pozaskończone.

Skoro zbiory \mathbb{N} i $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ nie są równoliczne (wniosek 6), więc — na mocy podanej powyższej zasady przyporządkowania zbiorom ich liczb kardynalnych — mamy

$$\aleph_0 \neq 2^{\aleph_0}.$$

Na mocy tego mamy:

$$\aleph_0 < 2^{\aleph_0},$$

gdyż zbiór liczb naturalnych \mathbb{N} jest równoliczny z **pewnym podzbiorem właściwym** rodziny

⁴¹ Zamiast oznaczenia ‘ \aleph_0 ’ używa się niekiedy małej gotyckiej litery ‘ α ’ (oznaczenia te mają inną genezę).

⁴² Przejmowane są także oznaczenia \bar{A} oraz $|A|$. To pierwsze wprowadził sam twórca pojęcia liczby kardynalnej, Cantor: „W swobodnym przekładzie definicja jego brzmi «liczbą kardynalną zbioru M jest pojęcie, które powstaje z M , gdy abstrahujemy od natury jego elementów oraz od ich uporządkowania» [...]. Symbolika \bar{M} miała oznaczać ów akt podwójnej abstrakcji, która prowadzi od zbioru M do jego liczby kardynalnej \bar{M} ” (K. Kuratowski i A. Mostowski, *Teoria mnogości*, wyd. 3, Warszawa 1978, s. 179).

⁴³ Istotnie, załóżmy że istnieje nieskończona liczba λ taka, że $\lambda < \aleph_0$. Zatem λ byłaby liczbą elementów dla pewnego zbioru nieskończonego A . Przenosząc pojęcie *mniejszości* ze zbioru liczb naturalnych, mamy: A byłby podzbiorem jakiegoś nieskończonego zbioru przeliczalnego (mającego \aleph_0 elementów). Lecz na mocy faktu 12, zbiór A musiałby być zbiorem przeliczalnym. A skoro jest nieskończony, więc ma \aleph_0 elementów. Zatem dostaliśmy sprzeczność.

$\mathcal{P}(\mathbb{N})$. Istotnie, zbiór $\{0, 1, 2, 3, \dots\}$ jest równoliczny ze zbiorem wszystkich zbiorów jednoelementowych (singletonów) $\{\{0\}, \{1\}, \{2\}, \{3\}, \dots\}$. Mamy przecież przyporządkowanie:

$$\begin{array}{ccccccc} \{0\} & \{1\} & \{2\} & \dots & \{n\} & \dots \\ \uparrow & \uparrow & \uparrow & \dots & \uparrow & \dots \\ 0 & 1 & 2 & \dots & n & \dots \end{array}$$

czyli funkcję $\mathbb{N} \ni n \mapsto \{n\} \in \mathcal{P}(\mathbb{N})$, która jest różnowartościowa (nie jest oczywiście na cały zbiór potęgowy $\mathcal{P}(\mathbb{N})$).

Dalej będzie pokazane, że dowolny zbiór A nie jest równoliczny z rodziną $\mathcal{P}(A)$. Zatem $\text{Card}(A) \neq 2^{\text{Card}(A)}$, dla dowolnego zbioru A . Stąd — rozumując jak powyżej dla zbioru \mathbb{N} — otrzymamy $\text{Card}(A) < 2^{\text{Card}(A)}$. Zatem mamy uogólnienie na wszystkie liczby kardynalne warunku zachodzącego dla liczb naturalnych (dla dowolnej liczby naturalnej n mamy: $n < 2^n$).

Nowa liczba pozaskończona. Kontinuum

Zadajmy pytanie: ile elementów ma rodzina wszystkich podzbiorów 33 elementowego zbioru? Na podstawie faktu 5 wiemy, że rodzina ta ma 2^{33} elementów. Ale ile ich jest? Można policzyć! Poszukam więc mojego kalkulatora.

Zadajmy drugie pytanie: ile elementów ma rodzina wszystkich podzbiorów zbioru, który ma \aleph_0 elementów? Na podstawie przyjętej w poprzednim punkcie umowy wiemy, że rodzina ta ma 2^{\aleph_0} elementów. Ale ile ich jest? Czy można je policzyć. Nie. Zatem kalkulator mi się teraz nie przyda. Co gorsza, nie tylko ich nie policzę (czyli zakończę liczenie), ale nawet nie przeliczę. Jak wiemy rodzina ta nie jest przeliczalna.

Kalkulator pokazał, że zbiór 33 elementowy ma 8589934592 wszystkich podzbiorów. Czy mógłbym jakoś lepiej wyrazić, ile wszystkich podzbiorów ma zbiór \aleph_0 elementowy? Tak, mogę powiedzieć, że tych podzbiorów „jest kontinuum”. Słowo ‘kontinuum’ wyraża ciągłość.⁴⁴ Zatem jest to ilość elementów takiego zbioru, w którym «pomiędzy elementami nie ma żadnych luk». Taką ilość ma właśnie wyrażać liczba 2^{\aleph_0} .

Sformułowanie ‘pomiędzy elementami nie ma żadnych luk’ ujęliśmy w cudzysłów przenośny, gdyż wydaje się, że pomiędzy elementami zbioru liczb wymiernych \mathbb{Q} także nie ma luk. Jest to przecież zbiór gęsty w tym sensie, że pomiędzy **dowolne** dwie liczby wymierne da się wstawić trzecią (czyli również pomiędzy pierwszą i trzecią wstawiamy czwartą, pomiędzy pierwszą i czwartą wstawiamy piątą itd.). Ale ten zbiór jest przecież przeliczalny. Zatem gęstość zbioru nie gwarantuje jego ciągłości.

Aby coś powiedzieć o pozaskończonej liczbie kontinuum musimy wskazać jakiś intuicyjny przykład zbioru posiadającego tę liczbę kardynalną. Jest nim np. zbiór punktów położonych na jednostkowym odcinku oraz — co na jedno wychodzi — zbiór liczb rzeczywistych w przedziale $[0, 1]$.⁴⁵ Dalej pokażemy, że zbiory te też mają mieć po 2^{\aleph_0} elementów, czyli, że liczba 2^{\aleph_0} wyraża liczebność punktowego kontinuum (por. dalej wniosek 10).

Poniżej przedstawimy «jakościową różnicę» pomiędzy ciągłością punktową (kontinuum) przedziału liczbowego $[0, 1]$ a gęstością zbioru liczb wymiernych znajdujących się w przedziale $[0, 1]$.⁴⁶

⁴⁴ Słownik języka polskiego wydany przez PWN pisze: **kontinuum** filoz. mat. «ciągły, uporządkowany zbiór nieskończonej liczby elementów przechodzących jeden w drugi».

⁴⁵ Przedziałem domkniętym $[0, 1]$ jest zbiór złożony z liczb 0 i 1 oraz wszystkich liczb rzeczywistych znajdujących się pomiędzy liczbami 0 i 1, tzn. $[0, 1] = \{t \in \mathbb{R} : 0 \leq t \leq 1\}$.

⁴⁶ Zbiorem liczb wymiernych w przedziale $[0, 1]$ jest zbiór $[0, 1]^{\mathbb{Q}} = \{w \in \mathbb{Q} : 0 \leq w \leq 1\}$.

Pewien «paradoks» liczb wymiernych. Jakościowa różnica pomiędzy przeliczalnością a ciągłością punktową (kontinuum)

Tytułowy paradoks jest tylko pozorny (dlatego użyliśmy cudzysłowu przenośnego).⁴⁷ Pokrótkę go przedstawimy. Może on być przedstawiony dla samych liczb wymiernych, lecz bardziej «obrazowy» będzie jego geometryczny wariant.

Na dowolnej prostej (osi liczbowej) bierzemy domknięty odcinek jednostkowy J o długości 1. W odcinku J wybieramy punkty o współrzędnych wymiernych, czyli oddalone o jakąś liczbę wymierną od początku tego odcinka. Punktów tych jest tyle samo, co liczb w zbiorze $[0, 1]^{\mathbb{Q}}$, czyli liczb wymiernych w domkniętym przedziale $[0, 1]$.⁴⁸

Zauważmy, że zbiór $[0, 1]^{\mathbb{Q}}$ jest nieskończony i przeliczalny.⁴⁹ Zatem możemy ustawić je w ciąg nieskończony $w_1, w_2, \dots, w_n, \dots$. Można więc to też zrobić ze zbiorem $J^{\mathbb{Q}}$ punktów z odcinka J odpowiadających liczbom wymiernym. Uzyskamy ciąg tych punktów: $p_1^w, p_2^w, \dots, p_n^w, \dots$ (mamy $J^{\mathbb{Q}} = \{p_1^w, p_2^w, \dots, p_n^w, \dots\}$). Każdy z tych punktów «przykryjmy» jakimś odcinkiem domkniętym $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$. Jaka jest suma długości tych odcinków? Czy zawsze jest ona nieskończona?

Jeśli wszystkie z wybranych punktów pokryliśmy odcinkami o tej samej długości d , to otrzymamy nieskończoną przeliczalną sumę dającą w wyniku nieskończoność

$$d + d + d \cdots + d + \cdots = \infty,$$

bez względu na to jak mała jest liczba d .

Przypomnienie (wiadomości ze szkoły średniej). (a) Wyjaśnimy co to jest nieskończona składników liczbowa? Wiemy co to jest suma $a_1 + a_2 + \cdots + a_n$ skończonej ilości składników liczbowa, gdzie n jest dowolną liczbą naturalną większą od 1 oraz a_1, a_2, \dots, a_n są liczbami rzeczywistymi (dla $n = 2$ mamy: $a_1 + a_2$). Przyjmujemy zapis:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n = \sum_{i=1}^n a_i$$

Niech $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ będzie nieskończonym ciągiem liczbowym. Szeregiem liczbowym opartym na tym ciągu jest ciąg sum częściowych, czyli ciąg, który ma poniższe wyrazy:

$$\begin{array}{ccc} a_1 & & a_1 \\ a_1 + a_2 & & \sum_{i=1}^2 a_i \\ \vdots & & \vdots \\ a_1 + a_2 + a_3 + \cdots + a_n & & \sum_{i=1}^n a_i \\ \vdots & & \vdots \end{array}$$

Wszystkie te sumy częściowe można policzyć w standardowy sposób, gdyż są one skończone. Liczymy granicę tego ciągu sum częściowych. Ta granica (jeśli istnieje) jest właśnie *Sumą nieskończonego ciągu* $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$. Jeśli ta granica nie istnieje, to mówimy, że ciąg nieskończony ma sumę nieskończoną. Zatem:

$$a_1 + a_2 + \cdots + a_n + \cdots = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \cdots + a_n),$$

⁴⁷ Tak też to przedstawiają dwaj znani profesorowie matematyki, R. Jajte i W. Kryszicki, w popularnonaukowej książce *Z matematyką za pan brat*, Gdańsk 2000, s. 173–174.

⁴⁸ Dlatego mówiliśmy, że można przedstawić to zagadnienie dla samych zbiorów liczbowa $[0, 1]$ i $[0, 1]^{\mathbb{Q}}$, lecz tracimy przy tym jego obrazowy opis geometryczny.

⁴⁹ Po pierwsze, zbiór $[0, 1]^{\mathbb{Q}}$ jest nieskończony, gdyż zawiera w sobie nieskończony zbiór $\{1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\}$, czyli wszystkich liczb wymiernych o postaci $\frac{1}{n}$. Po drugie, zbiór $[0, 1]^{\mathbb{Q}}$ jest przeliczalny, gdyż jest podzbiorem przeliczalnego zbioru \mathbb{Q} (fakt 12: każdy podzbiór danego zbioru przeliczalnego jest także przeliczalny).

albo w innym zapisie:

$$\sum_{i=1}^{\infty} a_i = \lim_{n \rightarrow \infty} (a_1 + a_2 + \dots + a_n) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n a_i.$$

(b) Jeśli $a_1, a_2, \dots, a_n, \dots$ jest ciągiem stałym i każdy jego wyraz jest równy liczbie d , to ciąg sum częściowych ma postać: $d, d + d, \dots, n \cdot d, \dots$. Zatem

$$d + d + d \dots + d + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} n \cdot d = \infty,$$

bez względu na to jak mała jest liczba d , gdyż ciąg sum częściowych nie jest ograniczony.

(c) W przypadku nieskończonego ciągu $1, \frac{1}{2}, \dots, \frac{1}{n}, \dots$, tzn. $a_n = \frac{1}{n}$, mamy

$$1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{2} + \dots + \frac{1}{n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{1}{i} = \infty,$$

gdyż ciąg sum częściowych nie jest ograniczony.

(d) W przypadku nieskończonego ciągu $\frac{a}{2}, \frac{a}{2^2}, \dots, \frac{a}{2^n}, \dots$, tzn. $a_n = \frac{a}{2^n}$, dla $a > 0$, mamy

$$\frac{a}{2} + \frac{a}{2^2} + \dots + \frac{a}{2^n} + \dots = \lim_{n \rightarrow \infty} \left(\frac{a}{2} + \frac{a}{2^2} + \dots + \frac{a}{2^n} \right) = \lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{i=1}^n \frac{a}{2^i} = \frac{\frac{a}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = a,$$

gdyż mamy do czynienia z ciągiem geometrycznym o pierwszym wyrazie $\frac{a}{2}$ i ilorazie $q = \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$. Szereg geometryczny (tj. ciąg sum częściowych) jest zbieżny do liczby $\frac{d}{1-q}$, która jest właśnie sumą tego szeregu.

(e) W ogóle nie ma sensu sumowanie $\sum_{t \in \mathbb{R}} a_t$ i $\sum_{t \in [0,1]} a_t$, gdyż nie da się tego sprawdzić do obliczania granicy sum częściowych. (Zamiast tego mamy pojęcie całki, lecz to jest już zupełnie inne zagadnienie.) \square

A co by było gdybyśmy zmniejszali długości kolejnych odcinków $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$ pokrywających kolejne punkty $p_1^w, p_2^w, \dots, p_n^w, \dots$? Np. co będzie jeśli odcinek I_n otaczający punkt p_n^w będzie miał długość d_n równą $\frac{1}{2^n}$? (Patrz wyżej przypomnienie wiadomości ze szkoły średniej.)

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{n} + \dots = \infty.$$

A co będzie, gdy np. weźmiemy $d_n = \frac{1}{2^n}$?

$$\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \frac{1}{8} + \dots + \frac{1}{2^n} + \dots = \frac{\frac{1}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 1,$$

gdyż sumowaliśmy wyrazy ciągu geometrycznego o pierwszym wyrazie $\frac{1}{2}$ i ilorazie $\frac{1}{2}$. Jest to wynik w pewnym sensie zaskakujący. Przecież w każdym z odcinków $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$ jest jakiś różny od p_n^w punkt z J^Q , a co więcej, jest tam nieskończona ilość takich punktów.⁵⁰ Dlaczego więc wyszła nam tak mała suma? Lecz czy rzeczywiście ta suma jest taka mała? Przecież mogła ona być jeszcze mniejsza. Wystarczyło np. przyjąć, że $d_n = \frac{0,0001}{2^n}$. Otrzymalibyśmy

$$\frac{0,0001}{2} + \frac{0,0001}{4} + \frac{0,0001}{8} + \dots + \frac{0,0001}{2^n} + \dots = \frac{\frac{0,0001}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = 0,0001.$$

Ogólnie, dla dowolnej liczby rzeczywistej dodatniej a kładąc $d_n = \frac{a}{2^n}$ otrzymamy

$$\frac{a}{2} + \frac{a}{4} + \frac{a}{8} + \dots + \frac{a}{2^n} + \dots = \frac{\frac{a}{2}}{1 - \frac{1}{2}} = a.$$

Zatem suma ta może być dowolnie małą liczbą dodatnią, a wydawało się, że musi przekroczyć liczbę 1, tj. długość odcinka jednostkowego J . Inaczej mówiąc, mogłoby się wydawać,

⁵⁰ W dowolnie małym odcinku pokrywającym jakiś punkt z J^Q jest nieskończona ilość punktów z ciągu $p_1^w, p_2^w, \dots, p_n^w, \dots$

że pokrywając jakimiś odcinkami $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$ punkty leżące gęsto na odcinku J , zawsze musimy pokryć cały odcinek J . A okazało się, że odpowiednio dobierając odcinki $I_1, I_2, \dots, I_n, \dots$ pokryjemy tylko drobny fragment odcinka J . Skoro ten fragment jest dowolnie mały, więc znaczy to, że miara (długość) zbioru J^Q jest równa 0. Miara (długością) odcinka J jest oczywiście liczba 1.⁵¹

Oczywiste jest, że **wszystkie** punkty z odcinka J pokrywają go, gdyż to one go tworzą. Zatem także wszystkie pokrycia punktów na odcinku J muszą pokryć ten odcinek. Jest tak bez względu na długości odcinków pokrywających poszczególne punkty w J . Zatem w przypadku wszystkich punktów w J jest inaczej niż w przypadku, gdy braliśmy tylko punkty z J^Q , czyli punkty w J o współrzędnych wymiernych. Stąd wynika, że **zbiór wszystkich punktów na odcinku J jest nieprzeliczalny**.

Udowodnijmy to trochę inaczej. Załóżmy nie wprost, że zbiór wszystkich punktów w odcinku J jest przeliczalny, czyli punkty te można ustawić w ciąg nieskończony: $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$. Mielibyśmy przy tym $J = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. Możemy zatem powtórzyć nasze rozważania dotyczące zbioru punktów $\{p_1^w, p_2^w, \dots, p_n^w, \dots\}$ o współrzędnych wymiernych. Przecież nie był istotny sam rodzaj punktów. Ważne było tylko to, że można je było ustawić w ciąg nieskończony. Moglibyśmy zatem pokryć wszystkie punkty $x_1, x_2, \dots, x_n, \dots$ odcinkami $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$ o łącznej długości $\frac{1}{10000}$. Zatem pewne punkty z odcinka J , który przecież ma długość 1, nie byłyby pokryte przez pokrycie $X_1, X_2, \dots, X_n, \dots$. Zatem musiałyby być poza zbiorem $\{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$. A to jest sprzeczne z tym, że jest on właśnie równy odcinkowi J , w zbiorze tym są wszystkie punkty z odcinka J . Przypuszczenie, że zbiór J jest przeliczalny doprowadziło do sprzeczności: $J = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\} \neq J$. Musimy zatem odrzucić to przypuszczenie.⁵²

Zauważmy, że mamy jednoznaczne przyporządkowanie punktów z odcinka J i liczb rzeczywistych z przedziału $[0, 1]$. Mianowicie, każdemu punktowi z J odpowiada dokładnie jedna liczba z $[0, 1]$ i odwrotnie. Zatem **zbiory J i $[0, 1]$ są równoliczne**.

Nieprzeliczalność przedziału liczbowego $[0, 1]$ można wykazać innymi metodami. Wybraliśmy taką metodę, która jednocześnie wskazuje na jakościową różnicę pomiędzy przeliczalnością a ciągłością punktową (kontinuum punktowym).

Liczba kardynalna odcinka jednostkowego: liczba \mathfrak{c}

Odcinek J i równoliczny z nim przedział $[0, 1]$ stanowią standard ciągłości (punktowej). Zbiorem tym przyporządkowuje się liczbę kardynalną nazywaną *kontinuum* i oznaczaną małą gotycką literą ‘ \mathfrak{c} ’. Mamy więc:

$$\mathfrak{c} = \text{Card}(J) = \text{Card}([0, 1]).$$

Nieprzeliczalność zbioru \mathbb{R}

Przedstawioną w poprzednim punkcie metodę możemy także wykorzystać do wykazania nieprzeliczalności zbioru \mathbb{R} wszystkich liczb rzeczywistych. Wystarczy zamiast o odcinku J mówić o zbiorze \mathbb{R} . Gdyby zbiór \mathbb{R} był przeliczalny, to wszystkie liczby rzeczywiste można by ustawić w ciąg nieskończony $t_1, t_2, \dots, t_n, \dots$, czyli mielibyśmy $\mathbb{R} = \{t_1, t_2, \dots, t_n, \dots\}$. A to doprowadziłoby nas do sprzeczności $\mathbb{R} = \{t_1, t_2, \dots, t_n, \dots\} \neq \mathbb{R}$. Musimy zatem odrzucić to przypuszczenie.

⁵¹ Ogólnie, miara dowolnego odcinka na prostej pokrywa się z jego długością.

Zilustrujmy to zadaniem z rachunku prawdopodobieństwa: *Strzelasz w odcinek jednostkowy J . Trafieś. Jakie jest prawdopodobieństwo, że:*

(a) *Trafieś w jakiś punkt z początkowego odcinka o długości $\frac{1}{9}$?*

(b) *Trafieś w jakiś punkt o współrzędnej wymiernej?*

Odpowiedzi: (a) $\frac{1}{9}$; (b) 0. Prawdopodobieństwo ma być miarą (długością) zbioru punktów, w który masz trafić. Zatem to drugie zdarzenie jest niemożliwe.

⁵² Przy okazji zauważmy, że nie wolno pisać $A = \{x_1, x_2, \dots, x_n, \dots\}$, gdy zbiór A nie jest przeliczalny. Jest to dość często spotykany błąd. (My tak napisaliśmy, gdyż naszym założeniem nie wprost było, że odcinek J jest zbiorem przeliczalnym i nieskończonym.)

To, że zbiór \mathbb{R} nie jest przeliczalny jest uzasadnione również przez fakt 12 (każdy podzbiór danego zbioru przeliczalnego jest także przeliczalny) oraz przez to, że — jak wcześniej pokazaliśmy — przedział $[0, 1]$ nie jest przeliczalny. Gdyby zbiór \mathbb{R} był przeliczalny, to również przedział $[0, 1]$ byłby odcinek $[0, 1]$, a tak przecież nie jest.

Fakt, iż oba zbiory $[0, 1]$ i \mathbb{R} są nieprzeliczone, nie daje odpowiedzi na pytanie czy są to zbiory równoliczne. Odpowiedź jest twierdząca, lecz ten nowy fakt trzeba wykazać.

Wykażemy również, że zbiory \mathbb{R} , $[0, 1]$, $C^{0,1}$ i $\mathcal{P}(\mathbb{N})$ są równoliczne. Zatem $c = 2^{\aleph_0}$, czyli $\aleph_0 < c$ (por. dalej wniosek 10). Wówczas istotnie pokażemy, że rodzina podzbiorów zbioru o \aleph_0 elementach ma c elementów. Wcześniej jednak zajmiemy się zbiorem liczb rzeczywistych \mathbb{R} oraz przedziałami liczbowymi w tym zbiorze.

Równoliczność wszystkich przedziałów liczbowych.

Równoliczność zbioru \mathbb{R} z przedziałami liczbowymi

Niech a i b będą dwoma liczbami rzeczywistymi takimi, że $a < b$. Przedziałem domkniętym, otwartym, otwarcio-domkniętym i domknięto-otwartym o końcach a i b nazywamy odpowiednio zbiory:

$$[a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a \leq x \leq b\},$$

$$]a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a < x < b\},$$

$$]a, b] = \{x \in \mathbb{R} : a < x \leq b\},$$

$$[a, b[= \{x \in \mathbb{R} : a \leq x < b\}.$$

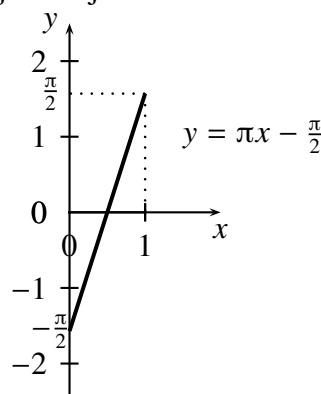
Pokażemy, że wszystkie przedziały są równoliczne. Na początek wykażemy pomocniczy fakt:

Lemat 4. Dla dowolnych liczb rzeczywistych a i b takich, że $a < b$:

- (a) Przedziały $[0, 1]$ i $[a, b]$ są równoliczne.
- (b) Przedziały $]0, 1[$ i $]a, b[$ są równoliczne.
- (c) Przedziały $]0, 1]$ i $]a, b]$ są równoliczne.
- (d) Przedziały $[0, 1[$ i $[a, b[$ są równoliczne.

Dowód. Wystarczy wziąć odwzorowanie liniowe określone następująco: $x \mapsto (b-a)x + a$. Jest ono różnowartościowe. Zauważmy, że $0 \mapsto (b-a)0 + a = a$ i $1 \mapsto (b-a) + a = b$. Zatem odwzorowanie to przekształca odpowiednio przedziały $[0, 1]$, $]0, 1[$, $]0, 1]$ i $[0, 1[$ na przedziały $[a, b]$, $]a, b[$, $]a, b]$ i $[a, b[$.

Zilustrujemy to na, przydatnym dalej, przykładzie, w którym $a = -\frac{\pi}{2}$ i $b = \frac{\pi}{2}$. Mamy wówczas odwzorowanie liniowe: $x \mapsto \pi x - \frac{\pi}{2}$. Powyższe spostrzeżenie o równoliczności odpowiednich przedziałów ilustruje wykres tej funkcji:

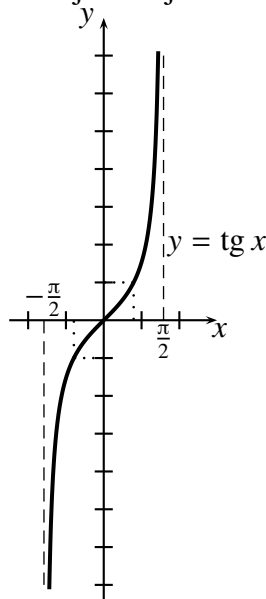


Zatem przedziały domknięte $[0, 1]$ i $[-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ są równoliczne. Podobnie jest dla przedziałów otwartych $]0, 1[$ i $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$, oraz dla pozostałych rodzajów przedziałów. \square

Teraz udowodnimy:

Fakt 13. Zbiory \mathbb{R} i $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ są równoliczne.

Dowód. Funkcja $x \mapsto \operatorname{tg} x$ określona na odcinku otwartym $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ przekształca go różnowartościowo na cały zbiór \mathbb{R} . Ilustruje to wykres tej funkcji:



Zatem zbiory \mathbb{R} i $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ są równoliczne. □

Wniosek 7. Zbiory \mathbb{R} i $]0, 1[$ są równoliczne.

Dowód. Bezpośrednio z lematu 4, faktu 13 oraz przechodniości pojęcia równoliczności. □

Równoliczność zbiorów \mathbb{R} i $[0, 1]$ wynikać będzie z wniosku 7 oraz następującego twierdzenia Cantora-Bernsteina (przyjętego tutaj bez dowodu⁵³).

Twierdzenie CB. Dla dowolnych zbiorów A , B i C .

Jeżeli $A \subseteq B \subseteq C$ oraz A i C są równoliczne, to A , B i C są równoliczne.

Wniosek 8. Zbiory $]0, 1[$, $[0, 1]$ i \mathbb{R} są równoliczne.

Dowód. Mamy $]0, 1[\subseteq [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ oraz zbiory $]0, 1[$ i \mathbb{R} są równoliczne, na mocy wniosku 7. Zatem, na mocy twierdzenia CB, zbiory $[0, 1]$ i \mathbb{R} są również równoliczne. □

Wniosek 9. (a) Wszystkie przedziały liczbowe są równoliczne.

(b) Zbiór \mathbb{R} jest równoliczny z dowolnym przedziałem liczbowym.

Dowód. Korzystamy z inkluzji $]0, 1[\subseteq [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ i $]0, 1[\subseteq [0, 1] \subseteq \mathbb{R}$ oraz z twierdzenia CB. Otrzymujemy, że przedziały $[0, 1]$, $]0, 1[$, $[0, 1]$ i $]0, 1[$ są równoliczne pomiędzy sobą oraz ze zbiorem \mathbb{R} . □

Skoro — jak pokazano we wniosku 8 — zbiory $[0, 1]$, $]0, 1[$ i \mathbb{R} są równoliczne, więc korzystając z definicji liczby potaskończony \mathfrak{c} mamy:

$$\operatorname{Card}(\mathbb{R}) = \mathfrak{c} = \operatorname{Card}([0, 1]).$$

Zadanie 8. Bez korzystania z twierdzenia Cantora-Bernsteina wykazać, że zachodzą wszystkie fakty udowodnione w tym punkcie.

(a) Przedziały $[0, 1]$, $]0, 1[$, $[0, 1]$ i $]0, 1[$ są równoliczne.

(b) Wszystkie przedziały liczbowe są równoliczne.

(c) Zbiór \mathbb{R} jest równoliczny z dowolnym przedziałem liczbowym.

⁵³ Dowód tego twierdzenia można np. znaleźć w książkach: H. Rasiowa, *Wstęp do matematyki współczesnej*, Warszawa 1968; oraz K. Kuratowski, *Wstęp do teorii mnogości i topologii*, Warszawa 1955.

Z reguły twierdzenie Cantora-Bernsteina podawane jest w innej, równoważnej, formie dotyczącej antysymetryczności relacji mniejsze-równe pomiędzy liczbami kardynalnymi: *jeżeli $n \leq m$ i $m \leq n$, to $n = m$.*

Postać twierdzenia Cantora-Bernsteina dotycząca zbiorów jest dogodna w zastosowaniach tego twierdzenia.

Rozwiązanie. (a) Dowód tego punktu bez użycia twierdzenia Cantora-Bernsteina będzie analogiczny do dowodu faktu 8 ze str. 21, który mówi, że zbiory ciągów $C^{0,1}$ i $C_\star^{0,1}$ są równoliczne. Jak już pisaliśmy, dowody tego typu faktów są dość skomplikowane, gdyż mamy do czynienia ze zbiorami nieprzeliczalnymi, więc nie da się ponumerować ich elementów. Jeśli dwa nieprzeliczone zbiory różnią się tylko skończoną ilością elementów, to «w tym mniejszym» wybieramy pewien podzbiór przeliczalny. Do tego przeliczalnego podzbioru dodajemy tę skończoną ilość elementów. Dokonujemy «przenumerowania» («przesunięcia») elementów zbioru przeliczalnego, uzyskując nowy zbiór przeliczalny.

Bierzemy przeliczalny zbiór $C = \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\}$. Jest on podzbiorem zbioru $]0, 1[$. Do tego przeliczalnego podzbioru dodajemy liczby 0 i 1 tworząc drugi przeliczalny zbiór $B = C \cup \{0, 1\} = \{0, 1, \frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\}$.

Stosujemy zadanie 1 ze str. 14 do zbiorów B , C i $A =]0, 1[\setminus C$. Oczywiście, zbiory A i C są rozłączne. Ponadto, zbiory A i B są rozłączne, gdyż liczby 0 i 1 nie należą do $]0, 1[$. Na mocy zadania 1: zbiór $A \cup B$ jest równoliczny ze zbiorem $A \cup C$.

Mamy $A \cup B = (]0, 1[\setminus C) \cup B = (]0, 1[\setminus C) \cup C \cup \{0, 1\} =]0, 1[\cup \{0, 1\} = [0, 1]$ oraz $A \cup C = ([0, 1] \setminus C) \cup C =]0, 1[$. Zatem zbiory $[0, 1]$ i $]0, 1[$ są równoliczne.

Możemy również nie korzystać z zadania 1 ze str. 14, lecz — opierając się na ogólnym wzorze przedstawionym w tym zadaniu — podać konkretną funkcję $F: [0, 1] \rightarrow]0, 1[$, która jest różnowartościowa i na przedział $]0, 1[$, czyli pokazuje równoliczność przedziałów $[0, 1]$ i $]0, 1[$.

$$F(x) = \begin{cases} \frac{1}{2} & \text{gdy } x = 0 \\ \frac{1}{3} & \text{gdy } x = 1 \\ \frac{1}{n+2} & \text{gdy } x \in \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\} \text{ i } x = \frac{1}{n}, \text{ dla jakiegoś } n \geq 2 \\ x & \text{gdy } x \in]0, 1[\setminus \{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\} \end{cases}$$

Zatem każdej liczbie z $[0, 1]$ przyporządkowano jakąś (lecz dokładnie jedną) liczbę z $]0, 1[$. W obrębie wybranego zbioru przeliczalnego $\{\frac{1}{2}, \frac{1}{3}, \frac{1}{4}, \frac{1}{5}, \dots\}$ dokonaliśmy «przesunięcia» ułamków o dwie pozycje, «robiąc w ten sposób miejsce» dla liczb 0 i 1. Pozostałe liczby z przedziału $]0, 1[$ «pozostają na swoich miejscach».

Analogicznie pokazujemy, że przedział $[0, 1[$ (odp. $]0, 1]$) jest równoliczny z przedziałem $]0, 1[$. Po prostu, dodajemy tylko jedną liczbę 0 (odp. 1), a nie jak poprzednio dwie 0 i 1.

Stosując przechodność pojęcia *równoliczności* otrzymujemy, że odcinki $[0, 1]$, $[0, 1[$, $]0, 1]$ i $]0, 1[$ są równoliczne.

(b) Na podstawie punktu (a) i lematu 4.

(c) Na podstawie punktu (b) i faktu 13.

Ani w dowodzie lematu 4, ani w dowodzie faktu 13 nie stosowaliśmy twierdzenia Cantora-Bernsteina. □

Równoliczność zbioru ciągów $C^{0,1}$ z przedziałem $]0, 1[$. Równość: $\mathfrak{c} = 2^{\aleph_0}$

Rozwiązanie zadania 8 pokazuje, że fakty udowodnione w poprzednim punkcie dadzą się też dowieść bez korzystania z twierdzenia Cantora-Bernsteina. Jest to jednak twierdzenie bardzo przydatne. Z reguły dowodząc w konkretnym przypadku równoliczności zbiorów nieprzeliczalnych i tak musielibyśmy dowodzić szczególnego przypadku tego twierdzenia. Tak właśnie jest gdy chcemy udowodnić, że

Fakt 14. Zbiór ciągów $C^{0,1}$ jest równoliczny z przedziałem otwartym $]0, 1[$.

Dowód. Na zbiorze $C^{0,1}$ określamy funkcję przyjmującą wartości w zbiorze \mathbb{R} wszystkich liczb rzeczywistych. Dla dowolnego nieskończonego ciągu zero-jedynkowego a_1, a_2, a_3, \dots przyporządkowujemy liczbę

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n},$$

jeśli $a_n = 0$ dla nieskończenie wielu n . Jeśli zaś $a_n = 0$ dla skończenie wielu n (w tym dla żadnego), to ciągowi przyporządkowujemy liczbę

$$1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{a_n}{2^n}.$$

Wiadomo, że powyższa funkcja różnym ciągom przyporządkowuje różne liczby rzeczywiste. Zatem zbiór ciągów $C^{0,1}$ jest równoliczny ze zbiorem wszystkich liczb rzeczywistych, które otrzymamy w wyniku działania tej funkcji. Oznaczmy ten zbiór przez ' B ' (jest to obraz zbioru $C^{0,1}$ wyznaczony przez podaną funkcję). Ponadto, dowodzi się, że $]0, 1[\subseteq B$. Mamy więc

$$]0, 1[\subseteq B \subseteq \mathbb{R}.$$

Stąd, skoro zbiory $]0, 1[$ i \mathbb{R} są równoliczne, więc stosując twierdzenie Cantora-Bernsteina, mamy: zbiory $]0, 1[$ i B są równoliczne. Jednakże zbiór B jest równoliczny z $C^{0,1}$. Zatem również zbiory $]0, 1[$ i $C^{0,1}$ są równoliczne. \square

Wniosek 10. $c = 2^{\aleph_0}$.

Dowód. Równość otrzymujemy z faktu 14 oraz z tego, że $\text{Card}(]0, 1[) = c$ i $\text{Card}(C^{0,1}) = 2^{\aleph_0}$. \square

W dowodzie faktu 14 skorzystaliśmy z dwóch faktów z teorii liczb (albo analizy matematycznej). Dlatego dalej podamy jeszcze raz jego dowód w sposób bardziej elementarny (co nie znaczy, że będzie to łatwiejszy dowód faktu 14).

Na mocy wniosku 10 oraz tego, że $\aleph_0 < 2^{\aleph_0}$ mamy:

$$\aleph_0 < c.$$

Hipoteza continuum

Cantor sądził, że w zbiorze \mathbb{R} wszystkich liczb rzeczywistych są tylko dwa rodzaje nieskończoności: przeliczalność i kontinuum. Dokładniej, Cantor przyjął hipotezę, że każdy nieskończony podzbiór zbioru \mathbb{R} jest równoliczny albo ze zbiorem \mathbb{N} , albo ze zbiorem \mathbb{R} . Innymi słowy:

Hipoteza continuum (pierwsze sformułowanie). *Każdy podzbiór zbioru \mathbb{R} jest albo przeliczalny (w tym skończony), albo kontinuum.*

Zauważmy, że zbiór, który miałby przeczyć hipotezie *continuum* musiałby mieć skomplikowaną budowę. Nie mógłby zawierać np. żadnego przedziału. Istotnie, dla dowolnego przedziału liczbowego P , jeśli $P \subseteq A \subseteq \mathbb{R}$, to zbiory A i \mathbb{R} są równoliczne, na mocy wniosku 9 i twierdzenia Cantora-Bernsteina.

Mamy również inne, równoważne, sformułowanie tej hipotezy:

Hipoteza continuum (drugie sformułowanie). *Pomiędzy liczbami \aleph_0 i c nie ma żadnej innej liczby kardynalnej.*

Dowód równoważności obu sformułowań. Z pierwszego sformułowania wynika drugie. Istotnie, założmy że nie zachodzi drugie sformułowanie hipotezy *continuum*. Wówczas pomiędzy liczbami \aleph_0 i c jest jakaś inna liczba kardynalna n , czyli taka, że $\aleph_0 < n < c$. A to by znaczyło, że istnieją jakieś trzy zbiory X , Y i Z takie, że $\text{Card}(X) = n$, $\text{Card}(Z) = c$, $Y \subseteq Z$ oraz zbiory X i Y są równoliczne. Na mocy przyjętej zasady, zbiory \mathbb{R} i Z są równoliczne. A to znaczy, że istnieje funkcja $F: Z \rightarrow \mathbb{R}$, która jest różnowartościowa i na zbiór \mathbb{R} . Bierzemy zbiór wartości funkcji F na podzbiórze Y , czyli zbiór $F[Y] = \{F(y) : y \in Y\}$. Jest to oczywiście podzbiór zbioru \mathbb{R} . Zbiory Y i $F[Y]$ są równoliczne, gdyż funkcja F różnowartościowo przekształca zbiór Y na zbiór $F[Y]$. Zatem $\text{Card}(F[Y]) = n$. Zatem zbiór $F[Y]$ jest podzbiorem zbioru \mathbb{R} , który nie jest ani przeliczalny, ani kontinuum. Zatem nie zachodzi pierwsze sformułowanie hipotezy *continuum*.

Z drugiego sformułowania hipotezy *continuum* wynika pierwsze. Istotnie, załóżmy że nie zachodzi pierwsze sformułowanie hipotezy *continuum*. Wówczas istnieje jakiś nieskończony podzbiór zbioru \mathbb{R} , który nie jest równoliczny ani ze zbiorem \mathbb{N} , ani ze zbiorem \mathbb{R} . Zatem liczba kardynalna tego zbioru jest większa od \aleph_0 i mniejsza od c . Zatem nie zachodzi drugie sformułowanie hipotezy *continuum*. \square

W roku 1940 K. Gödel udowodnił, że hipoteza ta jest niesprzeczna z aksjomatami teorii zbiorów. Zatem może być prawdziwa łącznie z wszystkimi aksjomatami. A stąd mamy, że z aksjomatów teorii zbiorów, nie da się wyprowadzić zaprzeczenia hipotezy *continuum*. W roku 1963 P.J. Cohen udowodnił, że z aksjomatów teorii zbiorów, nie da się wyprowadzić samej hipotezy *continuum*. Zatem hipoteza ta jest niezależna od aksjomatów teorii zbiorów.

Uwaga 6. Hipoteza *continuum* związana jest z odkrytą przez Cantora liczbą kardynalną \aleph_1 .

(a) O liczbie \aleph_1 dowodzi się, że:⁵⁴

$\aleph_0 < \aleph_1$ oraz pomiędzy liczbami \aleph_0 i \aleph_1 nie ma żadnej innej liczby kardynalnej.

Zatem drugie sformułowanie hipotezy *continuum* głosi to samo, co równość: $\aleph_1 = c (= 2^{\aleph_0})$.

(b) Liczba \aleph_1 jest liczbą kardynalną pewnego zbioru Z_1 .⁵⁵ Dowodzi się, że zbiór Z_1 nie jest przeliczalny. Możemy mu zatem przyporządkować jakąś liczbę pozaskończoną różną od \aleph_0 . Oznaczamy tę nową liczbę przez ' \aleph_1 ', tzn. przyjmujemy, że $\text{Card}(Z_1) = \aleph_1$. \square

⁵⁴ Zob. np. H. Rasiowa, *Wstęp do matematyki współczesnej*, fakty 9.1–9.3, s. 168–169.

⁵⁵ Zbiór Z_1 złożony jest z pewnych liczb porządkowych. Zob. np. *ibidem*, s. 168.