Materiały do spotkań KNL UMK 2010–2011

Rafał Gruszczyński

25 stycznia 2011

1 Równoważność materialna

Zanim przejdziemy do przeanalizowania zagadki rozpatrzmy problem znaczenia spójnika *wtedy i tylko wtedy, gdy*. Często zamiast ‘wtedy i tylko wtedy, gdy’ pisać będziemy w skrócie ‘wtw’.

Zgodnie z ekstensjonalnym (prawdziwościowym) znaczeniem *wtedy i tylko wtedy, gdy* dowolne zdanie postaci:

$$p \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } q$$

znaczy tyle, co:

$$(p \text{ oraz } q) \text{ lub } (\neg p \text{ oraz } \neg q)\,.$$

Innymi słowy, równoważność materialna jest prawdziwa, gdy jej zdania składowe są oba prawdziwe lub oba fałszywe. Zatem zaprzeczenie równoważności materialnej:

$$\text{nie jest tak, że } p \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } q\,,$$

znaczy

$$(p \text{ oraz } \neg q) \text{ lub } (\neg p \text{ oraz } q)\,,$$

czyli jedno ze zdań jest fałszywe, a drugie prawdziwe, przy czym nie ma znaczenia, które jest jakie. Korzystając z tego, że $\neg\neg p \equiv p$ widzimy, że powyższa alternatywa głosi dokładnie to samo (przekazuje tą samą informację logiczną), co poniższa:

$$(p \text{ oraz } \neg q) \text{ lub } (\neg p \text{ oraz } \neg\neg q)\,.$$

Tak więc mamy poniższą równoważność:

$$\neg(p \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } q) \equiv p \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } \neg q\,. \tag{1}$$

W analogiczny sposób możemy udowodnić, że:

$$\neg(p \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } q) \equiv \neg p \text{ wtedy i tylko wtedy, gdy } q\,.$$

2 Wracamy do rycerzy i łotrów

Twierdzenie 2.1. *Bez względu na to, przez kogo zostało wypowiedziane zdanie:*

jestem rycerzem wtw p

p musi być prawdziwe.

Dowód. Załóżmy, że zdanie wypowiedział rycerz. Wówczas jest ono prawdziwe, i w konsekwencji p musi być prawdziwe. Jeśli zdanie wypowiedział łotr, to jest ono fałszywe, zatem prawdziwe jest zdanie:

$$\neg(\text{jestem rycerzem wtw } p)\,.$$

Powyższe zdanie jest fałszywe tylko wtedy, gdy w świecie, który nas interesuje zajdą następujące sytuacje:

(i) łotr jest rycerzem i $\neg p$

(ii) łotr nie jest rycerzem i p.

(i) jest wykluczona, zatem zachodzi (ii) i p jest prawdziwe. □

Uwaga 2.2. Oczywiście w sytuacji (ii) zdanie:

jestem rycerzem wtw p

jest zdaniem fałszywym, więc może być wypowiedziane przez łotra a (może też być wypowiedziane przez każdego innego łotra, ale to nie ma tutaj znaczenia).

3 Zagadka Nelsona Goodmana

Jeżeli jesteśmy na wyspie rycerzy i łotrów i chcemy dowiedzieć się, czy jest na niej złoto, to wystarczy, że zadamy tubylcowi następujące pytanie:

czy jest tak, że jesteś rycerzem wtw na wyspie jest złoto.

Na powyższe pytanie mogą paść dwie odpowiedzi: *tak* lub *nie*. Pierwsza z nich jest równoważna ze stwierdzeniem przez tubylca:

jestem rycerzem wtw na wyspie jest złoto ,

a to — jak wiemy z twierdzenia 2.1 — wystarczy nam do stwierdzenia, że na wyspie w istocie jest złoto.

Załóżmy zatem, że usłyszeliśmy odpowiedź *nie*. Ta równoważna jest z wypowiedzią:

$$\neg(\text{jestem rycerzem wtw na wyspie jest złoto})\,.$$

Jeżeli odpowiadającym był rycerz, to mówił prawdę, więc zamieszkiwany przez niego świat musiał zrealizować się na jeden z dwóch następujących sposobów:

(i) odpowiadający jest rycerzem i na wyspie nie ma złota,

(ii) odpowiadający nie jest rycerzem i na wyspie jest złoto.

Zatem realizuje się pierwsza możliwość i na wyspie nie ma złota.

Załóżmy teraz, że na nasze pytanie odpowiedział łotr. Zatem nie mówił on prawdy, czyli prawdą jest, że: jest on rycerzem wtw na wyspie jest złoto.[1] Zatem w zamieszkiwanym przez łotra świecie realizuje się jedna z dwóch możliwości:

(i) łotr jest rycerzem i na wyspie jest złoto,

(ii) łotr nie jest rycerzem i na wyspie nie ma złota.

Pierwsza ewentualność jest oczywiście wykluczona, więc zachodzi druga i na wyspie nie ma złota.

Wtedy, gdy rozpatrujemy odpowiedź *nie*, możemy także uciec się do nieco innej strategii uzasadnienia tego, że na wyspie nie ma złota. Jeżeli tubylec odpowiada *nie* na nasze pytanie i tym samym twierdzi, że:

$$\neg(\text{jestem rycerzem wtw na wyspie jest złoto})\,,$$

to jego wypowiedź, na mocy (1), równoważna jest wypowiedzi następującej:

$$\text{jestem rycerzem wtw na wyspie nie ma złota.}$$

W tej sytuacji możemy więc zastosować twierdzenie 2.1 i wysnuć wniosek, że na wyspie nie ma złota.

Ćwiczenie 3.1. Zastanów się, pod jakim warunkiem (jakimi warunkami) zastosowanie strategii z zagadki Goodmana gwarantuje, że dowiemy się, czy na wyspie jest złoto.

[1] Zauważmy, że nie możemy zastosować tu twierdzenia 2.1, gdyż to stosuje się tylko i wyłącznie do sytuacji, gdy zostało wypowiedziane zdanie *jestem rycerzem wtw na wyspie jest złoto*. Tymczasem wypowiedź naszego rozmówcy równoważna jest stwierdzeniu *nie jest tak, że jestem rycerzem wtw na wyspie jest złoto*. Przywołane twierdzenie nie mówi nic o takiej sytuacji. Aby je zastosować musimy uciec się do (1), o czy mowa będzie za chwilę.